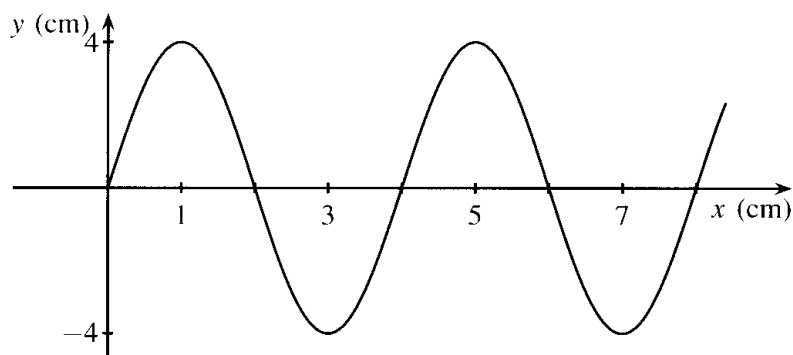


## Hullámmozgás feladatok és megoldások

1. Az alábbi ábrán látható transzverzális hullám frekvenciája 50 Hz.



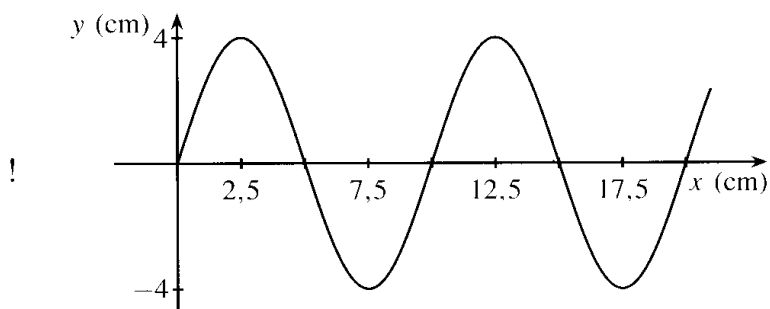
Mekkora

- a) a körfrekvencia;                      b) a periódusidő;                      c) az amplitúdó;  
d) a hullámhossz;                      e) a terjedési sebesség?

2. Az ábrán látható transzverzális hullám terjedési sebessége  $120 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ .

Mekkora

- a) a hullámhossz;  
b) a frekvencia?



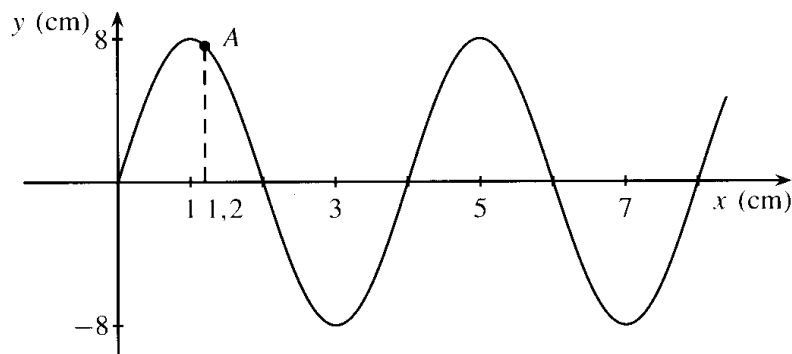
3. A gumikötélen  $25 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  sebességgel terjedő, 100 cm hullámhosszú hullámokat hoztak létre. Mekkora fáziskülönbséggel rezegnek a gumikötél azon pontjai, amelyek a rezgéskeltés helyétől
- a) 80 cm, illetve 110 cm távolságra vannak;  
b) 50 cm, illetve 150 cm távolságra vannak;  
c) 70 cm, illetve 120 cm távolságra vannak?

4. A hullámot a következő összefüggéssel adták meg:

$$y = 3,2 \text{ cm} \cdot \sin \left( 314 \frac{1}{\text{s}} t - 12,56 \frac{1}{\text{m}} x \right).$$

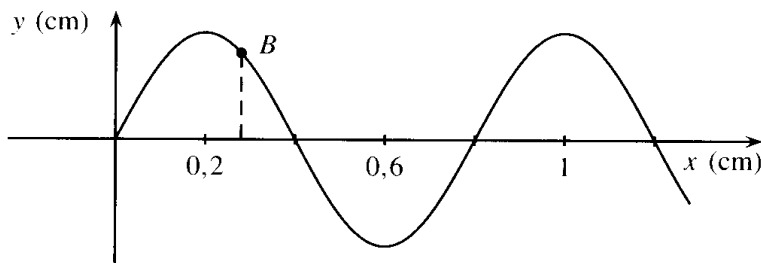
- a) Mekkora a frekvencia?  
b) Mekkora a hullám terjedési sebessége?  
c) Mekkora a kitérése az  $x = 0$  helyen lévő pontnak 0,002 s elteltével?

5. Az ábra egy kötéllhullám pillanatnyi állapotára vonatkozik. A kötéllhullám terjedési sebessége  $90 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ . Mekkora az ábrán jelölt A pont



- a) fázisa;                      b) kitérése;                      c) sebessége;                      d) gyorsulása?

6. Az ábra kötéllhullám pillanatnyi állapotára vonatkozik. A kötéll részecskéinek maximális sebessége  $10\pi \frac{\text{m}}{\text{s}}$ , maximális gyorsulása pedig  $2000\pi \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ .



- a) Mekkora a hullám frekvenciája?  
b) Mekkora a hullám terjedési sebessége?  
c) Mekkora az ábrán jelölt B pont fázisa, kitérése, sebessége és gyorsulása?

7. A pontszerű hullámforrásból 1,2 kHz frekvenciájú gömbhullámok indulnak ki. A hullámok terjedési sebessége  $30 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ . Mekkora a fáziskülönbség a hullám két olyan pontja között, amelyek 25 cm, illetve 55 cm távolságra vannak a hullámforrástól?

8. A halász szélmentes időben csónakjáról horgonyt dobott a vízbe. A tó partján álló megfigyelő azt tapasztalta, hogy a horgony becsapódásakor keletkezett hullám 27 s idő alatt ért el a partig, 12 s alatt 20 hullám érte a partot, és a hullámtarajok távolsága 1 m. Milyen messze volt a halász csónakja a parttól?

9. A hullámozó tengeren a hullámokkal szemben közlekedő hajónak másodpercenként hatszor csapódnak a hullámok. Ha a hajó a hullámterjedés irányába halad, akkor négyszer. Mekkora a hajó, illetve a hullámok sebessége, ha a szomszédos hullámtarajok távolsága 4 m?

10. A keskeny hullámnyaláb vízből üvegbe lép. A beesési szög  $18^\circ$ . A hullám terjedési sebessége vízben  $1500 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ , üvegben  $4200 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ .
- a) Mekkora szöggel tér el a hullámnyaláb az eredeti irányától?  
b) Mennyivel változik meg a hullámhossz, ha a frekvencia  $1,35 \text{ kHz}$ ?
11. Az új közegbe  $30^\circ$ -os beesési szöggel érkező hullám hullámhossza 12%-kal nagyobb lesz.
- a) Hogyan változik meg a hullám terjedési sebessége?  
b) Mekkora a törési szög?
12. A végein rögzített, 4 m hosszú gumikötélen olyan állóhullámokat gerjesztettek, melyek frekvenciája  $15 \text{ Hz}$ . A gumikötélen a rögzítési pontokat is figyelembe véve, hét csomópont alakult ki.
- a) Mekkora a hullámhossz?  
b) Mekkora a hullámok terjedési sebessége a gumikötélben?
13. Mekkora frekvenciájú állóhullámok alakulnak ki a 75 cm hosszú, mindkét végén rögzített gumikötélen, ha a hullámok terjedési sebessége  $5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ , és a kötélen három duzzadóhely alakult ki?
14. Teljesen sima vízfelületen két pontszerű rezgéskeltővel, egymástól nem nagy távolságban,  $12 \text{ Hz}$  frekvenciájú, azonos fázisállapotú és amplitúdójú hullámokat gerjesztettek. A hullámok terjedési sebessége  $1,2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ . Számítással igazolja, hogy milyen jelenség figyelhető meg a vízfelület azon helyén,
- a) amely az egyik rezgéskeltőtől 15 cm, a másiktól 25 cm távolságra van;  
b) amely az egyik rezgéskeltőtől 17 cm, a másiktól 22 cm távolságra van?
15. Teljesen sima vízfelületen két pontszerű rezgéskeltővel, egymástól nem nagy távolságban,  $6,25 \text{ Hz}$  frekvenciájú, azonos fázisállapotú és amplitúdójú hullámokat gerjesztettek. Mekkora terjedési sebesség mellett lehetséges, hogy az egyik rezgéskeltőtől 18 cm, a másiktól 26 cm távolságra lévő helyen kioltás jöjjön létre?



## Megoldások



1.

$$f = 50 \frac{1}{s}.$$

a) A frekvencia ismeretében a körfrekvencia:

$$\omega = 2\pi \cdot f = 2\pi \cdot 50 \frac{1}{s} = 314,15 \frac{1}{s}.$$

b) A frekvencia ismeretében a periódusidő:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{50 \frac{1}{s}} = 0,02 \text{ s}.$$

c) Az ábráról az amplitúdó leolvasható:

$$A = 4 \text{ cm}.$$

d) Az ábráról a hullámhossz is leolvasható:

$$\lambda = 4 \text{ cm}.$$

e) A terjedési sebesség:

$$c = \lambda \cdot f = 4 \text{ cm} \cdot 50 \frac{1}{s} = 200 \frac{\text{cm}}{s} = 2 \frac{\text{m}}{s}.$$

2.

$$c = 120 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$



a) Az ábráról a hullámhossz is leolvasható:

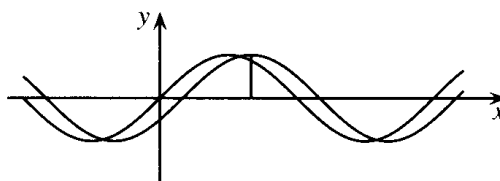
$$\lambda = 10 \text{ cm} = 0,1 \text{ m}.$$

b) A hullám terjedési sebességének és hullámhosszának ismeretében a hullám frekvenciája:

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{120 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{0,1 \text{ m}} = 1200 \frac{1}{\text{s}}.$$

c) A hullámfüggvény felírása nehéz. Szemléletesen a következőképpen járhatunk el. Egészítsük ki negatív irányban egy félhullámmal a hullámról készült pillanatfelvételt.

Mivel a hullám pozitív irányban terjed, felrajzolhatjuk  $\Delta t$  idővel később a hullámról készíthető pillanatfelvételt. Ebből azonnal látszik, hogy az origóbeli pont kitérése negatív lesz. Amennyiben az origóbeli pontot kívánjuk „referenciapontként” használni, akkor nyilvánvaló, hogy a hullám kitérés-idő függvénye



$$y(x, t) = -A \sin \omega \left( t - \frac{x}{c} \right),$$

illetve mivel  $-\sin \alpha = \sin(-\alpha)$

$$y(x, t) = A \sin \left( \frac{\omega}{c} x - \omega t \right).$$

Az adatokkal  $\omega = 2\pi f = 7536$ ,  $\frac{\omega}{c} = 62,8$ .

$$y(x, t) = 0,025 \text{ m} \sin \left( 63 \frac{1}{\text{m}} x - 7536 \frac{1}{\text{s}} \cdot t \right).$$

3.

$\lambda = 100 \text{ cm}$ ,  $x_1 = 80 \text{ cm}$ ,  $x_2 = 110 \text{ cm}$ ,  $x_3 = 50 \text{ cm}$ ,  $x_4 = 120 \text{ cm}$ ,  $x_5 = 70 \text{ cm}$ ,  $x_6 = 120 \text{ cm}$ .



a) A fáziskülönbség:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1) = \frac{2\pi}{100 \text{ cm}}(110 \text{ cm} - 80 \text{ cm}) = \frac{3\pi}{5}.$$

b) A fáziskülönbség:

$$\varphi_4 - \varphi_3 = \frac{2\pi}{\lambda}(x_4 - x_3) = \frac{2\pi}{100 \text{ cm}}(120 \text{ cm} - 50 \text{ cm}) = 2\pi.$$

A pontok azonos fázisban vannak.

c) A fáziskülönbség:

$$\varphi_6 - \varphi_5 = \frac{2\pi}{\lambda}(x_6 - x_5) = \frac{2\pi}{100 \text{ cm}}(120 \text{ cm} - 70 \text{ cm}) = \pi.$$

A pontok ellentétes fázisban vannak.

4.

$$y = A \sin \left( 2\pi \cdot f \cdot t - \frac{2\pi \cdot f}{c} x \right) = 3,2 \text{ cm} \cdot \sin \left( 314 \frac{1}{\text{s}} t - 12,56 \frac{1}{\text{m}} x \right).$$

A hullámot megadó összefüggésből kiolvasható:

$$A = 3,2 \text{ cm}, \quad 2\pi \cdot f = 314 \frac{1}{\text{s}}, \quad \frac{2\pi \cdot f}{c} = 12,56 \frac{1}{\text{m}}.$$

a) A frekvencia:

$$f = \frac{314}{2\pi} \frac{1}{\text{s}} = 50 \frac{1}{\text{s}}.$$

b) A hullám terjedési sebessége:

$$c = \frac{2\pi \cdot 50 \frac{1}{\text{s}}}{12,56 \frac{1}{\text{m}}} = 25 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

c) A kitérés a megadott helyen és időben:

$$y = A \sin(2\pi \cdot f \cdot t) = 3,2 \text{ cm} \cdot \sin \left( 314 \frac{1}{\text{s}} \cdot 0,002 \text{ s} \right) = 1,88 \text{ cm}.$$

5.

A megadott és az ábráról leolvasható adatok:

$$c = 90 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad A = 8 \text{ cm} = 0,08 \text{ m}, \quad \lambda = 4 \text{ m}, \quad x = 1,2 \text{ m}.$$

a) A hullám fázisa a kért helyen:

$$\varphi = 2\pi \cdot \frac{x}{\lambda} = 2\pi \frac{1,2 \text{ m}}{4 \text{ m}} = \frac{3\pi}{5}.$$

6.

A megadott és az ábráról leolvasható adatok:

$$\lambda = 0,8 \text{ m}, \quad x = 0,3 \text{ m}, \quad v_{\max} = 10\pi \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad a = 2000\pi \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

a) A kötélt rezgőmozgást végző pontjainak legnagyobb sebessége:

$$v_{\max} = A\omega = A \cdot 2\pi \cdot f.$$

A kötélt rezgőmozgást végző pontjainak legnagyobb gyorsulása:

$$a_{\max} = A\omega^2 = A(2\pi \cdot f)^2.$$

A kapott értékek hányadosa:

$$\frac{a_{\max}}{v_{\max}} = \frac{A(2\pi \cdot f)^2}{A \cdot 2\pi \cdot f} = 2\pi \cdot f.$$

A megadott értékek behelyettesítésével:

$$\frac{2000\pi \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{10\pi \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 2\pi \cdot f,$$

ahonnan a hullám frekvenciája:

$$f = \frac{100}{\pi} \frac{1}{\text{s}} = 31,83 \frac{1}{\text{s}}.$$

b) A hullám terjedési sebessége:

$$c = \lambda \cdot f = 0,8 \text{ cm} \cdot 31,83 \frac{1}{\text{s}} = 25,5 \frac{\text{cm}}{\text{s}}.$$

c) A B pont fázisa:

$$\varphi = 2\pi \cdot \frac{x}{\lambda} = 2\pi \cdot \frac{0,3 \text{ m}}{0,8 \text{ m}} = \frac{3\pi}{4}.$$

A rezgések amplitúdója:

$$A = \frac{v_{\max}}{\omega} = \frac{v_{\max}}{2\pi \cdot f} = \frac{10\pi \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2\pi \cdot \frac{100}{\pi} \frac{1}{\text{s}}} = \frac{\pi}{20} \text{ m} = 0,157 \text{ m}.$$

A B pont kitérése:

$$y = A \sin \omega t = A \sin \varphi = 0,157 \text{ m} \cdot \sin \frac{3\pi}{4} = 0,111 \text{ m} = 11,1 \text{ cm}.$$

A B pont sebessége:

$$v = A\omega \cos \varphi = 0,157 \text{ m} \cdot 2\pi \cdot \frac{100}{\pi} \frac{1}{\text{s}} \cdot \cos \frac{3\pi}{4} = -22,2 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

A B pont gyorsulása:

$$a = -A\omega^2 \sin \varphi = -y\omega^2 = -0,111 \text{ m} \cdot \left(2\pi \cdot \frac{100}{\pi} \frac{1}{\text{s}}\right)^2 = -4440 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

7.

$$f = 1,2 \text{ kHz} = 1200 \frac{1}{\text{s}}, \quad c = 30 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad x_1 = 25 \text{ cm}, \quad x_2 = 55 \text{ cm}.$$

A gömbhullámok hullámhossza:

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{30 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{1200 \frac{1}{\text{s}}} = 0,025 \text{ m} = 2,5 \text{ cm}.$$

A hullámok fázisaira fennáll:

$$\varphi_1 = 2\pi \cdot \frac{x_1}{\lambda} \quad \text{és} \quad \varphi_2 = 2\pi \cdot \frac{x_2}{\lambda}.$$

A gömbhullámok fáziskülönbsége:

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1) = \frac{2\pi}{2,5 \text{ cm}}(55 \text{ cm} - 25 \text{ cm}) = 24\pi.$$

8.

$$t = 27 \text{ s}, \quad t_1 = 12 \text{ s}, \quad n = 20, \quad \lambda = 1 \text{ m}.$$

A periódusidő:

$$T = \frac{t_1}{n} = \frac{12 \text{ s}}{20} = 0,6 \text{ s}.$$

A hullámok terjedési sebessége:

$$c = \frac{\lambda}{T} = \frac{1 \text{ m}}{0,6 \text{ s}} = \frac{5}{3} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

A csónak távolsága a parttól:

$$d = ct = \frac{5}{3} \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 27 \text{ s} = 45 \text{ m}.$$

9.

$$t = 1 \text{ s}, \quad n_1 = 6, \quad n_2 = 4, \quad \lambda = 4 \text{ m}.$$

Ha a hajó a hullámok terjedési sebességével ellentétes irányban halad:

$$(c + v)t = 6\lambda,$$

ahol  $v$  a hajó sebessége,  $c$  a hullámok terjedési sebessége.

Ha a hajó a hullámok terjedési sebességével megegyező irányban halad:

$$(c - v)t = 4\lambda.$$

A két egyenletet összeadva:

$$2c \cdot t = 10 \cdot \lambda,$$

ahonnan a hullámok terjedési sebessége:

$$c = \frac{10 \cdot \lambda}{2t} = 5 \cdot \frac{4 \text{ m}}{1 \text{ s}} = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

A hajó sebessége:

$$v = \frac{6\lambda}{t} - c = \frac{6 \cdot 4 \text{ m}}{1 \text{ s}} - 20 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

10.

$$\alpha = 18^\circ, \quad c_1 = 1500 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad c_2 = 4200 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad f = 1,35 \text{ kHz} = 1350 \frac{1}{\text{s}}.$$

a) A hullámok törésére vonatkozó összefüggésből az ismert adatok felhasználásával a törési szög meghatározható:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{c_1}{c_2},$$

ahonnan:

$$\sin \beta = \frac{c_2}{c_1} \cdot \sin \alpha = \frac{4200 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{1500 \frac{\text{m}}{\text{s}}} \cdot \sin 18^\circ,$$

$$\beta = 59,9^\circ.$$

Az eredeti iránytól való eltérülés szöge:

$$\beta - \alpha = 59,9^\circ - 18^\circ = 41,9^\circ.$$

b) A hullámhossz megváltozása:

$$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = \frac{c_2}{f} - \frac{c_1}{f} = \frac{c_2 - c_1}{f} = \frac{4200 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 1500 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{1350 \frac{1}{\text{s}}} = 2 \text{ m}.$$

11.

$$\alpha = 30^\circ, \quad \lambda_2 = 1,12\lambda_1.$$

a) A hullámok törésére vonatkozó törvényből:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{\lambda_1 \cdot f}{\lambda_2 \cdot f} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\lambda_1}{1,12\lambda_1} = \frac{1}{1,12},$$

ahonnan a sebességekre adódik:

$$c_2 = 1,12c_1.$$

A terjedési sebesség is 12%-kal nő.

b) Az előző összefüggés alapján:

$$\sin \beta = 1,12 \cdot \sin \alpha = 1,12 \cdot \sin 30^\circ = 1,12 \cdot 0,5 = 0,56,$$

ahonnan:

$$\beta = 34^\circ.$$

12.

$$l = 4 \text{ m}, \quad f = 15 \frac{1}{\text{s}}, \quad n = 7.$$

a) A gumikötélen a feltétel szerint hat darab félhullám alakult ki:

$$l = 6 \frac{\lambda}{2},$$

ahonnan a hullámhossz:

$$\lambda = \frac{2l}{6} = \frac{2 \cdot 4 \text{ m}}{6} = \frac{4}{3} \text{ m} \approx 1,33 \text{ m}.$$

b) A hullám terjedési sebessége:

$$c = \lambda \cdot f = \frac{4}{3} \text{ m} \cdot 15 \frac{1}{\text{s}} = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

13.

$$l = 75 \text{ cm} = 0,75 \text{ m}, \quad c = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad n = 3.$$

A gumikötélen a feltétel szerint három darab félhullám alakul ki:

$$l = 3 \frac{\lambda}{2},$$

ahonnan a hullámhossz:

$$\lambda = \frac{2l}{3} = \frac{2 \cdot 0,75 \text{ m}}{3} = 0,5 \text{ m}.$$

Az állóhullámok frekvenciája:

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{5 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{0,5 \text{ m}} = 10 \frac{1}{\text{s}}.$$

14.

$$f = 12 \frac{1}{\text{s}}, \quad c = 1,2 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad x_1 = 15 \text{ cm}, \quad x_2 = 25 \text{ cm}, \quad x_3 = 17 \text{ cm}, \quad x_4 = 22 \text{ cm}.$$

A hullámhossz:

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{1,2 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{12 \frac{1}{\text{s}}} = 0,1 \text{ m} = 10 \text{ cm}.$$

Mindegyik esetben az interferencia jelensége figyelhető meg.  
útkülönbségre:

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 25 \text{ cm} - 15 \text{ cm} = 10 \text{ cm} = \lambda.$$

A hullámok azonos fázisban találkoznak, maximális az erősítés.

b) Az útkülönbségre:

$$\Delta x = x_4 - x_3 = 22 \text{ cm} - 17 \text{ cm} = 5 \text{ cm} = \frac{\lambda}{2}.$$

A hullámok ellentétes fázisban találkoznak, és kioltják egymást.

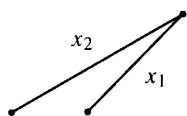


15.

$$f = 6,25 \frac{1}{s}, \quad x_1 = 18 \text{ cm}, \quad x_2 = 26 \text{ cm}.$$



Az útkülönbségre kioltás esetén fennáll:



$$\Delta x = x_2 - x_1 = 26 \text{ cm} - 18 \text{ cm} = 8 \text{ cm} = \frac{\lambda}{2},$$

$$\Delta x = x_2 - x_1 = (2k + 1) \frac{\lambda}{2},$$

$$8 \text{ cm} = \frac{\lambda}{2} \quad \lambda = 16 \text{ cm},$$

$$8 \text{ cm} = 3 \frac{\lambda}{2} \quad \lambda = \frac{16}{3} \text{ cm},$$

ahonnan a hullámhossz:

$$\lambda = 16 \text{ cm}.$$

A terjedési sebesség:

$$c = \lambda \cdot f = 0,16 \text{ m} \cdot 6,25 \frac{1}{s} = 1 \frac{\text{m}}{s}, \quad \frac{1}{3} \frac{\text{m}}{s}.$$