

# A számítógépek felépítése 5.a: Információ-ábrázolás: adatok

Markó Tamás  
PTE TTK, 2003

2003.08.02.

Markó Tamás, PTE TTK

1

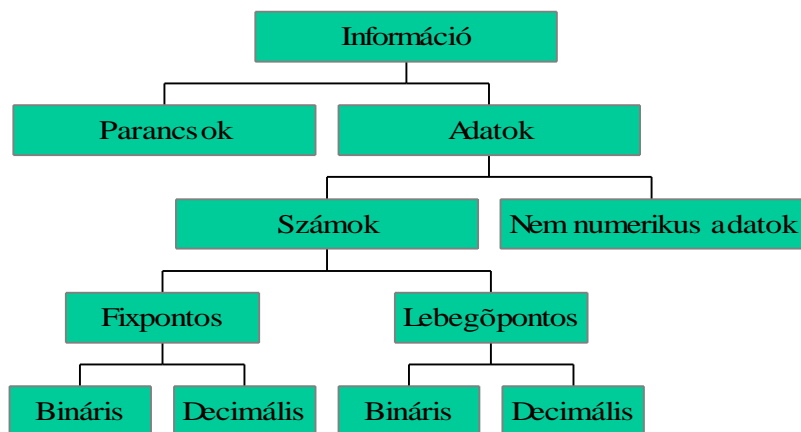
# A rádiótelefonokat kérem KIKAPCSOLNI!

2003.08.02.

Markó Tamás, PTE TTK

2

## A tárolandó információk osztályozása



2003.08.02.

Markó Tamás, PTE TTK

4

## A helyiértékes számábrázolás

$X \in \mathbb{Q}^+$  (nemnegatív racionális szám)

$X$  helyiértékes ábrázolása:

$$X = (x_n x_{n-1} \dots x_1 x_0 x_{-1} \dots x_{-m})$$

Ez az ábrázolás egyértelmű.

$X$  értéke:

$$\text{val}(X) = \sum_{i=-m}^n x_i b^i, \text{ ahol } x_i \in \{0, 1, \dots, b-1\}, b \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$$

Szokásos érték:  $b=10$

A számítástechnikában:  $b=2$

5

## Természetes számok előállítása $b$ alapú számrendszerben

$X \in \mathbb{N}$  (természetes szám)

Eloállítandó:

$$X = (x_n x_{n-1} \dots x_1 x_0), \quad \text{val}(X) = \sum_{i=0}^n x_i b^i$$

$$X = A_1 \cdot b + x_0 \quad ? \quad X \bmod b = x_0$$

$$A_1 = A_2 \cdot b + x_1 \quad ? \quad A_1 \bmod b = x_1$$

stb.

2003.08.02.

Markó Tamás, PTE TTK

6

## Példa: átváltás tízes számrendszerből kettesbe

**Feladat:**

Mi a (decimális) 54 alakja kettes számrendszerben?

$$54 : 2 = 27$$

0

$$27 : 2 = 13$$

1

$$13 : 2 = 6$$

1

$$6 : 2 = 3$$

0

$$3 : 2 = 1$$

1

$$1 : 1 = 0$$

1

$$110110_2 = 54_{10}$$

2003.08.02.

Markó Tamás, PTE TTK

7

## Példa: átváltás kettes számrendszerből tízesbe

### Feladat:

Mi a (bináris) 110110 alakja tízes számrendszerben?

110110<sub>2</sub> értéke:

$$1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 =$$
$$= 32 + 16 + 0 + 4 + 2 + 0 = 54$$

$$110110_2 = 54_{10}$$

2003.08.02.

Markó Tamás, PTE TTK

8

## A nyolcas és a tizenhatos számrendszer

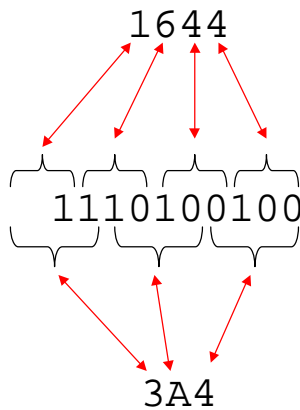
- Nyolcas:
  - oktálisnak is hívják
  - 8 db számjegy: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
  - minden helyiérték az előző nyolcszorosa
- Tizenhatos
  - hexadecimálisnak is hívják
  - 16 db számjegy: 0, 1, ..., 9, A, B, C, D, E, F
  - minden helyiérték az előző nyolcszorosa
- Jelentőségük a bináris számok áttekinthetőbb felírásánál van

2003.08.02.

Markó Tamás, PTE TTK

9

## Átváltás a kettes, a nyolcas és a tizenhatos számrendszer között



2003.08.02.

Markó Tamás, PTE TTK

10

## Érdemes megtanulni ...

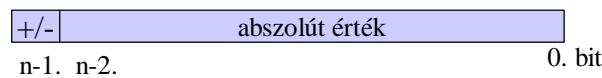
Tíz	Kettes	Nyolcas	Tizenhatos
1	1	1	1
2	10	2	2
3	11	3	3
4	100	4	4
5	101	5	5
6	110	6	6
7	111	7	7
8	1000	10	8
9	1001	11	9
10	1010	12	A
11	1011	13	B
12	1100	14	C
13	1101	15	D
14	1110	16	E
15	1111	17	F
16	10000	20	10

2003.08.02.

Markó Tamás, PTE TTK

11

## Előjeles egész számok ábrázolása 1.: előjel és abszolút érték



- Ábrázolható számtartomány  $n$  biten:  $-(2^{n-1}-1) \dots 2^{n-1}-1$
- Két 0 van: +0 és -0
- Alkalmazás:
  - a szokásos emberi írásmód
  - a lebegőpontos számok mantisszája
- Előny: az előjel tesztelése, a szorzás és az osztás egyszerű
- Hátrány: két 0, az összeadás és a kivonás bonyolult

2003.08.02.

Markó Tamás, PTE TTK

12

## Előjeles egész számok ábrázolása 2.: többletes ábrázolás

- A  $d$  szám helyett ( $n$  biten) a  $d' := d + 2^{n-1}$  értéket ábrázoljuk (előjel nélküli egész számként)
- Az ábrázolható számtartomány:  
 $[ 0 - (2^{n-1}), ((2^n - 1) - (2^{n-1})) ] = [ - (2^{n-1}), 2^{n-1} - 1 ]$
- Alkalmazás:
  - az exponens a lebegőpontos számábrázolásnál
- Előny:
  - nem kell az előjelet külön ábrázolni
  - csak egy 0 van
- Hátrány:
  - aszimmetrikus értéktartomány
  - bonyolult vele számolni

2003.08.02.

Markó Tamás, PTE TTK

13

## Előjeles egész számok ábrázolása 3.: az egyes komplement forma

- Nemnegatív számok a  $[0, 2^{n-1} - 1]$  tartományban a kettes számrendszerbeli alakjukkal
- Egy  $X$  negatív szám a  $[-(2^{n-1} - 1), 0]$  tartományban a  $2^n - |X| - 1$  értékkel
- Ábrázolható számtartomány:  $[-(2^{n-1} - 1), (2^{n-1} - 1)]$
- Alkalmazás: ALU-ban (manapság ritkán)
- Előny
  - a négy alapművelet egyszerű
  - az előjel tesztelése egyszerű
  - szimmetrikus értéktartomány
- Hátrány: két 0:  $+0, -0$

2003.08.02.

Markó Tamás, PTE TTK

14

## Előjeles egész számok ábrázolása 4.: a kettes komplement forma

- Nemnegatív számok a  $[0, 2^{n-1} - 1]$  tartományban a kettes számrendszerbeli alakjukkal
- Egy  $X$  negatív szám a  $[-2^{n-1}, -1]$  tartományban a  $2^n - |X|$  értékkel
- Ábrázolható számtartomány:  $[-2^{n-1}, (2^{n-1} - 1)]$
- Alkalmazás: ALU-ban (manapság általános)
- Előny
  - egyszerű összeadás és kivonás
  - az előjel tesztelése egyszerű
  - egy 0 van
- Hátrány:
  - a szorzás és osztás kicsit bonyolultabb
  - aszimmetrikus értéktartomány

15

## Példa: 4 bites értékek lehetséges értelmezései 1.

Bitsorozat	Előjel nélküli egész	Előjel és abszolút érték	8-többitű	Egyes komplement	Kettes komplement
0000	0	0	-8	0	0
0001	1	1	-7	1	1
0010	2	2	-6	2	2
0011	3	3	-5	3	3
0100	4	4	-4	4	4
0101	5	5	-3	5	5
0110	6	6	-2	6	6
0111	7	7	-1	7	7
1000	8	-0	0	-7	-8
1001	9	-1	1	-6	-7
1010	10	-2	2	-5	-6
1011	11	-3	3	-4	-5
1100	12	-4	4	-3	-4
1101	13	-5	5	-2	-3
1110	14	-6	6	-1	-2
1111	15	-7	7	-0	-1

2003.08.02.

Markó Tamás, PTE TTK

16

## Decimális egészek ábrázolása 1.

- Az alapötlet: az előjelet és a számjegyek sorozatát bájt sorozatként ábrázoljuk
- Egy bájtban két hexadecimális számjegy tárolható

–  $0_{16} \dots 9_{16}$       ?     $0_{10} \dots 9_{10}$

– A, C, E, F      ?    +

– B, D      ?    -

2003.08.02.

Markó Tamás, PTE TTK

17



## Decimális egészek ábrázolása 2.

- Pakolt ábrázolás:
  - bájtanként 2 számjegy (ill. az előjel): DD DD  
pl.  $28_{10} ? 28_{16}$
- Zónázott ábrázolás:
  - bájtanként 1 számjegy (ill. az előjel)
  - az alsó helyi értékeken a számjegy kódja, a felső félbájtan mindig ugyanaz a Z érték: ZD ZD  
pl.  $28_{10} ? 32_{16} 38_{16}$
  - célja, hogy nyomtatható karaktereket kapjunk
  - az ASCII esetében  $Z = 3$  ( $30_{16} ? '0', \dots, 39_{16} ? '9'$ )

2003.08.02.

Markó Tamás, PTE TTK

18

## Példa: 4 bites értékek lehetséges értelmezései 2.

Bitsorozat	Előjel nélküli egész	Előjel és abszolút érték	8-többletes	Egyes komplement	Kettes komplement	Decimális
0000	0	0	-8	0	0	0
0001	1	1	-7	1	1	1
0010	2	2	-6	2	2	2
0011	3	3	-5	3	3	3
0100	4	4	-4	4	4	4
0101	5	5	-3	5	5	5
0110	6	6	-2	6	6	6
0111	7	7	-1	7	7	7
1000	8	-0	0	-7	-8	8
1001	9	-1	1	-6	-7	9
1010	10	-2	2	-5	-6	+
1011	11	-3	3	-4	-5	-
1100	12	-4	4	-3	-4	+
1101	13	-5	5	-2	-3	-
1110	14	-6	6	-1	-2	+
1111	15	-7	7	-0	-1	+

2003.08.02.

Markó Tamás, PTE TTK

19

## A lebegőpontos számábrázolás

- Alakja:  $V = (-1) \cdot m \cdot a^k$ 

előjel      mantissza      alap      karakterisztika
- Az  $a$  alap egy adott gépnél rögzített (általában 2)  
? nem kell külön megadni

2003.08.02.

Markó Tamás, PTE TTK

20

## Normalizálás

- A lebegőpontos számábrázolás nem egyértelmű, pl.  
 $37,145 = 0,037145 \cdot 10^3 = 3714,5 \cdot 10^{-2}$
- A tizedesvessző helyének rögzítésével egyértelmű lesz
- Pl. ha a vessző mellett jobbra áll az első nem 0 számjegy:  
?  $1 > m$  ?  $1/a$   
? a legkisebb ábrázolható pozitív szám  $0,1 \cdot a^k$   
(ahol  $k$  az ábrázolható legkisebb karakterisztika)

2003.08.02.

Markó Tamás, PTE TTK

21

## Nagyságrend és pontosság

- Adott méretű memória-rekesz mellett az ábrázolható nagyságrend és az elérhető pontosság változik.
- Hosszú mantissza, rövid karakterisztika: nagyobb pontosság, kisebb nagyságrend-tartomány
- Rövid mantissza, hosszú karakterisztika: kisebb pontosság, nagyobb nagyságrend-tartomány

2003.08.02.

Markó Tamás, PTE TTK

22

## Az IEEE lebegőpontos szabványa 1.

előjel	karakterisztika	mantissza
m+n	m+n-1	m   m-1 0

Egyszeres pontosság:

- Teljes méret 4 bájt
- Normalizálás: egy egész helyi érték, ez mindig 1
  - nem tároljuk („hidden bit”)
- Mantissza:
  - $m = 23$
  - a legnagyobb helyi értékű bit értéke  $1/2$ , a legkisebbé  $2^{-23}$   
? ábrázolható tartomány:  $1 \dots 2 \cdot 2^{-23}$
- Karakterisztika:
  - $n = 8$
  - 127-többletes ábrázolás ? ábrázolható tartomány:  $-126 \dots 127$
- Decimálisan kb. 7 jegy pontosság,  $10^{-38} \dots 10^{38}$  nagyságrend

## Az IEEE lebegőpontos szabványa 2.

előjel	karakterisztika	mantissza
m+n	m+n-1	m   m-1
		0

Dupla pontosság:

- Teljes méret 8 bájt
- Normalizálás: mint az egyszeres pontosságnál
- Mantissza:
  - $m = 52$
  - a legnagyobb helyiértékű bit értéke  $1/2$ , a legkisebbé  $2^{-52}$
  - ? ábrázolható tartomány:  $1 \dots 2 \cdot 2^{-52}$
- Karakterisztika:
  - $n = 11$
  - 1023-többletes ábrázolás ? ábrázolható tartomány:  $-1022 \dots 1023$
- Decimálisan kb. 15 jegy pontosság,  $10^{-308} \dots 10^{308}$  nagyságrend

2003.08.02.

Markó Tamás, PTE TTK

24

## Az IEEE lebegőpontos szabványa 3.

Különleges értékek:

- A 0 ábrázolása
  - van  $+0$  és  $-0$  is
  - a mantissza és a karakterisztika is 0 (a *hidden bit* is!)
- Végtelen
  - előjel: + vagy -
  - mantissza: 0
  - karakterisztika: csupa 1
- Nem szám (nem értelmezhető, pl.  $? / ?$  )
  - előjel: + vagy -
  - mantissza: nem 0
  - karakterisztika: csupa 1

## Az IEEE lebegőpontos szabványa 4.

### Nem normalizált számok

- az előjel tetszőleges
- a mantissza nem 0
- a *hidden bit* 0-ként értendő ? kevesebb szignifikáns bit, mint a normalizált esetben
- a karakterisztika csupa 0 (?  $2^{-127}$ , ill.  $2^{-1023}$ )
- A legkisebb (egyszeres pontosságú) pozitív szám így  $2^{-23} \cdot 2^{-127} = 2^{-150}$
- Kitolható az alulcsordulás határa

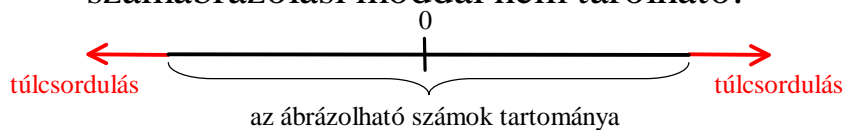
2003.08.02.

Markó Tamás, PTE TTK

26

## Túlcsordulás (overflow)

- A számolás során olyan nagy abszolút értékű eredmény keletkezik, ami az adott számábrázolási móddal nem tárolható:



- Túlcsordulás egész számokkal és lebegőpontos számokkal való műveletvégzéskor is fellelphet.

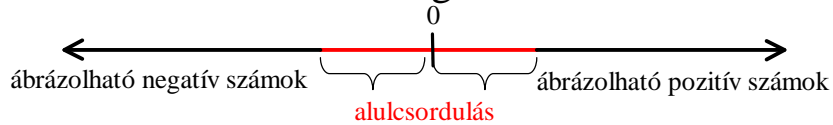
2003.08.02.

Markó Tamás, PTE TTK

27

## Alulcsordulás (underflow)

- A számolás során olyan kis abszolút értékű eredmény keletkezik, ami az adott számábrázolási móddal a 0-tól nem különböztethető meg:



- Alulcsordulás egész számokkal való műveletvégzéskor nem léphet fel.