

Matematika I.

- ⇒ **Mátrixok, mátrixműveletek, determináns**
- ⇒ **Lineáris terek**
- ⇒ **Lineáris egyenletrendszerek**

Definíció: mátrix

Legyen m és n pozitív egész szám. Az

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

táblázatot **$m \times n$ típusú mártixnak** nevezzük, és azt mondjuk, hogy A -nak m sora és n oszlopa van.

a_{ij} az A mátrix i -edik sorának j -edik eleme

Jelölések

Azt, hogy az A mátrix az a_{ij} elemekből áll ($i=1,\dots,m$, $j=1,\dots,n$) így jelöljük:

$$A = (a_{ij})_{m \times n}$$

Az $m \times n$ típusú mátrixok halmazának jelölése:

$$M_{m \times n}$$

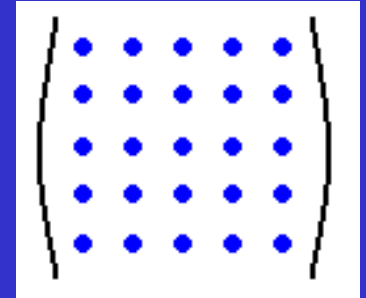
Az $m=n$ esetben speciálisan használjuk a rövidebb

$$M_n (=M_{n \times n})$$

jelölést is.

Elnevezések

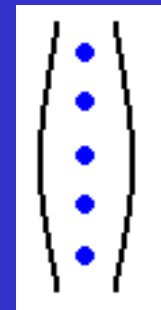
Az $n \times n$ típusú mátrixok neve:
 n -edrendű kvadratikus (vagy négyzetes) mátrix



Az $1 \times n$ típusú mátrixokat szokás
sorvektornak, vagy sormátrixnak nevezni



Az $n \times 1$ típusú mátrixokat szokás
oszlopvektornak, vagy oszlopmátrixnak nevezni.



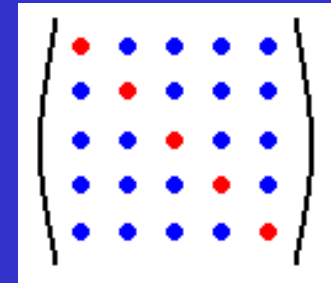
Definíciók

Nullmátrix: minden eleme 0

Fődiagonális (főátló):

az (a_{ij}) n -edrendű kvadratikus mátrix

fődiagonálisát az $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ elemek alkotják



n -edrendű egység mátrix: az az n -edrendű kvadratikus mátrix, melyben a fődiagonális minden eleme 1, a többi elem 0.

Jelölése: E_n

Pl. a harmadrendű egység mátrix:

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Definíció: mátrixok egyenlősége

Az $(a_{ij}) \in M_{m \times n}$ és a $(b_{ij}) \in M_{m \times n}$ mátrixok egyenlők, ha

$$a_{ij} = b_{ij}, \quad i=1, \dots, m, j=1, \dots, n$$

Műveletek mátrixokkal

Definíció: összeadás

Az $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}$ és a $B = (b_{ij}) \in M_{m \times n}$ mátrixok **összege**
 $A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \in M_{m \times n}$

Példa

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Megjegyzés

Csak azonos típusú mátrixok adhatók össze.

Az összeadás tulajdonságai

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$$

$$\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbf{M}_{m \ n}$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$$

$$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbf{M}_{m \ n}$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{O} = \mathbf{A}$$

$$\mathbf{A} \in \mathbf{M}_{m \ n}$$

ahol $\mathbf{O}$ az $m \times n$ típusú nullmátrixot jelöli.

(A nullmátrix az összeadás egységeleme.)

Minden mátrixnak létezik **additív inverze**, azaz: minden $\mathbf{A} \in \mathbf{M}_{m \ n}$ mátrixhoz létezik olyan $\mathbf{B} \in \mathbf{M}_{m \ n}$, melyre

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{O}$$

Nyilvánvaló, hogy ha $\mathbf{A} = (a_{ij})$, akkor az additív inverze:
 $\mathbf{B} = (-a_{ij})$, $i=1, \dots, m$, $j=1, \dots, n$.

Definíció: szorzás számmal

$A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}$, $\lambda \in \mathbf{R}$. Az A mátrix **λ -szorosa**:

$$\lambda \cdot A = (\lambda \cdot a_{ij}) \in M_{m \times n}$$

Példa

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 12 & 21 \\ 0 & 15 \end{pmatrix}$$

A számmal való szorzás tulajdonságai

$$(\lambda \cdot \mu) \cdot A = \lambda \cdot (\mu \cdot A)$$

$$\lambda, \mu \in \mathbf{R}, A \in \mathbf{M}_{m \ n}$$

$$(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$$

$$\lambda, \mu \in \mathbf{R}, A \in \mathbf{M}_{m \ n}$$

$$\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$$

$$\lambda \in \mathbf{R}, A \in \mathbf{M}_{m \ n}$$

$$1 \cdot A = A$$

$$A \in \mathbf{M}_{m \ n}$$

Definíció: mátrixok szorzása

Az $A = (a_{ij}) \in M_{m \times k}$ és a $B = (b_{ij}) \in M_{k \times n}$ mátrixok szorzata az

$$A \bullet B = (c_{ij}) \in M_{m \times n}$$

mátrix, ahol

$$c_{ij} = \sum_{s=1}^k a_{is} \cdot b_{sj}$$

Megjegyzés

Egy $m \times k$ és egy $k \times n$ típusú mátrix szorzata egy $m \times n$ típusú mátrix.

Példa

	B
A	A · B

			2	0	4	-1
			0	5	1	2
			3	-2	0	-1
3	5	1	9	23	17	6
-3	0	4	6	-8	-12	-1

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 5 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 23 & 17 & 6 \\ 6 & -8 & -12 & -1 \end{pmatrix}$$

A szorzás tulajdonságai

$$\mathbf{A} \bullet (\mathbf{B} \bullet \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \bullet \mathbf{B}) \bullet \mathbf{C} \quad \mathbf{A} \in \mathbf{M}_{m \times k}, \mathbf{B} \in \mathbf{M}_{k \times n}, \mathbf{C} \in \mathbf{M}_{n \times s}$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \bullet \mathbf{C} = \mathbf{A} \bullet \mathbf{C} + \mathbf{B} \bullet \mathbf{C} \quad \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbf{M}_{m \times k}, \mathbf{C} \in \mathbf{M}_{k \times n}$$

$$\mathbf{A} \bullet (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \bullet \mathbf{B} + \mathbf{A} \bullet \mathbf{C} \quad \mathbf{A} \in \mathbf{M}_{m \times k}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbf{M}_{k \times n}$$

Ha $\mathbf{A} \in \mathbf{M}_n$ kvadratikus mátrix, akkor

$$\mathbf{A} \bullet \mathbf{E}_n = \mathbf{E}_n \bullet \mathbf{A} = \mathbf{A}$$

vagyis $\mathbf{E}_n$ a szorzás egységeleme az n -edrendű kvadratikus mátrixok halmazán.

Általában $\mathbf{A} \bullet \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \bullet \mathbf{A}$

Definíció: transzponálás

Az $A=(a_{ij}) \in M_{m \times n}$ mátrix transzponáltja az a $B=(b_{ij}) \in M_{n \times m}$ mátrix, melyre

$$b_{ij} = a_{ji}, \quad i=1, \dots, n, j=1, \dots, m$$

Jelölés: $B = A^T$

Megjegyzés

Egy $m \times n$ típusú mátrix transzponáltja egy $n \times m$ típusú mátrix.

Példa

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

Definíció: **szimmetrikus** mátrix

Az $A \in M_n$ mátrix **szimmetrikus**, ha $A = A^T$

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & -4 \\ 7 & 5 & 10 \\ -4 & 10 & 11 \end{pmatrix}$$

Definíció: **háromszög** mátrix

Egy kvadratikus mátrix **felső háromszög mátrix**, ha a főátló alatt minden elem 0.

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & -4 \\ 0 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$$

Egy kvadratikus mátrix **alsó háromszög mátrix**, ha a főátló felett minden elem 0.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & -3 & 0 \\ 8 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

Definíció: invertálható mátrix

Az $A \in M_n$ kvadratus mátrixot invertálhatónak nevezzük, ha létezik olyan $B \in M_n$ mátrix, melyre

$$A \bullet B = B \bullet A = E_n$$

A B mátrixot az A (multiplikatív) **inverzének** nevezzük.

Jelölés: $B = A^{-1}$

Példa

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Determináns

Minden kvadratikus mátrixhoz hozzárendelünk egy valós számot, a **mátrix determinánsát**.

Másodrendű mátrixok determinánsa

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Példa

$$\det \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = 6 \cdot 7 - 4 \cdot 3 = 30$$

Harmadrendű mátrixok determinánása

Sarrus szabály

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & -2 \end{pmatrix} = +2 \cdot 3 \cdot (-2) + 4 \cdot 1 \cdot 5 + (-1) \cdot 0 \cdot 1 -$$
$$-5 \cdot 3 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 \cdot 2 - (-2) \cdot 0 \cdot 4 = -12 + 20 + 0 + 15 - 2 - 0 = 21$$

Harmadrendű mátrixok determinánása

Sor / oszlop szerinti kifejtés

Példa: első sor szerinti kifejtés

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & -2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} - 4 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} =$$

+	-	+
-	+	-
+	-	+

$$= + 2 \cdot (-7) - 4 \cdot (-5) + (-1) \cdot (-15) = 21$$

Harmadrendű mátrixok determinánása

Sor / oszlop szerinti kifejtés

Példa: második oszlop szerinti kifejtés

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & -2 \end{pmatrix} = -4 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} + 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} - 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

+	-	+
-	+	-
+	-	+

$$= -4 \cdot (-5) + 3 \cdot 1 - 1 \cdot 2 = 21$$

Magasabb rendű mátrixok determinánsa sor / oszlop szerinti kifejtéssel

Az előbbiekben a harmadrendű mátrixok determinánsának kiszámítására bemutatott eljárás a „sor / oszlop szerinti kifejtés” módszer alkalmazása a harmadrendű esetre.

Az általános módszer tetszőleges rendű kvadratikus mátrixok determinánsának kiszámítására alkalmazható: általában **egy n -edrendű mátrix determinánsának kiszámítása visszavezethető n darab $(n-1)$ -edrendű mátrix determinánsának kiszámítására.**

Definíció: elemhez tartozó aldetermináns

Az $A = (a_{ij}) \in M_n$ n -edrendű kvadratikus mátrix a_{ij} eleméhez tartozó D_{ij} aldeterminánsán az i -edik sor és a j -edik oszlop „törlésével” előálló $(n-1)$ -edrendű mátrix determinánsának $(-1)^{i+j}$ – szeresét értjük.

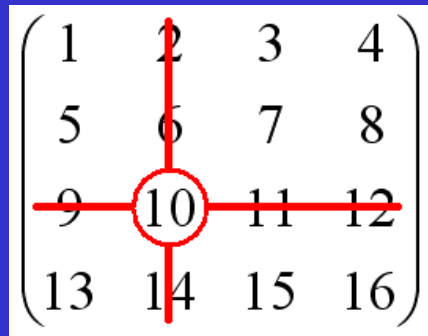
Megjegyzés

A fenti definícióban szereplő, az a_{ij} elemhez tartozó, előjelként is felfogható $(-1)^{i+j}$ érték $(+1, \text{ vagy } -1)$, azonos a harmadrendű determináns kiszámításánál használt táblázatban lévő előjellel:

+	-	+
-	+	-
+	-	+

Példa: elemhez tartozó aldetermináns

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$$


$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$$

$$D_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \\ 13 & 15 & 16 \end{pmatrix}$$

Sor / oszlop szerinti kifejtés

Egy kvadratikus mátrix determinánása kiszámítható úgy, hogy egy sor vagy oszlop elemeit rendre megszorozzuk az elemekhez tartozó aldeterminánsokkal és a kapott szorzatokat összeadjuk.

Példa: első oszlop szerinti kifejtés

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \det \begin{pmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 10 & 11 & 12 \\ 14 & 15 & 16 \end{pmatrix} + 5 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 10 & 11 & 12 \\ 14 & 15 & 16 \end{pmatrix} +$$

$$+ 9 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 \\ 14 & 15 & 16 \end{pmatrix} + 13 \cdot (-1)^{4+1} \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

Megjegyzés

A determináns kiszámítására további, a fentieknél hatékonyabb módszerek állnak rendelkezésre, például:

- **háromszög alakra hozás**
- **sor / oszlop szerinti kifejtés kombinálása a determináns értékét nem változtató átalakításokkal**

Ezeket a módszereket később mutatjuk be.

A determináns néhány tulajdonsága

Tétel

Ha az A márixban egy sor egyenlő a többi sor egy lineáris kombinációjával, akkor **$\det A = 0$**

Speciálisan:

- Ha A -ban van csupa 0-ból álló sor, akkor $\det A = 0$
- Ha A -ban két sor megegyezik, akkor $\det A = 0$

Tétel

A determináns értéke nem változik, ha egy sorhoz hozzáadjuk a többi sor valamely lineáris kombinációját.

Speciálisan: a determináns értéke nem változik, ha egy sorhoz hozzáadjuk egy másik sor számszorosát.

Példa

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 7 & -4 \\ 2 & -5 & 3 \\ 4 & 1 & 7 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -1 & 7 & -4 \\ 2 + 2 \cdot (-1) & -5 + 2 \cdot 7 & 3 + 2 \cdot (-4) \\ 4 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Tétel

Mátrix determinánsának értéke (-1) -szeresére változik, ha a mátrix két sorát felcseréljük.

Példa

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 7 & -4 \\ 2 & -5 & 3 \\ 4 & 1 & 7 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} -1 & 7 & -4 \\ 4 & 1 & 7 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

Tétel

$$\det A = \det A^T$$

Következmény

A determináns előbb felsorolt tulajdonságai érvényben maradnak, ha sor helyett oszlopot mondunk.

Tétel

Háromszög mátrix determinánsa egyenlő a főátlóban lévő elemek szorzatával.

$$\det \begin{pmatrix} 3 & 7 & -4 \\ 0 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} = 3 \cdot 5 \cdot 11 = 165$$

Megjegyzés: háromszög alakra hozás

Oszlopok (sorok) számszorosaival más oszlopokhoz (sorokhoz) való hozzáadásával, valamint oszlopok (sorok) cseréjével bármely kvadratikusan mátrix háromszög alakra „hozható”.

Példa

1. lépés: (2. sor) $- 3 \times$ (1. sor) és (3. sor) $+ 4 \times$ (1. sor)

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 10 \\ -4 & 0 & 11 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & 13 \\ 0 & 12 & 7 \end{pmatrix} =$$

2. lépés: (3. sor) $+ 3 \times$ (2. sor)

$$= \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & 13 \\ 0 & 0 & 46 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-4) \cdot 46 = -184$$

Megjegyzés

A háromszög alakra hozás végigvitele helyett célszerűbb lehet a következő: ha egy oszlopban (sorban) már csak egy elem különbözik 0-tól, akkor fejtsük ki a determinánst ezen oszlop (sor) szerint. Ezzel az eljárással lépésenként eggyel csökkenthető a kiszámítandó determináns rendje:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 10 \\ -4 & 0 & 11 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & 13 \\ 0 & 12 & 7 \end{pmatrix} =$$

$$= 1 \cdot \det \begin{pmatrix} -4 & 13 \\ 12 & 7 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-4 \cdot 7 - 12 \cdot 13) = -184$$

Tétel: szorzási szabály a determinánsokra

Ha A és B azonos rendű kvadratikus mátrixok, akkor

$$\mathbf{det (A \bullet B) = det A \cdot det B}$$

Tétel: a determináns és az invertálhatóság összefüggése

Egy A kvadratikus mátrix invertálható $\Leftrightarrow \mathbf{det A \neq 0}$

Mátrix invertálása determinánsokkal

Tétel

Kvadratikus mátrix inverzét megkapjuk, ha képezzük a mátrix elemeihez tartozó aldeterminánsok mátrixának transzponáltját, és azt megszorozzuk a mátrix determinánsának reciprokával:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} D_{11} & D_{21} & D_{31} \\ D_{12} & D_{22} & D_{32} \\ D_{13} & D_{23} & D_{33} \end{pmatrix}$$

Emlékeztető: Az $A = (a_{ij}) \in M_n$ n -edrendű kvadratikus mátrix a_{ij} eleméhez tartozó D_{ij} aldeterminánsán az i -edik sor és a j -edik oszlop „törlésével” előálló $(n-1)$ -edrendű mátrix determinánsának $(-1)^{i+j}$ – szeresét értjük.

Példa

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

$$D_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$D_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -1$$

$$D_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$D_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$D_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$D_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -1$$

$$D_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = -3$$

$$D_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$D_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 1$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Definíció: lineáris tér

Egy X halmazt **lineáris térnek** (vagy vektortérnek) nevezzünk, ha adott két művelet

összeadás

$$+ : X \times X \rightarrow X$$

számmal való szorzás

$$\bullet : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$$

melyek rendelkeznek a következő tulajdonságokkal:

Ha $x, y \in X$ és $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, akkor

$$\bullet \ x + y = y + x$$

(kommutativitás)

$$\bullet \ x + (y + z) = (x + y) + z$$

(asszociativitás)

$$\bullet \ x + \underline{0} = x$$

(additív egység létezése)

$$\bullet \ x + (-x) = \underline{0}$$

(additív inverz létezése)

$$\bullet \ 1 \cdot x = x$$

$$\bullet \ \lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda \cdot \mu) \cdot x$$

$$\bullet \ \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$$

(disztributivitás)

Példák lineáris térre

- szabadvektorok
- helyzetvektorok
- $m \times n$ típusú mátrixok
- $\mathbb{R}^n$
- $f:[0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ függvények
- $(a_n): \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ valós számsorozatok

Egy lineáris tér elemeit **vektor**oknak nevezzük.

A vektor elnevezést itt általánosabb értelemben használjuk, mint a geometriai vagy fizikai értelemben vett vektoroknál.

Definíció: vektorrendszer

Az X lineáris tér elemeinek egy $\{ a_1, a_2, \dots, a_n \}$ halmazát **vektorrendszernek** nevezzük.

Definíció: lineáris kombináció

Az X lineáris térben az $a_1, a_2, \dots, a_n \in X$ vektorok $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ számokkal képzett **lineáris kombinációja**:

$$x_1 \cdot a_1 + x_2 \cdot a_2 + \dots + x_n \cdot a_n \in X$$

Definíció: lineáris kifejezhetőség

A $b \in X$ vektor **lineárisan kifejezhető** az $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ vektorrendszer elemeivel, ha léteznek olyan $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ együtthatók, hogy

$$b = x_1 \cdot a_1 + x_2 \cdot a_2 + \dots + x_n \cdot a_n$$

Megjegyzés

A lineáris kifejezhetőség problémája $\mathbb{R}^n$ -ben lineáris egyenletrendszerre vezet.

Egy példa $\mathbb{R}^3$ -ban:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Kifejezhető-e a $\mathbf{b}$ vektor az $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ vektorrendszer elemeinek lineáris kombinációjaként?

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A kérdés átfogalmazása: Vannak-e olyan $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ számok, hogy

$$\mathbf{b} = \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{a}_1 + \mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{a}_2 + \mathbf{x}_3 \cdot \mathbf{a}_3,$$

azaz:

$$\mathbf{x}_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mathbf{x}_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathbf{x}_3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rrcr} \mathbf{x}_1 & -\mathbf{x}_2 & +2\mathbf{x}_3 & = -1 \\ 2\mathbf{x}_1 & +\mathbf{x}_2 & -\mathbf{x}_3 & = 9 \\ -\mathbf{x}_1 & +2\mathbf{x}_2 & +\mathbf{x}_3 & = 0 \end{array}$$

Definíció: lineáris függetlenség

Az $\{ a_1, a_2, \dots, a_n \} \subset X$ vektorrendszer **lineárisan független**, ha
a

$$x_1 \cdot a_1 + x_2 \cdot a_2 + \dots + x_n \cdot a_n = 0$$

$(x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R})$ egyenlőségből következik, hogy

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0.$$

Ha egy vektorrendszer nem független, akkor (lineárisan) **függő**nek nevezzük.

Tétel: a lineáris függetlenség ekvivalens fogalma

Az $\{ a_1, a_2, \dots, a_n \} \subset X$ vektorrendszer (lineárisan) független $\Leftrightarrow$ a vektorrendszer egyik vektora sem áll elő a vektorrendszer többi vektorának lineáris kombinációjaként.

Megjegyzések

1. Független vektorrendszer bármely részrendszere független.
2. Független vektorrendszer nem tartalmazhatja a nullvektort.

Megjegyzés

A függetlenség vizsgálata $\mathbb{R}^n$ -ben homogén lineáris egyenletrendszerre vezet.

Egy példa $\mathbb{R}^3$ -ban:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

vektorrendszer független-e?

Az $\{ a_1, a_2, a_3 \}$ vektorrendszer pontosan akkor független lineárisan, ha az

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

egyenlőségből következik, hogy $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, vagyis az

$$\begin{array}{rrcr} x_1 & -x_2 & +2x_3 & = 0 \\ 3x_1 & +x_2 & +2x_3 & = 0 \\ 2x_1 & & +4x_3 & = 0 \end{array}$$

egyenletrendszernek csak az $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, ún. triviális megoldása van.

Definíció: **vektorrendszer lineáris burka**

Az X lineáris tér $A=\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ vektorrendszer **lineáris burka** az A -beli vektorokból képezhető összes lineáris kombináció halmaza.

Jelölés: $[A] = [a_1, a_2, \dots, a_n]$

Definíció: **bázis**

Az X lineáris tér B vektorrendszerét **bázisnak** nevezzük, ha

- B független
- $[B] = X$

Definíció: véges dimenziós lineáris tér

Egy lineáris tér véges dimenziós, ha van véges elemszámú bázisa.

Tétel

Egy véges dimenziós lineáris tér bármely bázisának elemszáma egyenlő.

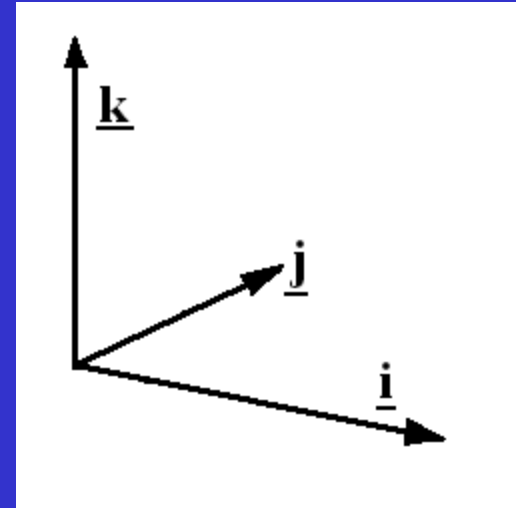
Definíció: dimenzió

Egy bázisban lévő vektorok számát a lineáris tér **dimenziójának** nevezzük.

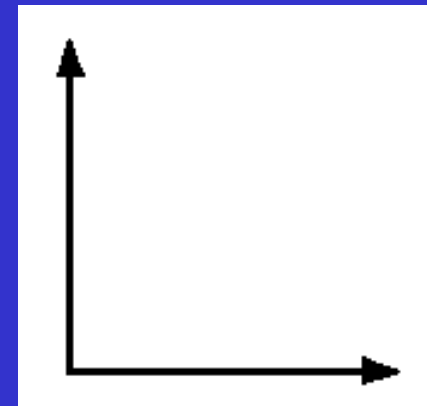
A nullvektorból álló egyelemű $\{0\}$ lineáris tér dimenziója 0.

Példa

A (geometriai) térbeli helyzetvektorok lineáris tere háromdimenziós.



A (geometriai) síkbeli helyzetvektorok lineáris tere kétdimenziós.



Az $\mathbf{R}^n$ lineáris tér **n dimenziós**, mivel az

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

vektorokból álló (n elemű) vektorrendszer bázis.

Neve: **természetes bázis**

Speciálisan: az $\mathbf{R}^3$ lineáris térbeli **természetes bázis**:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Indoklás:

Az $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ vektorrendszer független, továbbá $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] = \mathbf{R}^3$ ugyanis:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tétel

Egy n dimenziós lineáris térben bármely n elemű független vektorrendszer bázis, és bármely legalább $n+1$ elemű vektorrendszer függő.

Tétel

Ha B az X lineáris tér egy bázisa, akkor bármely X -beli b vektor egyértelműen előáll a B -beli vektorok lineáris kombinációjaként.

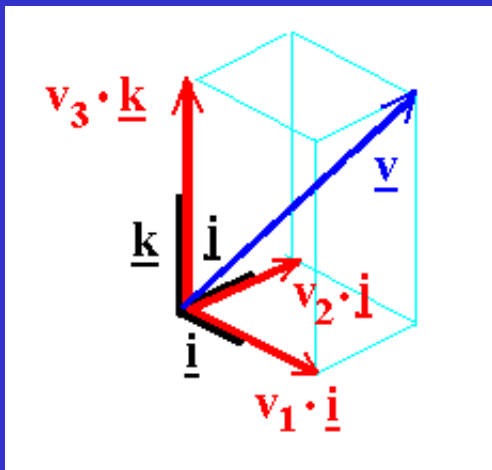
Ezt a b vektor adott **bázisbeli előállításának** nevezzük.

Definíció: koordináták

Ha $B=\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ az X lineáris tér egy bázisa, akkor egy b vektor

$$x_1 \cdot a_1 + x_2 \cdot a_2 + \dots + x_n \cdot a_n$$

bázis előállításában szereplő $x_1, x_2, \dots, x_n$ együtthatókat a b vektor B bázisbeli **koordinátáinak** nevezzük.



$$\underline{v} = v_1 \cdot \underline{i} + v_2 \cdot \underline{j} + v_3 \cdot \underline{k}$$

Példa

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$$

koordinátái a

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

bázisban:

3, 2, -1 ugyanis:

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Míg a

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

természetes bázisban: **-1, 9, 0**, ugyanis

$$-1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 9 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Megjegyzés

Egy vektor koordinátái függenek a bázistól.

Definíció: vektorrendszer rangja

Egy X lineáris tér egy A vektorrendszerének rangján az A maximális elemszámú független részrendszerének elemszámát értjük. Jele: $\text{rg}A$

Példa

Tekintsük $\mathbb{R}^3$ -t az

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

természetes bázissal.

Ekkor az

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

vektorrendszer rangja 2, hiszen

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

-ből nem következik, hogy $x_1=x_2=x_3=0$.

(például $x_1=-2$; $x_2=1$; $x_3=1$)

viszont
$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{ll} x_1 = 0 & x_1 = 0 \\ 2x_1 = 0 & \Rightarrow \\ 4x_1 + 2x_3 = 0 & x_3 = 0 \end{array}$$

Tétel

Adott vektorrendszer rangjával azonos rangú vektorrendszert kapunk,

ha a vektorrendszeren az alábbi átalakításokat végezzük:

- **egy vektor szorzása nem nulla számmal,**
- **egy vektorhoz hozzáadni másik vektor számszorosát,**
- **elhagyni a rendszerből olyan vektort, mely előáll a megmaradóak lineáris kombinációjaként. (speciálisan: a zérusvektor elhagyható; továbbá ha a rendszerben egy vektor számszorosa egy másiknak, elhagyható.)**

Definíció: mátrix rangján a sorvektoraiból képzett vektorrendszer rangját értjük.

Tétel Egy n -edrendű kvadratikus A mátrix rangja n

$$\Leftrightarrow \det A \neq 0$$

Következmény

$\mathbb{R}^n$ egy n elemű vektorrendszere akkor és csak akkor bázisa $\mathbb{R}^n$ -nek, ha a vektorrendszer elemeiből képzett kvadratikus mátrix determinánása nem 0.

Példa

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

bázis $\mathbb{R}^3$ -ban, mert

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 14 \neq 0$$

Példa

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Lineárisan függő vektorrendszer $\mathbb{R}^3$ -ban, mivel

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot (1 \cdot 4 - 2 \cdot 2) = 0$$

Az adott három vektor egy síkban reprezentálható.

Tétel

Mátrix rangja egyenlő az oszlopvektorrendszerének rangjával.

Definíció: trapéz alakú mátrix

Egy $A=(a_{ij}) \in M_{k \times n}$ mátrixot trapéz alakúnak nevezünk, ha

$k \leq n$, $a_{ii} \neq 0$ minden i -re és $a_{ij} = 0$ minden $i > j$ esetén.

Példa

$$\begin{pmatrix} 12 & 31 & -1 & 4 & 7 \\ 0 & 23 & 4 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 27 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 78 & 17 & 2 \\ 0 & 34 & 21 \\ 0 & 0 & 67 \end{pmatrix}$$

Példa: mátrix rangjának meghatározása

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 2 & 8 & 11 & 51 \\ 3 & 6 & 15 & 60 \end{pmatrix}$$

Adott vektorrendszer rangjával azonos rangú vektorrendszert kapunk,

ha a vektorrendszeren az alábbi átalakításokat végezzük:

- egy vektor szorzása nem nulla számmal,
- egy vektorhoz hozzáadni másik vektor számszorosát,
- elhagyni a rendszerből olyan vektort, mely előáll a megmaradóak lineáris kombinációjaként. (speciálisan: a zérusvektor elhagyható; továbbá ha a rendszerben egy vektor számszorosa egy másiknak, elhagyható.)

$$\begin{aligned} \text{rg} A &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 2 & 8 & 11 & 51 \\ 3 & 6 & 15 & 60 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & 4 & 5 & 23 \\ 0 & 0 & 6 & 18 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & 1 & 5/4 & 23/4 \\ 0 & 0 & 6 & 18 \end{pmatrix} = \\ &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 10/4 \\ 0 & 1 & 5/4 & 23/4 \\ 0 & 0 & 6 & 18 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 10/4 \\ 0 & 1 & 5/4 & 23/4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 3 \end{aligned}$$

Lineáris egyenletrendszerek

Az

$$\begin{array}{lcl} (1) & a_{11} \cdot x_1 & + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ (2) & a_{21} \cdot x_1 & + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n = b_2 \\ & \vdots & \\ (m) & a_{m1} \cdot x_1 & + a_{m2} \cdot x_2 + \dots + a_{mn} \cdot x_n = b_m \end{array}$$

egyenletekből álló rendszert – ahol $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$, $i=1, \dots, m$, $j=1, \dots, n$ adottak, és keresendő az összes olyan $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ szám n -es, melyre az egyenlőségek teljesülnek – **n ismeretlenes, m egyenletből álló lineáris egyenletrendszernek** nevezzük.

Elnevezések

a_{ij} : az egyenletrendszer együtthatói

b_i : konstansok

x_i : ismeretlenek

Az egyenletrendszer
alapmátrixa:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Az egyenletrendszer
kibővített mátrixa:

$$(A|b) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Definíció: lineáris e.r. vektoros és mátrixos alakja

A kibővített mátrix oszlopvektorait jelölje:

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b},$$

az ismeretlenekből álló oszlopvektor legyen $\mathbf{x}$

Ezekkel a jelölésekkel az egyenletrendszer

vektoros alakja:

$$x_1 \cdot \mathbf{a}_1 + x_2 \cdot \mathbf{a}_2 + \dots + x_n \cdot \mathbf{a}_n = \mathbf{b}$$

mátrixos alakja:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Példa

$$\text{I. } x_1 - x_2 + 2x_3 = -1$$

$$\text{II. } 2x_1 + x_2 - x_3 = 9$$

$$\text{III. } -x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$$

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Ezekkel az egyenletrendszer vektoros illetve mátrixos alakja:

$$x_1 \cdot a_1 + x_2 \cdot a_2 + x_3 \cdot a_3 = b$$

$$A \cdot x = b$$

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A lineáris egyenletrendszereket a megoldások száma alapján az alábbiak szerint osztályozzuk:

- az egyenletrendszer **ellentmondásos**, ha nincs megoldása.

Ha az egyenletrendszernek van megoldása, akkor **határozott** vagy **határozatlan**:

- **határozott**, ha pontosan egy megoldása van
- **határozatlan**, ha több (végtelen sok) megoldása van

Példa

ellentmondásos

$$\text{I. } 2x_1 + 3x_2 = 5$$

$$\text{II. } 4x_1 + 6x_2 = 7$$

$$\text{I. } x_1 + x_2 + 2x_3 = 5$$

$$\text{II. } 3x_1 + 3x_2 + 6x_3 = -1$$

határozott

$$\text{I. } 2x_1 + 3x_2 = 12$$

$$\text{II. } 4x_1 - x_2 = 10$$

$$(x_1, x_2) = (3, 2)$$

határozatlan

$$\text{I. } x_1 + x_2 + 2x_3 = 5$$

$$\text{II. } x_1 - x_2 + 4x_3 = -1$$

$x_3 \in \mathbf{R}$ tetszőleges,

$$x_1 = 2 - 3 \cdot x_3, \quad x_2 = 3 + x_3$$

Például:

$$(x_1, x_2, x_3) = (-4, 5, 2)$$

$$\text{I. } x_1 + 3x_2 = 5$$

$$\text{II. } -2x_1 - 6x_2 = -10$$

$x_2 \in \mathbf{R}$ tetszőleges,

$$x_1 = 5 - 3x_2$$

Például:

$$(x_1, x_2) = (5, 0)$$

$$(x_1, x_2) = (-1, 2)$$

Definíció: homogén és inhomogén e.r.

$$\begin{array}{lcl} (1) & a_{11} \cdot x_1 & + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ (2) & a_{21} \cdot x_1 & + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n = b_2 \\ & & \vdots \\ (m) & a_{m1} \cdot x_1 & + a_{m2} \cdot x_2 + \dots + a_{mn} \cdot x_n = b_m \end{array}$$

Ha

$$b_1 = b_2 = \dots = b_n = 0,$$

akkor az egyenletrendszert **homogén** nevezzük, különben **inhomogén**.

Definíció: triviális megoldás

Világos, hogy a homogén e.r.-nek

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$$

megoldása. Ezt **triviális megoldásnak** nevezzük.

Megjegyzés

1. Ha $\{a_1, \dots, a_n\}$ lineárisan független, akkor az egyenletrendszer vagy ellentmondásos, vagy határozott.

2. Ha $m < n$, vagyis kevesebb egyenlet van, mint ismeretlen, akkor az $\{a_1, \dots, a_n\}$ vektorrendszer lineárisan függő. Ekkor Az egyenletrendszer vagy ellentmondásos vagy határozatlan.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{pmatrix}$$

Két szükséges és elegendő feltétel lineáris egyenletrendszer megoldásának létezésére

Tétel

Egy lineáris egyenletrendszernek pontosan akkor van megoldása, ha a b vektor lineárisan kifejezhető $a_1, a_2, \dots, a_n$ vektorrendszer elemeivel.

Tétel

Egy lineáris egyenletrendszernek pontosan akkor van megoldása, ha az e.r. alapmátrixának és a kibővített mátrixának rangja egyenlő, azaz $\text{rg}A = \text{rg}(A|b)$.

Megjegyzés

Ha $rgA \neq rg(A|b)$ akkor az egyenletrendszer ellentmondásos.

Tétel

Egy megoldható lineáris egyenletrendszer pontosan akkor határozott, ha az A alapmátrix rangja megegyezik az ismeretlenek számával.

Gauss-féle eliminációs eljárás

Definíció:

Két m ismeretlenes egyenletrendszert ekvivalensnek nevezünk, ha összes megoldásaik halmaza egybeesik.

Tétel

Az alábbi átalakítások a lineáris egyenletrendszert vele ekvivalens

Lineáris egyenletrendszerbe viszik át:

1. Egyenlet szorzása nem nulla számmal,
2. Egy egyenlethez hozzáadni egy másik egyenlet számszorosát,
3. Olyan egyenlet elhagyása, mely a megmaradóak lineáris kombinációja,
4. Egyenletek sorrendjének felcserélése,
5. Az ismeretlenek sorrendjének felcserélése együtthatóikkal együtt minden egyenletben.

**Ha az $Ax=b$ lineáris egyenletrendszer megoldható, akkor
 Az 1.-5. ekvivalens átalakítások véges sokszori alkalmazásával
 Alapmátrixa az alábbi trapéz alakúra hozható:**

$$\begin{array}{rcll}
 (1) & \alpha_{11} \cdot x_1 & + \alpha_{12} \cdot x_2 + & \dots & + \alpha_{1n} \cdot x_n & = & \beta_1 \\
 (2) & & \alpha_{22} \cdot x_2 + & \dots & + \alpha_{2n} \cdot x_n & = & \beta_2 \\
 & & \vdots & & & & \\
 (k) & & & \alpha_{kk} \cdot x_k + \dots & + \alpha_{kn} \cdot x_n & = & \beta_k
 \end{array}$$

ahol $k \leq n$, $\alpha_{ii} \neq 0$, $1 \leq i \leq j$.

továbbá az $x_{k+1}, \dots, x_n$ ismeretlenek tetszőlegesen rögzíthetők.

1. Mivel az $x_{k+1}, \dots, x_n$ ismeretlenek szabadon választhatók, Ezeket szabad ismeretleneknek nevezzük.
2. Ha $k=n$, akkor az egyenletrendszer határozott, ha $k < n$, akkor határozatlan.
3. A lineáris egyenletrendszer ekvivalens átalakításai az alaplátrixra nézve ranginvariáns átalakítások. Ezért, mivel a fenti egyenletrendszer rangja nyilván k , az eredeti mátrix rangja is k .
4. Ellentmondásos lineáris e.r. esetén az eliminációs módszer használata $0=\beta$ alakú egyenletre vezet, ahol az ismeretlenek mindegyikének együtthatója nulla, de a jobb oldalon álló konstans tag nem nulla.

Határozatlan e.r. megoldása

$$\begin{array}{rrrrr}
 x_1 & +2x_2 & +3x_3 & +2x_4 & & = & 22 \\
 3x_1 & +x_2 & +2x_3 & +4x_4 & & = & 37 \\
 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & & +4x_5 & = & 31 \\
 -x_1 & -2x_2 & -3x_3 & -2x_4 & & = & -22 \\
 4x_1 & -x_2 & +3x_3 & +8x_4 & -4x_5 & = & 43
 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}
 1 & 2 & 3 & 2 & 0 & 22 \\
 3 & 1 & 2 & 4 & 0 & 37 \\
 2 & 3 & 1 & 0 & 4 & 31 \\
 -1 & -2 & -3 & -2 & 0 & -22 \\
 4 & -1 & 3 & 8 & -4 & 43
 \end{array} \right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c}
 1 & 2 & 3 & 2 & 0 & 22 \\
 3 & 1 & 2 & 4 & 0 & 37 \\
 2 & 3 & 1 & 0 & 4 & 31 \\
 4 & -1 & 3 & 8 & -4 & 43
 \end{array} \right)$$

$$\left[\begin{array}{l}
 +(-3)S1 \\
 -2S1 \\
 -4S1
 \end{array} \right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c}
 1 & 2 & 3 & 2 & 0 & 22 \\
 0 & -5 & -7 & -2 & 0 & -29 \\
 0 & -1 & -5 & -4 & 4 & -13 \\
 0 & -9 & -9 & 0 & -4 & -45
 \end{array} \right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c}
 1 & 2 & 3 & 2 & 0 & 22 \\
 0 & 5 & 7 & 2 & 0 & 29 \\
 0 & 1 & 5 & 4 & -4 & 13 \\
 0 & 9 & 9 & 0 & 4 & 45
 \end{array} \right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c}
 1 & 2 & 3 & 2 & 0 & 22 \\
 0 & 1 & 5 & 4 & -4 & 13 \\
 0 & 5 & 7 & 2 & 0 & 29 \\
 0 & 9 & 9 & 0 & 4 & 45
 \end{array} \right)$$

$$\left[\begin{array}{l}
 -5S2 \\
 -9S2
 \end{array} \right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c}
 1 & 2 & 3 & 2 & 0 & 22 \\
 0 & 1 & 5 & 4 & -4 & 13 \\
 0 & 0 & -18 & -18 & 20 & -36 \\
 0 & 0 & -36 & -36 & 40 & -72
 \end{array} \right)$$

1. Egyenlet szorzása nem nulla számmal,
2. Egy egyenlethez hozzáadni egy másik egyenlet számszorosát,
3. Olyan egyenlet elhagyása, mely a megmaradóak lineáris kombinációja,
4. Egyenletek sorrendjének felcserélése,
5. Az ismeretlenek sorrendjének felcserélése együtthatóikkal együtt minden egyenletben.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 & 0 & 22 \\ 0 & 1 & 5 & 4 & -4 & 13 \\ 0 & 0 & -18 & -18 & 20 & -36 \\ 0 & 0 & -36 & -36 & 40 & -72 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 & 0 & 22 \\ 0 & 1 & 5 & 4 & -4 & 13 \\ 0 & 0 & -18 & -18 & 20 & -36 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 & 0 & 22 \\ 0 & 1 & 5 & 4 & -4 & 13 \\ 0 & 0 & 9 & 9 & -10 & 18 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 22 \quad (I.) \\ x_2 + 5x_3 + 4x_4 - 4x_5 &= 13 \quad (II.) \\ 9x_3 + 9x_4 - 10x_5 &= 18 \quad (III.) \end{aligned}$$

A megoldás előállítása:

Kötött változók: $x_1; x_2; x_3$

Szabad változók: $x_4; x_5$

$x_4; x_5 \in R$ a III. egyenletből

$$x_3 = 2 - x_4 + \frac{10}{9}x_5$$

$$\begin{array}{rclcl} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & +2x_4 & = 22 \text{ (I.)} \\ & x_2 & +5x_3 & +4x_4 & -4x_5 = 13 \text{ (II.)} \\ & & 9x_3 & +9x_4 & -10x_5 = 18 \text{ (III.)} \end{array}$$

$$x_3 = 2 - x_4 + \frac{10}{9} x_5$$

Ezt a II. egyenletben felhasználva

$$x_2 = 13 - 5\left(2 - x_4 + \frac{10}{9} x_5\right) - 4x_4 + 4x_5$$

azaz $x_2 = 3 + x_4 - \frac{14}{9} x_5$

Végül az I. egyenletből

$$x_1 = 22 - 2\left(3 + x_4 - \frac{14}{9} x_5\right) - 3\left(2 - x_4 + \frac{10}{9} x_5\right) - 2x_4$$

azaz $x_1 = 10 - x_4 - \frac{20}{9} x_5$

Például $x_4 = x_5 = 0; x_3 = 2; x_2 = 3; x_1 = 10$ egy megoldás.

Határozott e.r. megoldása

Oldja meg az $Ax=b$ lineáris egyenletrendszert:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 11 \\ 3 & 6 & 15 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 14 \\ 51 \\ 60 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 2 & 8 & 11 & 51 \\ 3 & 6 & 15 & 60 \end{array} \right) \left[\begin{array}{c} \\ -2S1 \\ -3S1 \end{array} \right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & 4 & 5 & 23 \\ 0 & 0 & 6 & 18 \end{array} \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14 \\ 4x_2 + 5x_3 = 23 \\ 6x_3 = 18 \end{array} \right\} \Rightarrow x_3 = 3; x_2 = \frac{23 - 5 \cdot 3}{4} = 2; x_1 = 14 - 2 \cdot 2 - 3 \cdot 3 = 1$$

Ellenőrzés:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 11 \\ 3 & 6 & 15 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \\ 2 \cdot 1 + 8 \cdot 2 + 11 \cdot 3 \\ 3 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 15 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 51 \\ 60 \end{pmatrix}$$

Példa ellentmondásos e.r.-re

Oldja meg az $Ax=b$ lineáris egyenletrendszert:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 11 \\ 3 & 10 & 14 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 14 \\ 53 \\ 60 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 2 & 8 & 11 & 53 \\ 3 & 10 & 14 & 60 \end{array} \right) \begin{bmatrix} -2S1 \\ -3S1 \end{bmatrix}$$

~

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & 4 & 5 & 25 \\ 0 & 4 & 5 & 18 \end{array} \right) \begin{bmatrix} -S2 \end{bmatrix}$$

~

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & 4 & 5 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{array} \right)$$

Az utolsó sor szerint

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = -7 \Rightarrow 0 = -7$$

Mátrix invertálása

Gauss-elimináció alkalmazásával

Korábban már definiáltuk a mátrix inverzének fogalmát:

Az $A^{-1} \in M_n$ mátrixot az $A \in M_n$ mátrix inverzének nevezzük, ha

$$\mathbf{A} \bullet \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}_n$$

Ha az A^{-1} mátrix oszlopvektorai:

$$d_1, d_2, \dots, d_n$$

akkor az $A \bullet A^{-1} = E_n$ egyenlet ekvivalens az alábbi n darab egyenletrendszerrel, melyekben az alapmátrixok megegyeznek, így az egyenletrendszerek csak a jobb oldalukban különböznek:

$$A \bullet d_1 = e_1, A \bullet d_2 = e_2, \dots, A \bullet d_n = e_n$$

Így az A^{-1} mátrix meghatározható a fenti egyenletek szimultán megoldásával.

Példa

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_{11} \\ d_{21} \\ d_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_{12} \\ d_{22} \\ d_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_{13} \\ d_{23} \\ d_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Példa

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 11 \\ 3 & 6 & 15 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 11 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 15 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{bmatrix} \\ -2S1 \\ -3S1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{bmatrix} \\ \cdot 1/4 S2 \\ \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5/4 & -1/2 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 & 1/6 \end{array} \right) \begin{bmatrix} -2S2 \\ \\ \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1/2 & 2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 5/4 & -1/2 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 & 1/6 \end{array} \right) \begin{bmatrix} -1/2 S3 \\ -5/4 S3 \\ \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 9/4 & -1/2 & -1/12 \\ 0 & 1 & 0 & 1/8 & 1/4 & -5/24 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 & 1/6 \end{array} \right)$$

ezért

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 9/4 & -1/2 & -1/12 \\ 1/8 & 1/4 & -5/24 \\ -1/2 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}$$

További módszerek határozott lineáris
egyenletrendszerek megoldására

Cramer szabály

Inverzmátrix módszer

Cramer szabály

Példa

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14$$

$$2x_1 + 8x_2 + 11x_3 = 51$$

$$3x_1 + 6x_2 + 15x_3 = 60$$

$$D = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 11 \\ 3 & 6 & 15 \end{pmatrix} = 24$$

$$D_1 = \det \begin{pmatrix} 14 & 2 & 3 \\ 51 & 8 & 11 \\ 60 & 6 & 15 \end{pmatrix} = 24$$

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} 1 & 14 & 3 \\ 2 & 51 & 11 \\ 3 & 60 & 15 \end{pmatrix} = 48$$

$$D_3 = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 14 \\ 2 & 8 & 51 \\ 3 & 6 & 60 \end{pmatrix} = 72$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{24}{24} = 1$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{48}{24} = 2$$

$$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{72}{24} = 3$$

Inverzmátrix módszer

Ha az $A \bullet x = b$ egyenletrendszer esetén az alapmátrix invertálható, azaz $\det(A) \neq 0$, akkor az egyenletrendszer egyetlen megoldása előáll a következő formában:

$$x = A^{-1} \bullet b$$

Példa

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 11 \\ 3 & 6 & 15 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 14 \\ 51 \\ 60 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 9/4 & -1/2 & -1/12 \\ 1/8 & 1/4 & -5/24 \\ -1/2 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/4 & -1/2 & -1/12 \\ 1/8 & 1/4 & -5/24 \\ -1/2 & 0 & 1/6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 14 \\ 51 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$