

# Lineáris egyenletrendszerek alkalmazása

A lineáris algebra tárgykörének egyik központi kérdése a lineáris egyenletrendszerek megoldása és a megoldás módszereinek tárgyalása. Lineáris egyenletrendszerekkel számos probléma megoldásakor találkozhatunk. A következőkben egy, a fizikában megjelenő alkalmazást ismertetünk. Az egyenáramú hálózatokra vonatkozó fogalmak bevezetése után ismertetjük Kirchhoff törvényeit, majd prezentáljuk az ezen törvények segítségével felírható lineáris egyenletrendszereket. Az itt megjelenő egyenletrendszerek mindig határozottak, így megoldási módszerként több lehetőség közül választhatunk (Gauss-elimináció, Cramer-szabály, bázistranszformáció, inverzmátrix-módszer). Jelen esetben a feladatok megoldására a Cramer-szabályt fogjuk alkalmazni.

## 1. feladatcsoport

**Számítások egyenáramú hálózatokban - Alapfogalmak és törvények**

Egyenáramú hálózat: Egyenáramú áramforrásokat és fogyasztókat elektromos vezetőkkel összekötve egyenáramú hálózatot kapunk.

Fogyasztó: Pl. izzó, fűtőszál, egyenáramú motor

Ohm törvénye: Egy fogyasztón mért feszültség egyenesen arányos a fogyasztón átfolyó áramerősségével.

$$U \sim I \quad U = R \cdot I \quad U = [V] \quad I = [A]$$

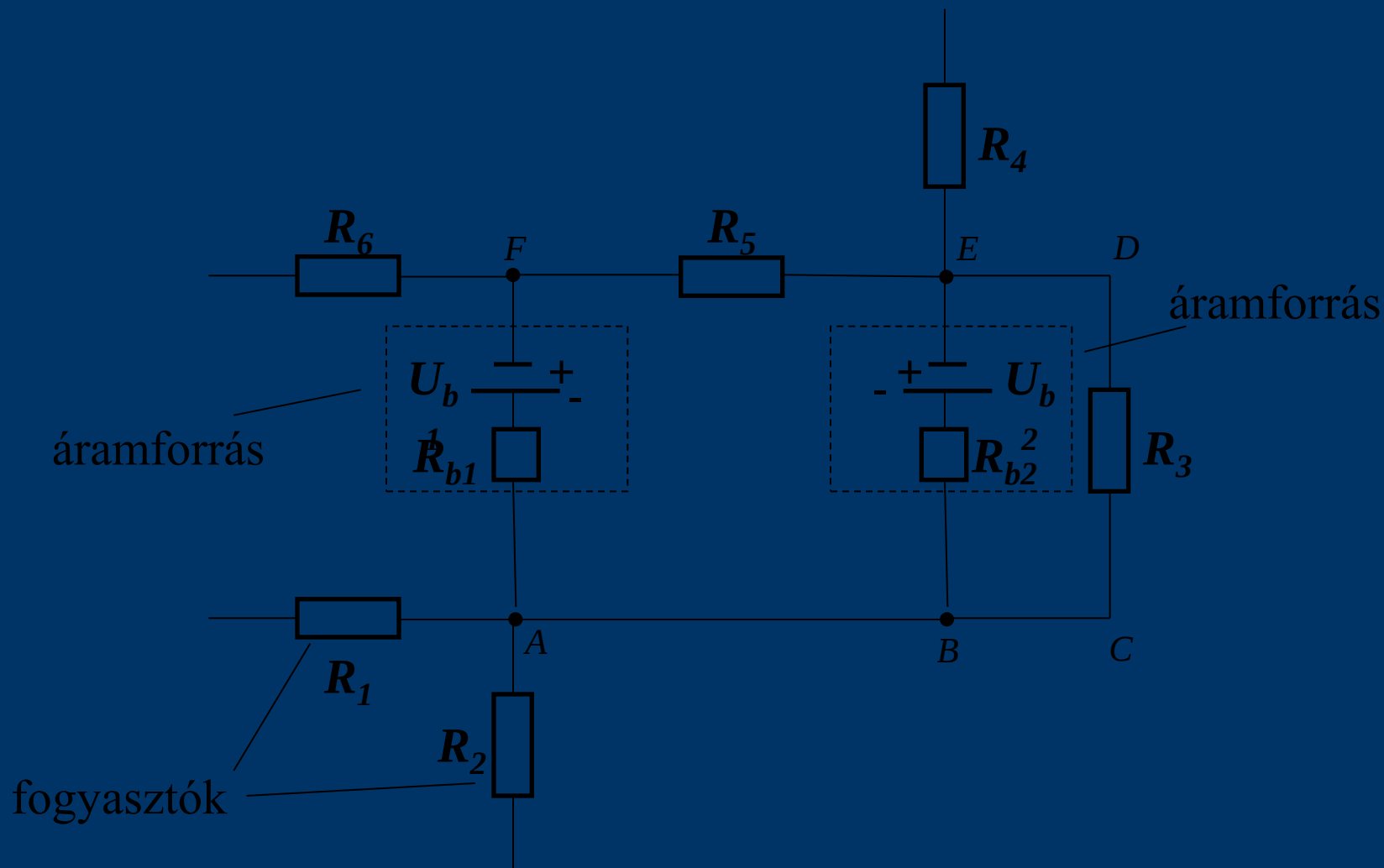
⇒

Ohmos ellenállás (R): Az R arányossági tényezőt a fogyasztó ohmos ellenállásának nevezzük.

Áramforrás: Pl. elem, akkumulátor

Terheletlen áramforrás: Nincs rákötve fogyasztó. A terheletlen áramforrás a két Kapocs között (A és F, B és E)

Tartósan állandó nagyságú feszültséget biztosít.



Belső feszültség ( $U_b$ ): A terheletlen áramforrás kapcsain mérhető feszültség.

Belső ellenállás: Az áramforrás Ohmos ellenállása.

Polaritás (+,-): Az áramforrás feszültségének előjelét határozza meg.

Egy áramforrás adott, ha ismert:

- Belső feszültségének nagysága
- Belső ellenállása
- Polaritása

Csomópont: A hálózatok olyan pontja, amelybe legalább három vezeték fut be:  
(A,B,E,F pontok)

Ág: Két csomópontot összekötő vezetékszakasz, amely a végpontjain kívül nem tartalmaz csomópontokat (B-C-D-E, A-B, E-F vezetékszakaszok)

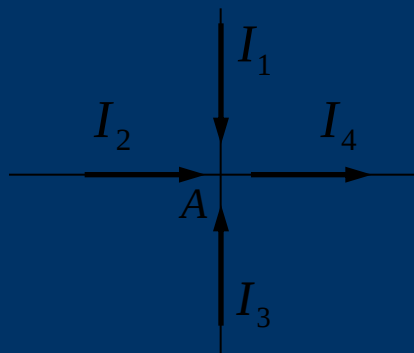
**Kirchhoff I. törvénye (csomóponti törvény)**

Egy csomópontba befolyó és onnan elfolyó áramok előjeles összege zérus:

$$\sum_i I_i = 0$$

Előjelszabály: A befolyó áramokat pozitívan, az elfolyókat negatívan előjelezzük.

A csomópontra:



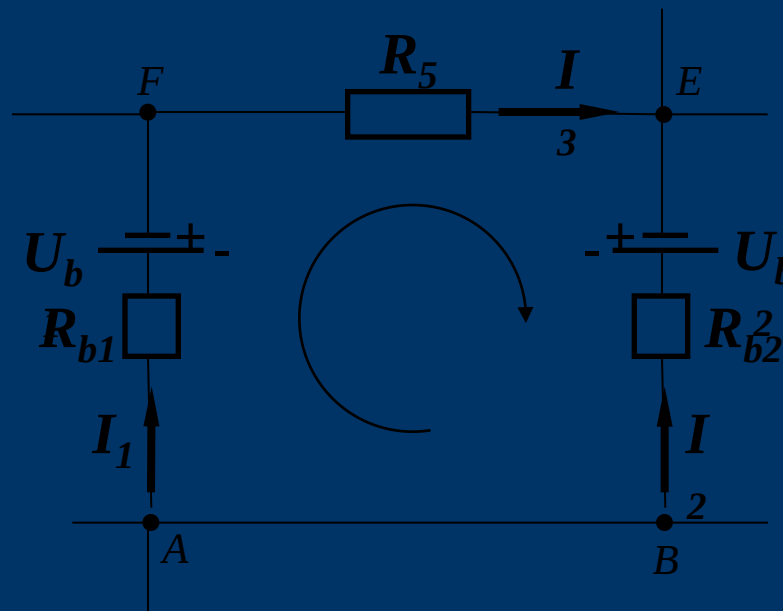
$$\sum_i I_i = I_1 + I_2 + I_3 - I_4 = 0$$

## Kirchhoff II. törvénye (huroktörvény)

Egy hurkon körbehaladva, és az áramforrásokon és fogyasztókon eső feszültségeket előjelesen összegezve zérust kapunk:

$$\sum_i U_i = 0$$

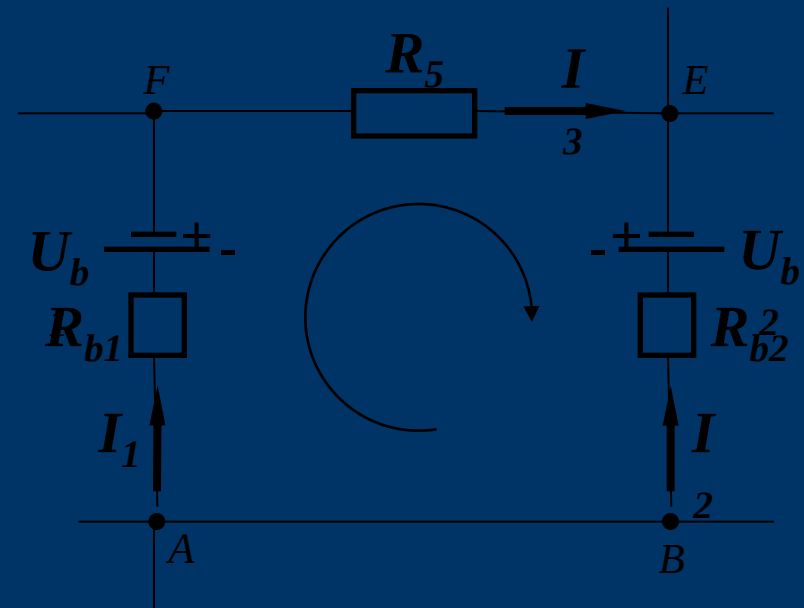
Előjelszabályok: Rögzítsünk a hurokban egy önkényes körüljárási irányt, valamint a hurokban található egyes ágakban egy önkényes áramirányt!



- **1. szabály:** Ha egy ágba az áramirány egyező a körüljárási iránnyal, akkor az ágba található fogyasztókon eső feszültség pozitív, egyébként negatív.
- **2. szabály:** Ha a körüljárási irányban körbehaladva először az az áramforrás pozitív sarkával találkozunk, akkor az áramforráson eső feszültség pozitív, egyébként negatív.

Az A-F-E-B-A hurokra Kirchhoff II. törvénye:

$$\sum_i U_i = -U_{b1} + R_{b1} \cdot I_1 + R_5 \cdot I_3 - R_{b2} \cdot I_2 + U_{b2} = 0$$



## Mintafeladat

Adatok:

$$U_{b1} = 20 \text{ [V]} \quad R_{b1} = 7 \text{ [\Omega]}$$

$$U_{b2} = 10 \text{ [V]} \quad R_{b2} = 6 \text{ [\Omega]}$$

$$U_{b3} = 5 \text{ [V]} \quad R_{b3} = 4 \text{ [\Omega]}$$

$$R_1 = 2 \text{ [\Omega]} \quad R_2 = 4 \text{ [\Omega]}$$

Megoldás:

Csomóponti törvény a B pontra: (I.)

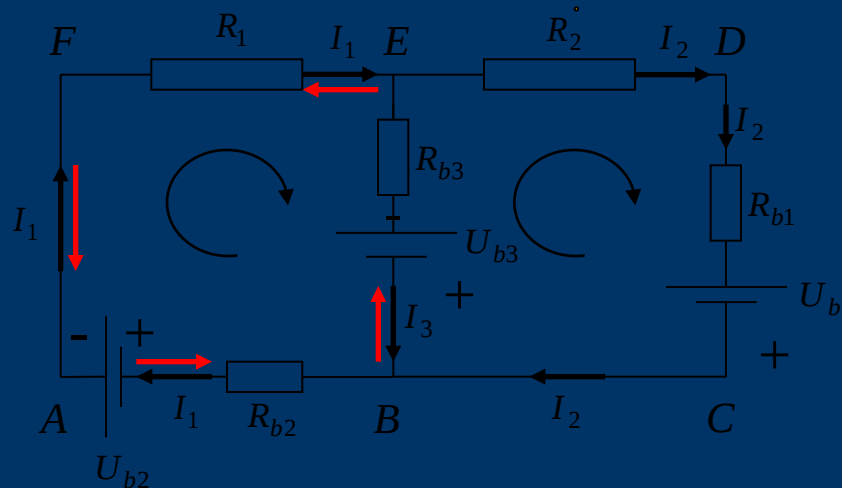
$$\sum_i I_i = -I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

Huroktörvény az A-F-E-B-A hurokra:

$$(II.) \quad \sum_i U_i = R_1 \cdot I_1 + R_{b3} \cdot I_3 - U_{b3} + R_{b2} \cdot I_1 + U_{b2} = 0$$

Huroktörvény a B-E-D-C-B hurokra:

$$(III.) \quad \sum_i U_i = U_{b3} - R_{b3} \cdot I_3 + R_2 \cdot I_2 + R_{b1} \cdot I_2 - U_{b1} = 0$$



$$(I.) \quad -1 \cdot I_1 + 1 \cdot I_2 + 1 \cdot I_3 = 0$$

$$(II.) \quad 2 \cdot I_1 + 4 \cdot I_3 - 5 + 6 \cdot I_1 + 10 = 0$$

$$(III.) \quad 5 - 4 \cdot I_3 + 4 \cdot I_2 + 7 \cdot I_2 - 20 = 0$$

Az egyenletrendszer mátrixa:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 4 & -5 \\ 0 & 11 & -4 & 15 \end{pmatrix}$$

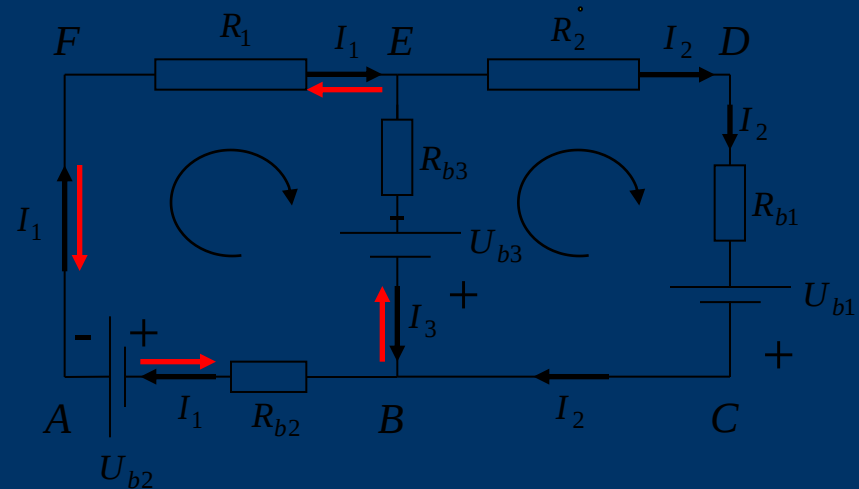
$$\det A = \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 8 & 0 & 4 \\ 0 & 11 & -4 \end{pmatrix} = 164 \quad \det A_1 = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -5 & 0 & 4 \\ 15 & 11 & -4 \end{pmatrix} = -15$$

$$\det A_2 = \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 8 & -5 & 4 \\ 0 & 15 & -4 \end{pmatrix} = 160 \quad \det A_3 = \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & -5 \\ 0 & 11 & 15 \end{pmatrix} = -175$$

$$I_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = -\frac{15}{164} \text{ [A]}$$

$$I_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{160}{164} \text{ [A]}$$

$$I_3 = \frac{\det A_3}{\det A} = -\frac{175}{164} \text{ [A]}$$



Az  $I_1$  és  $I_3$  áramerősségekre negatív értékeket kaptunk. Ebből adódóan a tényleges (technikai) áramirány ellentétes a feltételezettekkel. A valós áramirányokat piros nyilakkal jelöltük az ábrán.

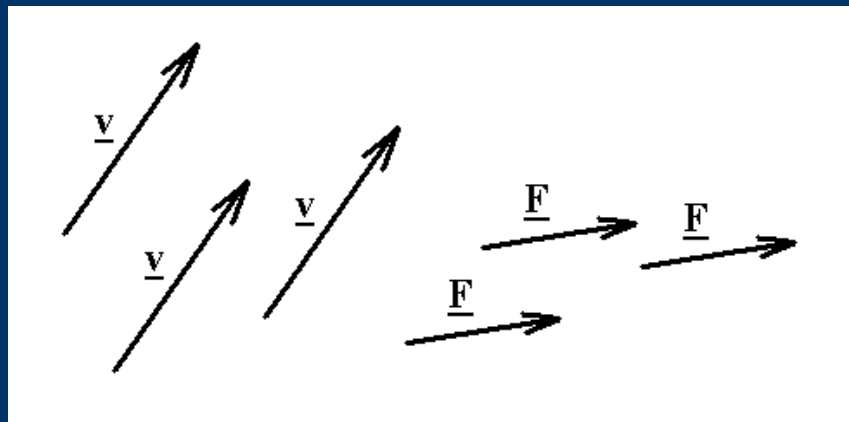
## A fejezet legfontosabb elemei

---

- ⇒ **A vektorok tulajdonságai**
- ⇒ **Vektorműveletek**
- ⇒ **A vektorműveletek néhány alkalmazása**

## Szabadvektorok

Az irányított szakaszok halmazán az eltolás, mint ekvivalencia reláció, által generált osztályok

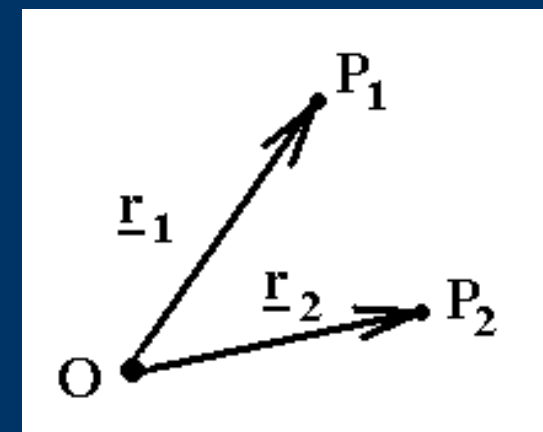
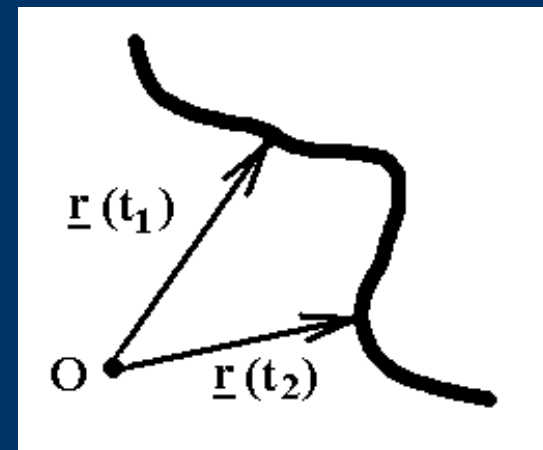


helyzetvektorok



pontok

## Helyzetvektorok (kötött vektorok)



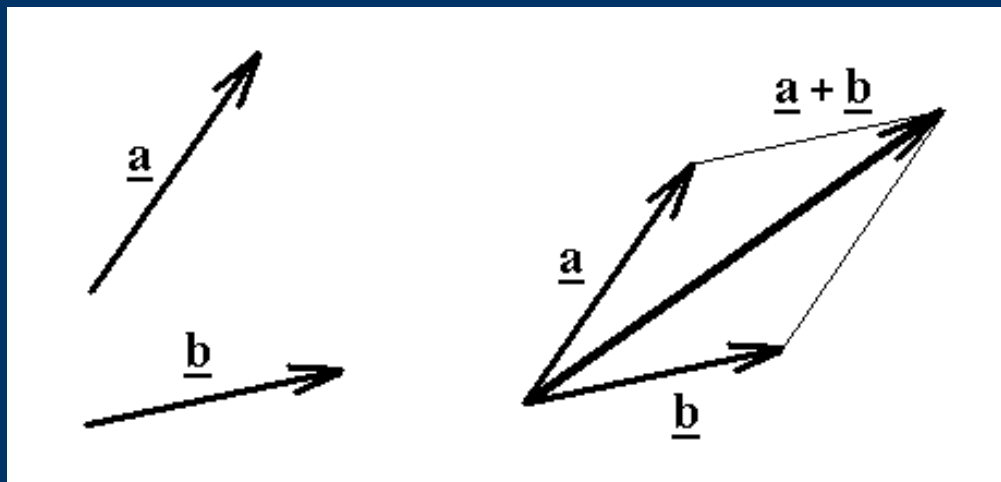
## Vektor jellemzői

- **hossz (nagyság):**  $|\underline{a}|$
- **irány**
- **helyzetvektor esetén: a vonatkoztatási pont helye**

## Speciális vektorok:

- **nullvektor:**  $\underline{0}$
- **egységvektor:**  $|\underline{v}| = 1$

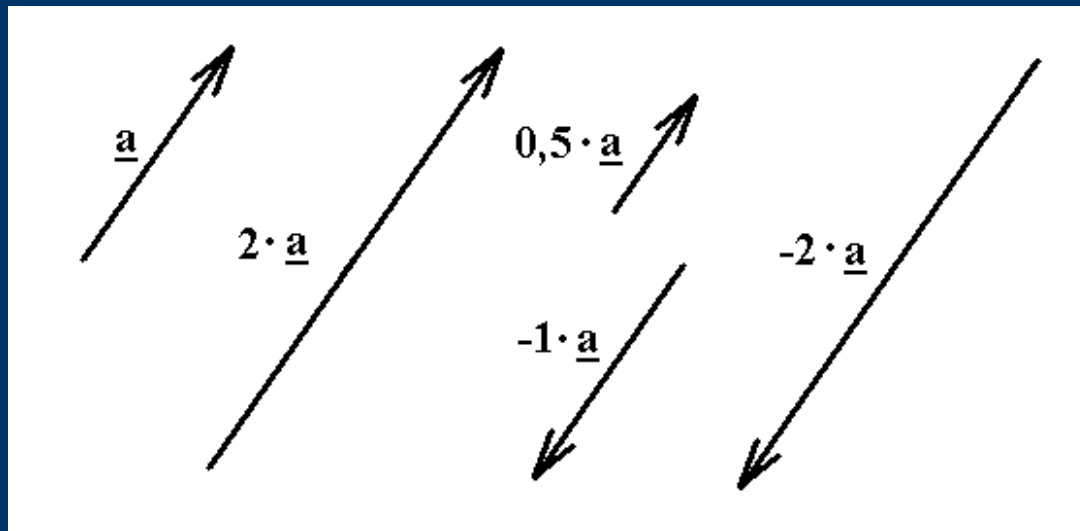
## A vektorműveletek geometriai értelmezése

Definíció: **összeadás**

Az összeadás tulajdonságai:

- $\underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a}$
- $\underline{a} + (\underline{b} + \underline{c}) = (\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c}$
- $\underline{a} + \underline{0} = \underline{a}$
- $\underline{a} + (-\underline{a}) = \underline{0}$

## Definíció: szorzás számmal



## A számmal való szorzás tulajdonságai:

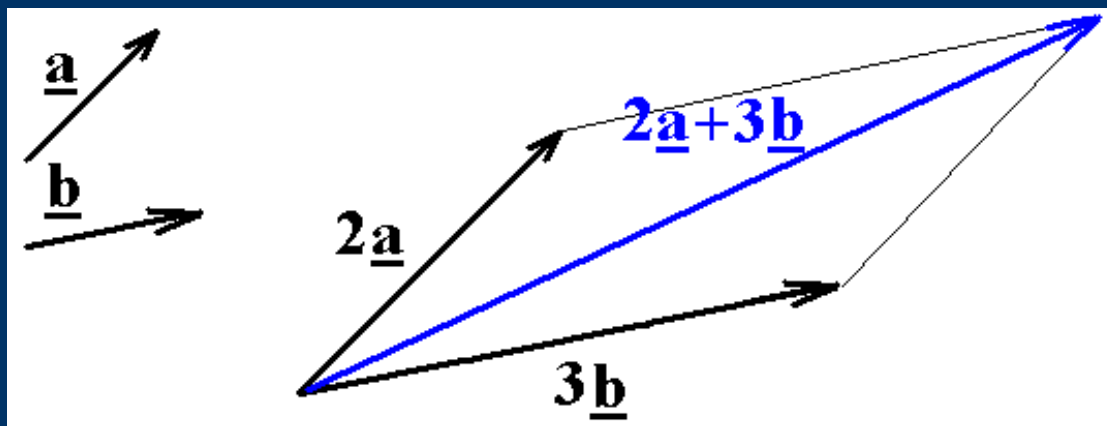
- $t \cdot (s \cdot \underline{a}) = (t \cdot s) \cdot \underline{a}$
- $1 \cdot \underline{a} = \underline{a}$
- $(t + s) \cdot \underline{a} = t \cdot \underline{a} + s \cdot \underline{a}$
- $t \cdot (\underline{a} + \underline{b}) = t \cdot \underline{a} + t \cdot \underline{b}$

Definíció: **lineáris kombináció**

Az  $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n$  vektoroknak a  $t_1, t_2, \dots, t_n$  számokkal képzett lineáris kombinációja a

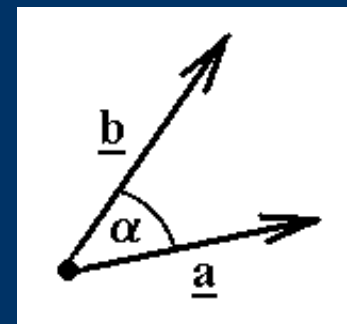
$$t_1 \cdot \underline{a}_1 + t_2 \cdot \underline{a}_2 + \dots + t_n \cdot \underline{a}_n$$

vektor.

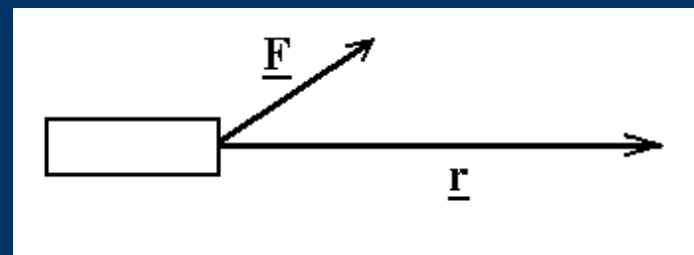


Definíció: skaláris szorzás

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \cos \alpha$$



Egy fizikai példa:  $W = F \cdot r \cdot \cos \alpha = \underline{F} \cdot \underline{r}$



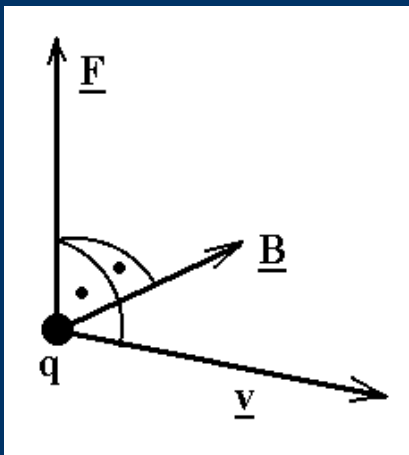
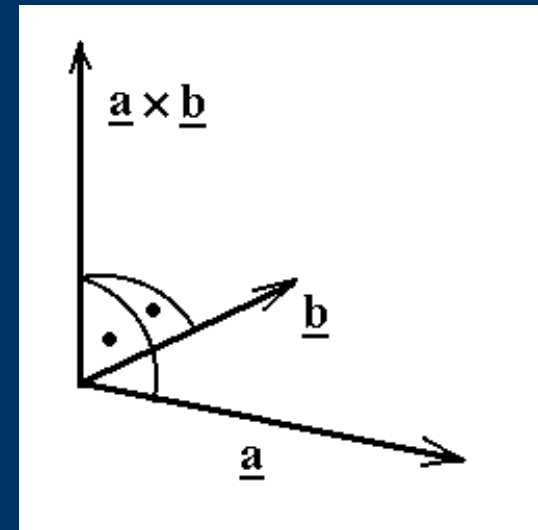
Megjegyzés

$\underline{a}$  és  $\underline{b}$  pontosan akkor merőlegesek, ha  $\underline{a} \cdot \underline{b} = 0$

## Definíció: vektoriális szorzás

Az  $\underline{a}$  és a  $\underline{b}$  vektorok vektoriális szorzatán azt az  $\underline{a} \times \underline{b}$ -vel jelölt vektort értjük, melyre

- $|\underline{a} \times \underline{b}| = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \sin \alpha$
- $\underline{a} \perp \underline{a} \times \underline{b} \perp \underline{b}$
- $(\underline{a}, \underline{b}, \underline{a} \times \underline{b})$  jobbsodrású rendszer



Egy fizikai példa:

$$\underline{F} = q \cdot (\underline{v} \times \underline{B})$$

## A vektoriális szorzás tulajdonságai

- $\underline{\mathbf{a}} \times \underline{\mathbf{b}} = -(\underline{\mathbf{b}} \times \underline{\mathbf{a}})$
- $(\underline{\mathbf{a}} + \underline{\mathbf{b}}) \times \underline{\mathbf{c}} = \underline{\mathbf{a}} \times \underline{\mathbf{c}} + \underline{\mathbf{b}} \times \underline{\mathbf{c}}$
- $(t \cdot \underline{\mathbf{a}}) \times \underline{\mathbf{b}} = t \cdot (\underline{\mathbf{a}} \times \underline{\mathbf{b}})$

## Tétel

$\underline{\mathbf{a}}$  és  $\underline{\mathbf{b}}$  pontosan akkor párhuzamos, ha  $\underline{\mathbf{a}} \times \underline{\mathbf{b}} = \underline{\mathbf{0}}$

Definíció: vegyes szorzás

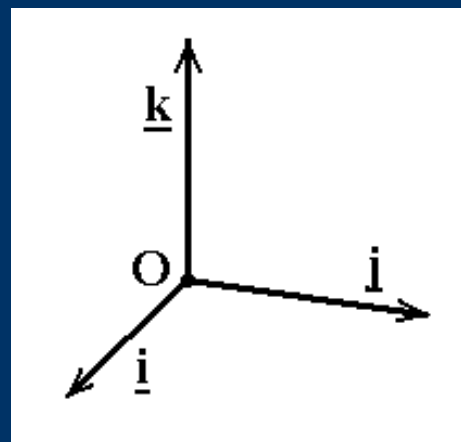
$$\underline{\mathbf{abc}} = \underline{\mathbf{a}} \cdot (\underline{\mathbf{b}} \times \underline{\mathbf{c}})$$

**Definíció: derékszögű koordinátarendszer**

Ha az  $\underline{i}$ ,  $\underline{j}$ ,  $\underline{k}$  egységvektorok

- páronként merőlegesek
- ebben a sorrendben jobbsodrású rendszert alkotnak
- $O$  a tér egy rögzített pontja

akkor az  $(O, \underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$  négyest **derékszögű koordinátarendszernek** nevezzük.

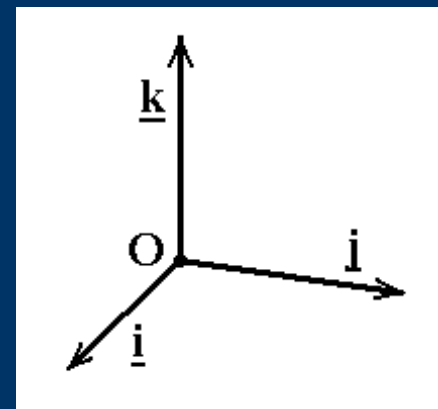


## Elnevezések

$\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$  : **bázisvektorok**

$\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$  : **bázis** (ortonormált vektorrendszer)

O : a **koordinátarendszer kezdőpontja**



## Megjegyzések

A skaláris és a vektoriális szorzás definíciója, illetve tulajdonságai alapján:

$$\underline{i} \cdot \underline{i} = 1, \underline{j} \cdot \underline{j} = 1, \underline{k} \cdot \underline{k} = 1, \underline{i} \cdot \underline{j} = 0, \underline{i} \cdot \underline{k} = 0, \underline{j} \cdot \underline{k} = 0$$

továbbá

$$\underline{i} \times \underline{i} = \underline{0}, \underline{j} \times \underline{j} = \underline{0}, \underline{k} \times \underline{k} = \underline{0}, \underline{i} \times \underline{j} = \underline{k}, \underline{j} \times \underline{k} = \underline{i}, \underline{k} \times \underline{i} = \underline{j}$$

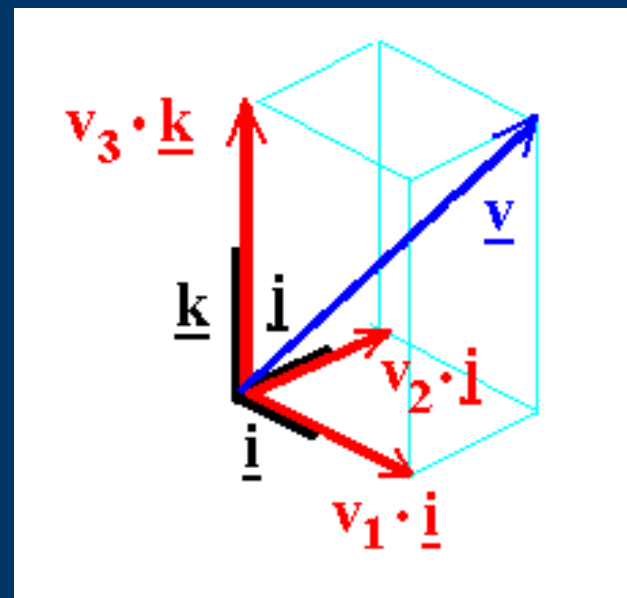
## Tétel

Minden  $\underline{v}$  vektor egyértelműen előállítható az  $\underline{i}$ ,  $\underline{j}$ ,  $\underline{k}$  bázisvektorok lineáris kombinációjaként:

$$\underline{v} = v_1 \cdot \underline{i} + v_2 \cdot \underline{j} + v_3 \cdot \underline{k}$$

Definíció: **koordináták**

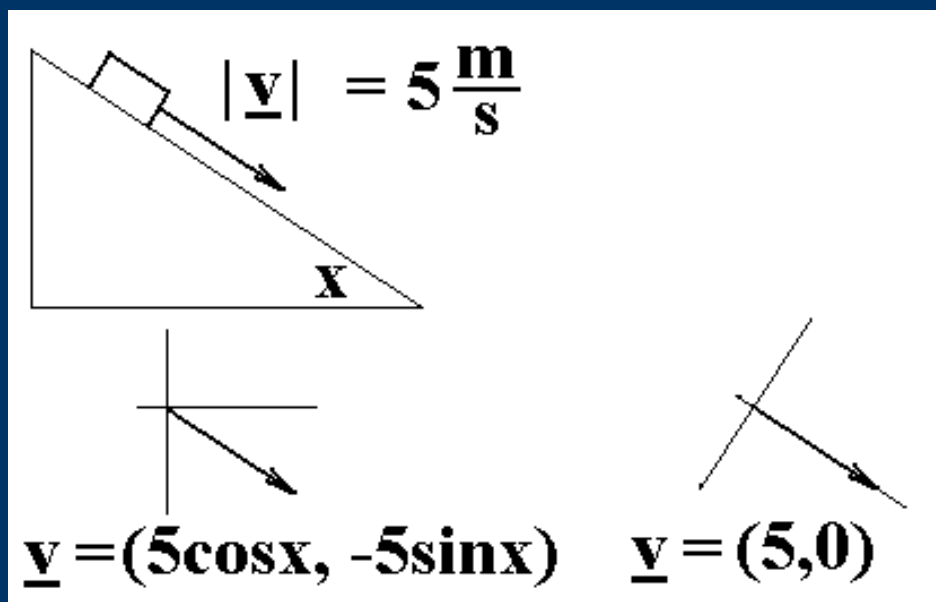
A  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_3$  számokat a  $\underline{v}$  vektor **koordinátáinak** nevezzük.



## Megjegyzés

Egy vektor koordinátái különböző koordinátarendszerekben különbözőek !

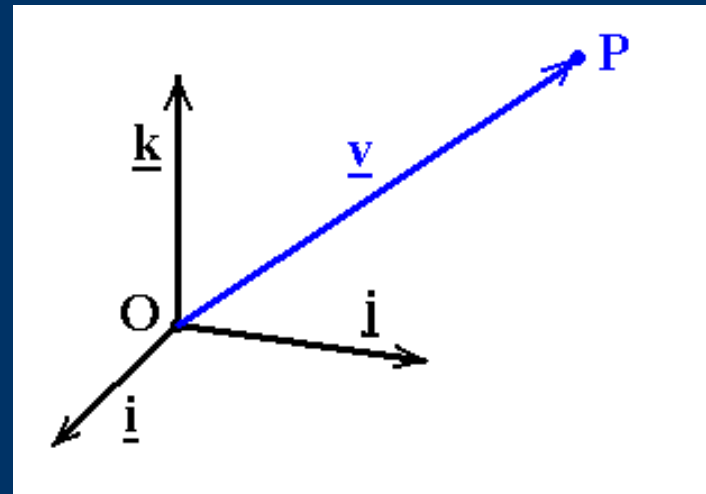
A koordinátarend-szer megválasztása befolyásolhatja a számítások bonyolultságát:



## Definíció: pont koordinátái

Egy **pont koordinátáinak** a pontba mutató helyzetvektor koordinátáit nevezzük.

$$\mathbf{P} = (v_1, v_2, v_3)$$



Ha adott egy koordinátarendszer, akkor  $\mathbf{R}^3$  és a geometriai tér pontjai (vektori) között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létesíthető. Ennek alapján a geometriai problémák  $\mathbf{R}^3$ –beli számításokkal megoldhatók („a vektorok koordinátáival kell számolni”).

## Számolás a koordinátákkal

## Összeadás

Ha  $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$  és  $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$ , akkor

$$\underline{a} + \underline{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

## Szorzás számmal

Ha  $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$  és  $t \in \mathbb{R}$ , akkor

$$t \cdot \underline{a} = (t \cdot a_1, t \cdot a_2, t \cdot a_3)$$

Az  $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$  vektor hossza (normája):

$$|\underline{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Az  $\underline{a} \neq \underline{0}$  vektorral egyirányú egységvektor:

$$\underline{a}^0 = \frac{1}{|\underline{a}|} \cdot \underline{a}$$

## Példa

Az  $\underline{a} = (2, 1, 2)$  vektorral egyirányú egységvektor :

$$|\underline{a}| = \sqrt{9} = 3$$

$$\underline{a}^0 = \frac{1}{3} \cdot \underline{a} = \frac{1}{3} \cdot (2, 1, 2) = \left( \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right)$$

## Tétel

Az  $\underline{a}=(a_1,a_2,a_3)$  és a  $\underline{b}=(b_1,b_2,b_3)$  vektorok  $\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \cos \alpha$  formulával értelmezett skaláris szorzata:

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

Ez megegyezik az  $\mathbb{R}^3$ -beli skaláris szorzással.

## Indoklás

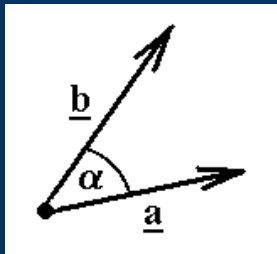
Az

$$\underline{i} \cdot \underline{i} = 1, \underline{j} \cdot \underline{j} = 1, \underline{k} \cdot \underline{k} = 1, \underline{i} \cdot \underline{j} = 0, \underline{i} \cdot \underline{k} = 0, \underline{j} \cdot \underline{k} = 0$$

egyenlőségeket felhasználva:

$$\begin{aligned} (a_1 \cdot \underline{i} + a_2 \cdot \underline{j} + a_3 \cdot \underline{k}) \cdot (b_1 \cdot \underline{i} + b_2 \cdot \underline{j} + b_3 \cdot \underline{k}) &= \\ &= a_1 \cdot \underline{i} \cdot b_1 \cdot \underline{i} + a_2 \cdot \underline{j} \cdot b_2 \cdot \underline{j} + a_3 \cdot \underline{k} \cdot b_3 \cdot \underline{k} + a_1 \cdot \underline{i} \cdot b_2 \cdot \underline{j} + a_1 \cdot \underline{i} \cdot b_3 \cdot \underline{k} + \\ &\quad + a_2 \cdot \underline{j} \cdot b_1 \cdot \underline{i} + a_2 \cdot \underline{j} \cdot b_3 \cdot \underline{k} + a_3 \cdot \underline{k} \cdot b_1 \cdot \underline{i} + a_3 \cdot \underline{k} \cdot b_2 \cdot \underline{j} = \\ &= a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 \end{aligned}$$

## Vektorok szögének kiszámítása



$$\cos \alpha = \frac{\underline{a} \cdot \underline{b}}{|\underline{a}| \cdot |\underline{b}|} = \frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

Példa

Az  $\underline{a} = (2, -4, 5)$  és  $\underline{b} = (3, 1, 2)$  vektorok szöge:

$$\cos \alpha = \frac{\underline{a} \cdot \underline{b}}{|\underline{a}| \cdot |\underline{b}|} = \frac{2 \cdot 3 + (-4) \cdot 1 + 5 \cdot 2}{\sqrt{2^2 + (-4)^2 + 5^2} \cdot \sqrt{3^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{12}{\sqrt{45} \cdot \sqrt{14}} \approx 0.48$$

$$\Rightarrow \alpha = 68^\circ$$

## A koordinátatengelyekre eső merőleges vetületek

Vetületek hossza ( = *koordináták* ):

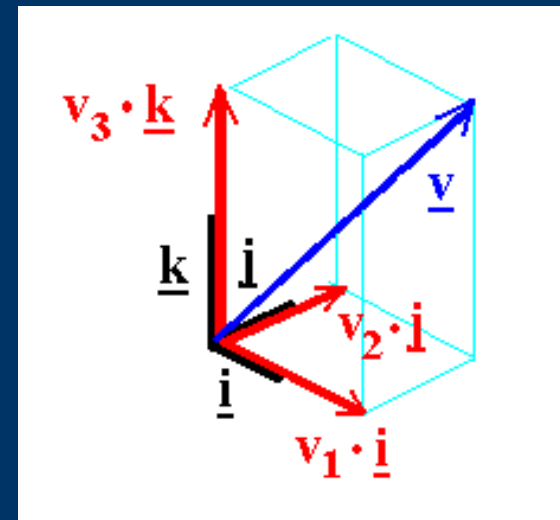
$$v_1 = \underline{v} \cdot \underline{i} , v_2 = \underline{v} \cdot \underline{j} , v_3 = \underline{v} \cdot \underline{k}$$

Vetületvektorok:

$$\underline{v}_1 = \underline{v}_1 \cdot \underline{i} = (\underline{v} \cdot \underline{i}) \cdot \underline{i}$$

$$\underline{v}_2 = \underline{v}_2 \cdot \underline{j} = (\underline{v} \cdot \underline{j}) \cdot \underline{j}$$

$$\underline{v}_3 = \underline{v}_3 \cdot \underline{k} = (\underline{v} \cdot \underline{k}) \cdot \underline{k}$$



$$\underline{v} = (\underline{v} \cdot \underline{i}) \cdot \underline{i} + (\underline{v} \cdot \underline{j}) \cdot \underline{j} + (\underline{v} \cdot \underline{k}) \cdot \underline{k}$$

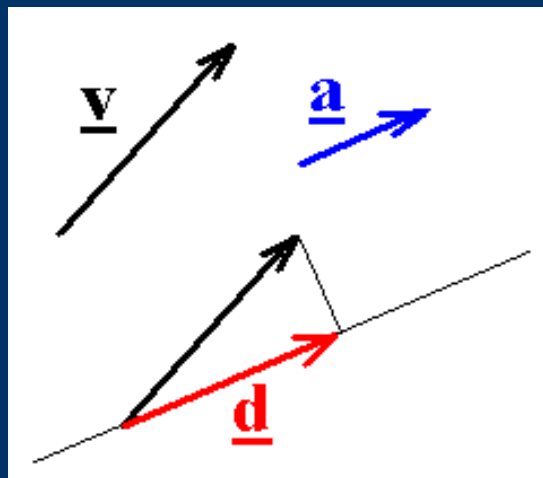
## Vektor merőleges vetülete adott irányra

A **v** vetületének hossza az **a** irányban:

$$|\underline{\mathbf{d}}| = |\underline{\mathbf{v}} \cdot \underline{\mathbf{a}}^0|$$

Vetületvektor:

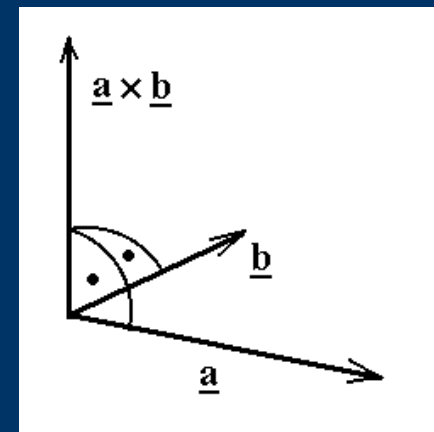
$$\underline{\mathbf{d}} = (\underline{\mathbf{v}} \cdot \underline{\mathbf{a}}^0) \cdot \underline{\mathbf{a}}^0$$



## A vektoriális szorzat kiszámítása a koordinátákkal

Ha  $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ,  $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$ , akkor

$$\underline{a} \times \underline{b} = (a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2, -a_1 \cdot b_3 + a_3 \cdot b_1, a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1)$$



## Emlékeztető

- $|\underline{a} \times \underline{b}| = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \sin \alpha$
- $\underline{a} \perp \underline{a} \times \underline{b} \perp \underline{b}$
- $(\underline{a}, \underline{b}, \underline{a} \times \underline{b})$  jobbsodrású rendszer

## Indoklás

Az

$$\underline{i} \times \underline{i} = 1, \underline{j} \times \underline{j} = 1, \underline{k} \times \underline{k} = 1, \underline{i} \times \underline{j} = 0, \underline{i} \times \underline{k} = 0, \underline{j} \times \underline{k} = 0$$

egyenlőségeket felhasználva:

$$\begin{aligned} (a_1 \cdot \underline{i} + a_2 \cdot \underline{j} + a_3 \cdot \underline{k}) \times (b_1 \cdot \underline{i} + b_2 \cdot \underline{j} + b_3 \cdot \underline{k}) &= \\ &= a_1 \cdot b_1 \cdot \underline{i} \times \underline{i} + a_2 \cdot b_2 \cdot \underline{j} \times \underline{j} + a_3 \cdot b_3 \cdot \underline{k} \times \underline{k} + \\ &\quad + a_1 \cdot b_2 \cdot \underline{i} \times \underline{j} + a_1 \cdot b_3 \cdot \underline{i} \times \underline{k} + a_2 \cdot b_1 \cdot \underline{j} \times \underline{i} + \\ &\quad + a_2 \cdot b_3 \cdot \underline{j} \times \underline{k} + a_3 \cdot b_1 \cdot \underline{k} \times \underline{i} + a_3 \cdot b_2 \cdot \underline{k} \times \underline{j} = \\ &= (a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2) \cdot \underline{i} + (-a_1 \cdot b_3 + a_3 \cdot b_1) \cdot \underline{j} + (a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1) \cdot \underline{k} \end{aligned}$$

A számolás könnyebben megjegyezhető ebben a formában:

$$\underline{a} \times \underline{b} = \det \begin{pmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

Ez az írásmód azt jelképezi, hogy a vektori szorzat úgy számolandó, mintha formálisan egy harmadrendű mátrix determinánsát számítanánk ki.

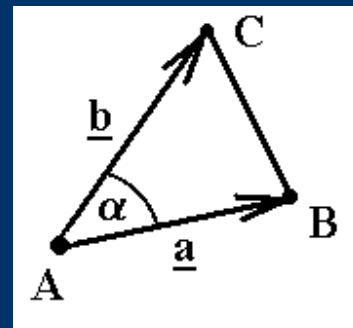
Példa

$$\underline{a} = (4, 5, -1), \underline{b} = (2, 3, 6)$$

$$\begin{aligned} \underline{a} \times \underline{b} &= \det \begin{pmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 4 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \underline{i} - \det \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \underline{j} + \\ &+ \det \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \underline{k} = 33 \cdot \underline{i} - 26 \cdot \underline{j} + 2 \cdot \underline{k} = (33, -26, 2) \end{aligned}$$

## Csúcspontjaival adott háromszög területének kiszámítása

$$T = \frac{|\underline{a} \times \underline{b}|}{2}$$



## Megjegyzés

Az fenti képlet összefügg a háromszög területét megadó, jól ismert formulával: ha **a** és **b** a háromszög két oldala, **α** a két oldal által bezárt szög, akkor

$$T = \frac{a \cdot b \cdot \sin \alpha}{2}$$

## Példa

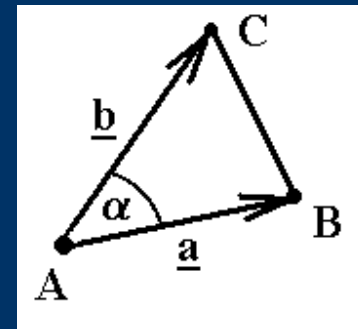
$$A = (1,3,0), B = (5,8,-1), C = (3,6,6)$$

$$\underline{a} = (4,5,-1), \underline{b} = (2,3,6)$$

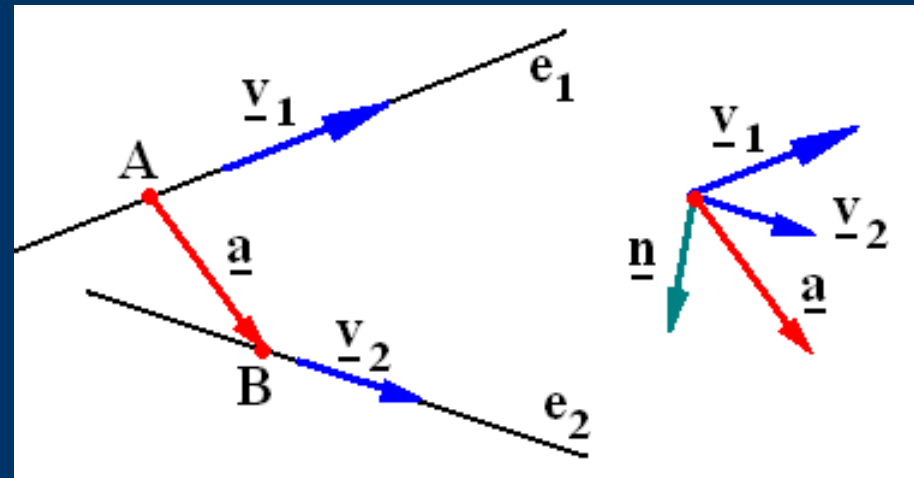
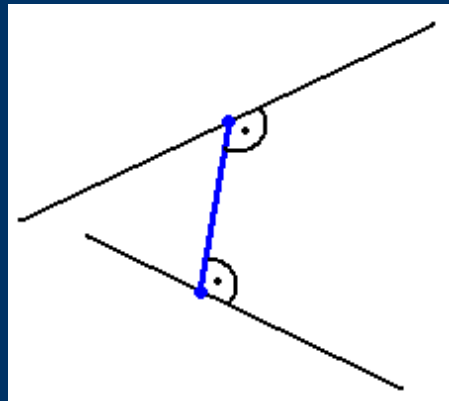
$$\underline{a} \times \underline{b} = (33, -26, 2)$$

$$|\underline{a} \times \underline{b}| = \sqrt{33^2 + (-26)^2 + 2^2} = \sqrt{1769} = 42,1$$

$$T = \frac{|\underline{a} \times \underline{b}|}{2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{33^2 + (-26)^2 + 2^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1769} \approx 21$$



## Kitérő egyenesek távolsága



Ha a kitérő egyenesek irányvektorai  $\underline{v}_1$  ill.  $\underline{v}_2$ , akkor az  $\underline{n} = \underline{v}_1 \times \underline{v}_2$  vektor párhuzamos az egyenesek normál transzverzálisával.

Ha A az  $e_1$  egyenes, B az  $e_2$  egyenes egy pontja, akkor az egyenesek távolsága megegyezik az  $\underline{a}$  vektornak az  $\underline{n}$  irányra eső merőleges vetületének hosszával.

## A vegyes szorzat kiszámítása koordinátákkal

Ha  $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ,  $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$ ,  $\underline{c} = (c_1, c_2, c_3)$ , akkor

$$\underline{abc} = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

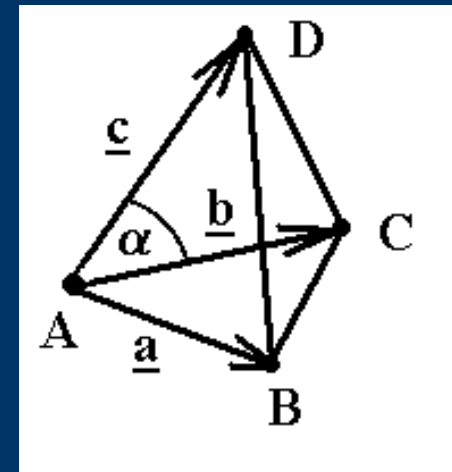
Emlékeztető

$$\underline{abc} = \underline{a} \cdot (\underline{b} \times \underline{c})$$

Csúcspontjaival adott tetraéder térfogata

$$V = \frac{|\underline{abc}|}{6}$$

Példa



$$A = (1, 3, 0), B = (5, 8, -1), C = (3, 6, 6), D = (-4, -3, 0)$$

$$\underline{a} = (4, 5, -1), \underline{b} = (2, 3, 6), \underline{c} = (-5, -6, 0)$$

$$\underline{abc} = \det \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 6 \\ -5 & -6 & 0 \end{pmatrix} = -9$$

$$V = \frac{|\underline{abc}|}{6} = \frac{|-9|}{6} = 1,5$$