

.

1. Függvények

Ebben a fejezetben néhány alapvető függvényosztállyal, nevezetesen a polinomokkal és a racionális függvényekkel ismerkedünk meg, továbbá bevezetünk néhány nevezetes függvényt.

Függvény alatt egy olyan hozzárendelést értünk, mely egy H halmaz minden eleméhez egy K halmaz egy és csakis egy elemét rendeli. A függvénykapcsolat leggyakrabban használt jelölési módjai: $f : H \rightarrow K$, $y = f(x)$ ($x \in H$). Itt x a **független változó**, y vagy $f(x)$ a **függő változó**. Amennyiben a H és a K a valós számok halmazának egy-egy részhalmaza, **valós függvényekről** beszélünk. Ebben a jegyzetben csak valós függvényekkel fogunk foglalkozni. A H halmazt a függvény **értelmezési tartományának** nevezzük, és D_f vagy ÉT szimbólumokkal jelöljük. Az értelmezési tartomány pontjaihoz a függvény által hozzárendelt, ún. "képpontok" összességét a függvény **értékkészletének** nevezzük, és R_f , vagy ÉK szimbólumokkal jelöljük. Nevezetesen

$$R_f = \text{ÉK} := \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in D_f, f(x) = y\} \subset \mathbb{R}.$$

Az $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ jelöléssel azt juttatjuk kifejezésre, hogy az f értelmezési tartománya a H halmaz, értékkészlete pedig része \mathbb{R} -nek.

A valós függvényeket célszerű grafikonjukkal ábrázolni. Ez azt jelenti, hogy a $H \subseteq \mathbb{R}$ halmazon értelmezett $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt a

$$\Gamma(f) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in H, y = f(x)\} \subset \mathbb{R}^2$$

síkbeli halmazzal szemléltetjük.

1.1. Néhány nevezetes függvény

Ebben a pontban emlékeztetünk néhány ismert függvény értelmezésére. Ezeket a matematika minden ágában és a számítástechnikában is használják.

Definíció. Az

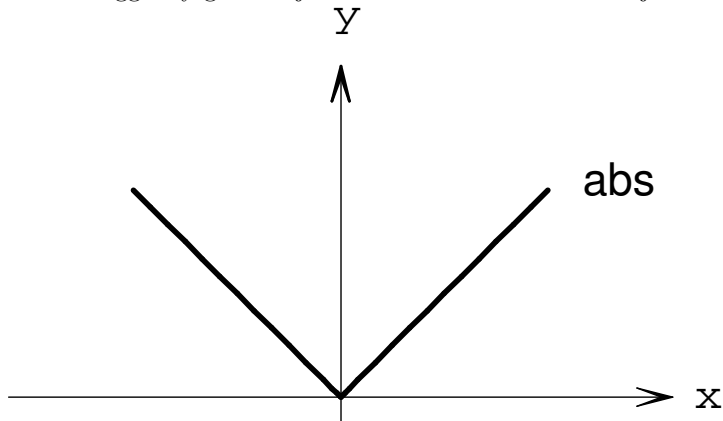
$$\text{abs} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \text{abs}(x) := |x|$$

függvényt **abszolút érték függvénynek** nevezzük.

Számok abszolút értékének definícióját felhasználva az abszolút érték függvény az

$$\text{abs}(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{ha } x \geq 0, \\ -x, & \text{ha } x < 0, \end{cases}$$

alakban írható fel. A függvény grafikonját az alábbi ábrán szemléltetjük.



1. ábra

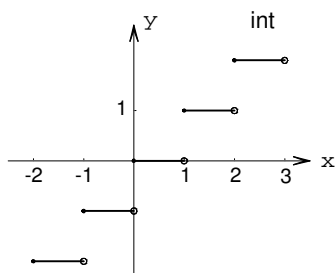
Ismeretes, hogy az $x \in \mathbb{R}$ szám $[x]$ szimbólummal jelölt **egész része** azzal az $n \in \mathbb{Z}$ egész számmal egyenlő, amelyre $n \leq x < n + 1$ teljesül.

Definíció. Az

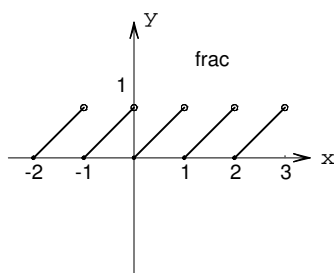
$$\text{int}(x) := [x], \quad \text{frac}(x) := x - [x] \quad (x \in \mathbb{R})$$

utasításokkal értelmezett függvényeket **egészrész függvénynek**, illetve **törtrész függvénynek** nevezzük.

Ezek grafikonját az alábbi ábrákon szemléltetjük.



2. ábra



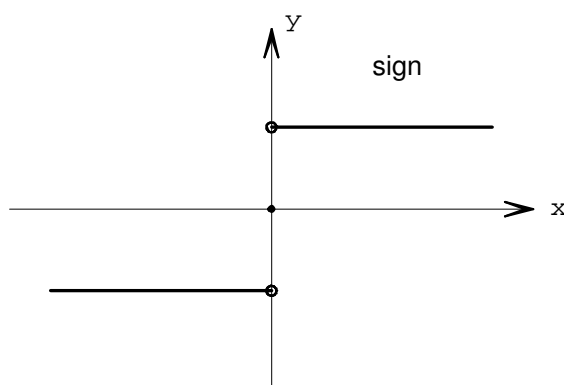
3. ábra

Gyakran használni fogjuk az **előjelfüggvényt** (más szóval a **szignumfüggvényt**).

Definíció. A

$$\text{sign}(x) := \begin{cases} 1, & \text{ha } x > 0, \\ 0, & \text{ha } x = 0, \\ -1, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

utasítással értelmezett függvényt **előjelfüggvénynek** nevezzük.



4. ábra

1.2. Polinomok és racionális függvények

A $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ típusú függvények között sok vonatkozásban kitüntetett szerepet játszanak az **algebrai polinomok**. Ezek helyettesítési értékei egyszerűen kiszámíthatók. Ezért a polinomokat gyakran használjuk más, bonyolultabb függvények értékeinek közelítésére.

Definíció. Legyenek $n \in \mathbb{N}$ és $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ adott számok. A

$$(1) \quad P: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: \quad x \mapsto P(x) := a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

utasítással értelmezett P függvényt **polinomnak** nevezzük. Ha $a_n \neq 0$, akkor azt mondjuk, hogy a P polinom **pontosan n -edfokú**, s ilyenkor az $n \in \mathbb{N}$ számot a P **polinom fokszámának** nevezzük és a $\deg(P)$ szimbólummal jelöljük. Az a_i ($i = 0, 1, \dots, n$) számokat P **együtthatóinak** nevezzük.

Az n -edfokú polinomok halmazát a \mathcal{P}_n szimbólummal fogjuk jelölni. Nyilvánvaló, hogy \mathcal{P}_0 azonos a konstans függvények halmazával. Speciálisan azt a konstans polinomot, amely a 0 értéket veszi fel **zéruspolinomnak** nevezzük, és a θ szimbólummal jelöljük. A polinomok összességét

$$\mathcal{P} := \cup_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}_n$$

szimbólummal jelöljük.

A polinomok helyettesítési értékei — felhasználva az alábbi, ún. **Horner-féle elrendezést** — egyszerűen megkaphatók. Valóban, P értékei a

$$P(x) = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + \dots + x(a_{n-1} + a_nx) \dots)) \quad (x \in \mathbb{R})$$

azonosság alapján az alábbi (fordított irányú) rekurzióval számíthatók ki:

$$y_n := a_n, \quad y_k := a_k + x y_{k+1} \quad (k = n-1, n-2, \dots, 2, 1, 0)$$

$$P(x) = y_0.$$

Az algebra alaptétele szerint bármely komplex együtthatós polinomnak van legalább egy komplex gyöke. Ha a λ_1 gyöke az n -ed fokú P polinomnak, akkor $(z - \lambda_1)$ osztója a polinomnak, azaz $P(z) = (z - \lambda_1)P_1(z)$ alakú, ahol P_1 $n-1$ -edfokú polinom. A P_1 $(n-1)$ -edfokú polinomnak is van komplex gyöke — legyen ez λ_2 —, ami egyben nyilván P -nek is gyöke. Folytatva az eljárást azt kapjuk, hogy a P polinom a gyökei segítségével a következőképpen írható fel:

1. Tétel. Legyen $P(z) := a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$ ($z \in \mathbb{C}$) egy komplex együtthatós, nem konstans, pontosan n -edfokú polinom. Ekkor léteznek olyan $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ komplex számok, amelyekkel a P polinom felírható

$$(2) \quad P(z) = a_n(z - \lambda_1)(z - \lambda_2) \dots (z - \lambda_n) \quad (z \in \mathbb{C})$$

alakban.

A (2) előállítás a P polinom **gyöktényezős alakjának** nevezzük. A λ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) komplex számokra (2) alapján nyilvánvalóan

$$(3) \quad P(\lambda_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

teljesül, azaz a λ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) számok a P **gyökei**, vagy **zérushelyei**.

A (2) előállításban szereplő λ_i számok nem feltétlenül különböznek egymástól. Ha a λ szám a $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ számok között pontosan m -szer fordul elő, akkor azt mondjuk, hogy a λ **gyök multiplicitása** m .

Tegyük fel, hogy a P -nek r számú, egymástól különböző gyöke van és jelöljük ezeket a $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ szimbólumokkal. Ha a λ_j multiplicitása m_j , akkor a (2) szorzat felírható a

$$P(z) = a_n(z - \lambda_1)^{m_1} \cdots (z - \lambda_r)^{m_r} \quad (z \in \mathbb{C})$$

alakban, ahol a $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ számok páronként különbözőek. Könnyen igazolható, hogy ez az előállítás — a tényezők sorrendjét leszámítva — egyértelmű. A fenti előállításában előforduló $(z - \lambda_j)^{m_j}$ ($z \in \mathbb{C}$) függvényeket a P **polinom gyöktényezőinek** nevezzük.

Az 1. Tételnek egy fontos következményét fogalmazzuk meg az alábbi állításban.

1. Következmény. *Ha valamely n -edfokú valós polinomnak n -nél több valós gyöke van, akkor a polinomnak minden együtthatója nulla.*

BIZONYÍTÁS. Tegyük fel, hogy P pontosan n -edfokú, azaz $a_n \neq 0$ és írjuk fel a P polinomot a (2) gyöktényezősz alakban. Minthogy P -nek n -nél több egymástól különböző valós gyöke van, ezért P -nek létezik olyan $\lambda \in \mathbb{R}$ gyöke, amelyre $\lambda \neq \lambda_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$). Következésképpen (2) alapján

$$0 = P(\lambda) = a_n(\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_n).$$

Minthogy $\lambda - \lambda_k \neq 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$), azért $a_n = 0$, s ezzel ellentmondásra jutottunk. \square

Emlékeztetünk arra, hogy a P és Q függvényt akkor tekintjük egyenlőnek, ha értelmezési tartományuk egyenlő, továbbá, ha az értelmezési tartomány bármely x elemére $P(x) = Q(x)$ teljesül. Polinomok esetén ez azzal ekvivalens, hogy az együtthatók egyenlők.

2. Következmény. *Legyen*

$$P(x) := a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n, \quad Q(x) := b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m \quad (x \in \mathbb{R})$$

két valós polinom. Ha $P = Q$, akkor $m = n$ és

$$a_0 = b_0, \quad a_1 = b_1, \quad \dots, \quad a_n = b_n.$$

BIZONYÍTÁS. Tegyük fel, hogy például $n \leq m$ és tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén legyen $a_{n+1} := a_{n+2} := \cdots a_m := 0$, továbbá

$$R(x) := P(x) - Q(x) = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + \cdots + (a_n - b_n)x^n + \cdots + (a_m - b_m)x^m.$$

Ekkor minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $R(x) = 0$, s ezért az 1. Következmény alapján $a_j - b_j = 0$ ($j = 0, 1, \dots, m$). \square

Az 1. Következményből egyszerűen adódik az alábbi

3. Következmény. A

$$h_k(x) := x^k \quad (x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N})$$

hatványfüggvények lineárisan függetlenek.

BIZONYÍTÁS. Tegyük fel, hogy a h_0, h_1, \dots, h_n függvények valamely lineáris kombinációja a zérus polinommal egyenlő, azaz minden $x \in \mathbb{R}$ számra

$$Q(x) := c_0 h_0(x) + c_1 h_1(x) + \dots + c_n h_n(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n = 0.$$

Ekkor a \mathbb{R} -nak minden eleme az n -edfokú Q polinomnak gyöke, s ezért az 1. Következmény alapján a Q valamennyi együtthatója 0. \square

A h_0 és a h_1 hatványfüggvényekből kiindulva a számmal való szorzás, az összeadás, kivonás, és szorzás műveletét véges sokszor alkalmazva minden polinomhoz eljuthatunk. Nyilvánvaló, hogy két polinom összege és szorzata is polinom, továbbá bármely polinom számszorosa szintén polinom.

Ismeretes, hogy az osztás általában már kivezet a polinomok köréből, az ún. **maradékos osztás** azonban mindig elvégezhető. Egyszerűen igazolható, hogy bármely P és Q polinomhoz egyértelműen létezik olyan S és R polinom, amelyre

$$P = QS + R, \quad \deg(R) < \deg(Q)$$

teljesül. S -et a P -nek Q -val való osztásánál kapott **hányadosának**, az R polinomot pedig **maradéknak** nevezzük. (Lásd a 2. Feladatot.)

Definíció. Legyenek P és Q valós együtthatós polinomok, ahol $Q \neq 0$ és jelölje $\Lambda_Q := \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$ a Q gyökeinek a halmazát. Az

$$S : \mathbb{R} \setminus \Lambda_Q \rightarrow \mathbb{R} : \quad x \mapsto S(x) := \frac{P(x)}{Q(x)}$$

utasítással értelmezett S függvényt **racionális (tört-)függvénynek** nevezzük.

A P polinomot S **számlálójának**, Q -t pedig az S **nevezőjének** nevezzük. A racionális függvények összességét a \mathcal{Q} szimbólummal fogjuk jelölni. Minthogy bármely $P \in \mathcal{P}$ polinom felírható P/h_0 alakban, azért $\mathcal{P} \subset \mathcal{Q}$.

Előfordulhat, hogy a P és Q polinomnak vannak közös gyökei. A megfelelő gyöktényezővel való egyszerűsítéssel olyan racionális függvényhez jutunk, amelyben a számlálónak

és a nevezőnek már nincsenek közös gyökei. \mathbb{Q} -beli függvények vizsgálatánál elegendő ilyen, tovább már nem egyszerűsíthető racionális függvényekre szorítkozni.

Ha P fokszáma kisebb Q fokszámánál, akkor P/Q -t **valódi** racionális függvénynek nevezzük. Maradékos osztást alkalmazva nyilvánvaló, hogy tetszőleges P/Q racionális függvény felírható

$$\frac{P}{Q} = S + \frac{R}{Q}$$

alakban, ahol $S \in \mathcal{P}$ és R/Q már valódi racionális függvény. Ez az előállítás lehetővé teszi, hogy bizonyos, racionális függvényekkel kapcsolatos kérdések vizsgálatában valódi racionális függvényekre szorítkozzunk.

1.5. Feladatok

1. Igazoljuk, hogy egy polinom számszorosa, két polinom összege és két polinom szorzata is polinom.
2. Legyen

$$P(x) := p_0 + p_1x + \cdots + p_nx^n, \quad Q(x) := q_0 + q_1x + \cdots + q_mx^m \quad (x \in \mathbb{R})$$

két adott polinom, ahol $p_n \neq 0, q_m \neq 0$ és $n \geq m$. Legyen továbbá

$$S(x) := s_0 + s_1x + \cdots + s_{n-m}x^{n-m}, \quad R(x) := r_0 + r_1x + \cdots + r_{m-1}x^{m-1} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

- a) Igazoljuk, hogy a

$$P = QS + R, \quad \deg(R) < \deg(Q)$$

egyenlőség az együtthatókra vonatkozó alábbi egyenletrendszerrel ekvivalens:

$$\begin{array}{rcl} s_{n-m}q_m & & = p_n \\ s_{n-m-1}q_m + s_{n-m}q_{m-1} & & = p_{n-1} \\ \dots\dots\dots & & \\ s_0q_m + s_1q_{m-1} + \cdots + s_mq_0 & & = p_m \\ s_0q_{m-1} + s_1q_{m-2} + \cdots + s_{m-1}q_0 & & = p_{m-1} + r_{m-1} \\ \dots\dots\dots & & \\ s_0q_1 + s_1q_0 & & = p_1 + r_1 \\ s_0q_0 & & = p_0 + r_0 \end{array}$$

- b) Mutassuk meg először, hogy az első $(n - m + 1)$ egyenletből álló rendszer egyértelműen megoldható az $s_{n-m}, s_{n-m-1}, \dots, s_0$ együtthatókra vonatkozóan. Ezt

felhasználva igazoljuk, hogy a maradék egyenletrendszernek is létezik egyértelmű megoldása az $r_{m-1}, r_{m-2}, \dots, r_0$ együtthatókra vonatkozóan.

3. Igazoljuk, hogy két racionális függvény összege, szorzata, hányadosa is racionális függvény.
4. Ábrázoljuk az alábbi $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ típusú függvényeket:

a) $\text{sign}, \text{abs}, \text{int}.$

b) $\text{sign} \circ \text{abs}, \text{abs} \circ \text{sign}, \text{int} \circ \text{abs}.$

c) $f(x) := \text{frac}(x) \quad (x \in \mathbb{R}), \quad f \circ \text{abs}, \quad f^2.$

d) $f(x) := \text{frac}(x^2) \quad (x \in \mathbb{R}), \quad g(x) := 1/x, \quad h(x) := \text{int}(1/x) \quad (x \in \mathbb{R}^*).$

2. Függvények határértéke

A matematikai analízis egyik alapvető fogalma a határérték. Ebben a fejezetben bevezetjük függvények határértékének a fogalmát és ismertetjük a határértékekkel kapcsolatos legfontosabb műveleti szabályokat.

A definíciók megfogalmazásában határérték-típusok szerint egységes szemléletre törek szünk. Ezzel összhangban az ún. **végesben vett véges**, a **végtelenben vett véges**, a **végesben vett végtelen**, valamint az ún. **egyoldali** határérték-típusokra közös értelmezést adunk. Megmutatjuk, hogy a bonyolultabbnak tűnő függvény-határértékek az ún. **átviteli elv** segítségével visszavezethetők sorozatok határértékére. Ez lehetővé teszi számunkra, hogy a sorozatokra vonatkozó, [A1]-ben igazolt tételeket felhasználhassuk.

2.1. Számhalmaz torlódási pontja

A valós számok halmazát bővítsük a $+\infty, -\infty$ — **az ún. ideális — elemekkel**. Az ideális elemekkel bővített halmazt $\overline{\mathbb{R}}$ -sal fogjuk jelölni. Emlékeztetünk arra, hogy \mathbb{R} -beli pontok $\epsilon > 0$ indexű **környezeteit** az alábbi módon értelmeztük: ha $a \in \mathbb{R}$, akkor

$$K_\epsilon(a) := \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \epsilon\},$$

ha pedig $a \in \{+\infty, -\infty\}$, akkor

$$K_\epsilon(+\infty) := \{x \in \overline{\mathbb{R}} : x > 1/\epsilon\}, \quad K_\epsilon(-\infty) := \{x \in \mathbb{R} : x < -1/\epsilon\}.$$

Az \mathbb{R} -beli számokat $\overline{\mathbb{R}}$ **véges elemeinek** is szokás nevezni. A környezet felhasználásával bevezetjük a torlódási pont fogalmát, amelyet a következő két definíció valamelyikével adjuk meg.

Definíció. Akkor mondjuk, hogy az $a \in \overline{\mathbb{R}}$ elem (pont) a $H \subseteq \mathbb{R}$ **valós számhalmaz torlódási pontja**,

- (A) ha az a pont bármely környezete végtelen sok H -beli elemet tartalmaz, röviden $\forall \epsilon > 0 : K_\epsilon(a) \cap H$ **végtelen halmaz**.
- (B) ha létezik olyan H -beli nem stacionárius pontsorozat, melynek határértéke az a pont.

A H halmaz torlódási pontjainak halmazát a H **derivált halmazának** nevezzük és a H' szimbólummal jelöljük.

Megjegyezzük, hogy egy sorozat akkor stacionárius, ha csak véges sok egymástól különböző tagja van. Az alábbiakban bebizonyítjuk, hogy a két definíció egymással ekvivalens.

1. Tétel. *A a torlódási pont két definíciója egymással ekvivalens.*

BIZONYÍTÁS. „(A) \Rightarrow (B)” : Megmutatjuk, hogy van olyan H -beli elemekből álló sorozat, amely a -hoz konvergál. Valóban, minthogy az a bármely környezetében végtelen sok H -beli elem van, ezért minden $n \in \mathbb{N}$ esetén van olyan $x_n \in H$, amelyre

$$\begin{aligned} |x_n - a| &< 2^{-n}, & \text{ha } a \in \mathbb{R}, \\ x_n &> 2^n, & \text{ha } a = \infty, \\ x_n &< -2^n, & \text{ha } a = -\infty \end{aligned}$$

teljesül. Következésképpen $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

„(B) \Rightarrow (A)” : Legyen $(x_n, n \in \mathbb{N})$ egy olyan H -beli pontsorozat, melynek határértéke a . A számsorozatok konvergencia-definíciójából következik, hogy az a szám tetszőleges környezete a sorozatnak majdnem minden elemét tartalmazza. Ez azt jelenti, hogy a sorozatnak és így a halmaznak is végtelen sok elemét tartalmazza, azaz állítsunkat bebizonyítottuk. \square

Egyszerűen igazolható, hogy *az $a \in \overline{H}$ pont akkor és csak akkor torlódási pontja a $H \subseteq \mathbb{R}$ halmaznak, ha az a pont minden környezete tartalmaz legalább egy a -tól különböző H -beli pontot.* Például ha $H = (1, 2] \cup \{3\}$, akkor $H' = [1, 2]$. A 3-nak van olyan környezete, amely nem tartalmaz 3-tól különböző H -beli pontot, ezért 3 a H halmaz izolált pontja.

Definíció. *A $H \subseteq \mathbb{R}$ halmaznak azokat a pontjait, amelyek nem tartoznak H' -höz, a H halmaz izolált pontjainak nevezzük.*

A torlódási pont értelmezéséből következik, hogy *a $b \in H$ pont pontosan akkor izolált pontja H -nak, ha b -nek van olyan környezete, amely nem tartalmaz b -től különböző H -beli elemet.* Bármely halmaz izolált pontjai — definíció szerint — a halmazhoz tartoznak, torlódási pontjaira azonban ez általában nem teljesül. Például a $H := \{1/n : n \in \mathbb{N}^*\} \subset \mathbb{R}$ valós számhalmaz minden eleme a szóban forgó halmaznak izolált pontja. Egyszerűen belátható, hogy H -nak a 0 pont az egyetlen torlódási pontja, amely azonban nem tartozik a H -hoz.

Véges halmaznak nyilván nincs torlódási pontja, végtelen halmaznak viszont mindig van torlódási pontja. Ez utóbbi állítás a Bolzano–Weierstrass-féle kiválasztási tétel egyszerű következménye.

\mathbb{R} részhalmazai között kitüntetett szerepet játszanak a zárt halmazok.

Definíció. *Akkor mondjuk, hogy a $H \subseteq \mathbb{R}$ halmaz **zárt**, ha tartalmazza összes véges torlódási pontját.*

Nyilvánvaló, hogy \mathbb{R} -nak *minden véges részhalmaza zárt*, valamint az 1. tétel alapján igaz a fenti definíció alábbi átfogalmazása.

2. Tétel. *A $H \subseteq \mathbb{R}$ halmaz akkor és csak akkor zárt, ha bármely H elemeiből alkotott konvergens sorozatnak a határértéke is H -hoz tartozik.*

BIZONYÍTÁS. i) Tegyük fel először, hogy a H halmaz zárt, és tekintsünk egy H -beli elemekből alkotott $(x_n, n \in \mathbb{N})$ konvergens sorozatot. Ha ez a sorozat stacionárius, azaz csak véges sok egymástól különböző tagja van, akkor határértéke valamelyik tagjával egyenlő, következésképpen H -hoz tartozik. Ha a konvergens sorozat nem stacionárius, akkor definíció szerint határértéke a H halmaz torlódási pontja, ezért H zártsága miatt a határérték H -nak eleme.

ii) Megfordítva, most tegyük fel, hogy H tartalmazza valamennyi, elemeiből alkotott konvergens sorozat határértékét. Ezek a pontok definíció szerint pont H véges torlódási pontjait adják. \square

Megjegyzések

1. A

$$\overline{H} := H \cup H'$$

halmazt a $H \subseteq \mathbb{R}$ számhalmaz **lezárásának** nevezzük.

2. Legyen $H := (a, b) \subset \mathbb{R}$ egy nyílt intervallum. Az $[a, b]$ intervallum bármely pontjának minden környezete végtelen sok H -beli pontot tartalmaz. Ha $c \notin [a, b]$, akkor c -nek van olyan környezete, amelyben nincs H -beli pont. Ez azt jelenti, hogy $H' = \overline{H} = [a, b]$.

3. Ha $H = [a, b]$ zárt intervallum, akkor $H' = [a, b] \subseteq [a, b]$ miatt a szóban forgó intervallum **zárt halmaz a most bevezetett definíció értelmében is**.

4. Az előző megfontoláshoz hasonlóan adódik, hogy minden $a \in \mathbb{R}$ és $\epsilon > 0$ esetén

$$K'_\epsilon(a) = \overline{K}_\epsilon(a) = \{z \in \mathbb{R} : |z - a| \leq \epsilon\}.$$

5. Bármely \mathbb{R} -beli környezet végtelen sok racionális számot tartalmaz. Következésképpen $\overline{\mathbb{R}}$ bármely eleme torlódási pontja a \mathbb{Q} halmaznak, azaz $\mathbb{Q}' = \overline{\mathbb{R}}$.

6. A $H = \mathbb{R}$ speciális esetben $H' = \overline{H} = \mathbb{R}$. Minthogy \mathbb{R} minden véges torlódási pontját tartalmazza, azért \mathbb{R} **zárt halmaz**.

2.2. Függvények határértéke

Ebben a pontban $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ típusú függvények határértékét definiáljuk értelmezési tartományuk torlódási pontjaiban.

Definíció. Akkor mondjuk, hogy a nem üres $H \subseteq \mathbb{R}$ halmazon értelmezett $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ **függvénynek az $a \in H'$ pontban van határértéke**, ha létezik olyan $A \in \mathbb{R}$ pont, amelynek bármely $K_\epsilon(A)$ környezetéhez létezik az $a \in H'$ pontnak olyan $K_\delta(a)$ környezete, hogy minden $x \in K_\delta(a) \cap H$, $x \neq a$ esetén $f(x) \in K_\epsilon(A)$ teljesül. Logikai jelöléseket használva:

$$(1) \quad \exists A \in \mathbb{R} \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in (K_\delta(a) \setminus \{a\}) \cap H : f(x) \in K_\epsilon(A).$$

Könnyű megmutatni, hogy **legfeljebb egy olyan $A \in \mathbb{R}$ létezik, amelyre az (1) feltétel teljesül.** Indirekt bizonyítást alkalmazva tegyük fel, hogy léteznek olyan $A_1, A_2 \in \mathbb{R}$, $A_1 \neq A_2$ elemek, amelyekre fennáll az (1) állítás. Mivel $A_1 \neq A_2$, ezért létezik olyan $\epsilon > 0$ szám, hogy

$$(2) \quad K_\epsilon(A_1) \cap K_\epsilon(A_2) = \emptyset.$$

Alkalmazzuk az (1) definíciót A helyett A_i -re $i = 1, 2$ esetén. Ekkor azt kapjuk, hogy létezik olyan $\delta_i > 0$ szám, amelyre minden $x \in K_{\delta_i}(a) \cap H$, $x \neq a$ pontban $f(x) \in K_\epsilon(A_i)$ teljesül. Legyen $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Minthogy az a pont a H halmaznak torlódási pontja, ezért H -nak van olyan a -tól különböző x pontja, amelyre $x \in K_\delta(a)$ teljesül. Ebben a pontban viszont (2) alapján

$$f(x) \in K_\epsilon(A_1), \quad f(x) \in K_\epsilon(A_2),$$

azaz az $f(x)$ pont a szóban forgó két környezetnek egy közös eleme. Mivel másrészt (2) alapján ezek a környezetek diszjunktak, ellentmondásra jutottunk. Ezzel a határérték egyértelműségére vonatkozó állítást bebizonyítottuk.

Definíció. Az (1) értelmezésben szereplő $A \in \mathbb{R}$ elemet az f **függvény a pontban vett határértékének** nevezzük és az alábbi szimbólumok valamelyikével jelöljük:

$$\lim_a f = A, \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A, \quad L_a(f) = A, \quad f(x) \rightarrow A, \quad \text{ha } x \rightarrow a.$$

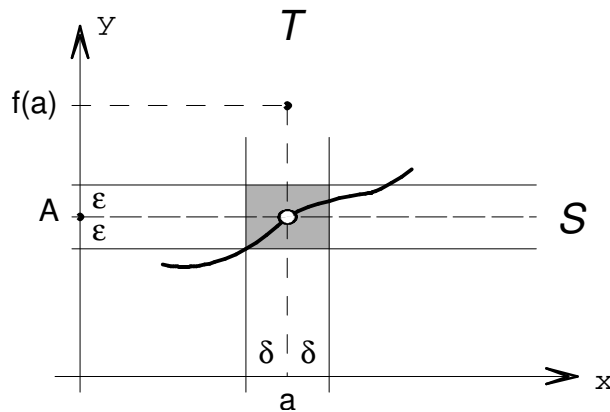
Az utolsó szimbólumot úgy olvassuk, hogy " $f(x)$ tart A -hoz, ha x tart a -hoz". A határérték értelmezése alapján nyilvánvaló, hogy az f függvénynek az a helyen vett határértéke független attól, hogy $a \notin H$ vagy $a \in H$, és ebben az utóbbi esetben a határérték független f -nek az a helyen felvett értékétől. Az $L_a(f)$ határérték tehát akkor is létezhet, ha f az a helyen nincs értelmezve, vagy ha értelmezve is van a függvény egy a pontban, a $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ határérték nem biztos, hogy éppen $f(a)$ -val egyenlő. A definícióból az is látható, hogy ha az $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ és a $g : H \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek valamely $H \cap K_\delta(a) \setminus \{a\}$

halmazra vonatkozó leszűkítései megegyeznek, akkor a két függvénynek egyszerre létezik, vagy nem létezik az a pontban a határértéke, és — az első esetben — $L_a(f) = L_a(g)$.

Az alábbiakban kiemeljük és szemléltetjük az általános definíció néhány fontos speciális esetét. Ha $a, A \in \mathbb{R}$, azaz a és A is **véges**, akkor **véges helyen vett véges határértékről** szokás beszélni. Az általános értelmezést erre az esetre felírva és a környezet definícióját felhasználva az alábbi, az eredetivel ekvivalens megfogalmazás adódik.

Definíció. Akkor mondjuk, hogy az $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek az $a \in H' \subseteq \mathbb{R}$ pontban a $A \in \mathbb{R}$ **szám a határértéke**, ha minden $\epsilon > 0$ számhoz létezik olyan ϵ -től függő $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ szám, hogy ha $0 < |x - a| < \delta$ és $x \in H$, akkor $|f(x) - A| < \epsilon$.

A határérték a függvény grafikus képét felhasználva a következőképpen szemléltethető. Vegyünk fel egy derékszögű koordinátarendszerben az $y = A$ egyenletű egyenesre szimmetrikusan egy tesztleges szélességű S „sávot”. Ekkor létezik olyan, az $x = a$ egyenletű egyenesre szimmetrikus T sáv, hogy az f függvény grafikonjának T -be eső $\{(x, f(x)) : x \in H \cap T\}$ része az $(a, f(a))$ pont kivételével az S „sávba” esik.



2.1. ábra

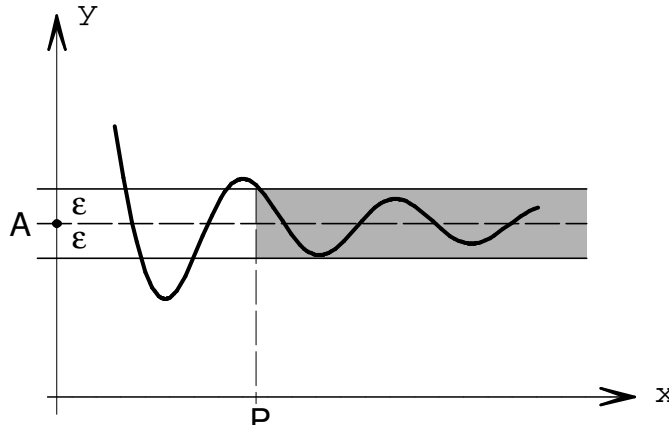
Az ún. **végtesenben vett határértékek** közül az alábbi esetet szemléltetjük. Tegyük fel, hogy az $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ függvény $H \subseteq \mathbb{R}$ értelmezési tartománya felülről nem korlátos. Ekkor $+\infty$ a H -nak torlódási pontja, következésképpen felvethető, hogy f -nek van-e határértéke a $+\infty$ -ben? Az általános értelmezést erre az esetre alkalmazva adódik az alábbi

Definíció. Tegyük fel, hogy a $H \subseteq \mathbb{R}$ halmaz felülről nem korlátos. Akkor mondjuk, hogy az $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek a $+\infty$ -ben $A \in \mathbb{R}$ a határértéke, ha bármely $\epsilon > 0$ számhoz létezik a $+\infty$ -nek olyan $K_\delta(+\infty)$ környezete, hogy ha $x \in H \cap K_\delta(+\infty)$, akkor $f(x) \in K_\epsilon(A)$. A $+\infty$ környezeteire más jelölést használva ez ekvivalens a következővel:

$$\forall \epsilon > 0 \exists P = P(\epsilon) > 0 \forall x \in H, x > P : f(x) \in K_\epsilon(A).$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy ebből az értelmezésből a $H = \mathbb{N}$ speciális esetben visszkapjuk a természetes számok halmazán értelmezett függvény, azaz a sorozat határértékének a definícióját.

Az $L_{+\infty}(f)$ határértéket a végesben vett véges hatértékhez hasonlóan szemléltethetjük. Vegyünk fel a derékszögű koordináta-rendszerben az $y = A$ egyenletű egyenesre szimmetrikusan egy 2ϵ szélességű sávot. Ehhez létezik olyan P szám, hogy a függvény grafikonjának az $\{(x, f(x)) : x \in H, x > P\}$ része a fenti sávba esik.



2.2. ábra

Az alábbiakban csak logikai jelöléseket használva leírjuk környezet-definíciók nélkül a különböző határérték-definíciókat.

Definíció. Tegyük fel, hogy a $H \subseteq \mathbb{R}$ halmaznak az $a \in \overline{\mathbb{R}}$ elem torlódási pontja, azaz $a \in H'$.

- (i) $a, A \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ („végesben véges határérték”):
 $\forall \epsilon > 0 \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 \forall x \in H \ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \epsilon$.
- (ii) $a \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ („végesben végtelen határérték”):
 $\forall R > 0 \exists \delta = \delta(R) > 0 \forall x \in H \ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > R$.
- (iii) $a \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ („végesben végtelen határérték”):
 $\forall r < 0 \exists \delta = \delta(r) > 0 \forall x \in H \ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < r$.
- (iv) $A \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ („végtelenben véges határérték”):
 $\forall \epsilon > 0 \exists P = P(\epsilon) > 0 \forall x \in H, \ x > P \Rightarrow |f(x) - A| < \epsilon$.
- (v) $A \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ („végtelenben véges határérték”):
 $\forall \epsilon > 0 \exists p = p(\epsilon) < 0 \forall x \in H, \ x < p \Rightarrow |f(x) - A| < \epsilon$.
- (vi) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ („végtelenben végtelen határérték”):
 $\forall R > 0 \exists p = p(R) < 0 \forall x \in H, \ x < p \Rightarrow f(x) > R$.
- (vii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ („végtelenben végtelen határérték”):
 $\forall r < 0 \exists p = p(R) < 0 \forall x \in H, \ x < p \Rightarrow f(x) < r$.
- (viii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ („végtelenben végtelen határérték”):
 $\forall R > 0 \exists P = P(R) > 0 \forall x \in H, \ x > P \Rightarrow f(x) > R$.
- (ix) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ („végtelenben végtelen határérték”):
 $\forall r < 0 \exists P = P(r) > 0 \forall x \in H, \ x > P \Rightarrow f(x) < r$.

A *sign* függvénynek a 0 pontban nincs határértéke (lásd az alábbi példákban). Véve azonban ennek a függvénynek akár a $(0, +\infty)$, akár a $(-\infty, 0)$ intervallumra vonatkozó leszűkítését, olyan függvényeket kapunk, amelyeknek már van határértékük a 0 pontban. Ezt úgy szoktuk szavakban kifejezni, hogy a *sign* **függvénynek a 0 pontban létezik a jobb- és a baloldali határértéke**. Ezzel az ún. egyoldali határértékekkel kapcsolatos az alábbi

Definíció. Legyen $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ ($H \subseteq \mathbb{R}$) egy valós változós függvény és tegyük fel, hogy az $a \in \overline{\mathbb{R}}$ elem a $H_a^+ := H \cap (a, +\infty)$ halmaz torlódási pontja. Akkor mondjuk, hogy az f függvénynek az a helyen létezik **jobboldali határértéke**, ha f -nek a H_a^+ halmazra vonatkozó leszűkítésének létezik határértéke az a pontban. Az f függvény a helyen vett jobb oldali határértékét az alábbi szimbólumok valamelyikével jelöljük:

$$\lim_{a+} f, \quad \lim_{x \rightarrow a+} f(x), \quad f(a+), \quad L_{a+}(f).$$

A fenti definícióban a H_a^+ halmazt a $H_a^- := H \cap (-\infty, a)$ halmazzal cserélve fel megkaphatjuk az a **helyen vett baloldali határérték** értelmezését. Magát a baloldali határértéket a

$$\lim_{a-} f, \quad \lim_{x \rightarrow a-} f(x), \quad f(a-), \quad L_{a-}(f)$$

szimbólumok valamelyikével jelöljük.

Tegyük fel, hogy az $a \in \mathbb{R}$ szám a H_a^+ és a H_a^- halmaznak is torlódási pontja. Egyszerűen belátható, hogy ilyenkor f -nek az a helyen akkor és csak akkor van határértéke, ha f -nek a -ban létezik a jobb- és baloldali határértéke, és $f(a+) = f(a-) = L_a(f)$.

Az alábbiakban megvizsgáljuk néhány egyszerű függvénynek a határértékét a definíció alapján.

1. Példa: Vizsgáljuk az $f(x) := c$ ($x \in \mathbb{R}$) **konstans függvény határértékét**, ahol $c \in \mathbb{R}$ rögzített szám. Könnyen belátható, hogy bármely $a \in \mathbb{R}$ pontban $L_a(f) = c$. Valóban, mivel ebben az esetben minden $x \in \mathbb{R}_1$ ponban $|f(x) - c| = 0$, ezért — az (1) definíciót alapul véve — az ottani feltétel minden $\epsilon > 0$ esetén bármely $\delta > 0$ választás mellett fennáll. Hasonlóan belátható, hogy f határértéke c -vel egyenlő plusz / mínusz végtelenben is.

2. Példa: A $g(x) := x$ ($x \in \mathbb{R}$) **identikus leképezésnek bármely $a \in \mathbb{R}'$ pontban létezik határértéke** és $L_a(g) = a$. Valóban tetszőleges $\epsilon > 0$ estén például az $\epsilon = \delta$ választás mellett nyilván

$$\forall x \in K_\delta(a) \setminus \{a\} : g(x) = x \in K_\epsilon(a).$$

Ez pontosan azt jelenti, hogy $L_a(g) = a$.

3. Példa: A $h(x) := 1/x$ ($x \in \mathbb{R}, x \neq 0$) függvényre $L_{+\infty}(h) = L_{-\infty}(h) = 0$. Valóban a $+\infty$ helyre szorítkozva vegyük figyelembe, hogy bármely $\epsilon > 0$ szám esetén a $0 < 1/x < \epsilon$ és az $x > 1/\epsilon$ egyenlőtlenségek egymással ekvivalensek. Ez azt jelenti, hogy például az $\epsilon = \delta$ választás mellett minden $x \in K_\delta(+\infty) = (1/\epsilon, +\infty)$ pontban $h(x) = 1/x \in K_\epsilon(0)$. Ezzel megmutattuk, hogy $L_{+\infty}(h) = 0$. Az állítás másik része hasonlóan igazolható.

4. Példa: A *sign* függvénynek a 0 helyen nincs határértéke. Valóban vegyük figyelembe, hogy a szóban forgó függvény értékkészlete az $R = \{+1, -1, 0\}$ halmaz. Az \mathbb{R} egyetlen R -hez nem tartozó A eleme sem lehet határértéke a *sign* függvénynek, hiszen minden ilyen A -nak van olyan környezete, amely egyetlen függvényértéket sem tartalmaz. Ha viszont $A \in R$, akkor például $\epsilon = 1/2$ választás esetén bármely $\delta > 0$ számot véve a $K_\delta(0)$ környezetnek mindig van olyan $x \neq 0$ pontja, hogy $\text{sign}(x) \notin K_\epsilon(A)$. Ezzel megmutattuk, hogy nincs olyan $A \in \mathbb{R}$ elem, amely eleget tenne a határérték definíciójában megfogalmazott feltételeknek.

Megjegyzések

1. A természettudományokban és a technikában gyakran élnek a következő szóhasználattal: „ $f(x)$ tetszősszerűen hibával megközelíti az A -t, ha x elég közel van a a -hoz” vagy „ $f(x)$ kicsit tér el az A -tól, ha x kicsit tér el a a -tól”, stb. Ezek a matematika nyelvén mind azt jelentik, hogy az f függvényeknek az a pontban A a határértéke.
2. Ha $A \in \mathbb{R}$, akkor azt szoktuk mondani, hogy f -nek az a helyen véges a határértéke. Ha $A = +\infty, -\infty$, akkor azt mondjuk, hogy f -nek az a helyen vett határértéke nem véges.

2.3. Átviteli elv

Már a bevezetésben említettük, hogy a függvény határértéke kapcsolatba hozható a sorozat határértékével. Erre vonatkozik az alábbi állítás.

Átviteli elv. Az $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ ($H \subseteq \mathbb{R}$) függvénynek az $a \in H'$ pontban akkor és csak akkor $A \in \mathbb{R}$ a határértéke, ha bármely olyan $(x_n, n \in \mathbb{N})$ sorozatra, amelyre

$$(3) \quad x_n \in H, \quad x_n \neq a \quad (n \in \mathbb{N}), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a,$$

a függvényértékek $(f(x_n), n \in \mathbb{N})$ sorozatának is van határértéke és

$$(4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A.$$

BIZONYÍTÁS. Az egyszerűség kedvéért csak a véges helyen vett véges határérték esetén bizonyítjuk be az állítást. A többi eset hasonlóan tárgyalható, illetve a környezetes határérték-definíciót használva egyszerre is lehetne igazolni a tételt.

Először megmutatjuk, hogy ha $L_a(f) = A$, akkor minden, a (3) feltételnek eleget tevő $(x_n, n \in \mathbb{N})$ sorozatra (4) teljesül. Az $L_a(f) = A$ definíciója szerint

$$(5) \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 \quad \forall x \in H \quad 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \epsilon.$$

Mivel az $(x_n, n \in \mathbb{N})$ sorozat határértéke a , azért erre a sorozatra — ϵ helyett δ -ra — felírva a sorozat határértékének definícióját azt kapjuk, hogy

$$\exists N = N(\delta) \in \mathbb{N} \quad \forall n > N : |x_n - a| < \delta.$$

Következésképpen (5) alapján

$$\forall n > N : |f(x_n) - A| < \epsilon.$$

Összefoglalva tehát azt kaptuk, hogy

$$\forall \epsilon > 0 \exists N = N(\delta, \epsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall n > N : |f(x_n) - A| < \epsilon,$$

s ezzel a bizonyítandó $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ állítást igazoltuk.

Megfordítva, most megmutatjuk, hogy ha minden, a (3) feltételnek eleget tevő sorozatra a függvényértékek sorozatának $A \in \mathbb{R}$ a határértéke, akkor az f függvénynek az a helyen van határértéke, és az A -val egyenlő. Indirekt módon bizonyítjuk az állítást. A tétel állításával ellentétben tegyük fel, hogy $L_a(f) = A$ nem teljesül. Ez részletesen szólva a következőt jelenti:

$$(6) \quad \exists \epsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x \in H \quad 0 < |x - a| < \delta : |f(x) - A| \geq \epsilon.$$

Ezt az állítást $\delta_n := 1/(n+1)$ ($n \in \mathbb{N}$) esetén alkalmazva és az ehhez a δ -hoz létező (6) tulajdonságú elemet x_n -nel jelölve azt kapjuk, hogy

$$\exists \epsilon > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \in H \quad 0 < |x_n - a| < \delta_n : |f(x_n) - A| \geq \epsilon.$$

Mivel $0 < |x_n - a| < \delta_n$ ($n \in \mathbb{N}$) és $(\delta_n, n \in \mathbb{N})$ zérussorozat, azért $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, ugyanakkor $|f(x_n) - A| \geq \epsilon$ ($n \in \mathbb{N}$) miatt az $(f(x_n), n \in \mathbb{N})$ sorozatnak nem lehet A a határértéke. Ezzel egy olyan $(x_n, n \in \mathbb{N})$ sorozatot kaptunk, amelyre (3) teljesül és (4) nyilván nem teljesül, s így ellentmondásra jutottunk. \square

Az átviteli elv értelmében egy

- $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek az $a \in H'$ pontban a határértéke nem az $A \in \overline{\mathbb{R}}$ elem, ha létezik olyan $(x_n \in H, n \in \mathbb{N}), (x_n \neq a, n \in \mathbb{N})$ pontsorozat, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, de $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \neq A$, illetve
- $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek az $a \in H'$ pontban nem létezik a határértéke, ha léteznek olyan $(x_n \in H, n \in \mathbb{N}), (y_n \in H, n \in \mathbb{N})$ $(x_n, y_n \neq a, n \in \mathbb{N})$ pontsorozatok, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$, de $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n)$.

Megjegyezzük, hogy ezt a tételt szokás a szakirodalomban a függvény-határérték **Heine-féle definíciójának** is nevezni.

2.4. Műveletek határértékekkel

Az átviteli elv segítségével a sorozatok határértékére vonatkozó, korábban megismert tételeket átfogalmazhatjuk függvény határértékekre.

3. Tétel. Legyen $H \subseteq \mathbb{R}$ és $a \in \overline{\mathbb{R}}$ a H halmaz torlódási pontja. Tegyük fel, hogy az $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ és a $g : H \rightarrow \mathbb{R}$ függvényeknek az a pontban van határértéke, és $L_a(f) = A$, $L_a(g) = B$ Ekkor

$$a) \quad L_a(f + g) = A + B,$$

$$b) \quad L_a(fg) = AB,$$

$$c) \quad L_a\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{A}{B}$$

feltéve, hogy a jobb oldalon álló műveleteknek van értelme.

A tétel állításának jobboldalán álló műveletek a „ $\infty - \infty$ ”, „ $0 \cdot \infty$ ”, „ $\frac{\infty}{\infty}$ ” esetek kivételével értelmezettek. Ha az előbb felsorolt esetek valamelyike áll elő, akkor a sorozatok határértékeinek meghatározásánál tanult átalakításokhoz hasonló átalakításokkal számítjuk ki az $f + g$, $f \cdot g$ és $\frac{f}{g}$ függvények határértékét az a pontban.

BIZONYÍTÁS. Legyen $(x_n, n \in \mathbb{N})$ olyan számsorozat, amelyre a (3) feltétel teljesül. Ekkor az átviteli elv alapján

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = B.$$

A sorozatok határértékére vonatkozó műveleti tulajdonságokat felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n) + g(x_n)) = A + B,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n)g(x_n)) = AB,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{A}{B}.$$

Minthogy ezek az egyenlőségek bármely, a (3) feltételt kielégítő sorozatra fennállnak, azért az átviteli elv ismételt alkalmazásával azt kapjuk, hogy valóban léteznek a $L_a(f + g)$, $L_a(fg)$, $L_a(f/g)$ határértékek, és azok a tételben megadott értékekkel egyenlők. Ezzel az állítást bebizonyítottuk. \square

A határérték és a \leq , illetve $<$ reláció kapcsolatára vonatkozik az alábbi állítás.

1. Következmény. Tegyük fel, hogy az $f, g : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ függvényeknek az $a \in (\alpha, \beta)$ helyen létezik a határértéke.

i) Ha $f(x) \leq g(x)$ ($x \in (\alpha, \beta)$), akkor $L_a(f) \leq L_a(g)$.

ii) Ha $L_a(f) < L_a(g)$, akkor a -nak van olyan $K_r(a)$ környezete, hogy $f(x) < g(x)$, ha $x \in K_r(a)$.

BIZONYÍTÁS. A ii) igazolásához írjuk fel a határérték definícióját. Ekkor az $\epsilon := (L_a(g) - L_a(f))/2$ számhoz létezik olyan $r > 0$ szám, hogy minden $x \in K_r(a)$ pontban a bizonyítandó

$$L_a(f) - \epsilon < f(x) < L_a(f) + \epsilon = L_a(g) - \epsilon < g(x) < L_a(g) + \epsilon$$

egyenlőtlenség teljesül.

Az i) rész a ii)-ből indirekt bizonyítással egyszerűen következik. Tegyük fel ugyanis, hogy $f(x) \leq g(x)$ $x \in (\alpha, \beta)$ és $L_a(f) > L_a(g)$. Ekkor ii) miatt létezik olyan $r > 0$ szám, hogy $f(x) > g(x)$, ha $x \in K_r(a) \subseteq (\alpha, \beta)$, ami ellentmondás, és ezt úgy oldhatjuk fel, ha indirekt állításunkat visszavonjuk. \square

Mivel a jobb- és bal oldali határértéket a függvény alkalmasan vett leszűkítésének határértékeként értelmeztük, azért az átviteli elv és a most igazolt műveleti szabályok — értelemszerű módosításokkal — az egyoldali határértékekre is érvényesek.

A monoton sorozatok határértékére vonatkozó tétel megfelelője érvényes a monoton függvényekre. Az alábbiakban a monotonitás fogalmát ismételjük át.

Definíció. Legyen $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ a $H \subseteq \mathbb{R}$ halmazon értelmezett függvény. Akkor mondjuk, hogy az f **függvény monoton növekedő**, ha bármely

$$x_1, x_2 \in H, \quad x_1 < x_2 : \quad f(x_1) \leq f(x_2)$$

teljesül. Ha a most megfogalmazott feltételben az egyenlőséget nem engedjük meg, azaz ha

$$\forall x_1, x_2 \in H, \quad x_1 < x_2 : \quad f(x_1) < f(x_2),$$

akkor azt mondjuk, hogy az f **szigorúan monoton növekedő**.

A fenti értelmezésben a függvényértékekre vonatkozó egyenlőtlenség irányát megváltoztatva eljutunk a monoton fogyó függvény fogalmához.

Definíció. Akkor mondjuk, hogy az $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ **függvény monoton fogyó**, ha

$$\forall x_1, x_2 \in H, x_1 < x_2 : f(x_1) \geq f(x_2).$$

Ha ehelyett

$$\forall x_1, x_2 \in H, x_1 < x_2 : f(x_1) > f(x_2),$$

akkor az f függvényt **szigorúan monoton fogyónak** nevezzük.

A monoton növekvő és monoton fogyó függvényeket — közös elnevezést használva — **monoton függvényeknek** nevezzük.

Az egyenlőtlenségre vonatkozó elemi tulajdonságokból következik, hogy minden $n \in \mathbb{N}^*$ számra $0 < x_1 < x_2$ esetén $x_1^n < x_2^n$ teljesül. Ez — a most bevezetett fogalmat használva — azt jelenti, hogy az

$$f(x) := x^n \quad (x \geq 0)$$

függvények minden $n \in \mathbb{N}^*$ kitevő esetén szigorúan monoton növekedők.

Monoton függvények egyoldali határértékeinek létezésére vonatkozik az alábbi állítás.

4. Tétel. Legyen $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ monoton függvény és tegyük fel, hogy az $a \in [-\infty, +\infty)$ pont a $H \cap (a, +\infty)$ halmaznak torlódási pontja. Ekkor f -nek létezik a jobb oldali határértéke és

$$f(a+) = \inf\{f(x) : x \in H, x > a\},$$

ha f monoton növekedő, illetve

$$f(a+) = \sup\{f(x) : x \in H, x > a\},$$

ha f monoton fogyó.

BIZONYÍTÁS. Az állításnak csak a monoton növekedő függvényekre vonatkozó részét igazoljuk. A másik fele hasonlóan látható be.

Legyen $A := \inf\{f(x) : x \in H, x > a\}$. Az alsó határ értelmezése alapján egyrészt minden $x \in H, x > a$ esetén $f(x) \geq A$, másrészt

$$\forall \epsilon > 0 \quad (A + \epsilon > A) \quad \exists x_1 \in H, \quad x_1 > a : f(x_1) > A.$$

Mivel f monoton növekedő, ezért a fentiek alapján

$$A - \epsilon < A \leq f(x) < A + \epsilon \quad (a < x < x_1).$$

Ezzel beláttuk, hogy A bármely ϵ sugarú környezetéhez van olyan $\delta > 0$ szám a -nak olyan $\delta > 0$ szám ($\delta := x_1 - a$), hogy minden $x \in (a, a + \delta)$ pontban $f(x) \in K_\epsilon(A)$ teljesül. Ezzel az állítást bebizonyítottuk. \square

A most igazolt tételből — a bal- és jobboldali határérték szerepét felcserélve — adódik a következő

5. Tétel. Legyen $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ monoton függvény és tegyük fel, hogy az $a \in (-\infty, +\infty]$ pont a $H \cap (-\infty, a)$ halmaznak torlódási pontja. Ekkor f -nek létezik a baloldali határértéke és

$$f(a-) = \sup\{f(x) : x \in H, x < a\},$$

ha f monoton növekedő,

$$f(a-) = \inf\{f(x) : x \in H, x < a\},$$

ha f monoton fogyó.

Ez a tétel az előzőhöz hasonlóan igazolható.

2.5. Nevezetes határértékek

Ebben a pontban megvizsgálunk néhány függvényosztályt határérték szempontjából. Polinomokkal, racionális függvényekkel, valamint trigonometrikus és exponenciális függvényekkel foglalkozunk. Ezzel összhangban $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ típusú függvényeknek valamely $\alpha \in \mathbb{R}$ helyen vett határértékének, illetve az egyoldali határérték létezésének kérdésével foglalkozunk.

2.5.1. Polinomok határértéke

Először véges helyen vett határértékeket vizsgálunk. Legyenek a_0, a_1, \dots, a_n adott valós számok. Megmutatjuk, hogy a

$$P(x) := a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \quad (x \in \mathbb{R})$$

polinomnak minden $\alpha \in \mathbb{R}$ helyen létezik határértéke és az $P(\alpha)$ -val egyenlő:

$$L_\alpha(P) = P(\alpha).$$

Valóban, az előző pont 1. és 2. példája szerint a konstans függvénynek és az identikus leképezésnek létezik határértéke az α helyen és az az α helyen felvett függvényértékkel

egyenlő. A szorzatfüggvény határértékére vonatkozó állításból következik, hogy az

$$f_k(x) := a_k x^k \quad (x \in \mathbb{R}, k = 0, 1, \dots, n)$$

függvényeknek létezik az α helyen határértéke és az $f_k(\alpha)$ -val egyenlő. Végül az összegfüggvény határértékére vonatkozó állítás alapján

$$L_\alpha(P) = \sum_{k=0}^n L_\alpha(f_k) = \sum_{k=0}^n a_k \alpha^k = P(\alpha).$$

A végtelen helyen vett határérték kérdésére a következő pontban visszatérünk.

2.5.2. Racionális függvények határértéke

Legyen P és Q polinom, ahol Q nem a zérus polinom. Jelölje Λ a Q zérushelyeinek halmazát. A hányadosfüggvény határértékére vonatkozó állítás alapján *minden*, a Q zérushelyeitől különböző $\alpha \in \mathbb{R}$ helyen P/Q -nak létezik határértéke és

$$L_\alpha\left(\frac{P}{Q}\right) = \frac{P(\alpha)}{Q(\alpha)} \quad (\alpha \notin \Lambda).$$

Ha α a Q polinomnak zérushelye, akkor — figyelembe véve a Q gyöktényezős felbontását — a szóban forgó polinom felírható

$$Q(x) = (x - \alpha)^r S(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

alakban, ahol $r \in \mathbb{N}^*$ és az S polinom nem tűnik el az α helyen. A P/Q racionális függvényre tehát

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{1}{(x - \alpha)^r} \frac{P(x)}{S(x)} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \Lambda)$$

teljesül. Mivel a P/S függvénynek létezik határértéke az α helyen, azért elegendő az

$$r_{\alpha,n}(x) := \frac{1}{(x - \alpha)^n} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{\alpha\})$$

függvény határértékét vizsgálni. Egyszerűen — például az átviteli elv alapján — igazolható, hogy

$$L_\alpha(r_{\alpha,n}) = +\infty \quad (n = 2k, k \in \mathbb{N}^*).$$

Páratlan n esetén nem létezik a szóban forgó valós függvény határértéke, ugyanis ugyanis csak az átviteli elv alkalmazásával adódik, hogy a jobb- és baloldali határérték különbözik, és

$$\begin{aligned} L_{\alpha+}(r_{\alpha,n}) &= +\infty \quad (n = 2k + 1, k \in \mathbb{N}^*), \\ L_{\alpha-}(r_{\alpha,n}) &= -\infty \quad (n = 2k + 1, k \in \mathbb{N}^*). \end{aligned}$$

A végtelenben vett határérték vizsgálatához célszerű először a

$$h_n(x) := x^n \quad (x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z})$$

hatványfüggvényekkel foglalkozni. Ha $n < 0$, akkor a h_n függvénynek a $+\infty, -\infty$ helyeken a határértéke 0. Ha $n = 0$, akkor az említett helyeken 1 a határérték. Áttérve az $n \in \mathbb{N}^*$ esetek vizsgálatára könnyen igazolható, hogy

$$L_{+\infty}(h_n) = +\infty, \quad L_{-\infty}(h_n) = (-1)^n(+\infty).$$

Az általános eset vizsgálatához írjuk fel a racionális függvényt

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0} = x^{n-m} \frac{a_n + \dots + a_1/x^{n-1} + a_0/x^n}{b_m + \dots + b_1/x^{m-1} + b_0/x^m} =: \\ &= x^{n-m} R(x) \quad (x \in \mathbb{R} \setminus (\Lambda \cup \{0\})) \end{aligned}$$

alakban, ahol $b_m \neq 0$. A h_n hatványfüggvények határértékére vonatkozó, előbb említett állítások alapján nyilvánvaló, hogy az R racionális függvénynek minden nem véges helyen létezik határértéke és az a_n/b_m -mel egyenlő. Ezt és a h_{n-m} határértékére vonatkozó állítást felhasználva megkaphatjuk a racionális függvény határértékét:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{n-m} R(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } n < m, \\ \frac{a_n}{b_m}, & \text{ha } n = m, \\ \text{sign}\left(\frac{a_n}{b_m}\right) \cdot \infty, & \text{ha } n > m. \end{cases}$$

2.5.3. Gyökfüggvények határértéke

A pozitív egész kitevőjű gyökfüggvényt a következőképpen értelmezzük:

Definíció. A **páros kitevőjű gyökfüggvény** értelmezési tartománya a nemnegatív valós számok halmaza, hozzárendelési utasítása:

$$\sqrt[2k]{\cdot} : [0, +\infty) \rightarrow [0, \infty) \quad x \mapsto y, \quad \text{melyre } y^{2k} = x \quad (x \geq 0, k \in \mathbb{N}^*).$$

A **páratlan kitevőjű gyökfüggvény** értelmezési tartománya a v valós számok halmaza, hozzárendelési utasítása:

$$\sqrt[2k+1]{\cdot} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto y, \quad \text{melyre } y^{2k+1} = x \quad (x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}).$$

A gyökfüggvények értékkészletét a 3. fejezetben fogjuk megindokolni. Mivel a $^{2m+1}\sqrt{x}$ ($x \in \mathbb{R}$) függvény páratlan, ezért elegendő a határértékeket a pozitív félegyenesen vizsgálni, mert ebből már következik a megfelelő állítás a negatív félegyenesre is. Legyen $\alpha \in (0, \infty)$ tetszőleges pozitív valós szám, és $(x_n, n \in \mathbb{N})$ ($x_n \neq \alpha, x_n > 0, n \in \mathbb{N}$) egy hozzá konvergáló tetszőleges számsorozat. Ekkor minden $m \in \mathbb{N}^*$ esetén

$$0 < |\sqrt[m]{x_n} - \sqrt[m]{\alpha}| = \frac{|x_n - \alpha|}{\sqrt[m]{x_n^{m-1}} + \sqrt[m]{x_n^{m-2}}\alpha + \dots + \alpha^{m-1}} < \frac{1}{\alpha^{m-1}}|x_n - \alpha|,$$

és ebből a rendőr-elvet alkalmazva kapjuk, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[m]{x_n} = \sqrt[m]{\alpha}$, és ezzel az átviteli elv alapján beláttuk, hogy $\lim_{x \rightarrow \alpha} \sqrt[m]{x} = \sqrt[m]{\alpha}$ ($\alpha > 0$). Az $\alpha = 0$ pontban csak jobboldali határértéket vizsgálunk. Belátjuk, hogy

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad 0 < x - 0 < \delta \Rightarrow |\sqrt[m]{x} - \sqrt[m]{0}| < \epsilon \quad (m \in \mathbb{N}^*).$$

Vegyük észre, hogy $\delta := \epsilon^m$ választása esetén teljesül a fenti állítás. Figyelembe véve a paritást beláttuk, hogy *a gyökfüggvény határértéke értelmezési tartományának minden pontjában megegyezik a helyettesítési értékkel.*

A plusz végtelenben a gyökfüggvény határértéke plusz végtelen tetszőleges gyökkitevő esetén, ugyanis a

$$\forall R > 0 \quad \exists P = P(R) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^+, \quad x > P \Rightarrow \sqrt[m]{x} > R \quad (m \in \mathbb{N}^*)$$

definíció teljesül $P := R^m$ választás esetén. Figyelembe véve a paritást megállapíthatjuk, hogy *páratlan gyökkitevő esetén a a gyökfüggvény határértéke mínusz végtelenben mínusz végtelen.*

2.5.4. Trigonometrikus függvények határértéke

A trigonometrikus függvények (sinus, cosinus, tangens, cotangens) definíciója és tulajdonságai jól ismertek (lásd [1]), ezért hosszadalmasságuk miatt ennek precíz bevezetésétől eltekintünk, de az alábbiakban összefoglaljuk főbb tulajdonságaikat.

- $D_{\sin} = D_{\cos} = \mathbb{R}$, $R_{\sin} = R_{\cos} = [-1, +1]$,
 $D_{\text{tg}} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, $D_{\text{ctg}} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, $R_{\text{tg}} = R_{\text{ctg}} = \mathbb{R}$.
- $\text{tg } x = \frac{\sin x}{\cos x}$ ($x \in D_{\text{tg}}$), $\text{ctg } x = \frac{\cos x}{\sin x}$ ($x \in D_{\text{ctg}}$),
- A *sin* függvény
 szigorúan nő a $[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$,
 szigorúan csökken a $[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi]$ ($k \in \mathbb{Z}$) intervallumokon ;
- A *cos* függvény
 szigorúan nő a $[-\pi + 2k\pi, 0 + 2k\pi]$,
 szigorúan csökken a $[0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi]$ ($k \in \mathbb{Z}$) intervallumokon ;

A tg függvény szigorúan nő a $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$ ($k \in \mathbb{Z}$) intervallumokon ;
 A ctg függvény szigorúan csökken a $(0 + k\pi, \pi + k\pi)$ ($k \in \mathbb{Z}$) intervallumokon ;

d) Mindegyik függvény periodikus,

o a \sin , és a \cos függvény főperiódusa 2π :

$$\sin(x) = \sin(x + 2\pi), \cos(x) = \cos(x + 2\pi) \quad (x \in \mathbb{R});$$

o a tg , és a ctg függvény főperiódusa π :

$$tg(x) = tg(x + \pi) \quad (x \in D_{tg}), \quad ctg(x) = ctg(x + \pi) \quad (x \in D_{ctg});$$

e) Mindegyik függvény rendelkezik szimmetriatulajdonsággal, azaz

o a \sin függvény páratlan: $\sin(-x) = -\sin(x)$, ($x \in \mathbb{R}$);

o a \cos függvény páros: $\cos(-x) = \cos(x)$, ($x \in \mathbb{R}$);

o a tg függvény páratlan: $tg(-x) = -tg(x)$ ($x \in D_{tg}$);

o a ctg függvény páratlan: $ctg(-x) = -ctg(x)$ ($x \in D_{ctg}$);

f) Mindegyik függvénynek van zérushelye:

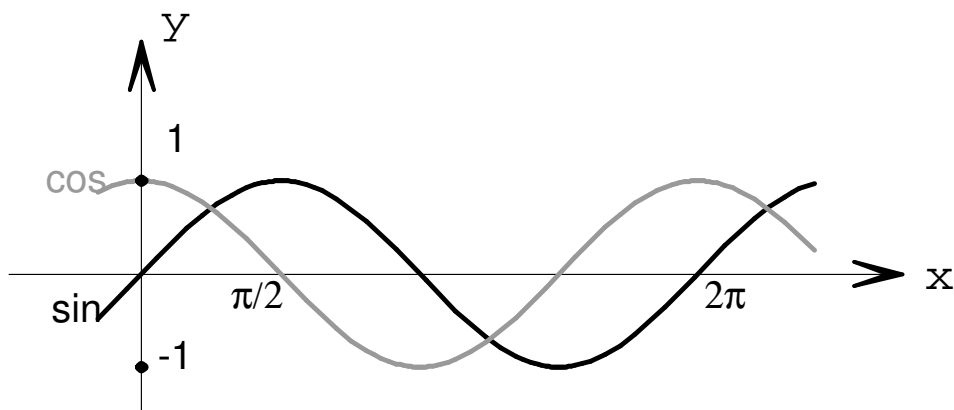
o $\sin(x) = 0$, ha $x = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$);

o $\cos(x) = 0$, ha $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$);

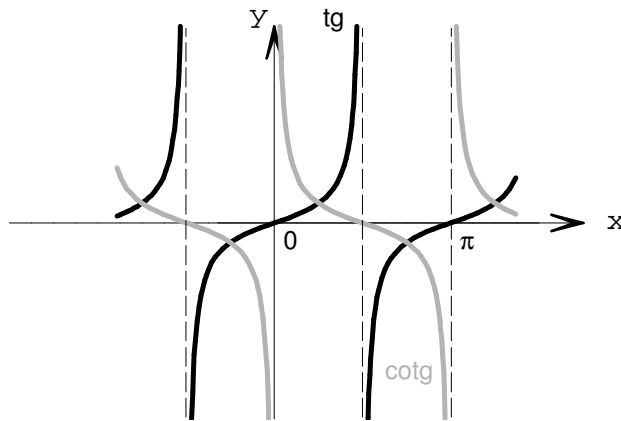
o $tg(x) = 0$, ha $x = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$);

o $ctg(x) = 0$, ha $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$);

A függvények grafikus képeit mutatják a 2.3., 2.4. ábrák.



2.3. ábra



2.4. ábra

Egyszerűen igazolható, hogy periodikus függvénynek nem létezik határértéke a $\pm\infty$ helyeken, ezért *egyik trigonometrikus függvénynek sem létezik határértéke a plusz/mínusz végtelenben*. Az $f(x) = \sin x$ esetén például legyen

$$(x_n := 2n\pi, n \in \mathbb{N}), \quad \text{és} \quad (y_n := \frac{\pi}{2} + 2n\pi, n \in \mathbb{N})$$

két $+\infty$ -be tartó számsorozat ($\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = +\infty$). A függvényértékek sorozata ekkor két különböző konstans-sorozat, $(f(x_n) = 0, n \in \mathbb{N})$, $(f(y_n) = 1, n \in \mathbb{N})$, ezért nyilván határértékeik különböznek, így az átviteli elv értelmében valóban nem létezik a határértéke a sinus függvénynek a $+\infty$ -ben.

Ávages helyen vett határértékekkel foglalkozik a

6. Tétel. *A sinus és cosinus függvényeknek minden pontban megegyezik a határértéke a helyettesítési értékkel, azaz*

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \sin x = \sin \alpha, \quad \lim_{x \rightarrow \alpha} \cos x = \cos \alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

BIZONYÍTÁS. Először az $\alpha = 0$ pontra, és a sinus függvényre látjuk be az állítást, azaz logikai jelölésekkel írva, igazoljuk, hogy

$$(7) \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad 0 < |x - 0| < \delta \Rightarrow |\sin x - \sin 0| < \epsilon.$$

Mivel minden $x \in \mathbb{R}$ esetén igaz a $|\sin x| \leq |x|$ egyenlőtlenség, ezért a $\delta := \epsilon$ választás esetén (7) teljesül.

Most megmutatjuk, hogy az $\alpha = 0$ pontban a cosinus függvény is rendelkezik ezzel a tulajdonsággal, azaz

$$(8) \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad 0 < |x| < \delta \Rightarrow |\cos x - \cos 0| < \epsilon.$$

Feltesszük, hogy $\delta \leq \frac{\pi}{2}$, azaz $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Ekkor alkalmazhatjuk az alábbi becslést:

$$|\cos x - 1| = \frac{|\cos^2 x - 1|}{|1 + \cos x|} = \frac{\sin^2 x}{|1 + \cos x|} < \sin^2 x < |x|^2.$$

Látható, hogy a $\delta := \min(\frac{\pi}{2}, \sqrt{\epsilon})$ választás esetén (8) teljesül.

Az addíciós tételek, az átviteli elv és a sorozatok határértékére vonatkozó műveleti tulajdonságok alkalmazásával tetszőleges pontban meghatározhatjuk a határértékeket. Legyen ugyanis $\alpha \in \mathbb{R}$ tetszőleges, és $(x_n, n \in \mathbb{N})$ α -hoz konvergáló tetszőleges számsorozat ($\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha$). Ekkor a $h_n := x_n - \alpha$ ($n \in \mathbb{N}$) számsorozat nullához konvergál, és ezért

$$\begin{aligned} \sin x_n &= \sin(\alpha + h_n) = \sin \alpha \cdot \cos h_n + \cos \alpha \cdot \sin h_n \rightarrow \\ &\rightarrow \sin \alpha \cdot 1 + \sin \alpha \cdot 0 = \sin \alpha \quad (n \rightarrow \infty), \\ \cos x_n &= \cos(\alpha + h_n) = \cos \alpha \cdot \cos h_n - \sin \alpha \cdot \sin h_n \rightarrow \\ &\rightarrow \cos \alpha \cdot 1 - \sin \alpha \cdot 0 = \cos \alpha \quad (n \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

amivel állításunkat az átviteli elv ismételt alkalmazásával beláttuk. \square

A tangens és a cotangens függvény határértékeivel foglalkozik a

7. Tétel. *A tangens és cotangens függvények határértéke értelmezési tartományuk minden pontjában megegyezik a helyettesítési értékkel, azaz*

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \alpha} \operatorname{tg} x &= \operatorname{tg} \alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}), \\ \lim_{x \rightarrow \alpha} \operatorname{ctg} x &= \operatorname{ctg} \alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}), \end{aligned}$$

továbbá

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \alpha+} \operatorname{tg} x &= -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \alpha-} \operatorname{tg} x = +\infty \quad (\alpha \in \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}), \\ \lim_{x \rightarrow \alpha+} \operatorname{ctg} x &= +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \alpha-} \operatorname{ctg} x = -\infty \quad (\alpha \in \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}). \end{aligned}$$

BIZONYÍTÁS. Mivel $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ ($x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$), és $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ ($x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$), ezért a műveleti tulajdonságok, és a 6. tétel alapján az állítás első fele azonnal adódik.

Az állítás második felének igazolásához vegyük észre, hogy

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} + 2k\pi} \sin x &= 1, & \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi} \sin x &= -1 \quad (k \in \mathbb{Z}), \\ \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} + 2k\pi+} \cos x &= 0-, & \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi+} \cos x &= 0+ \quad (k \in \mathbb{Z}), \\ \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} + 2k\pi-} \cos x &= 0+, & \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi-} \cos x &= 0- \quad (k \in \mathbb{Z}), \\ \lim_{x \rightarrow 2k\pi} \cos x &= 1, & \lim_{x \rightarrow (2k+1)\pi} \cos x &= -1 \quad (k \in \mathbb{Z}), \\ \lim_{x \rightarrow 2k\pi+} \sin x &= 0+, & \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi+} \sin x &= 0- \quad (k \in \mathbb{Z}), \\ \lim_{x \rightarrow 2k\pi-} \sin x &= 0-, & \lim_{x \rightarrow (2k+1)\pi-} \cos x &= 0+ \quad (k \in \mathbb{Z}), \end{aligned}$$

ahol $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = 0 \pm$ azt jelenti, hogy f a pozitív illetve negatív számokon keresztül tart a nullába. Ezeket a határértékeket összevetve a műveleti tulajdonságokkal a tétel második fele is adódik. \square

2.5.5. A $\frac{\sin x}{x}$ ($x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) függvény határértéke

Vezessk be az $f(x) := \frac{\sin x}{x}$ ($x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) jelölést! A 2.2. pont 2. példája, és a 6. tétel alapján az f függvény határértéke értelmezési tartományának minden pontjában megegyezik a helyettesítési értékkel.

Mivel egy nullához konvergáló számsorozat és egy korlátos számsorozat szorzata nullához konvergál, és a sinus függvény korlátos, ezért az átviteli elv alapján az f függvénynek nulla a határértéke a plusz illetve mínusz végtelenben.

Már csak az a kérdés, hogy a függvényünknek a nulla pontban létezik-e a határértéke. Mivel a kérdéses határérték " $\frac{0}{0}$ " alakú határozatlansági eset, ezért ezt nem tudjuk a műveleti tulajdonságok alapján leolvasni.

Tekintsük az egység sugarú kört és egy $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ középponti szöget (2.5. Ábra).

*****2.5. ábra*****

Ekkor az ábráról könnyen leolvasható, hogy fennállnak az alábbi egyenlőtlenségek: OAM háromszög területe $<$ OAM körcikk területe $<$ OAT háromszög területe. Beírva a területek értékeit, a

$$\frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\operatorname{tg} x}{2}, \quad \text{ha } 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

egyenlőtlenséghez jutunk. Az egyenlőtlenségeket megszorozva az ezen az intervallumon pozitív $\frac{2}{\sin x}$ függvényvel kapjuk:

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}, \quad \text{ha } 0 < x < \frac{\pi}{2},$$

ahonnan következik, hogy

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1, \quad \text{ha } 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

Mivel mindhárom függvény (cosinus, f, konstans) páros, ezért az utolsó egyenlőtlenség teljesül a $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ intervallumon is.

Most vizsgáljuk meg f határértékét a nulla pontban az átviteli elv segítségével. Legyen x_n ($n \in \mathbb{N}$), ($x_n \neq 0, n \in \mathbb{N}$) egy tetszőleges nullához konvergáló számsorozat! Ekkor a sorozatokra vonatkozó konvergencia-definíció alapján létezik egy $N \in \mathbb{N}$ küszöbszám, hogy $-\frac{\pi}{2} < x_n < \frac{\pi}{2}$, ha $n > N$. Ekkor viszont

$$\cos x_n < \frac{\sin x_n}{x_n} < 1, \quad \text{ha } n > N$$

is teljesül. Mivel $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos x_n = \cos 0 = 1$, ezért a rendőrelv alkalmazásával a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin x_n}{x_n} = 1$ határérték adódik, ami az átviteli elv alapján a $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ függvényhatárértéket eredményezi. Eredményeinket összefoglalja a

8. Tétel. Az $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ függvény határértéke értelmezési tartományának minden pontjában megegyezik a helyettesítési értékkel, azaz

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{\sin x}{x} = \frac{\sin \alpha}{\alpha} \quad (\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

továbbá

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

2.5.6. Exponenciális függvény határértéke

Ebben a pontban definiáljuk a valós exponenciális függvényt, igazoljuk az exponenciális függvény függvényegyenletét, és megvizsgáljuk határértékét.

Mint ismeretes, a^n ($n \in \mathbb{N}^*, a > 0$) alatt értjük azt a pozitív valós számot, amelyet úgy kapunk, hogy a -t n -szer összeszorozzuk önmagával, azaz $a^n := a \cdot \dots \cdot a$, és $a^0 := 1$. Ha $r = \frac{p}{q}$ ($p, q \in \mathbb{N}^*$), akkor $a^r := \sqrt[q]{a^p}$, $a^{-r} := 1/\sqrt[q]{a^p}$ definíció szerint. A középiskolában eddig jutunk el az exponenciális függvény definíciójában, ugyanis a valós exponenciális függvény pontos definíciójához szükség van az analízis eszköztárára.

Felmerül a kérdés, hogy mit értünk egy szám irracionális kitevős hatványán. Például mivel egyenlő a $a^{\sqrt{2}}$ ($a > 0$)? A $\sqrt{2}$ -t tudjuk racionális számok sorozatával közelíteni.

Például az $(x_n := 10^{-n} \cdot [\sqrt{2} \cdot 10^n], n \in \mathbb{N})$, és az $(y_n := ([\sqrt{2} \cdot 10^n] + 1) \cdot 10^{-n}, n \in \mathbb{N})$ racionális számokból álló számsorozattal alulról, illetve felülről közelít $\sqrt{2}$ -höz, azaz

$$\begin{aligned} x_0 &= 1 < \sqrt{2} < 2 = y_0, \\ x_1 &= 1,4 < \sqrt{2} < 1,5 = y_1, \\ x_2 &= 1,41 < \sqrt{2} < 1,42 = y_2, \\ &\vdots \\ x_n &< \sqrt{2} < y_n, \\ &\vdots \end{aligned}$$

és $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = \sqrt{2}$. Ha $a > 1$, akkor feltételezve az exponenciális függvény monotonitását — amit később bebizonyítunk — kapjuk, hogy

$$a^{x_n} < a^{\sqrt{2}} < a^{y_n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Az $(a^{x_n}, n \in \mathbb{N})$ sorozat monoton nő és korlátos, az $(a^{y_n}, n \in \mathbb{N})$ sorozat pedig monoton csökken és szintén korlátos, tehát mindkét sorozat konvergens. Ha a két sorozat határértéke megegyezik, akkor ez pontosan $a^{\sqrt{2}}$ -vel kell, hogy egyenlő legyen. Ezt a gondolatmenetet terjesztjük ki az a szám tetszőleges valós kitevőjű hatványának bevezetésekor.

Definíció. Minden $a > 0$ pozitív valós szám, és $x \in \mathbb{R}$ valós szám esetén

$$(9) \quad a^x := \lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n},$$

ahol $(r_n, n \in \mathbb{N})$ tetszőleges x -hez konvergáló racionális számsorozat, azaz $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = x$ ($r_n \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}^*$).

Ez a definíció sok kérdést vet fel. Az sem egyértelmű például, hogy a (9)-ben definiált sorozat konvergens. A definíció "jóságát" igazolja a

9. Tétel. Legyen $x \in \mathbb{R}$ tetszőleges valós szám.

- (i) Tetszőleges $(r_n, n \in \mathbb{N}^*)$ x -hez konvergáló számsorozat esetén a (9) definícióban szereplő $(a^{r_n}, n \in \mathbb{N})$ sorozat konvergens.
- (ii) (9)-ben a^x értéke független az $(r_n, n \in \mathbb{N}^*)$ sorozat választásától.
- (iii) Ha $x \in \mathbb{Q}$ racionális szám, akkor (9) visszaadja az eredeti definíciót.

BIZONYÍTÁS. Ad (i). A Cauchy-féle konvergencia-kritérium segítségével igazoljuk az állítást. Az r_n sorozat konvergens, ezért korlátos, azaz léteznek $k, K \in \mathbb{Q}$ racionális

számok, hogy $k \leq r_n \leq K$ teljesül minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. A gyökfüggvény és a pozitív egész kitevőjű hatványfüggvény monotonitásából pedig következik, hogy

$$\begin{aligned} a^k &\leq a^{r_n} \leq a^K, \text{ ha } a \geq 1 \\ a^k &\geq a^{r_n} \geq a^K, \text{ ha } a < 1, \end{aligned}$$

azaz minden $a \in \mathbb{R}$ esetén léteznek $\bar{k}, \bar{K} \in \mathbb{R}^+$ pozitív valós számok, hogy $\bar{k} \leq a^{r_n} \leq \bar{K}$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Ezeket a tulajdonságokat és a racionális kitevő esetén a hatványozás azonosságait kihasználva azt kapjuk, hogy

$$(10) \quad |a^{r_n} - a^{r_m}| = |a^{r_m}| \cdot |a^{r_n - r_m} - 1| \leq \bar{K} \cdot |a^{r_n - r_m} - 1|$$

feltéve, hogy $r_m < r_n$. (Ellenkező esetben r_m -et emeltünk volna ki.) Mivel az $(r_n, n \in \mathbb{N})$ sorozat konvergens, ezért Cauchy-sorozat, azaz

$$(11) \quad \forall \bar{\epsilon} > 0 \quad \exists N = N(\bar{\epsilon}) \in \mathbb{N}, \text{ ha } n, m > N, \text{ akkor } |r_n - r_m| < \bar{\epsilon}.$$

Válasszuk $\bar{\epsilon}$ -t $\frac{1}{\ell}$ -nek ($\ell \in \mathbb{N}^*$). Mivel $\lim_{\ell \rightarrow \infty} \sqrt[\ell]{a} = 1$, ezért tetszőleges ϵ esetén létezik olyan $\ell_0 \in \mathbb{N}^*$ index, hogy $|\sqrt[\ell]{a} - 1| < \frac{\epsilon}{\bar{K}}$. Legyen N az $\bar{\epsilon} := \frac{1}{\ell_0}$ -hoz tartozó küszöbszám (9)-ben. Eredményeinket összevetve (11)-gyel azt kapjuk, hogy

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}, \text{ ha } n, m > N, \text{ akkor } |a^{r_n} - a^{r_m}| < \epsilon,$$

figyelembe véve, hogy $r_m < r_n$, azaz beláttuk, hogy $(a^{r_n}, n \in \mathbb{N})$ Cauchy-sorozat, amiből következik, hogy konvergens.

Ad (ii). Ezt az állítást indirekt módon bizonyítjuk. Tegyük fel, hogy létezik két sorozat $((r'_n, n \in \mathbb{N}), (r''_n, n \in \mathbb{N}))$, melyek x -hez konvergálnak, de a (9)-ben szereplő határértékeik különböznek, azaz

$$(12) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} r'_n = \lim_{n \rightarrow \infty} r''_n = x, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a^{r'_n} \neq \lim_{n \rightarrow \infty} a^{r''_n}.$$

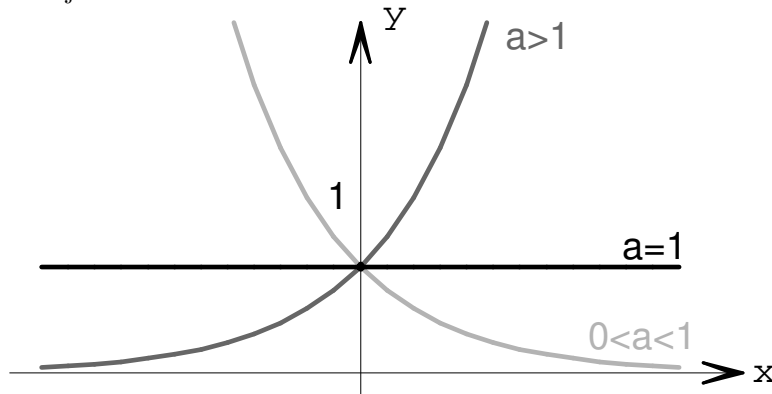
A két sorozat fésűs egyesítése $(r_n, n \in \mathbb{N})$ ($r_{2k} := r'_k, r_{2k+1} := r''_k, k \in \mathbb{N}$) szintén x -hez konvergál. Az (i) állítás miatt az $(a^{r_n}, n \in \mathbb{N})$ sorozat konvergens, viszont (12)-ből pedig az következik, hogy a szóban forgó sorozat divergens, mert van két különböző határértékhez konvergáló részsorozata. Ezzel ellentmondásra jutottunk, azaz állításunkat bebizonyítottuk.

Ad (iii). Legyen $x := r \in \mathbb{Q}$. (ii) szerint tetszőleges racionális számokból álló x -hez konvergáló sorozatot véve a^x definíciója egyértelmű. Legyen $(r_n := r, n \in \mathbb{N})$ racionális konstans-sorozat. Ekkor az $(a^{r_n}, n \in \mathbb{N})$ sorozat is konstans-sorozat, és határértéke a^r , azaz beláttuk, hogy az ún. **permanencia-elv** teljesül. \square

A (9) alatti definícióval tehát minden valós szám esetén értelmeztük a a^x -et. Az

$$\exp_a(x) := a^x \quad (x \in \mathbb{R})$$

utasítással értelmezett $\exp_a : (-\infty, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ függvényt a **alapú exponenciális függvénynek** nevezzük. Az exponenciális függvény értékkészletének igazolására a következő fejezetben visszatérünk, de a definícióból azonnal látszik, hogy a^x nemnegatív minden valós x esetén, mert minden $r \in \mathbb{Q}$ és $a > 0$ esetén $a^r > 0$. A függvény grafikonját a 2.6. ábrán szemléltetjük.



2.6. ábra

Az exponenciális függvény ismert tulajdonságait csak racionális kitevő esetén igazoljuk középiskolában, ezen ismereteket felhasználva a valós számok esetén igazoljuk a megfelelő tulajdonságokat a tételben.

10. Tétel.

- (i) Az \exp_a függvény szigorúan monoton nő, ha $a > 1$, szigorúan monoton csökken, ha $0 < a < 1$, és konstans, ha $a = 1$.
- (ii) $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ ($x, y \in \mathbb{R}$), azaz speciálisan $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ ($x \in \mathbb{R}$)
- (iii) $(a^x)^y = a^{xy}$, ($x, y \in \mathbb{R}$)

BIZONYÍTÁS. Ad (i). $a = 1$ esetén az állítás egyértelmű, $a > 1$ esetén igazoljuk az állítást, a $0 < a < 1$ eset bizonyítása hasonlóan történik, ezt az olvasóra bízunk. Tegyük fel, hogy $a > 1$, és legyenek $x_1 < x_2$ tetszőleges valós számok. Mivel minden intervallum tartalmaz végtelen sok racionális számot, ezért találunk r_1, r_2 racionális számokat, melyekre $x_1 < r_1 < r_2 < x_2$ teljesül. Tekintsünk két racionális számokból álló x_1 -hez illetve x_2 -höz konvergáló számsorozatot, azaz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r'_n = x_1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} r''_n = x_2 \quad (r'_n, r''_n \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}).$$

A számsorozatok konvergencia-definíciója alapján létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy ha $n > N$, akkor

$$r'_n < r_1 < r_2 < r''_n.$$

Mivel racionális kitevő esetén az exponenciális függvény monotonitása ismert, ezért ha $n > N$, akkor

$$a^{r'_n} < a^{r^1} < a^{r^2} < a^{r''_n}$$

egyenlőtlenség. Alkalmazva a határérték monotonitására vonatkozó tételt (sorozatokra vonatkozó tétel), és véve a $n \rightarrow \infty$ határátmenetet kapjuk, hogy

$$a^{x_1} \leq a^{r^1} < a^{r^2} \leq a^{x_2},$$

azaz definíció szerint beláttuk, hogy az exponenciális függvény szigorúan monoton nő, ha $a > 1$.

Ad (ii). Legyenek r'_n, r''_n ($n \in \mathbb{N}$) x -hez illetve y -hoz konvergáló, racionális számokból álló számsorozatok. Ekkor a számsorozatok határértékére vonatkozó műveleti tulajdonságok alapján $\lim_{n \rightarrow \infty} (r'_n + r''_n) = x + y$. Kihasználva, hogy (ii) érvényes racionális kitevők esetén, és alkalmazva a (9) alatti definíciót kapjuk, hogy

$$a^{x+y} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{r'_n + r''_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{r'_n} a^{r''_n} = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a^{r'_n} \right) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a^{r''_n} \right) = a^x a^y,$$

amivel állításunkat beláttuk.

Ad (iii). Legyenek r'_n, r''_n ($n \in \mathbb{N}$) racionális számokból álló x -hez illetve y -hoz konvergáló számsorozatok, mint (ii)-ben. Becsüljük az $|(a^x)^y - a^{xy}|$ értéket! A háromszögegyenlőtlenség alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} |(a^x)^y - a^{xy}| &= |(a^x)^y - (a^x)^{r''_n} + (a^x)^{r''_n} - (a^{r'_m})^{r''_n} + (a^{r'_m})^{r''_n} - a^{xy}| \leq \\ &\leq |(a^x)^y - (a^x)^{r''_n}| + |(a^x)^{r''_n} - (a^{r'_m})^{r''_n}| + |(a^{r'_m})^{r''_n} - a^{xy}|. \end{aligned}$$

Mivel $\lim_{n \rightarrow \infty} r''_n = y$, ezért (9) alapján $\lim_{n \rightarrow \infty} (a^x)^{r''_n} = (a^x)^y$, azaz létezik egy $N_1 \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy $|(a^x)^y - (a^x)^{r''_n}| < \frac{\epsilon}{3}$, ha $n > N_1$.

Másrészt, mivel $(r'_n, n \in \mathbb{N})$ racionális számsorozat, ezért $t^{r'_n}$ ($t > 0$) minden $n \in \mathbb{N}$ esetén egy $t^{\frac{p}{q}}$ ($p, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$) alakú függvény, amiről az átviteli elv alkalmazásával be lehet látni, hogy értelmezési tartományának minden pontjában megegyezik határértéke a helyettesítési értékével, mivel a hatványfüggvény és a gyökfüggvény is rendelkezik ezekkel a tulajdonságokkal. Azaz minden $n \in \mathbb{N}$ szám esetén, mivel (9) alapján $\lim_{m \rightarrow \infty} a^{r'_m} = a^x$, ezért $\lim_{m \rightarrow \infty} (a^{r'_m})^{r''_n} = (a^x)^{r''_n}$, és létezik egy $N_2 = N_2(n, \epsilon) \in \mathbb{N}$ küszöb, hogy $|(a^x)^{r''_n} - (a^{r'_m})^{r''_n}| < \frac{\epsilon}{3}$, ha $m > N_2$.

Harmadrészt, mivel r'_n, r''_n ($n \in \mathbb{N}$) racionális számok, ezért $(a^{r'_m})^{r''_n} = a^{r'_m r''_n}$, és mivel $\lim_{n, m \rightarrow \infty} r'_m r''_n = xy$, ezért (9) alapján $\lim_{n, m \rightarrow \infty} (a^{r'_m})^{r''_n} = a^{xy}$, azaz létezik olyan

$N_3 = N_3(\epsilon) \in \mathbb{N}$ küszöbszám, hogy $|(a^{r'_m})^{r''_n} - a^{xy}| < \frac{\epsilon}{3}$, ha $n, m > N_3$.

Azt kaptuk, hogy tetszőlegesen kicsi $\epsilon > 0$ szám, és alkalmasan választott $n, m \in \mathbb{N}$ esetén ($n > \max N_1, N_3, m > \max N_2(n, \epsilon), N_3$) $|(a^x)^y - a^{xy}| < \epsilon$, azaz mivel $|(a^x)^y - a^{xy}|$ konstans, ez csak úgy teljesülhet, ha ez a konstans nulla, és ezzel beláttuk (iii)-t. \square

Megejegyezzük, hogy (ii)-t szokás az **exponenciális függvény függvényegyenletének** is nevezni. Az exponenciális függvény végtelenben vett határértékeire a 3. fejezetben visszatérünk, a véges helyen vett határértékről szól a

11. Tétel. Az exponenciális függvény határértéke értelmezési tartományának minden pontjában megegyezik a helyettesítési értékkel, azaz

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} a^x = a^\alpha \quad (a > 0, \alpha \in \mathbb{R}),$$

továbbá

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x &= +\infty, & \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x &= 0 \quad (a > 1), \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x &= 0, & \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x &= +\infty \quad (0 < a < 1), \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x &= 1, & \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x &= 1 \quad (a = 1). \end{aligned}$$

BIZONYÍTÁS. Ha $a = 1$, akkor az exponenciális függvény egy konstans függvény, azaz a 2.2. pont 1. példája alapján a tétel állítása teljesül.

Először véges helyen vizsgáljuk a határértéket. Ha $a > 0, a \neq 1$, akkor először belátjuk, hogy az állítás teljesül az $\alpha = 0$ pontban. Az átviteli elv segítségével bizonyítunk. Legyen $(x_n, n \in \mathbb{N})$ egy nullához konvergáló számsorozat, azaz

$$\forall \bar{\epsilon} > 0 \quad \exists N = N(\bar{\epsilon}) \in \mathbb{N}, \quad \text{ha } n > N, \quad \text{akkor } |x_n| < \bar{\epsilon}.$$

Legyen $\bar{\epsilon} := \frac{1}{m}$ ($m \in \mathbb{N}^*$). Ekkor

$$|x_n| < \frac{1}{m} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{m} < x_n < \frac{1}{m},$$

ha $n > N(\frac{1}{m})$. Ha $a > 1$, akkor

$$a^{-\frac{1}{m}} < a^{x_n} < a^{\frac{1}{m}} \quad \text{és} \quad a^{-\frac{1}{m}} < a^0 = 1$$

az exponenciális függvény monotonitása miatt, és

$$\begin{aligned} 0 &< a^{x_n} - 1 < a^{\frac{1}{m}} - a^{-\frac{1}{m}}, & \text{ha } x_n > 0, \\ 0 &\leq 1 - a^{x_n} < 1 - a^{-\frac{1}{m}}, & \text{ha } x_n \leq 0. \end{aligned}$$

Ugyanezt a gondolatmenetet végrehajtva $0 < a < 1$ esetre azt kapjuk, hogy

$$|a^{x_n} - 1| < |a^{\frac{1}{m}} - a^{-\frac{1}{m}}|, \quad \text{ha } (a > 0, a \neq 1, n > N(\frac{1}{m})).$$

Mivel $\lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{a} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[m]{a}} = 1$, ezért tetszőleges pozitív $\epsilon > 0$ számhoz létezik olyan $N_1 \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy

$$|\sqrt[m]{a} - 1| < \frac{\epsilon}{2}, \quad \left| \frac{1}{\sqrt[m]{a}} - 1 \right| < \frac{\epsilon}{2},$$

ha $m > N_1$. Eredményeinket összefoglalva azt kaptuk, hogy ha lerrögzítünk egy $m_0 > N_1$ természetes számot, akkor

$$|a^{x_n} - 1| < |a^{\frac{1}{m_0}} - a^{-\frac{1}{m_0}}| \leq |a^{\frac{1}{m_0}} - 1| + |a^{-\frac{1}{m_0}} - 1| < \epsilon,$$

ha $n > N(\frac{1}{m_0})$, azaz $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{x_n} = a^0 = 1$. Mivel $(x_n, n \in \mathbb{N})$ tetszőleges nullához konvergáló sorozat volt, ezért az átviteli elv alapján beláttuk, hogy $\lim_{x \rightarrow 0} a^x = a^0 = 1$ minden $a > 0, a \neq 1$ esetén.

Most legyen $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tetszőleges nullától különböző valós szám, és $(x_n, n \in \mathbb{N})$ legyen tetszőleges α -hoz konvergáló számsorozat. A $(h_n := x_n - \alpha, n \in \mathbb{N})$ számsorozat nullához konvergál. Az exponenciális függvény függvényegyenletét alkalmazva kapjuk:

$$0 \leq |a^{x_n} - a^\alpha| = a^\alpha |a^{x_n - \alpha} - 1| = a^\alpha |a^{h_n} - 1|.$$

Mivel az exponenciális függvénynek a nulla pontban a határértéke megegyezik a helyettesítési értékkel, ezért a fenti egyenlőtlenség jobboldala nullához konvergál, és a rendő-elv alapján $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{x_n} = a^\alpha$, amiből az átviteli elv alapján állításunk következik.

Mivel az exponenciális függvény szigorúan monoton, ezért biztosan van határértéke plusz és mínusz végtelenben is. Legyen ugyanis $(x_n, n \in \mathbb{N})$, és $(y_n, n \in \mathbb{N})$ tetszőleges valós számsorozatok, melyekre

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow -\infty} y_n = -\infty.$$

Tegyük fel, hogy $x_n > 0, y_n < 0$ ($n \in \mathbb{N}$). Ekkor nyilván

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} [x_n] = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} [x_n] + 1 = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow -\infty} [y_n] + 1 = -\infty, \quad \lim_{n \rightarrow -\infty} [y_n] = -\infty,$$

és az első kettő sorozat természetes számokból álló sorozat, míg a második kettő sorozat negatív egész számokból álló számsorozat, $[x_n] \leq x_n < [x_n] + 1$, $[y_n] \leq y_n < [y_n] + 1$ ($n \in \mathbb{N}$), valamint az exponenciális függvény monotonitása miatt

$$\begin{aligned} a^{[x_n]} &\leq a^{x_n} < a^{[x_n]+1} & a^{[y_n]} &\leq a^{y_n} < a^{[y_n]+1} & (a > 1, n \in \mathbb{N}) \\ a^{[x_n]} &\geq a^{x_n} > a^{[x_n]-1} & a^{[y_n]} &\geq a^{y_n} > a^{[y_n]-1} & (0 < a < 1, n \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

Mivel az $(a^n, n \in \mathbb{N})$ mértani sorozat határértéke

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a^{-n} = 0 \quad (a > 1),$$

ezért

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} a^{[x_n]} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} a^{[x_n]+1} = +\infty & \lim_{n \rightarrow +\infty} a^{[y_n]} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} a^{[y_n]+1} = 0 \quad (a > 1), \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} a^{[x_n]} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} a^{[x_n]+1} = 0 & \lim_{n \rightarrow +\infty} a^{[y_n]} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} a^{[y_n]+1} = +\infty \quad (0 < a < 1). \end{aligned}$$

A rendőr elv alapján

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} a^{x_n} &= +\infty & \lim_{n \rightarrow +\infty} a^{y_n} &= 0 \quad (a > 1), \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} a^{x_n} &= 0 & \lim_{n \rightarrow +\infty} a^{y_n} &= +\infty \quad (0 < a < 1), \end{aligned}$$

amiből az átviteli elv alkalmazásával az állítást kapjuk. \square

2.5.7. Az $(1 + \frac{1}{x})^x$ függvény határértéke

Ebben a pontban egy nevezetes határértéket fogunk igazolni, nevezetesen belátjuk, hogy

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e,$$

ahol e a természetes számot jelöli. Ehhez azt kell belátni, hogy

$$(13) \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists P = P(\epsilon) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad |x| > P \Rightarrow \left| \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x - e \right| < \epsilon.$$

Legyen $\epsilon > 0$ tetszés szerinti előre adott szám. Mivel $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, és $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e}{n} = 0$, ezért bármilyen $\epsilon > 0$ számhoz, így $\epsilon/4$ -hez is létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy

$$(14) \quad \frac{e}{n} < \frac{\epsilon}{4}, \quad \text{és} \quad \left| \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e \right| < \frac{\epsilon}{4},$$

ha $n \geq N$. Legyen $P := N + 2$. Belátjuk, hogy ezzel a P -vel teljesül (13). Tegyük fel, hogy $|x| > P$.

Ha $x > 0$, akkor $m := [x] \geq N + 1 = P - 1$ teljesül, ahol $[x]$ x egész részét jelöli. Figyelembe véve, hogy az $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, n \in \mathbb{N}$ sorozatnak az e egy felső korlátja, valamint (14)-et

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1} = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \left(1 + \frac{1}{m}\right) < e \left(1 + \frac{1}{m}\right) < e + \frac{\epsilon}{4} < e + \frac{\epsilon}{2},$$

valamint

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &> \left(1 + \frac{1}{[x] + 1}\right)^{[x]} = \left(1 + \frac{1}{m+1}\right)^m = \left(1 + \frac{1}{m+1}\right)^{m+1} \left(1 + \frac{1}{m+1}\right)^{-1} \\ &> \left(e - \frac{\epsilon}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{m+2}\right) > e - \frac{\epsilon}{4} - \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4m+8} > e - \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

adódik. Ebből következik, hogy ha $x > 0$, és $x > P$, akkor $\left| \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x - e \right| < \epsilon$.

Ha $x < 0$, és $|x| > P$, akkor

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \left(1 - \frac{1}{|x|}\right)^{-|x|} = \left(\frac{|x|}{|x|-1}\right)^{|x|} = \left(1 + \frac{1}{|x|-1}\right)^{|x|-1} \left(1 + \frac{1}{|x|-1}\right).$$

Innen felhasználva a pozitív x -ekre kapott becslést ($|x| - 1 > N$), adódik, hogy

$$e - \epsilon < \left(e - \frac{\epsilon}{2}\right) \cdot 1 < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < \left(e + \frac{\epsilon}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{N}\right) < e + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} = e + \epsilon,$$

azaz (13) valóban teljesül, ha $|x| > P$.

2.5.7. Hiperbolikus függvények határértéke

A hiperbolikus függvényeket a természetes alapú exponenciális függvények segítségével értelmezzük:

Definíció. A **sinus hiperbolikus** \sinh , illetve a **cosinus hiperbolikus** \cosh függvények értelmezési tartománya a valós számok halmaza, hozzárendelési utasítása pedig

$$\cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

E definíció alapján nyilvánvaló, hogy

$$\begin{aligned} \cosh(x) &\geq 1 \quad (x \in \mathbb{R}), \quad \sinh(x) > 0 \quad (x > 0), \\ \sinh(x) &= -\sinh(-x) \quad (x \in \mathbb{R}), \text{ azaz a } \sinh \text{ függvény páratlan,} \\ \cosh(x) &= \cosh(-x) \quad (x \in \mathbb{R}), \text{ azaz a } \cosh \text{ függvény páros.} \end{aligned}$$

A \sinh függvény az \mathbb{R} -en, a \cosh függvény a $[0, \infty)$ intervallumon szigorúan monoton növekedő. A definíció alapján nyilvánvaló, hogy

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \cosh(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \cosh(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \sinh(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sinh(x) = +\infty,$$

valamint, hogy

$$\lim_{x \rightarrow a} \cosh(x) = \cosh(a), \quad \lim_{x \rightarrow a} \sinh(x) = \sinh(a) \quad (a \in \mathbb{R}).$$

Innen következik, hogy

$$R_{\sinh} = \mathbb{R}, \quad R_{\cosh} = [1, \infty),$$

aminek indoklására 3. fejezetben visszatérünk. Felhasználva az exponenciális függvény függvényegyenletét, és a \sinh és \cosh függvények definícióját, igazolható, hogy a hiperbolikus függvényekre teljesülnek az

- a) $\sinh(x_1 + x_2) = \sinh x_1 \cosh x_2 + \cosh x_1 \sinh x_2 \quad (x_1, x_2 \in \mathbb{R}),$
- b) $\cosh(x_1 + x_2) = \cosh x_1 \cosh x_2 + \sinh x_1 \sinh x_2 \quad (x_1, x_2 \in \mathbb{R}),$
- c) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \quad (x \in \mathbb{R})$

összefüggések, melyek közül az első kettőt addíciós összefüggéseknek, míg a harmadikat négyzetes összefüggéseknek nevezzük (lásd a 10. feladatot). A hiperbolikus függvényekre vonatkozó négyzetes összefüggés a következőképpen interpretálható. Minden $t \in \mathbb{R}$ valós szám esetén a $(\cosh t, \sinh t) \in \mathbb{R}^2$ pontok rajta vannak az $x^2 - y^2 = 1$ ($x > 0$) egyenletű hiperbolaágon. A függvények nevében szereplő hiperbolikus jelző erre a geometriai kapcsolatra utal.

A trigonometrikus függvények mintájára bevezetjük tgh és $ctgh$ függvényeket.

Definíció. A

$$tgh(x) := \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad (x \in \mathbb{R}),$$

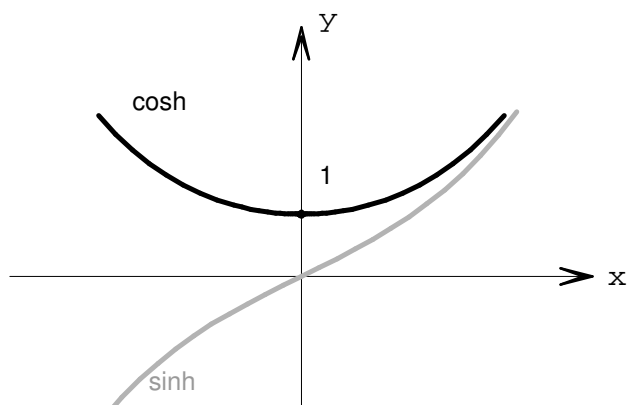
$$ctgh(x) := \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \quad (x \in \mathbb{R}, x \neq 0)$$

utasítással értelmezett tgh és $ctgh$ függvényeket **tangens hiperbolikus-**, illetve **kotangens hiperbolikus függvénynek** nevezzük.

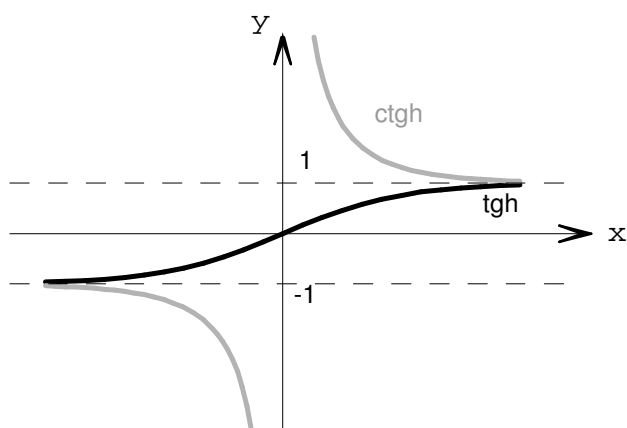
A fenti értelmezések alapján nyilvánvaló, hogy

- a) $D_{tgh} = \mathbb{R}, \quad R_{tgh} = (-1, 1),$
 $D_{ctgh} = \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad R_{ctgh} = (-\infty, -1) \cup (1, \infty).$
- b) a tgh függvény szigorúan növekvő.
- c) $tgh(x) = \frac{1}{ctgh(x)} \quad (x \in \mathbb{R}, x \neq 0), \quad tgh(-x) = -tgh(x) \quad (x \in \mathbb{R}).$
- d) $\lim_{x \rightarrow \infty} tgh(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} tgh(x) = -1$
- e) $\lim_{x \rightarrow a} tgh(x) = tgh(a) \quad (a \in \mathbb{R}).$

Az alábbi ábrákon a \sinh , \cosh , \tanh és \coth függvények grafikonját szemléltetjük.



2.7. ábra



2.8. ábra

2.6. Feladatok

Az alábbi feladatokban szereplő függvények értelmezési tartományát külön nem tüntettük fel. Ez definíció szerint \mathbb{R} -nek az a legtágabb részhalmaza, amelyen a szóban forgó műveleteknek, illetve függvényeknek van értelme.

1. Igazoljuk az alábbi határértékeket definíció alapján:

$$a) \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{2x+1} = \frac{1}{7},$$

$$b) \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-1}{x-3} = \frac{1}{2},$$

$$c) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x+5}{(x-1)^2} = \infty,$$

$$d) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+x+5}{3x^2-2x+1} = \frac{2}{3},$$

$$e) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3+5}{4x^3-x^2+1} = \frac{1}{4},$$

$$f) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-x+1}{x-3} = \infty,$$

$$g) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^4-5x+7}{2x^2+x+1} = \infty,$$

$$h) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^5+x^4}{x^2-8} = -\infty.$$

2. Határozzuk meg az alábbi határértékeket, ha léteznek:

$$a) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x},$$

$$b) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3-3x+1}{x-4},$$

$$c) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4+3x^2}{x^5+x^3+2x^2},$$

$$d) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-1}{2x^2+1},$$

$$e) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4+2x^2-3}{x^2-3x+2},$$

$$f) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3}{2x^2-1} - \frac{1}{x^3-3x+2} \right),$$

$$g) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right),$$

$$h) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^4-4x^3+1}{(x-1)^2},$$

$$i) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+x}{3x^2-x},$$

$$j) \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4},$$

$$k) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^3-x^2-5x-2}{x^3-4x-x^2+4},$$

$$\ell) \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^3+11x^2+8x-4}{2x^3-5x^2-14x+8}.$$

3. Határozzuk meg az alábbi jobb-, illetve baloldali határértékeket:

$$a) \quad \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{x-1}{|x-1|},$$

$$b) \quad \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{x}{x-2},$$

$$c) \quad \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{x-1}{|x-1|},$$

$$d) \quad \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{x}{x-2}.$$

4. Legyen $m, n \in \mathbb{N}$. Határozzuk meg az alábbi határértékeket:

$$a) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n-1}{x-1} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

$$b) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m-1}{x^n-1} \quad (m, n \in \mathbb{N}),$$

$$c) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{n}{1-x^n} - \frac{m}{1-x^m} \right) \quad (m, n \in \mathbb{N}).$$

5. Határozzuk meg az alábbi függvények határértékét:

$$\begin{array}{ll}
 a) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+1}}, & b) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+x+1}{\sqrt{x^4+1}}, \\
 c) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+x}-x), & d) \quad \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}, \\
 e) \quad \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x}-1}, & f) \quad \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}, \\
 g) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{1+x^2}-x), & h) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{3/2}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}), \\
 i) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+x}+x), & j) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} ((x+1)^{2/3}-(x-1)^{2/3}) \\
 k) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+3x^2}-1}{x^2+x^3}, & \ell) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3+x+x^2}-\sqrt{9-2x+x^2}}{x^2-3x+2}.
 \end{array}$$

6. Határozzuk meg az alábbi határértékeket:

$$\begin{array}{ll}
 a) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}, & b) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x^2}, \\
 c) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} \quad (a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0), & d) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\operatorname{tg} bx} \quad (a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0), \\
 e) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}, & \\
 f) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a+x) - \sin(a-x)}{x}, & \\
 g) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a+x) + \sin(a-x) - 2\sin a}{x^2}, & \\
 h) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x} \right), & i) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x} \right) \\
 j) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos 2x}}{x^2} & k) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x} - \sqrt{1-\operatorname{tg} x}}{\sin x} \\
 \ell) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x}) & m) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - 1}{x^2} \\
 n) \quad \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} & o) \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2} \cos x - 1}{1 - \operatorname{tg}^2 x}.
 \end{array}$$

7. Határozzuk meg az alábbi határértékeket:

$$\begin{array}{ll}
 a) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x+1}{3x+7} \right)^{x+3} & b) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+3}{3x+7} \right)^{x+1}, \\
 c) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2} \right)^x, & d) \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}, \\
 e) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\cos 2x} \right)^{\frac{1}{x^2}}, & f) \quad \lim_{x \rightarrow 0+} \sqrt[x]{\cos \sqrt{x}}, \\
 g) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^{\frac{x}{2}}, & h) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2+x+3}{x^2+2} \right)^{\operatorname{tg} \frac{x+1}{x-1} \frac{\pi}{2}}, \\
 i) \quad \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin x}}, & j) \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x} \\
 k) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-2} \right)^{x^2}, & \ell) \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+x^2)^{\operatorname{ctg}^2 x}.
 \end{array}$$

8. Tegyük fel, hogy az $a \in \mathbb{R}$ pont az $(a, +\infty) \cap H$ és a $(-\infty, a) \cap H$ halmazok mindegyikének torlódási pontja. Igazoljuk, hogy az $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek az $a \in H'$ pontban akkor és csak akkor van határértéke, ha léteznek az $f(a+)$ és $f(a-)$ egyoldali határértékek és

$$f(a+) = f(a-) = \lim_{x \rightarrow a} f(x).$$

9. Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi függvényeknek értelmezési tartományuk melyik torlódási pontjában van határértéke:

$$\begin{array}{ll}
 a) \quad f(x) := \operatorname{int}(x) & (x \in \mathbb{R}), \\
 b) \quad f(x) := x - \operatorname{int}(x) & (x \in \mathbb{R}), \\
 c) \quad f(x) := x + \operatorname{int}(x^2) & (x \in \mathbb{R}), \\
 d) \quad f(x) := x \operatorname{int}\left(\frac{1}{x}\right) & (x \in \mathbb{R}), \\
 e) \quad f(x) := \begin{cases} 1, & (x \in \mathbb{Q}), \\ 0, & (x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}), \end{cases} \\
 f) \quad f(x) := \begin{cases} 1/q, & (x = p/q \in \mathbb{Q}, (p, q) = 1, p \geq 0, q > 0), \\ 0, & (x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, x > 0), \end{cases}
 \end{array}$$

ahol (p, q) jelenti a p és a q természetes számok legnagyobb közös osztóját.

10. Igazoljuk, hogy a hiperbolikus függvényekre teljesülnek az alábbi összefüggések!

$$\begin{array}{ll}
 a) \quad \sinh(x_1 + x_2) = \sinh x_1 \cosh x_2 + \cosh x_1 \sinh x_2 & (x_1, x_2 \in \mathbb{R}), \\
 b) \quad \cosh(x_1 + x_2) = \cosh x_1 \cosh x_2 + \sinh x_1 \sinh x_2 & (x_1, x_2 \in \mathbb{R}), \\
 c) \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 & (x \in \mathbb{R})
 \end{array}$$

3. Folytonos függvények

Az előző pontban a határértékkel kapcsolatban vizsgált függvények többségénél a határérték a függvénynek a tekintett helyen vett helyettesítési értékével egyenlő. Az ilyen tulajdonságú függvényeket folytonos függvényeknek nevezzük. A természettudományokban (pl. a kémiában, a fizikában és a műszaki tudományokban) a jelenségek leírására használt függvények többsége folytonos.

Ebben a pontban folytonos függvények néhány nevezetes tulajdonságát ismertetjük.

3.1. Függvények folytonossága

Legyen $H \subseteq \mathbb{R}$ és $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ a H halmazon értelmezett függvény.

Definíció. Akkor mondjuk, hogy az f függvény az $a \in H$ **pontban folytonos**, ha bármilyen pozitív $\epsilon > 0$ számhoz létezik olyan ϵ -tól és a -tól függő pozitív $\delta > 0$ szám, hogy minden $x \in H$, $|x - a| < \delta$ esetén $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ teljesül. Logikai jelölésekkel írva:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\epsilon, a) > 0, \quad \forall x \in H \quad |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Ezt az értelmezést összevetve a határérték definíciójával adódik, hogy az f függvény az értelmezési tartományának egy torlódási pontjában akkor és csak akkor folytonos, ha ott van határértéke, és az egyenlő a szóban forgó helyen felvett helyettesítési értékkel. Matematikai szimbólumokkal f pontosan akkor folytonos az $a \in H'$ pontban, ha $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ és $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. A definíció alapján nyilvánvaló továbbá, hogy az értelmezési tartományának izolált pontjaiban a függvény folytonos.

Ez azt jelenti, hogy ha egy függvény adott a pontbeli folytonosságát szeretnénk megállapítani, akkor a következőket vizsgáljuk meg:

- Az a pont torlódási pontja-e a függvény értelmezési tartományának?
- Ha a torlódási pont, akkor kiszámoljuk feladattól függően definíció vagy műveleti tulajdonságok alapján, hogy mennyi a függvénynek az a pontban a határértéke, ha létezik.
- Ha a izolált pont, akkor a függvény folytonos az a pontban, ha torlódási pont, akkor megvizsgáljuk, hogy határértéke megegyezik-e a helyettesítési értékkel. Ha $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$

nem létezik, vagy ugyan létezik $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, de nem egyezik meg az $f(a)$ helyettesítési értékkel, akkor f nem folytonos az a -ban. Ekkor a -t az f szakadási pontjának nevezzük. Ennek pontos tárgyalására még visszatérünk.

A határértékre vonatkozó átviteli elv — a folytonosság most említett megfogalmazását felhasználva — folytonos függvényekkel kapcsolatban is alkalmazható.

Folytonosságra vonatkozó átviteli elv. Az $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ függvény az $a \in H$ pontban akkor és csak akkor folytonos, ha minden olyan $x_n \in H$ ($n \in \mathbb{N}$) pontsorozatra, amelyre $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ teljesül, a függvényértékek sorozatára fennáll a következő:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a).$$

A pontbeli folytonosság mellett használni fogjuk a halmazra vonatkozó folytonosságot is. Ezzel kapcsolatos az alábbi

Definíció. Akkor mondjuk, hogy a H halmazon értelmezett f függvény H valamely $K \subseteq H$ **részhalmazán folytonos**, ha f a K halmazon minden pontjában folytonos. Speciálisan, ha f értelmezési tartományának minden pontjában folytonos, akkor azt mondjuk, hogy f **folytonos**.

A $H \subseteq \mathbb{R}$ halmazon értelmezett $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ típusú **folytonos függvények halmazát** a $\mathcal{C}(H, \mathbb{R})$ vagy gyakran az egyszerűbb $\mathcal{C}(H)$ illetve \mathcal{C}_H szimbólumokkal fogjuk jelölni. Az előző pontban megmutattuk, hogy a *polinomoknak*, a *racióális*, *trigonometrikus*, *gyök*, *exponenciális*, *hiperbolikus függvényeknek* értelmezési tartományuk minden pontjában létezik határértéke, és az a függvény helyettesítési értékével egyenlő. A szóban forgó függvények tehát az említett helyeken **folytonosak**.

A korábban vizsgált *sign* függvénynek a 0 pontban, az *int* függvénynek pedig a \mathbb{Z} pontjaiban nem létezik a határértéke, következésképpen ezek az említett helyeken **nem folytonosak**.

Definíció. Ha az $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ függvény valamely $a \in H$ pontban nem folytonos, akkor azt mondjuk, hogy f -nek az a **helyen szakadása van**, magát az a pontot pedig az f **függvény szakadási helyének** nevezzük.

Nyilvánvaló, hogy ha f az értelmezési tartományának egy a pontjában nem folytonos, akkor f -nek vagy nem létezik az a helyen határértéke, vagy ha létezik, akkor $L_a(f) \neq f(a)$. Ez utóbbi esetben azt szoktuk mondani, hogy f -nek az a helyen **megszüntethető szakadása** van. Az elnevezés arra utal, hogy az f értelmezését módosítva — az a -beli

függvényértéket $L_a(f)$ -nek véve — az a pontban folytonos függvényt kapunk. Az

$$f(x) := \begin{cases} x, & (x \in \mathbb{R}, x \neq 0), \\ 1, & (x = 0) \end{cases}$$

utasítással értelmezett függvénynek a 0 helyen megszüntethető szakadása van.

A szakadásnak egy másik típusát is szokás bevezetni. Ezzel kapcsolatos az alábbi

Definíció. Akkor mondjuk, hogy a $H \subseteq \mathbb{R}$ halmazon értelmezett függvénynek az $a \in H$ pontban **ugrása** van, ha léteznek az $f(a-)$, $f(a+)$ egyoldali határértékek és $f(a-) \neq f(a+)$. Az $|f(a-) - f(a+)|$ számot az f függvény **a pontbeli ugrásának** nevezzük.

A *sign* függvénynek például ugrása van az $a = 0$ pontban, és az ugrás nagysága 2. A megszüntethető szakadást és az ugrást **elsőfajú szakadásnak**, az egyéb szakadást **másodfajú szakadásnak** nevezzük.

Az előző pontban bebizonyítottuk, hogy bármely $f : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ monoton függvénynek minden $x \in (\alpha, \beta)$ pontban létezik jobb- és baloldali határértéke. Minthogy $f(x)$ az $f(x+)$ és $f(x-)$ közé esik, azért monoton függvénynek nem lehet megszüntethető szakadása, és nyilván minden szakadása elsőfajú. Az (α, β) intervallumon értelmezett monoton függvények tehát vagy folytonosak, vagy ugrásuk van. A féloldali határértékhez hasonlóan szokás értelmezni az egyoldali folytonosság fogalmát is.

Definíció. Akkor mondjuk, hogy a $H \subseteq \mathbb{R}$ halmazon értelmezett $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ függvény az a helyen **jobbról folytonos**, ha f -nek a $H \cap [a, +\infty)$ halmazra vonatkozó leszűkítése folytonos a -ban. Ha f -nek a $H \cap (-\infty, a]$ halmazra vonatkozó leszűkítése folytonos a -ban, akkor azt mondjuk, hogy f az a helyen **balról folytonos**.

A fenti értelmezés alapján nyilvánvaló, hogy ha a $a \in H \cap [a, +\infty)$ halmaznak izolált pontja, akkor f jobbról folytonos a -ban. Az $a \in [H \cap (a, +\infty)]'$ esetben viszont f pontosan akkor jobbról folytonos a -ban, ha létezik az $f(a+)$ jobboldali határérték és $f(a) = f(a+)$. Hasonló állítás fogalmazható meg a baloldali határértékre.

A *sign* függvénynek a 0 pontban ugrása van, itt sem balról, sem jobbról nem folytonos. Az *int* függvénynek a \mathbb{Z} pontjaiban ugrása van. Mivel $a \in \mathbb{Z}$ esetén $\text{int}(a+) = \text{int}(a)$, azért az *int* függvény a \mathbb{Z} pontjaiban jobbról folytonos.

Példa: A továbbiakban többször hivatkozunk az alábbi, ún. **Dirichlet függvényre**. Legyen

$$D(x) := \begin{cases} 1, & (x \in \mathbb{Q}), \\ 0, & (x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}). \end{cases}$$

Ennek a függvénynek minden $a \in \mathbb{R}$ pontban másodfajú szakadása van.

Az átviteli elv segítségével tudjuk könnyen belátni az állítást. Az átviteli elv értelmében D az $a \in \mathbb{R}$ pontban nem folytonos, ha létezik olyan $(x_n, n \in \mathbb{N})$ a -hoz konvergáló számsorozat ($\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$), hogy a függvényértékek sorozata nem tart $D(a)$ -hoz ($\lim_{n \rightarrow \infty} D(x_n) \neq D(a)$).

(i) Ha $a \in \mathbb{Q}$, akkor $D(a) = 1$, és legyen x_n egy irracionális számokból álló, a -hoz konvergáló számsorozat. Ilyen sorozat például az $(x_n = \frac{\sqrt{2}}{n} + a, n \in \mathbb{N}^*)$ számsorozat. Mivel $x_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ($n \in \mathbb{N}^*$), ezért $D(x_n) = 0$ ($n \in \mathbb{N}^*$), azaz $\lim_{n \rightarrow \infty} D(x_n) = 0 \neq 1 = D(a)$. Ezzel beláttuk, hogy D az a pontban nem folytonos.

Ha $x_n \in \mathbb{Q}$ ($n \in \mathbb{N}$) racionális számokból álló a -hoz konvergáló számsorozat, akkor a függvényértékek sorozata 1-hez konvergál, azaz találtunk két olyan sorozatot, hogy a függvényértékek sorozata különböző határértékekhez konvergál, tehát az a pontban a függvénynek határértéke sincs, sőt féloldali határértéke sincs, ezért az a pont másodfajú szakadási hely.

(ii) Ha $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, akkor $D(a) = 0$, és legyen x_n egy racionális számokból álló, a -hoz konvergáló számsorozat. Mivel minden intervallum végtelen sok racionális számot tartalmaz, ezért ilyen sorozat biztosan létezik. Mivel $x_n \in \mathbb{Q}$ ($n \in \mathbb{N}$), ezért $D(x_n) = 1$ ($n \in \mathbb{N}$), azaz $\lim_{n \rightarrow \infty} D(x_n) = 1 \neq 0 = D(a)$. Ezzel beláttuk, hogy D az a pontban nem folytonos.

Ha $x_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ($n \in \mathbb{N}$) irracionális számokból álló a -hoz konvergáló számsorozat, akkor a függvényértékek sorozata 0-hoz konvergál, azaz az a pontban a függvénynek határértéke sincs, ezért az előző esethez hasonlóan az a pont másodfajú szakadási hely.

3.2. Műveletek folytonos függvényekkel

A határérték és a folytonosság kapcsolatát, valamint a határértékre vonatkozó műveleti szabályokat felhasználva könnyen igazolható az alábbi állítás.

1. Tétel. *Bármely $f, g \in \mathcal{C}(H, \mathbb{R})$ függvényre és $\lambda \in \mathbb{R}$ számra*

$$f + g, \lambda f, fg \in \mathcal{C}(H, \mathbb{R}).$$

Ha ezen túlmenően a g függvény nem tűnik el a H halmazon, akkor $f/g \in \mathcal{C}(H, \mathbb{R})$.

BIZONYÍTÁS. A tételt a folytonosságra vonatkozó átviteli elv alapján igazoljuk. Legyen $a \in H$ és tekintsünk egy olyan $(x_n, n \in \mathbb{N})$ sorozatot, amelyre $x_n \in H$ ($n \in \mathbb{N}$) és $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ teljesül. Ekkor az átviteli elv alapján

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = g(a).$$

Felhasználva a sorozatok határértékre vonatkozó műveleti szabályokat azt kapjuk, hogy

léteznek az alábbi határértékek és

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} (f + g)(x_n) &= f(a) + g(a), & \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda f)(x_n) &= \lambda f(a), \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (fg)(x_n) &= f(a)g(a),\end{aligned}$$

továbbá

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{f}{g} \right)(x_n) = \frac{f(a)}{g(a)},$$

feltéve, hogy az utóbbi esetben $g(a) \neq 0$. Innen — ismét alkalmazva az említett átviteli elvet — következik, hogy az $f + g, \lambda f, fg, f/g$ függvények az $a \in H$ pontban folytonosak. Minthogy ez minden $a \in H$ pontban érvényes, azért a szóban forgó függvények a H halmazon folytonosak. \square

A most igazolt tétel szerint az algebrai műveletek nem vezetnek ki a folytonos függvények köréből. Megmutatjuk, hogy a folytonos függvények osztálya a közvetett függvény képzés műveletére nézve is zárt. Előtte elismételjük a közvetett függvény fogalmát:

Definíció. Legyen $H \subseteq \mathbb{R}, K \subseteq \mathbb{R}$, és $f : H \rightarrow K, g : K \rightarrow \mathbb{R}$ valós függvények. Ekkor a $g \circ f$ **közvetett vagy összetett függvény** alatt érjük azt a függvényt, melynek értelmezési tartománya H , és hozzárendelési szabálya:

$$x \mapsto g(f(x)) \quad (x \in H).$$

A g és f közötti műveletet **függvény-kompozíciónak** hívjuk.

A folytonosság és a függvénykompozíció kapcsolatára vonatkozik az alábbi

2. Tétel. Legyen $H \subseteq \mathbb{R}, K \subseteq \mathbb{R}$, és tegyük fel, hogy az $f : H \rightarrow K$ függvény folytonos az $a \in H$ pontban, a $g : K \rightarrow \mathbb{R}$ függvény pedig folytonos az $f(a)$ pontban. Ekkor a $g \circ f$ közvetett függvény is folytonos az a helyen.

BIZONYÍTÁS. A folytonosságra vonatkozó átviteli elvet alkalmazva tekintsünk egy olyan $x_n \in H$ ($n \in \mathbb{N}$) pontsorozatot, amelyre $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ teljesül. Megmutatjuk, hogy a függvényértékek sorozatára fennáll a következő:

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (g \circ f)(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(f(x_n)) = g(f(a)).$$

Valóban, az f függvénynek $a \in H$ pontbeli folytonossága alapján az átviteli elvet felhasználva azt kapjuk, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$. A g függvénynek az $f(a) \in K$ pontbeli folytonosságát figyelembe véve, és ismét alkalmazva az átviteli elvet (1) következik. Ezzel a közvetett függvény folytonosságát igazoltuk. \square

A 2. Tételben bevezetett jelöléseket használva a tétel állítása alapján nyilvánvaló, hogy ha $f \in \mathcal{C}(H, \mathbb{R})$, $g \in \mathcal{C}(K, \mathbb{R})$, akkor $g \circ f \in \mathcal{C}(H, \mathbb{R})$.

A folytonos függvények rendelkeznek egy nagyon hasznos tulajdonsággal, az ú.n. „**fokozatos változás**” tulajdonsággal. A fokozatos változás tulajdonság nevében is benne van a függvényeknek egy fontos sajátossága, hogy függvényértékei csak fokozatosan változhatnak, nem lehet ugrás egy folytonossági pontban. Ezt fogalmazzuk meg matematikai formában a következő

3. Tétel. Legyen $H \subseteq \mathbb{R}$, és tegyük fel, hogy az $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ függvény folytonos az $a \in H$ pontban, és $k < f(a) < K$ valamely $k, K \in \mathbb{R}$ számokra. Ekkor van az a pontnak egy olyan környezete, hogy a környezetbe eső összes x pont a (k, K) intervallumba esik, azaz

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in (a - \delta, a + \delta) : k < f(x) < K$$

teljesül.

BIZONYÍTÁS. Mivel f folytonos az a pontban, ezért

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\epsilon, a) > 0, \quad \forall x \in H, \quad |x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

Legyen $\epsilon := \min\{K - f(a), f(a) - k\}$. Ekkor az ehhez az ϵ -hoz tartozó δ esetén a tétel állítása teljesül. \square

A 3. tételt legtöbbször abban az értelemben használjuk, hogy ha egy folytonos függvény egy adott pontban pozitív (negatív) értéket vesz föl, akkor annak a pontnak van egy egész környezete, ahol a függvény pozitív (negatív).

3.3. Folytonos függvények tulajdonságai

Az alábbiakban ismertetjük folytonos függvények néhány alapvető tulajdonságát, melyek többsége korlátos zárt intervallumon értelmezett folytonos függvényekre vonatkozik.

3.3.1. Weierstrass tétele

Az első tulajdonság előtt elismételjük a függvények korlátosságának definícióját.

Definíció. Legyen $H \subseteq \mathbb{R}$, az $f : H \rightarrow K$ függvény **korlátos**, ha alulról és felülről is korlátos. Az f függvény **alulról korlátos**, ha

$$\exists k \in \mathbb{R} \quad : \quad f(x) \geq k \quad \forall x \in H,$$

felülről korlátos, ha

$$\exists K \in \mathbb{R} \quad : \quad f(x) \leq K \quad \forall x \in H.$$

A szétválasztási axiómából következik, hogy felülről korlátos függvénynek van legkisebb felső korlátja, amit **felső határnak**, vagy **szuprémumnak** hívunk, illetve, hogy alulról korlátos függvénynek van legnagyobb alsó korlátja, amit **alsó határnak**, vagy **infimumnak** hívunk. Jelölés: $\sup\{f(x), x \in H\}$, $\inf\{f(x), x \in H\}$. A folytonos függvény korlátosságáról szól a

4. Tétel. *Korlátos zárt intervallumon folytonos függvény korlátos ezen az intervallumon.*

BIZONYÍTÁS. Legyenek $a, b \in \mathbb{R}$ valós számok, és $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény. Elegendő a felülről való korlátosságot belátni. Tegyük fel ugyanis, hogy minden véges zárt intervallumon folytonos függvény felülről korlátos. Mivel f folytonos, ezért nyilván a $-f$ függvény is folytonos, és ezért felülről korlátos, azaz létezik $K \in \mathbb{R}$ valós szám, hogy $-f(x) \leq K$ minden $x \in [a, b]$ esetén. Ez azt jelenti, hogy $f(x) \geq -K$ minden $x \in [a, b]$ esetén, azaz f alulról korlátos.

A felülről való korlátosság bizonyítását indirekt módon végezzük. Tegyük fel, hogy f az $[a, b]$ intervallumon nem korlátos felülről. Ez azt jelenti, hogy $\forall K \in \mathbb{R} \exists x \in [a, b] : f(x) > K$. Legyen $K := n$ ($n \in \mathbb{N}$), és jelöljük a hozzá tartozó $[a, b]$ -beli x -et x_n -nel, azaz

$$(2) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \in [a, b] \quad : \quad f(x_n) > n.$$

$(x_n, n \in \mathbb{N})$ korlátos számsorozat, mert $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén $a \leq x_n \leq b$ teljesül, ezért a Bolzano-Weierstrass-féle kiválasztási tétel alapján létezik olyan $\nu : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ index-sorozat, hogy az $(x_{\nu_n}, n \in \mathbb{N})$ részsorozat konvergens. Legyen $\alpha := \lim_{n \rightarrow \infty} x_{\nu_n}$. A határérték monotonítására vonatkozó tétel alapján $\alpha \in [a, b]$, és így f az α pontban folytonos (ha α az intervallum végpontja, akkor balról, illetve jobbról folytonos). Az átviteli elv alapján viszont akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{\nu_n}) = f(\alpha)$, ami ellentmond (2)-nek, mert (2) szerint $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{\nu_n}) = \infty$. \square

Megjegyezzük, hogy a tétel egyik feltétele sem hagyható el. Ha például

$$f_1(x) := e^x \quad (x \in I_1 := [0, +\infty)),$$

$$f_2(x) := \frac{1}{x} \quad (x \in I_2 := (0, 1]),$$

akkor f_1 az I_1 nem korlátos, f_2 az I_2 korlátos, de nem zárt intervallumon folytonos. Mivel az f_1 , és f_2 értékkészlete is $[1, \infty)$, ezért f_1 és f_2 sem korlátos felülről.

Az alábbiakban megfogalmazzuk a folytonos függvények egy másik fontos tulajdonságát. Ehhez felhasználjuk az alábbi fogalmakat.

Definíció. Akkor mondjuk, hogy a valós értékű $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ **függvénynek van maximuma**, ha értékkészletének van maximuma. Más szóval létezik olyan $x^* \in H$ hely, amelyre

$$f(x) \leq f(x^*) \quad (\forall x \in H)$$

teljesül. Ha az f értékkészletének van minimuma, azaz ha létezik olyan $x_* \in H$ elem, amelyre

$$f(x_*) \leq f(x) \quad (\forall x \in H)$$

teljesül, akkor azt mondjuk az f **függvénynek van minimuma**. Az értelmezési tartomány x^* pontját **maximumhelynek**, az x_* elemet **minimumhelynek**, az $f(x^*)$ számot **a függvény maximumának**, $f(x_*)$ -et pedig **a függvény minimumának** nevezzük.

A maximumot és minimumot közös néven **szélsőértéknek** nevezzük. Folytonos függvények szélsőértékeivel kapcsolatos az alábbi

Weierstrass-tétel. Véges zárt intervallumon értelmezett valós értékű folytonos függvény felveszi szélsőértékeit.

BIZONYÍTÁS. Legyenek $a, b \in \mathbb{R}$ valós számok, és $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény. Az előző tétel alapján f korlátos. Legyen M az f értékkészletének felső, m pedig az alsó határa, azaz

$$M := \sup\{f(x), x \in [a, b]\} \quad m := \inf\{f(x), x \in [a, b]\}.$$

Ekkor a felső határ értelmezése alapján minden $n \in \mathbb{N}^*$ számhoz létezik az értelmezési tartománynak olyan x_n eleme, amelyre

$$(3) \quad M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq M \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

teljesül, hiszen M az értékkészletnek felső korlátja, míg $M - \frac{1}{n}$ már nem felső korlát. Az $(x_n, n \in \mathbb{N}^*)$ korlátos számsorozat, mert $\forall n \in \mathbb{N}^*$ esetén $a \leq x_n \leq b$ teljesül, ezért a Bolzano-Weierstrass-féle kiválasztási tétel alapján létezik olyan $\nu : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ indexsorozat, hogy az $(x_{\nu_n}, n \in \mathbb{N}^*)$ részsorozat konvergens. Legyen $x^* := \lim_{n \rightarrow \infty} x_{\nu_n}$. A határérték monotonitására vonatkozó tétel alapján $x^* \in [a, b]$, és így f az x^* pontban folytonos (ha x^* az intervallum végpontja, akkor balról, illetve jobbról folytonos). Az

átviteli elv alapján viszont akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{\nu_n}) = f(x^*)$. A rendőr elvet alkalmazva (3) alapján $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{\nu_n}) = M$ adódik. A határérték unicitása miatt $f(x^*) = M$. Ezzel megmutattuk, hogy M az f függvény maximuma.

A minimumra vonatkozó állítás hasonlóan igazolható. \square

Megjegyezzük, hogy az előző tétel feltételei közül egyik sem hagyható el. Legyen ugyanis

$$\begin{aligned} f_1(x) &:= \frac{1}{x} \quad (x \in I_1 := [0, +\infty)), \\ f_2(x) &:= \frac{1}{x} \quad (x \in I_2 := (1, 2)), \\ f_3(x) &:= x \quad (x \in (-1, 1)), \quad f_3(-1) := f_3(1) := 0 \quad (I_3 := [-1, 1]). \end{aligned}$$

Ekkor f_1 az I_1 nem korlátos, f_2 az I_2 korlátos, de nem zárt intervallumon folytonos. Mivel az f_1 értékkészlete $(0, 1]$, ezért f_1 -nek nincs minimuma és mivel az f_2 értékkészlete $(1/2, 1)$, azért f_2 -nek nincsenek szélsőértékei. Az f_3 értelmezési tartománya korlátos, zárt intervallum, de f_3 nem folytonos. Az f_3 értékkészlete $(-1, 1)$, s ezért f_3 -nek sincsenek szélsőértékei.

Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a szóban forgó *tétel feltételei elégségesek, de nem szükségesek*. Ez másként fogalmazva azt jelenti, hogy szélsőérték akkor is létezhet, ha az említett feltételek közül egyik sem teljesül. Vegyük pl. a Dirichlet-féle függvényt, amelynek értelmezési tartománya nem korlátos, és a függvény sehol sem folytonos (lásd a 3.1. pont végét). Ugyanakkor a Dirichlet függvénynek létezik a maximuma és minimuma.

3.3.2. Egyenletes folytonosság

Véges zárt intervallumon folytonos függvényeknek egy másik fontos tulajdonsága az **egyenletes folytonosság** fogalmával kapcsolatos. E fogalom bevezetése előtt emlékeztünk a folytonosság értelmezésére. A $H \subseteq \mathbb{R}$ halmazon értelmezett függvény folytonossága — a H minden x pontjában felírva a folytonosság definícióját — a következőt jelenti:

$$\forall x \in H \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\epsilon, x) > 0 \quad \forall y \in H, \quad |x - y| < \delta : |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Az itt szereplő δ szám általában függ x -től és ϵ -tól is. Ha például $f(x) := 1/x$ ($x \in H := (0, 1)$), akkor adott ϵ és $x \in H$ esetén — az f monotonitását figyelembe véve — könnyen megadható az a legnagyobb δ szám, amelyre a fenti feltétel teljesül. Nevezetesen, a szóban forgó δ -ra ($x - y = \delta, 1/y - 1/x = \epsilon$)

$$\frac{1}{x} + \epsilon = \frac{1}{x - \delta}, \quad \text{azaz} \quad \delta = \frac{\epsilon x^2}{1 + \epsilon x}.$$

Innen látható, hogy $x \rightarrow 0$ esetén — rögzített ϵ mellett — δ tart 0-hoz. Ha ezzel szemben minden $\epsilon > 0$ számhoz létezik olyan — x -től független, univerzális — pozitív δ , amelyre $x, y \in H$, $|x - y| < \delta$ esetén $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ teljesül, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény a H **halmazon egyenletesen folytonos**. Logikai jelöléseket használva ezt az alábbi, ezzel ekvivalens formában is megfogalmazhatjuk.

Definíció. Akkor mondjuk, hogy az f függvény értelmezési tartományának valamely H részhalmazán **egyenletesen folytonos**, ha

$$(4) \quad \forall \epsilon > 0 \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 \forall x, y \in H, |x - y| < \delta : |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

A definíció tagadásával azonnal adódik a nem egyenletesen folytonosság értelmezése. Matematikai jelölésekkel írva f **nem egyenletesen folytonos a H halmazon**, ha

$$\exists \epsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x, y \in H, |x - y| < \delta, \text{ és mégis } |f(x) - f(y)| \geq \epsilon.$$

Az egyenletes folytonosság és a folytonosság definícióját egybevetve adódik, hogy **a H halmazon egyenletesen folytonos függvény a H minden pontjában folytonos**. Megfordítva, a H -n folytonos függvény nem szükségképpen egyenletesen folytonos a H -n. Az előbb értelmezett $f(x) := 1/x$ ($x \in (0, 1)$) függvény folytonos, de nem egyenletesen folytonos a $H = (0, 1)$ halmazon. Ekkor ugyanis létezik olyan $\epsilon > 0$ (pl. $\epsilon = 1/2$), amelyhez nem található olyan δ , amelyre (4) teljesülne. Ugyanis bármely $\delta > 0$ esetén létezik olyan $x, y \in (0, 1)$ amelyre $|x - y| < \delta$, ugyanakkor $|f(x) - f(y)| \geq \epsilon$. Valóban válasszunk egy pozitív δ -t és legyen $n > 1/\delta, n > 2$. Ekkor az

$$x = \frac{1}{n}, \quad y = \frac{1}{n-1}$$

$(0, 1)$ -beli pontokra

$$|x - y| = \frac{1}{n(n-1)} < \frac{1}{n} < \delta, \quad |f(x) - f(y)| = 1 > \epsilon,$$

ami az állítás bizonyítását jelenti.

Megmutatjuk, hogy ha H véges, zárt intervallum, és f folytonos a H -n, akkor ezen a halmazon az f függvény szükségképpen egyenletesen folytonos.

Az egyenletes folytonosság tétele. Véges zárt intervallumon folytonos függvény ezen az intervallumon egyenletesen is folytonos.

BIZONYÍTÁS. Legyenek $a, b \in \mathbb{R}$ valós számok, és $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény. A tételt indirekt módon bizonyítjuk. Az állítással ellentétben tegyük fel, hogy f nem egyenletesen folytonos a $[a, b]$ -n, azaz $\exists \epsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x, y \in [a, b], \quad |x - y| < \delta :$

$|f(x) - f(y)| \geq \epsilon$. Ezt az állítást $\delta = 1/n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) esetén alkalmazva azt kapjuk, hogy van olyan $\epsilon > 0$ és olyan $(x_n, n \in \mathbb{N}^*)$ és $(y_n, n \in \mathbb{N}^*)$ számsorozat, amelyre

$$(5) \quad x_n, y_n \in [a, b], \quad |x_n - y_n| < \frac{1}{n}, \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

teljesül. Az $(x_n, n \in \mathbb{N}^*)$ korlátos számsorozat, mert $\forall n \in \mathbb{N}^*$ esetén $a \leq x_n \leq b$ teljesül, ezért a Bolzano-Weierstrass-féle kiválasztási tétel alapján létezik olyan $\nu : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ index-sorozat, hogy az $(x_{\nu_n}, n \in \mathbb{N}^*)$ részsorozat konvergens. Legyen $x^* := \lim_{n \rightarrow \infty} x_{\nu_n}$. Az

$$|y_{\nu_n} - x^*| \leq |y_{\nu_n} - x_{\nu_n}| + |x_{\nu_n} - x^*| \leq \frac{1}{\nu_n} + |x_{\nu_n} - x^*|$$

egyenlőtlenség alapján nyilvánvaló, hogy $(y_{\nu_n}, n \in \mathbb{N}^*)$ is konvergens és határértéke x^* (A rendőrlv alapján ugyanis $|y_{\nu_n} - x^*| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$)).

A határérték monotonitására vonatkozó tétel alapján $x^* \in [a, b]$, és így f az x^* pontban folytonos (ha x^* az intervallum végpontja, akkor balról, illetve jobbról folytonos). Az átviteli elv alapján azt kapjuk, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{\nu_n}) = f(x^*), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_{\nu_n}) = f(x^*),$$

következésképpen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_{\nu_n}) - f(y_{\nu_n})) = 0.$$

Ez nyilván ellentmond a (5)-ből adódó

$$|f(x_{\nu_n}) - f(y_{\nu_n})| \geq \epsilon$$

feltételnek. Ezzel a tételt bebizonyítottuk. \square

Gyakran előfordul, hogy nem egyforma módon tudjuk bebizonyítani a függvények egyenletes folytonosságát egy adott halmazon. Például az $f(x) = \sqrt{x}$ függvény egyenletesen folytonos a $[0, +\infty)$ intervallumon, de definíció alapján csak az $[1, +\infty)$ intervallumon könnyű ezt igazolni, viszont az előző tétel alapján a $[0, 1]$ intervallumon egyenletesen folytonos a függvény. Belátható, hogy *ha egy f függvény egyenletesen folytonos az $(a, b]$, és a $[b, c)$ ($a, c \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$) véges vagy végtelen intervallumokon, akkor f egyenletesen folytonos az (a, c) intervallumon is.*

Valóban, az egyenletes folytonosság definíciója alapján:

$$\forall \epsilon_1 > 0 \exists \delta_1 = \delta_1(\epsilon_1) > 0 \forall x, y \in (a, b], |x - y| < \delta_1 : |f(x) - f(y)| < \epsilon_1,$$

$$\forall \epsilon_2 > 0 \exists \delta_2 = \delta_2(\epsilon_2) > 0 \forall x, y \in [b, c), |x - y| < \delta_2 : |f(x) - f(y)| < \epsilon_2.$$

Legyen $\epsilon > 0$ tetszőleges pozitív szám, és $\epsilon_1 := \epsilon_2 := \epsilon/2$, $\delta := \min\{\delta_1(\epsilon/2), \delta_2(\epsilon/2)\}$. Ekkor, ha $x, y \in (a, c)$, úgy hogy $|x - y| < \delta$ teljesül, akkor

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2} < \epsilon, \quad \text{ha } x, y \in (a, b], \text{ vagy } x, y \in [b, c)$$

$$|f(x) - f(y)| = |f(x) - f(b) + f(b) - f(y)| \leq |f(x) - f(b)| + |f(b) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

ha $x \in (a, b]$, $y \in [b, c)$, hiszen ekkor $x \leq b \leq y$, amivel beláttuk, hogy f egyenletesen folytonos az (a, c) intervallumon.

3.3.3. Az inverz függvény folytonossága

Legyen $H_1 \subset \mathbb{R}$, $H_2 \subset \mathbb{R}$ és tegyük fel, hogy $f : H_1 \rightarrow H_2$ egy kölcsönösen egyértelmű leképezés a H_1 és H_2 halmazok között. Ekkor f -nek létezik inverze. Az f függvény folytonossága önmagában nem garantálja inverzének folytonosságát. Ha azonban f értelmezési tartománya véges intervallum, és f folytonos, akkor inverze is folytonos.

A tétel kimondása előtt emlékeztetjük leírjuk az inverz függvény definícióját.

Definíció. Az $f : H_1 \rightarrow H_2$ kölcsönösen egyértelmű leképezés **inverz függvényén** értjük azt az f^{-1} függvényt, melynek értelmezési tartománya f értékkészlete ($f^{-1} : H_2 \rightarrow H_1$), hozzárendelési szabálya:

$$\forall y \in H_2, \quad f^{-1} : y \mapsto x, \quad \text{melyre } x \in H_1, \quad f(x) = y.$$

Az inverz függvény geometriai szemléltetése, ábrázolása az $y = x$ egyensere való tükrözéssel nyerhető az eredeti függvényből. Az inverz függvény folytonosságáról szól az

5. Tétel. Ha $a, b \in \mathbb{R}$, és $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ szigorúan monoton, folytonos függvény, akkor az f függvény $f^{-1} : (\alpha, \beta) \rightarrow (a, b)$ inverz függvénye is ugyanabban az értelemben szigorúan monoton és folytonos, ahol $\alpha = \inf\{f(x), x \in (a, b)\}$ és $\beta = \sup\{f(x), x \in (a, b)\}$.

BIZONYÍTÁS. Tegyük fel, hogy f szigorúan monoton nő. A monoton csökkenő esetet hasonlóan bizonyítható.

1. lépés.: Belátjuk, hogy tetszőleges $c \in (\alpha, \beta)$ számot felvesz f az (a, b) intervallumon.

Mivel $\alpha = \inf\{f(x), x \in (a, b)\}$ és $\beta = \sup\{f(x), x \in (a, b)\}$, ezért c f értékkészletének nem alsó, és nem felső korlátja. Ezért léteznek olyan $x_1, x_2 \in (a, b)$ helyek, ahol $f(x_1) < c < f(x_2)$ teljesül. Legyen

$$H := \{x : x \in (a, b), f(x) < c\}.$$

Mivel f monoton nő, és $c < f(x_2)$, ezért H felülről korlátos, és felső határa $x^* := \sup H \leq x_2$ az (a, b) intervallumba esik, tehát f folytonos az x^* pontban. $f(x^*) = c$, mert ha $f(x^*) < c$, vagy $f(x^*) > c$ teljesülne, akkor a függvény fokozatos változás tulajdonsága miatt, x^* -nak létezne olyan környezete, hogy $f(x) \neq c$ ebben a környezetben, azaz

$$\exists \delta > 0, \quad \forall x \in (x^* - \delta, x^* + \delta) : \quad f(x) \neq c,$$

és ekkor x^* nem lenne H -nak felső határa. Ezzel beláttuk, hogy f minden értéket felvesz az (α, β) intervallumról, tehát f szürjektív, és mivel szigorúan monoton, ezért injektív, azaz bijektív leképezés, létezik inverze, és $f^{-1} : (\alpha, \beta) \rightarrow (a, b)$.

2. lépés.: Megmutatjuk, hogy f^{-1} is szigorúan monoton nő.

Indirekt módon bizonyítjuk. Tegyük fel, hogy f nem szigorúan monoton nő. Ekkor léteznek olyan $x', x'' \in (\alpha, \beta)$ számok, melyekre $x' < x''$, és $f^{-1}(x') \geq f^{-1}(x'')$ egyenlőtlenségek teljesülnek. Mivel f szigorúan monoton nő, ezért

$$x' = f(f^{-1}(x')) \geq f(f^{-1}(x'')) = x'',$$

ami ellentmond az $x' < x''$ feltételnek.

3. lépés.: Belátjuk, hogy f^{-1} folytonos os (α, β) intervallumon.

Indirekt módon bizonyítunk. Az állítással ellentétben tegyük fel, hogy f^{-1} nem folytonos. Ekkor — a folytonosságra vonatkozó átviteli elv alapján — létezik olyan $y^* \in (\alpha, \beta)$ pont és egy ehhez konvergáló (α, β) -beli $(y_n, n \in \mathbb{N})$ sorozat, amelyre az $(f^{-1}(y_n), n \in \mathbb{N})$ sorozat nem tart az $x^* := f^{-1}(y^*)$ számhoz. Következésképpen, létezik olyan $\delta > 0$ szám, hogy az $(x_n := f^{-1}(y_n), n \in \mathbb{N})$ sorozatnak végtelen sok tagja van a $K_\delta(x^*)$ környezeten kívül, azaz létezik $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy az $(x_n, n > N)$ sorozat minden eleme az $(x^* - \delta, x^* + \delta)$ intervallumon kívül esik. Az $(x_n, n > N)$ sorozat korlátos, mert $\alpha < x_n < \beta, (\forall n \in \mathbb{N})$, ezért a Bolzano-Weierstrass-féle kiválasztási tétel alapján létezik olyan $\nu : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{1, 2, \dots, N\}$ index-sorozat, hogy az $(x_{\nu_n}, n \in \mathbb{N})$ részsorozat konvergens. Ennek a részsorozatnak is minden tagja, következésképpen x_* határértéke is az említett környezeten kívül esik, azaz

$$|x_{\nu_n} - x^*| \geq \delta, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_{\nu_n} = x_*, \quad |x_* - x^*| \geq \delta > 0,$$

s ezért nyilvánvalóan $x_* \neq x^*$.

Az f függvény x_* pontbeli folytonossága alapján — ismét csak az átviteli elvet használva — azt kapjuk, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{\nu_n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_{\nu_n} = f(x_*).$$

Másrészt a kiindulás szerint $y_n \rightarrow y^*$, ha $n \rightarrow \infty$, következésképpen a most tekintett részsorozat határértékére

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_{\nu_n} = y^* = f(x^*)$$

adódik. Ezzel azt kaptuk, hogy

$$x_* \neq x^*, \quad \text{ugyanakkor} \quad f(x_*) = f(x^*),$$

s ez nyilván ellentmond annak, hogy f bijektív leképezés. Ezzel a tételt igazoltuk. \square

Itt jegyezzük meg, hogy ezt a tételt lehet sok függvény folytonosságának megállapítására használni. Többek között, mivel az egész kitevőjű gyökfüggvény a megfelelő kitevőjű hatványfüggvény, illetve annak a nemnegatív valós számok hamazára

való leszűkítésének az inverzfüggvénye, ezért annak folytonossága, és monotonitása a hatványfüggvény folytonosságának és monotonitásának közvetlen következménye. Azaz az $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ $f(x) = x^{2n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) függvény szigorúan monoton nő, folytonos, tehát az inverze $f^{-1} : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ $f^{-1}(x) = \sqrt[2n]{x}$ függvény is szigorúan monoton nő, és folytonos. Az az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = x^{2n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$) függvény szigorúan monoton nő, folytonos, tehát az inverze $f^{-1} : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ $f^{-1}(x) = \sqrt[2n+1]{x}$ függvény is szigorúan monoton nő, és folytonos.

3.3.4. Bolzano tétele

Folytonos függvények egy további alapvető tulajdonságát fogalmazzuk meg az alábbi tételben. Az alábbi állítás olyan függvényekre vonatkozik, amelyek értelmezési tartománya \mathbb{R} -beli (véges vagy végtelen, nyílt, zárt vagy félig nyílt) intervallum.

Bolzano-tétel. *Tegyük fel, hogy az $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallumon értelmezett $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ valós függvény folytonos. Ekkor f értékkészletének bármely két eleme közé eső értéket felveszi, azaz véve bármely két $a, b \in I$ ($a < b$) helyen az $y_1 = f(a), y_2 = f(b)$ függvényértékeket és egy y_1 és y_2 közé eső y valós számot, létezik olyan (a, b) -beli x , amelyre $f(x) = y$.*

Tulajdonképpen ezt a tételt már bebizonyítottuk monoton függvények esetén az 5. tételben. Most tetszőleges intervallumon értelmezett folytonos függvényre is megmutatjuk a bizonyítást.

BIZONYÍTÁS. Tegyük fel, hogy $f(a) < f(b)$ és legyen $f(a) < y < f(b)$. Az $f(b) > f(a)$ eset hasonlóan tárgyalható. Rekúzióval olyan $[a_n, b_n]$ ($n \in \mathbb{N}$) intervallumsorozatot definiálunk, amelyre az alábbiak teljesülnek:

$$\begin{aligned} i) \quad & [a_0, b_0] := [a, b], \quad ii) \quad [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n] \quad (n \in \mathbb{N}), \\ iii) \quad & b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}, \quad iv) \quad f(a_n) \leq y \leq f(b_n) \quad (n \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

Rekúziót használva tegyük fel, hogy valamely $n \in \mathbb{N}$ számra az $[a_n, b_n]$ intervallumot már definiáltuk és fennáll ii)-iv). Legyen

$$c_n := \frac{a_n + b_n}{2}$$

a szóban forgó intervallum felezéspontja és értelmezzük az $(n+1)$ -edik intervallumot a következők szerint:

$$\begin{aligned} [a_{n+1}, b_{n+1}] &= [a_n, c_n], \quad \text{ha} \quad f(c_n) > y, \\ [a_{n+1}, b_{n+1}] &= [c_n, b_n], \quad \text{ha} \quad f(c_n) \leq y. \end{aligned}$$

Ekkor

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n], \quad b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{b - a}{2^{n+1}}$$

és továbbra is fennáll az

$$f(a_{n+1}) \leq y \leq f(b_{n+1})$$

egyenlőtlenség. Ezzel megmutattuk, hogy az így szerkesztett intervallumsorozat valóban rendelkezik az előírt tulajdonságokkal.

A konstrukcióból következik, hogy

$$a_n \leq a_{n+1}, \quad b_n \geq b_{n+1}, \quad a \leq a_n \leq b_n \leq b \quad (\forall n \in \mathbb{N}),$$

azaz az $(a_n, n \in \mathbb{N})$, $(b_n, n \in \mathbb{N})$ sorozatok mindegyike monoton, és korlátos, ezért konvergens, és iii)-ból következik, hogy határértékük megegyezik, amelyet x -szel jelölünk. Megmutatjuk, hogy erre $f(x) = y$ teljesül.

Valóban, minthogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = x,$$

ezért a folytonosságra vonatkozó átviteli elv, a sorozat-határérték monotonitására vonatkozó tétel, valamint a iv) feltétel alapján

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \leq y \leq \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = f(x),$$

ahonnan $f(x) = y$ következik. \square

A Bolzano-tételből egyszerűen adódik az alábbi

Következmény. *Bármely, intervallumon értelmezett nem konstans, folytonos függvény értékkészlete intervallum.*

BIZONYÍTÁS. Valóban, legyen α az értékkészlet alsó, β az értékkészlet felső határa. Megmutatjuk, hogy az (α, β) intervallum minden pontja az értékkészlethez tartozik. Mint-hogy α -nál kisebb és β -nál nagyobb eleme nincs az értékkészletnek, azért innen az állítás már következik.

Legyen $y \in (\alpha, \beta)$. Ekkor az α és β számok definíciója alapján létezik az értelmezési tartománynak olyan a és b pontja, hogy

$$\alpha \leq f(a) < y < f(b) \leq \beta.$$

Alkalmazva a Bolzano-tételt azt kapjuk, hogy az értelmezési tartományban létezik olyan x pont, amelyre $f(x) = y$, következésképpen y eleme az értékkészletnek. \square

A fenti következmény röviden így fogalmazható meg: *intervallum folytonos képe intervallum.*

Ezt a tételt értékkészlet meghatározására lehet használni. Például, mivel

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{2k+1} = +\infty, \quad \text{és} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (-n)^{2k+1} = -\infty \quad (k \in \mathbb{N}),$$

ezért a páratlan egész kitevőjű hatványfüggvény értékkészlete a valós számok halmaza, és mivel

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{2k} = \lim_{n \rightarrow \infty} (-n)^{2k} = +\infty, \quad \text{és} \quad 0^{2k} = 0, \quad (k \in \mathbb{N}^*)$$

ezért a páros egész kitevőjű hatványfüggvény értékkészlete a nemnegatív valós számok halmaza.

A Bolzano-tétel bizonyításában használt módszert **intervallumfelezési eljárásnak** nevezik. Az algoritmus felhasználható az $y = f(x)$ egyenlet x_0 megoldásának közelítő kiszámítására. Az eljárás során szerkesztett $(a_n, n \in \mathbb{N})$ sorozattal közelítve x_0 -at, az n -edik lépésben elkövetett hibára

$$|a_n - x_0| \leq \frac{b - a}{2^n}$$

adódik.

Megjegyezzük, hogy a Bolzano-tétel két feltétele közül egyik sem hagyható el. A *sign* függvény — amely nem folytonos — felveszi a 0 és 1 értéket, de nem vesz fel egyetlen 0 és 1 közé eső értéket sem.

Legyen $H := (0, 1) \cup (1, 2)$, és értelmezzük az f függvényt az alábbi módon:

$$f(x) := \begin{cases} 0, & \text{ha } x \in (0, 1), \\ 1, & \text{ha } x \in (1, 2). \end{cases}$$

Nyilvánvaló, hogy f folytonos, de egyetlen 0 és 1 közé eső értéket sem vesz fel. Ez a példa azt mutatja, hogy *ha a folytonos függvény értelmezési tartománya nem intervallum, akkor a függvény kihagyhat értékeket.*

A most említett két feltétel elégséges, de nyilván nem szükséges ahhoz, hogy a függvény bármely két értéke közé eső értékeket felvegye.

3.4. Exponenciális- és logaritmushatványfüggvények

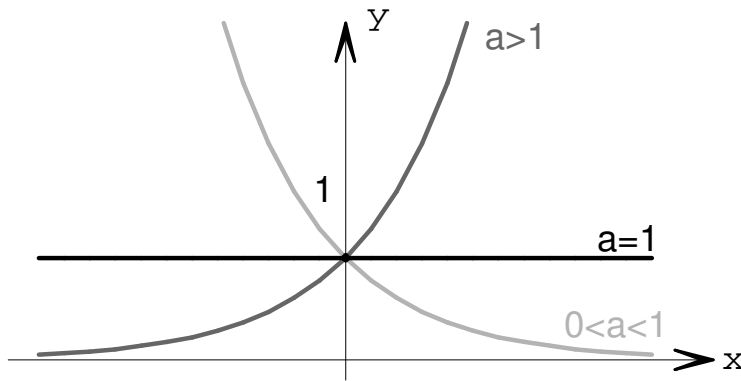
Az $\exp_a(x) = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) **a alapú exponenciális függvényt** már a 2.5.6. pontban értelmeztük a valós számok halmazán, és beláttuk róla, hogy *szigorúan monoton nő*, ha az alap egynél nagyobb, *szigorúan monoton csökken*, ha az alap egynél kisebb, és *konstans*, ha az alap eggyel egyenlő. Továbbá beláttuk, hogy értelmezési tartományának minden

pontjában megegyezik határértéke a helyettesítési értékkel, azaz *folytonos*. Az a alapú exponenciális függvény inverzének értelmezéséhez felhasználjuk a

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \exp_a(n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} a^n = +\infty, & \lim_{n \rightarrow \infty} \exp_a(-n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} a^{-n} = 0, & \text{ha } a > 1, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \exp_a(n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0, & \lim_{n \rightarrow \infty} \exp_a(-n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} a^{-n} = \infty, & \text{ha } a < 1 \end{aligned}$$

egyenlőségeket. Minthogy az \mathbb{R} intervallumon értelmezett folytonos függvény értékkészlete — az előző pont következménye alapján — intervallum, azért az \exp_a ($a > 0$, $a \neq 1$) függvény *értékkészlete* a $(0, +\infty)$ intervallum.

Az \exp_a függvény grafikonját az $a > 0$ paraméter különböző értékei mellett az alábbi ábrán szemléltetjük.



1. ábra

Az elmondottakból következik, hogy az a alapú exponenciális függvénynek létezik az inverze, ha $a > 0$, $a \neq 1$, melynek értelmezési tartománya a $(0, +\infty)$ intervallum, értékkészlete pedig a $(-\infty, +\infty)$ intervallum.

Definíció. Legyen $a > 0$, $a \neq 1$. Az \exp_a függvény inverzét **a -alapú logaritmusfüggvénynek** nevezzük és a \log_a szimbólummal jelöljük.

Leggyakrabban az ún. természetes alapú logaritmusfüggvényt használjuk, ezért fontosságánál fogva ezt külön is definiáljuk.

Definíció. A természetes alapú exponenciális függvény inverzét **természetes alapú logaritmusfüggvénynek** nevezzük és az \ln vagy a \log szimbólummal jelöljük.

Az a alapú exponenciális függvény tulajdonságai alapján adódnak a \log_a ($a > 0$, $a \neq 1$) függvényekre vonatkozó következő állítások.

6. Tétel A $\log_a : (0, +\infty) \rightarrow (-\infty, +\infty)$ függvény folytonos, szigorúan monoton növekvő, ha $a > 1$, szigorúan monoton fogyó, ha $0 < a < 1$, továbbá érvényesek a következők:

- i) $\log_a(1) = 0, \quad \log_a(a) = 1,$
- ii) $a^{\log_a x} = x \quad (x > 0), \quad \log_a(a^x) = x \quad (x \in \mathbb{R}),$
- iii) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y \quad (x, y > 0, a > 0, a \neq 1),$
- iv) $\log_a(x^y) = y \log_a x \quad (x > 0, y \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1),$
- v) $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \quad (a, b, x > 0, a \neq 1, b \neq 1).$

BIZONYÍTÁS. Az inverz-függvény folytonosságára vonatkozó tételből a folytonosság és a monotonitás következik, valamint mivel $a^0 = 1$, ezért az inverz-függvény definíciója alapján i) adódik. ii) a logaritmus függvény értelmezésének azonnali következménye.

Mivel az a alapú exponenciális függvény szigorúan monoton (ha $a > 0, a \neq 1$), ezért iii) illetve iv) ekvivalens azzal, hogy

$$a^{\log_a(xy)} = a^{\log_a x + \log_a y} \quad (x, y > 0), \quad a^{\log_a(x^y)} = a^{y \log_a x} \quad (x > 0, y \in \mathbb{R}).$$

Alkalmazva ii)-t, és az exponenciális függvény tulajdonságait (2.5.6. 10. Tétel),

$$xy = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = xy \quad (x, y > 0), \quad x^y = (a^{\log_a x})^y = x^y \quad (x > 0, y \in \mathbb{R})$$

azonosságok adódnak.

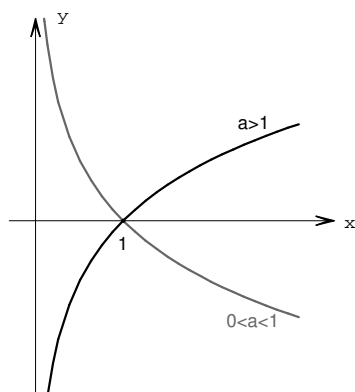
v) igazolásához írjuk fel x -et $x = a^t$ ($t \in \mathbb{R}$) alakban. Mivel $x > 0$, ezért ilyen $t \in \mathbb{R}$ biztosan létezik. Ezt beírva v)-be, iv) alapján v) ekvivalens a

$$t = \log_a a^t = \frac{\log_b a^t}{\log_b a} = \frac{t \log_b a}{\log_b a} = t$$

azonossággal. \square

A iii) azonosságot a **logaritmusfüggvény függvényegyenletének** nevezik.

A \log_a függvény grafikonját szemléltetjük az alábbi ábrán.



2. ábra

3.5. Irracionális kitevőjű hatványfüggvények

Definíció. Legyen $\mu \in \mathbb{R}$. A

$$h_\mu(x) := x^\mu \quad (x > 0)$$

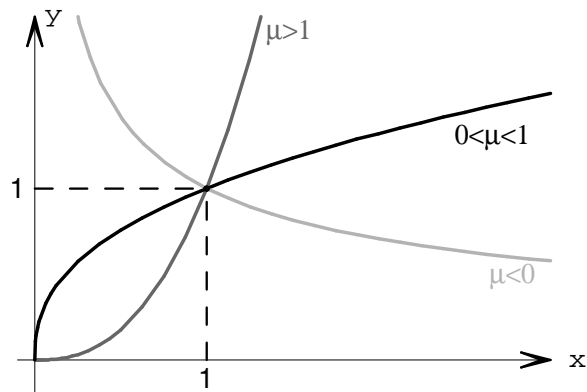
utasítással értelmezett $h_\mu : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ függvényt μ **kitevőjű hatványfüggvénynek nevezzük.**

Az \exp és az \ln függvények tulajdonságai alapján az $x^\mu = e^{\ln x^\mu} = e^{\mu \ln x}$ ($x > 0$) azonosságot felhasználva — az összetett függvény folytonosságára vonatkozó tétel alapján — következik, hogy h_μ folytonos, monoton függvény. Egyszerűen belátható, hogy h_μ szigorúan monoton növekvő, ha $\mu > 0$ és szigorúan monoton fogyó, ha $\mu < 0$, továbbá

- i) $h_0(x) = 1 \quad (x > 0)$,
- ii) $\lim_{x \rightarrow +0} x^\mu = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\mu = +\infty \quad (\mu > 0)$,
- iii) $\lim_{x \rightarrow +0} x^\mu = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\mu = 0 \quad (\mu < 0)$.

A h_μ hatványfüggvény grafikonját a μ kitevő különböző értékei mellett az alábbi ábrán

szemléltetjük.

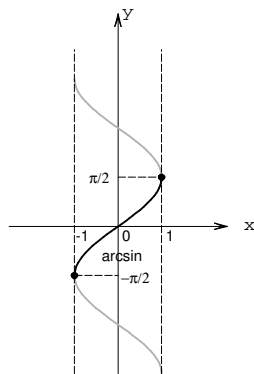


3. ábra

3.6. A trigonometrikus függvények inverze

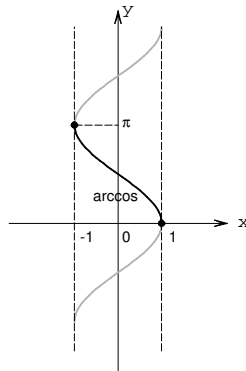
A \sin , \cos , tg és ctg függvények periodikusak, következésképpen értékkészletük minden elemét végtelen sokszor felveszik. Ezért ezeknek a függvényeknek nyilván nincs inverzük. Alkalmasan vett leszűkítésük azonban már invertálható. Az alábbiakban a szóban forgó függvényekből kiindulva kiválasztjuk ezeknek egy-egy szigorúan monoton szakaszát és megvizsgáljuk az ezekből invertálással kapott függvények tulajdonságait.

Definíció. A \sin függvény $[-\pi/2, \pi/2]$ intervallumra vonatkozó leszűkítésének inverzét **árkusz szinusz** függvénynek nevezzük és az \arcsin szimbólummal jelöljük. Ez azt jelenti, hogy minden $x \in [0, 1]$ szám esetén $\arcsin(x)$ -en értjük azt a $-\pi/2$ és $\pi/2$ közé eső $y \in [-\pi/2, \pi/2]$ szöget, melynek sinusa x ($\sin y = x$).



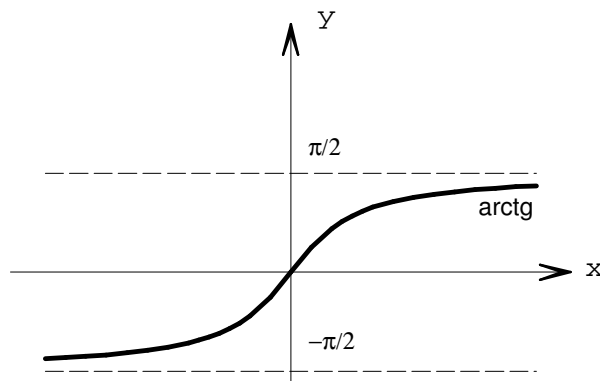
4. ábra

Definíció. A \cos függvény $[0, \pi]$ intervallumra vonatkozó leszűkítésének inverzét **árkusz koszinusz** függvénynek nevezzük és az \arccos szimbólummal jelöljük. Ez azt jelenti, hogy minden $x \in [0, 1]$ szám esetén $\arccos(x)$ -en értjük azt a 0 és π közé eső $y \in [0, \pi]$ szöget, melynek cosinusa x ($\cos y = x$).



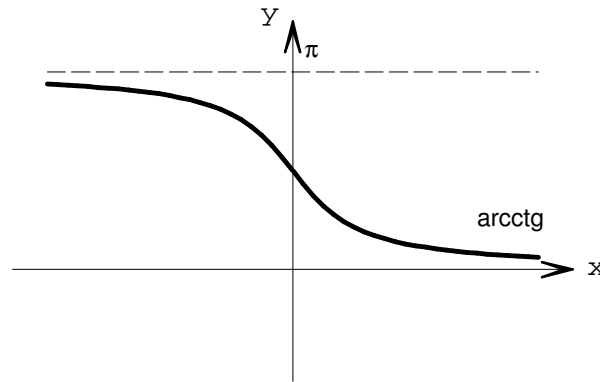
5. ábra

Definíció. A tg függvény $(-\pi/2, \pi/2)$ intervallumra vonatkozó leszűkítésének inverzét **árkusz tangens**, függvénynek nevezzük és az arctg szimbólummal jelöljük. Ez azt jelenti, hogy minden $x \in [0, 1]$ szám esetén $\operatorname{arctg}(x)$ -en értjük azt a $-\pi/2$ és $\pi/2$ közé eső $y \in (-\pi/2, \pi/2)$ szöget, melynek tangense x ($\operatorname{tg} y = x$).



6. ábra

Definíció. A ctg függvény $(0, \pi)$ -re vonatkozó leszűkítésének inverzét **árkusz kotangens** függvénynek nevezzük és az arcctg szimbólummal jelöljük. Ez azt jelenti, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ szám esetén $\text{arcctg}(x)$ -en értjük azt a 0 és π közé eső $y \in (0, \pi)$ szöveget, melynek cotangense ($\text{ctg } y = x$).



7. ábra

Mivel a \sin függvény a $[-\pi/2, \pi/2]$ intervallumban szigorúan monoton nő, ha $x \in (-\pi/2, \pi/2)$, azért az inverz függvény folytonosságára vonatkozó tétel alapján az \arcsin függvény is szigorúan monoton növekvő, folytonos függvény.

Hasonló megfontolásokkal megkapjuk a többi függvény monotonitási, és folytonossági tulajdonságait is. Az alábbiakban összefoglaljuk az \arcsin , \arccos , \arctg és arcctg függvények legfontosabb tulajdonságait.

a) D_f -fel jelölve az f függvény értelmezési tartományát, R_f -fel pedig értékkészletét, fennáll a következő:

$$\begin{aligned} D_{\arcsin} &= [-1, 1], & R_{\arcsin} &= \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \\ D_{\arccos} &= [-1, 1], & R_{\arccos} &= [0, \pi], \\ D_{\arctg} &= (-\infty, \infty), & R_{\arctg} &= \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \\ D_{\text{arcctg}} &= (-\infty, \infty), & R_{\text{arcctg}} &= (0, \pi). \end{aligned}$$

b) E függvények és inverzük közti kapcsolat az alábbi formában írható fel:

$$\begin{aligned} \sin(\arcsin(x)) &= x \quad (x \in [-1, 1]), & \arcsin(\sin(x)) &= x \quad \left(x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right), \\ \cos(\arccos(x)) &= x \quad (x \in [-1, 1]), & \arccos(\cos(x)) &= x \quad (x \in [0, \pi]), \\ \text{tg}(\arctg(x)) &= x \quad (x \in (-\infty, \infty)), & \arctg(\text{tg}(x)) &= x \quad \left(x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right), \\ \text{ctg}(\text{arcctg}(x)) &= x \quad (x \in (-\infty, \infty)), & \text{arcctg}(\text{ctg}(x)) &= x \quad (x \in (0, \pi)). \end{aligned}$$

c) Az \arcsin , \arccos , \arctg és arcctg függvények folytonosak, továbbá

$$\begin{aligned}\arccos(x) &= \frac{\pi}{2} - \arcsin(x) \quad (x \in [-1, 1]), \\ \text{arcctg}(x) &= \frac{\pi}{2} - \arctg(x) \quad (x \in \mathbb{R}).\end{aligned}$$

d) Az \arcsin és az \arctg függvény szigorúan monoton növekvő, az \arccos és az arcctg függvény szigorúan monoton fogyó.

A most értelmezett \arcsin , \arccos , \arctg és arcctg függvényeket **ciklometrikus függvényeknek** nevezzük. A \sin , \cos , stb. függvények egy másik, szigorúan monoton ágából kiindulva invertálással a most kapott ciklometrikus függvényektől különböző, de azokból egyszerűen származtatható függvényeket kapunk. Ezeket az \arcsin , \arccos , stb. **mellékágainak**, míg magukat a ciklometrikus függvényeket **főágnak** szokás nevezni.

3.7. A hiperbolikus függvények inverze

A \cosh és \sinh függvényeket a természetes alapú exponenciális függvények segítségével értelmeztük:

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad (x \in \mathbb{R})$$

Megállapítottuk, hogy a \sinh függvény az \mathbb{R} -en, a \cosh függvény a $[0, \infty)$ intervallumon szigorúan monoton növekvő, mindkettő folytonos, valamint, hogy

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \cosh(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \cosh(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \sinh(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sinh(x) = +\infty.$$

Innen következik a Bolzano tételének következménye alapján, hogy

$$R_{\sinh} = \mathbb{R}, \quad R_{\cosh} = [1, \infty).$$

Tehát a $\sinh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\cosh : [0, +\infty) \rightarrow [1, +\infty)$ folytonos, kölcsönösen egyértelmű (bijektív) függvények.

Definíció. A \sinh függvény inverzét **área szinusz hiperbolikus** függvénynek, a \cosh függvény $[0, \infty)$ intervallumra vonatkozó leszűkítésének inverzét **área koszinusz hiperbolikus** függvénynek nevezzük és ezeket az arsinh és arcosh szimbólumokkal jelöljük.

A fenti értelmezésből — felhasználva az inverz függvényre korábban igazolt tételket — egyszerűen adódnak a következő állítások:

a) Az arsinh és arcosh függvények értelmezési tartománya, illetve értékkészlete:

$$D_{\text{arsinh}} = \mathbb{R}, \quad D_{\text{arcosh}} = [1, \infty) \quad R_{\text{arsinh}} = \mathbb{R}, \quad R_{\text{arcosh}} = [0, \infty).$$

b) Az eredeti és az inverz függvény közti kapcsolatot felírva

$$\begin{aligned}\sinh(\operatorname{arsinh}(x)) &= \operatorname{arsinh}(\sinh(x)) = x, & \operatorname{arcosh}(\cosh(x)) &= x \quad (x \in \mathbb{R}), \\ \cosh(\operatorname{arcosh}(x)) &= x \quad (x \in [1, \infty)).\end{aligned}$$

adódik.

c) Az *arsinh* és *arcosh* függvények folytonosak és monoton növekedők.

d) Az *arsinh* és az *arcosh* függvény kifejezhető a logaritmus és a négyzetgyök függvény segítségével:

$$\begin{aligned}\operatorname{arsinh}(x) &= \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) \quad (x \in \mathbb{R}), \\ \operatorname{arcosh}(x) &= \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) \quad (x \geq 1).\end{aligned}$$

Az d) alatti azonosságok a következőképpen igazolhatók. Induljunk ki az

$$x = \sinh(\operatorname{arsinh}(x)) = \frac{e^{\operatorname{arsinh}(x)} - e^{-\operatorname{arsinh}(x)}}{2} = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \quad (x \in \mathbb{R})$$

azonosságból. Bevezetve a $t := e^y$ jelölést — átrendezés után — t -re a

$$t^2 - 2tx - 1 = 0$$

másodfokú egyenlet adódik, melynek pontosan két megoldása van, nevezetesen $t_{1,2} = (4x \pm \sqrt{4x^2 + 4})/2 = x \pm \sqrt{x^2 + 1}$. Mivel $t > 0$, a gyökképletben az ennek megfelelő megoldást felírva

$$t = e^y = x + \sqrt{x^2 + 1}$$

adódik. Mivel a logaritmus-függvény szigorúan monoton, ezért innen $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$. A fenti helyett az

$$x = \cosh(\operatorname{arcosh}(x)) = \frac{e^{\operatorname{arcosh}(x)} + e^{-\operatorname{arcosh}(x)}}{2} = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \quad (x > 1)$$

azonosságból kiindulva az állítás második része ugyanúgy igazolható.

A *tgh* és *ctgh* függvényeket a sinus és cosinus hiperbolikus függvények segítségével értelmeztük:

$$\begin{aligned}\operatorname{tgh}(x) &:= \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad (x \in \mathbb{R}), \\ \operatorname{ctgh}(x) &:= \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \quad (x \in \mathbb{R}, x \neq 0)\end{aligned}$$

Megállapítottuk, hogy a tgh függvény az \mathbb{R} -en, a $ctgh$ függvény a $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$ intervallumokon szigorúan monoton növekedő, kölcsönösen egyértelmű, mindkettő folytonos, valamint, hogy

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} tgh(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} ctgh(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} tgh(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} ctgh(x) = -1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} ctgh(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0-} ctgh(x) = -\infty.$$

Innen következik a Bolzano tételének következménye alapján, hogy

$$R_{tgh} = (-1, 1), \quad R_{ctgh} = (-\infty, -1) \cup (1, \infty),$$

valamint mindegyik függvény kölcsönösen egyértelmű, ezért invertálható.

Definíció. A tgh ($ctgh$) függvény inverzét **área tangens (cotangens) hiperbolikus** függvénynek nevezzük és az $artgh$ ($arctgh$) szimbólummal jelöljük.

Az értelmezés alapján nyilvánvaló, hogy

(a) Az $artgh$, $arctgh$ függvények folytonosak és

$$D_{artgh} = (-1, 1), \quad R_{artgh} = \mathbb{R}$$

$$D_{arctgh} = (-\infty, -1) \cup (1, \infty), \quad R_{arctgh} = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

(b) Az $artgh$ függvény szigorúan monoton nő a $(-1, 1)$ intervallumon, az $arctgh$ függvény szigorúan monoton csökken az $(-\infty, -1)$ és $(1, \infty)$ intervallumokon.

(c) Mindkét függvény kifejezhető a logaritmus függvény segítségével:

$$artgh(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \quad (x \in (-1, 1)),$$

$$arctgh(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1} \quad (x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)).$$

Ez utóbbi azonosság az $x = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}$, illetve $x = \frac{e^y + e^{-y}}{e^y - e^{-y}}$ egyenletből egyszerűen igazolható.

3.8. Feladatok

1. Határozzuk meg az alábbi függvények szakadási helyeit és azok fajtáit:

$$\begin{aligned}
 a) \quad f(x) &:= \begin{cases} n & (n \leq x < n+1, n \in \mathbb{N}), \\ -n & (-n \leq x < -n+1, n \in \mathbb{N}^*). \end{cases} \\
 b) \quad f(x) &:= \begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 10}, & (x \in \mathbb{R}, x \neq 2, x \neq 5), \\ 0, & (x \in \{2, 5\}). \end{cases} \\
 c) \quad f(x) &:= \text{int}(x^2) \quad (x \in \mathbb{R}). \\
 d) \quad f(x) &:= \begin{cases} x^3, & (x \in \mathbb{Q}), \\ x, & (x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}). \end{cases} \\
 f) \quad f(x) &:= \begin{cases} \frac{1}{q}, & (x = \frac{p}{q}, q \in \mathbb{N}^*, p \in \mathbb{Z}, (p, q) = 1), \\ 0, & (x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}). \end{cases} \\
 b) \quad f(x) &:= \begin{cases} \frac{x^4 - 4x^3 + 3x^2}{x^3 - 3x^2 - 4x}, & (x \in \mathbb{R}, x \neq 1, x \neq -4, x \neq 0), \\ 1, & (x \in \{-4, 0, 1\}). \end{cases}
 \end{aligned}$$

2. Határozzuk meg az alábbi függvények szakadási helyeit:

$$\begin{aligned}
 a) \quad f(x) &:= \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2}, & (x \in \mathbb{R}, x \neq 2), \\ A, & (x = 2). \end{cases} \\
 b) \quad f(x) &:= \begin{cases} \frac{1}{(1+x)^2}, & (x \in \mathbb{R}, x \neq -1), \\ 10, & (x = -1). \end{cases} \\
 c) \quad f(x) &:= \begin{cases} \left| \frac{\sin x}{x} \right|, & (x \in \mathbb{R}, x \neq 0), \\ 1, & (x = 0). \end{cases} \\
 d) \quad f(x) &:= \begin{cases} \frac{\sin x}{|x|}, & (x \in \mathbb{R}, x \neq 0), \\ 1, & (x = 0). \end{cases} \\
 e) \quad f(x) &:= \begin{cases} x \sin(1/x), & (x \in \mathbb{R}, x \neq 0), \\ 0, & (x = 0). \end{cases} \\
 f) \quad f(x) &:= \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & (x \in \mathbb{R}, x \neq 0), \\ 0, & (x = 0). \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$g) \quad f(x) := \sqrt{x} - \text{int}(\sqrt{x}) \quad (x \geq 0).$$

$$h) \quad f(x) := x \text{int}\left(\frac{1}{x}\right) \quad (x \in \mathbb{R}, x \neq 0).$$

$$i) \quad f(x) := \begin{cases} e^{-1/x}, & (x \in \mathbb{R}, x \neq 0), \\ 1, & (x = 0). \end{cases}$$

$$j) \quad f(x) := (-1)^{\text{int}(x^2)} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

3. Folytonosak-e az alábbi valós függvények? Paraméter esetén tanulmányozzuk a folytonosságot az $(\alpha \in \mathbb{R})$ paraméter függvényében!

$$a) \quad f(x) := \begin{cases} 2x, & (x \in [-1, 1]), \\ 2 - x, & (1 < x \leq 2). \end{cases}$$

$$b) \quad f(x) := \begin{cases} e^x, & (x < 0), \\ a + x, & (x \geq 0). \end{cases}$$

$$c) \quad f(x) := \begin{cases} x, & (|x| \leq 1), \\ 1, & (|x| > 1). \end{cases}$$

$$d) \quad f(x) := \begin{cases} 2^{-x}, & (x < 1), \\ 2^x, & (x \in [-1, 1]), \\ 2x^2, & (x > 1). \end{cases}$$

$$e) \quad f(x) := \begin{cases} x, & (x \in \mathbb{Q}), \\ x^2, & (x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}). \end{cases}$$

$$f) \quad f(x) := \begin{cases} \ln x, & (x > 1), \\ 0, & (x \leq 1), \end{cases}$$

$$g) \quad f(x) := \begin{cases} \frac{\sqrt{1-\cos x}}{1-\cos x}, & (x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \setminus \{0\}), \\ \alpha, & (x = 0), \end{cases}$$

$$h) \quad f(x) := \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2}, & (x \neq 2), \\ \alpha, & (x = 2). \end{cases}$$

4. Tegyük fel, hogy az f és g függvénynek az α helyen szakadása van. Lehet-e folytonos az $f + g, f - g, f/g, f^2$ függvény az α helyen?
5. Tegyük fel, hogy az f függvény folytonos, a g függvénynek szakadása van az α helyen. Lehet-e $f + g, fg, f/g, f^2$ folytonos az α helyen?
6. Tegyük fel, hogy az
- $a) \quad f^2$

$b) \quad f^3$

$c) \quad \frac{1}{f}$
- függvény folytonos az α helyen. Folytonos-e ekkor az f függvény az α pontban?
7. Tegyük fel, hogy az $f : H \rightarrow K$ függvénynek az $\alpha \in H$ helyen, a $g : K \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek pedig az $f(\alpha) \in K$ helyen van szakadása. Lehet-e folytonos a $g \circ f$ függvény az α helyen?
8. Vizsgáljuk az alábbi, f és g függvényekből képzett $f \circ g$ és $g \circ f$ közvetett függvény

folytonosságát.

- a) $f(x) := \text{sign}(x)$, $g(x) := 1 + x^2$ ($x \in \mathbb{R}$),
- b) $f(x) := \text{sign}(x)$, $g(x) := x(1 - x^2)$ ($x \in \mathbb{R}$).
- c) $f(x) := \text{sign}(x)$, $g(x) := 1 + x - \text{int}(x)$ ($x \in \mathbb{R}$).
- d) $f(x) := \begin{cases} x, & (0 < x \leq 1), \\ 2 - x, & (1 < x < 2), \end{cases}$
 $g(x) := \begin{cases} x, & (x \in \mathbb{Q}), \\ 2 - x, & (x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}). \end{cases}$
- e) $f(x) := x^2$, $g(x) := \begin{cases} x, & (x \in \mathbb{Q}), \\ -x, & (x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}), \end{cases}$
- f) $f(x) := \text{tg } x$ ($x \in \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2}\}$), $g(x) := \text{arctg } x$ ($x \in \mathbb{R}$),
- g) $f(x) := \sin x$ ($x \in \mathbb{R}$), $g(x) := \arcsin x$ ($x \in [-1, 1]$).

9. Tegyük fel, hogy az $f, g : H \rightarrow \mathbb{R}$ függvények folytonosak. Igazoljuk, hogy ekkor az alábbi F, G függvények is folytonosak.

- a) $F(x) := |f(x)|$ ($x \in H$),
- b) $F_c(x) := \begin{cases} -c, & (x \in H, f(x) < -c), \\ f(x), & (x \in H, |f(x)| \leq c), \\ c, & (x \in H, f(x) > c), \end{cases}$
- c) $F(x) := \min\{f(x), g(x)\}$ ($x \in H$),
- d) $G(x) := \max\{f(x), g(x)\}$ ($x \in H$).

10. Írjuk fel az alábbi függvények inverzét, ha szükséges, szűkítsük le az értelmezési tartományt!

- a) $f(x) := \frac{ax+b}{cx+d}$ ($x \in \mathbb{R}$, $ad - bc \neq 0$),
- b) $f(x) := x + \text{int}(x)$ ($x \in \mathbb{R}$),
- c) $f(x) := \begin{cases} x, & (x \in \mathbb{Q}), \\ -x, & (x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}), \end{cases}$
- d) $f(x) := \frac{-3 - \sqrt{13 + 4x}}{2}$ ($x \geq -\frac{13}{4}$),

- e) $f(x) := 3x^2 - 6x + 2 \quad (x \in \mathbb{R}),$
 f) $f(x) := -2x^2 + 10x - 1 \quad (x \in \mathbb{R}),$
 g) $f(x) := x^2 + 4x \quad (x \in \mathbb{R}),$
 h) $f(x) := 4x^2 - 20x + 12 \quad (x \in \mathbb{R}),$
 i) $f(x) := 4 \sin(x + \frac{\pi}{6}) \quad (x \in \mathbb{R}),$
 j) $f(x) := -\cos(2x + \frac{\pi}{2}) \quad (x \in \mathbb{R}),$
 k) $f(x) := 2 \operatorname{tg}(-x + \frac{\pi}{3}) \quad (x \in \mathbb{R}).$

11. Igazoljuk, hogy az

$$f(x) := (1 + x^2) \operatorname{sign}(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

szakadós függvény inverze folytonos.

12. Tegyük fel, hogy az $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos és f -nek létezik véges határértéke a $+\infty$ -ben. Igazoljuk, hogy f egyenletesen folytonos a $[0, +\infty)$ intervallumon.

13. Egyenletesen folytonosak-e az alábbi függvények a feltüntetett halmazokon ?

- | | |
|---|---|
| a) $f(x) := x^2 \quad (x \in (-a, a), a \in \mathbb{R}),$ | b) $f(x) := \ln x \quad (x \in (0, 1)),$ |
| c) $f(x) := \frac{x}{4 - x^2} \quad (x \in [-1, 1]),$ | d) $f(x) := \sqrt{x} \quad (x \in [1, +\infty)),$ |
| e) $f(x) := \sqrt[3]{x} \quad (x \in [0, +\infty)),$ | f) $f(x) := \ln x \quad (x \in [1, +\infty)),$ |
| g) $f(x) := \sin x \quad (x \in (-\infty, \infty)),$ | h) $f(x) := \cos^2 x \quad (x \in (-\infty, +\infty)),$ |
| i) $f(x) := x^2 \quad (x \in [0, +\infty)),$ | j) $f(x) := e^x \quad (x \in [1, +\infty)),$ |
| k) $f(x) := e^x \quad (x \in [-1, 1]),$ | ℓ) $f(x) := e^x \quad (x \in (-\infty, 0]).$ |

14. Az $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény *folytonossági modulusát* az

$$\omega_f(\delta) := \sup\{|f(s) - f(t)| : s, t \in [a, b], |s - t| \leq \delta\} \quad (\delta \geq 0)$$

utasítással értelmezzük. Igazoljuk, hogy az $\omega_f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ függvény monoton növekvő és

$$\lim_{\delta \rightarrow 0+} \omega_f(\delta) = 0.$$

15. Igazoljuk, hogy minden páratlan fokú, valós együtthatós polinomnak van valós gyöke.

16. Tegyük fel, hogy az $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény monoton és minden $f(a)$ és $f(b)$ közé eső értéket felvesz. Igazoljuk, hogy ekkor f folytonos.

17. Tegyük fel, hogy $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény, $n \in \mathbb{N}^*$ és $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a, b)$.
Igazoljuk, hogy van olyan $\xi \in (a, b)$, amelyre

$$f(\xi) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n}.$$

18. Igazoljuk, hogy az $x^3 - 3x + 1 = 0$ egyenletnek van valós gyöke az $(1, 2)$ intervallumban.
Számítsuk ki a gyök közelítő értékét 10^{-2} pontossággal.

19. Értelmezzük az alábbi függvényeket a 0 pontban úgy, hogy ott folytonosak legyenek.

a) $f(x) := \frac{(1+x)^n - 1}{x} \quad (x \in \mathbb{R}, x \neq 0, n \in \mathbb{N}),$

b) $f(x) := \frac{1 - \cos x}{x^2} \quad (x \in \mathbb{R}, x \neq 0),$

c) $f(x) := x^2 \sin(1/x) \quad (x \in \mathbb{R}, x \neq 0).$

4. Differenciálható függvények

A matematikai analízis egyik alapvető fogalma a differenciálhányados vagy derivált. A deriváltat nemcsak a matematikán belül, hanem számos természettudományban és a technikában is széleskörűen felhasználják. Több fontos fizikai, kémiai vagy gazdasági fogalmat a derivált segítségével lehet pontosan leírni.

Ebben a pontban ismertetjük a deriválttal kapcsolatos alapvető fogalmakat, a vele való számolás szabályait és bemutatjuk néhány alkalmazását. Az eddig követett módszert folytatva, ahol az lehetséges, együtt tárgyaljuk a valós és a komplex esetet. A differenciálhatóságot általában az értelmezési tartomány belső pontjaiban vizsgáljuk. Ezzel kapcsolatos az alábbi

Definíció. Akkor mondjuk, hogy az a pont a $H \subseteq \mathbb{R}$ **halmaz belső pontja**, ha létezik a -nak olyan $K_r(a)$ környezete, hogy $K_r(a) \subseteq H$.

Például, ha $H = (1, 3] \cup \{5\}$, akkor minden $a \in (1, 3)$ pont H belső pontja.

4.1. A derivált értelmezése

Legyen $H \subseteq \mathbb{R}$, és $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ a H halmazon értelmezett függvény és tegyük fel, hogy a a H halmaz belső pontja. A derivált értelmezéséhez célszerű bevezetni az alábbi függvényt.

Definíció. A

$$(\Delta_a f)(x) := \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad (x \in H \setminus \{a\})$$

utasítással értelmezett függvényt f a pontbeli **differenciahányadosának**, vagy **különbségi hányadosának** nevezzük.

Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a $\Delta_a f$ különbségi hányados nincs értelmezve az a pontban.

Az f jelentésétől függően a különbségi hányadosnak is lehet geometriai vagy fizikai jelentést tulajdonítani. Legyen pl. $H := (\alpha, \beta)$, és tekintsük az $f : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ valós függvény grafikonját. A grafikon $(a, f(a))$ és $(x, f(x))$ pontjait összekötő egyenest a

grafikon szóban forgó pontjain áthaladó **szelőjének** nevezzük. A $(\Delta_a f)(x)$ szám ennek a szelőnek az **iránytangense**.

*

4.1. ábra***

A fizikában a különbségi hányadost az átlagsebesség értelmezéséhez használják fel. Ha az $f : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ leképezés valamely egyenesvonalú mozgás **út-idő függvénye**, akkor a $(\Delta_a f)(x)$ szám az a és x **időpontok közti átlagsebességet** jelenti. Vizsgálni szeretnénk, hogy mi történik a differencia-hányados értékével, ha x tart a -hoz. A határértéket felhasználva bevezetjük a differenciálhányados fogalmát.

Definíció. Akkor mondjuk, hogy az f függvény az $a \in H$ belső pontban **differenciálható**, ha a $\Delta_a f$ különbségi hányadosnak létezik az a pontban véges határértéke. A szóban forgó határértéket az f függvény a pontbeli **differenciálhányadosának** vagy **deriváltjának** nevezzük és az

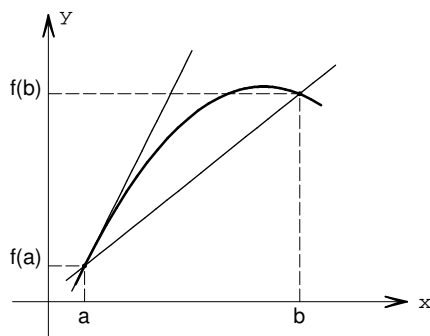
$$f'(a) := \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_a \Delta_a f.$$

vagy a $\frac{df}{dx}(a)$ szimbólumok valamelyikével jelöljük.

A geometriai szemlélet alapján, ha x tart a -hoz, akkor az $(a, f(a))$, $(x, f(x))$ pontokat összekötő szelő ahhoz az $(a, f(a))$ ponton áthaladó egyeneshez tart, amely a grafikus képet csak egy pontban metszi. Az ilyen egyenest érintőnek nevezzük, és pontosan a következőképpen definiáljuk:

Definíció. Akkor mondjuk, hogy az $f : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ függvény grafikonjának az $(a, f(a))$ pontjában **van érintője**, ha az f függvény az a pontban differenciálható. Az $(a, f(a)) \in \mathbb{R}^2$ ponton áthaladó $f'(a)$ iránytangensű egyenest az f grafikonjának a abszcisszájú pontjához tartozó **érintőjének** nevezzük. Az érintő egyenlete:

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$



2. ábra

Az említett átlagsebességnek $x \rightarrow a$ esetén vett határértékét az a időpontban vett **pillanatnyi sebességnek** szokás nevezni. Ez — felhasználva a derivált fogalmát — ekvivalens módon a következő formában fogalmazható meg: az $a \in (\alpha, \beta)$ időpontban differenciálható $f : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ **út-idő függvény $f'(a)$ deriváltját a mozgás a pontbeli pillanatnyi sebességének nevezzük.**

A derivált és a határérték értelmezése alapján nyilvánvaló, hogy ha f differenciálható az a pontban, akkor f -nek bármely $K_\rho(a)$ környezetre vonatkozó leszűkítése is differenciálható a -ban és a leszűkített függvénynek a -beli deriváltja egyenlő $f'(a)$ -val.

A differenciálhatóság és a folytonosság kapcsolatára vonatkozik az alábbi

1. Tétel. Ha $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható az $a \in H$ pontban, akkor f folytonos a -ban.

BIZONYÍTÁS. A feltétel szerint a $\Delta_a f$ függvénynek az a helyen létezik véges határértéke, következésképpen a -nak van olyan környezete, amelyben $\Delta_a f$ korlátos, azaz létezik olyan $M \geq 0$ és $r > 0$ szám, hogy

$$\frac{|f(x) - f(a)|}{|x - a|} \leq M \quad (x \in (a - r, a + r)).$$

Ebben a környezetben fennáll az

$$|f(x) - f(a)| \leq M|x - a| \quad (x \in (a - r, a + r))$$

egyenlőtlenség. Innen — pl. az átviteli elv alapján — nyilvánvaló, hogy f -nek a -ban létezik határértéke és $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. Valóban, legyen $(x_n, n \in \mathbb{N})$ egy a -hoz konvergáló számsorozat az $(a - r, a + r)$ intervallumban ($\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a, x_n \in (a - r, a + r), n \in \mathbb{N}$). Ekkor

$$0 \leq |f(x_n) - f(a)| \leq M|x_n - a| \quad (n \in \mathbb{N}),$$

és alkalmazva a rendőr-elvet azt kapjuk, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$, azaz — a folytonosságra vonatkozó átviteli elv alapján — f folytonos az a pontban. \square

Megjegyezzük, hogy a most igazolt állítás **megfordítása nem igaz**. Léteznek olyan függvények, amelyek folytonosak de nem differenciálhatók. Ilyen pl. az $f(x) := \text{abs}(x) := |x|$ ($x \in \mathbb{R}$) függvény $a = 0$ esetén. Valóban, ennek az a pontbeli különbségi hányadosa

$$(\Delta_0 f)(x) = \frac{|x| - 0}{x - 0} = \text{sign}(x) \quad (x \in \mathbb{R}, x \neq 0).$$

Minthogy a sign függvénynek a 0 helyen nincs határértéke, azért az abs függvény a 0 pontban nem differenciálható.

Könnyen igazolható, hogy az abs függvény a 0-tól különböző helyeken differenciálható, továbbá $f'(a) = 1$, ha $a > 0$ és $f'(a) = -1$, ha $a < 0$. Megjegyezzük, hogy létezik olyan \mathbb{R} -en értelmezett, mindenütt folytonos függvény, amely \mathbb{R} egyetlen pontjában sem differenciálható (lásd pl. [3], 88. oldal).

A most vizsgált példában a 0 pontbeli különbségi hányadosnak nincs ugyan határértéke, de létezik jobb-és baloldali határértéke. Ilyenkor azt mondjuk, hogy ennek a függvénynek a 0 pontban van jobb- és baloldali deriváltja.

Ezzel kapcsolatos az alábbi

Definíció. Legyen $a \in H \subseteq \mathbb{R}$, $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ és tegyük fel, hogy van olyan $(a - h, a]$ ($h > 0$) intervallum, amelyre $(a - h, a] \subseteq H$. Ha a $\Delta_a f$ különbségi hányadosnak létezik az a helyen a bal oldali határértéke, akkor azt mondjuk, hogy f az a helyen **balról differenciálható** és a

$$\lim_{x \rightarrow a-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

baloldali határtértéket f a -beli baloldali deriváltjának nevezzük és az $f'_-(a)$ szimbólummal jelöljük.

A fenti értelmezésben a baloldali határérték helyett jobboldali határértéket véve a **jobboldali derivált** fogalmához jutunk. Az a pontbeli jobboldali deriváltat az $f'_+(a)$ szimbólummal jelöljük. Azt, hogy az f függvénynek az a pontban létezik a baloldali deriváltja — geometriai szóhasználatnál élve — úgy szokás kifejezni, hogy f **grafikonjának létezik a baloldali félérintője**. Nyilvánvaló, hogy f akkor és csak akkor differenciálható a -ban, ha létezik a bal- és jobboldali deriváltja és

$$f'_-(a) = f'_+(a) = f'(a)$$

Bizonyos esetekben célszerű a differenciálhatóságnak az alábbi, eredetivel ekvivalens átfogalmazását használni. Ez a definíció — amint azt látni fogjuk — minden nehézség nélkül átvihető többváltozós függvényekre.

2. Tétel. Az $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ függvény a $H \subseteq \mathbb{R}$ halmaz a belső pontjában akkor és csak akkor differenciálható, ha létezik olyan $A \in \mathbb{R}$ szám és olyan $\epsilon : H \rightarrow \mathbb{R}$ a -ban folytonos függvény, amelyre $\epsilon(a) = 0$, és amellyel a függvény megváltozása felírható a következő alakban:

$$(1) \quad f(x) - f(a) = A(x - a) + (x - a)\epsilon(x) \quad (x \in H).$$

Az A szám az f függvény a -beli deriváltjával egyenlő.

BIZONYÍTÁS. i) Tegyük fel először, hogy f differenciálható az a pontban és legyen $A := f'(a)$. Értelmezzük az ϵ függvényt a következőképpen:

$$\epsilon(x) := \begin{cases} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - A, & (x \in H, x \neq a), \\ 0, & (x = a). \end{cases}$$

Ekkor az ϵ függvénynek az a helyen a határértéke 0, következésképpen folytonos a -ban. E definícióból átrendezéssel adódik a kívánt alak.

ii) Most induljunk ki abból, hogy f megváltozása felírható az (1) alakban. Innen $(x - a)$ -val való osztás után azt kapjuk, hogy

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - A = \epsilon(x) \quad (x \in H, x \neq a).$$

Minthogy $\lim_a \epsilon = 0$, ezért az f függvény különbségi hányadosának valóban van határértéke és $f'(a) = A$. \square

A differenciálhatóság most ismertetett átfogalmazásában az $x - a = h$ helyettesítést alkalmazva

$$f(a + h) - f(a) = Ah + h\epsilon(a + h) = Ah + \eta(h) \quad (|h| < r)$$

adódik minden olyan $r > 0$ számra, amelyre $(a - r, a + r) \subseteq H$. Ez azt jelenti, hogy a függvény $f(a + h) - f(a)$ megváltozása a h változó egy homogén lineáris függvényének és az η függvénynek az összegeként állítható elő, ahol η kicsi a lineáris függvényhez képest abban az értelemben, hogy

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\eta(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(a + h) = 0.$$

Az $\ell(h) := Ah$ ($h \in \mathbb{R}$) lineáris függvényt az f differenciálható függvény a **pontbeli differenciáljának** nevezzük és a $d_a f$ szimbólummal jelöljük.

Az alábbiakban felsorolunk néhány függvényt, amelyek deriváltja közvetlenül a definíció alapján kiszámítható.

Példák

1. A **konstans függvény** mindenütt differenciálható és deriváltja 0.
Valóban legyen $c \in \mathbb{R}$. Az $f(x) := c$ ($x \in \mathbb{R}$) függvény $a \in \mathbb{R}$ pontbeli különbségi hányadosa

$$\Delta_a(x) := \frac{c - c}{x - a} = 0 \quad (x \in \mathbb{R}, x \neq a).$$

Következésképpen ennek határértéke az a helyen 0.

2. A \mathbb{R} **identikus leképezése** minden $a \in \mathbb{R}$ pontban differenciálható és deriváltja 1-gyel egyenlő.
Az $f(x) := x$ ($x \in \mathbb{R}$) függvény különbségi hányadosa ugyanis

$$\Delta_a(x) := \frac{x - a}{x - a} = 1 \quad (x \in \mathbb{R}, x \neq a).$$

Innen következik, hogy a különbségi hányados határértéke az a helyen 1.

3. Legyen $n \in \mathbb{N}$. Az $f(x) := x^n$ ($x \in \mathbb{R}$) **hatványfüggvény mindenütt differenciálható** és $f'(a) = na^{n-1}$ ($a \in \mathbb{R}$).
A szóban forgó függvény a pontbeli különbségi hányadosa

$$(\Delta_a f)(x) = \frac{x^n - a^n}{x - a} = x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1} \quad (x \in \mathbb{R}, x \neq a).$$

A jobb oldalon álló polinom határértéke az a pontban az a -beli helyettesítési értékkel egyenlő. Ezért

$$\lim_a \Delta_a f = a^{n-1} + a^{n-1} + \cdots + a^{n-1} + a^{n-1} = na^{n-1}.$$

4. Az $f(x) := \sin x$ ($x \in \mathbb{R}$) **sinus - függvény** mindenütt differenciálható, és $f'(a) = \sin' a = \cos a$, ($a \in \mathbb{R}$).

Először megmutatjuk, hogy $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cosh - 1}{h} = 0$. Kihasználva a $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$ nevezetes határértéket, a cosinus függvény nulla pontbeli folytonosságát, valamint a függvények határértékére vonatkozó műveleti tulajdonságokat, a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos^2 h - 1}{h(\cos h + 1)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\sin^2 h}{h(\cos h + 1)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} \frac{-\sin h}{\cos h + 1} = 0$$

határérték azonnal adódik. A sinus függvény a pontbeli különbségi hányadosát az addíciós összefüggés alapján felírhatjuk

$$\begin{aligned} (\Delta_a f)(x) &= \frac{\sin x - \sin a}{x - a} = \frac{\sin(a + h) - \sin a}{h} = \frac{\sin a \cdot \cos h + \cos a \cdot \sinh - \sin a}{h} = \\ &= \sin a \cdot \frac{\cos h - 1}{h} + \cos a \cdot \frac{\sin h}{h} \end{aligned}$$

alakban, ahol $h = x - a$. A határértékre vonatkozó műveleti tulajdonságokat alkalmazva, a deriváltra

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} (\Delta_a f)(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \sin a \cdot \frac{\cos h - 1}{h} + \cos a \cdot \frac{\sin h}{h} = \cos a$$

adódik.

5. Az $f(x) := \cos x$ ($x \in \mathbb{R}$) **cosinus függvény** mindenütt differenciálható, és $f'(a) = \cos' a = -\sin a$, ($a \in \mathbb{R}$).

A sinus függvényhez hasonlóan a cosinus függvény a pontbeli különbségi hányadosát az addíciós összefüggés alapján felírhatjuk

$$\begin{aligned} (\Delta_a f)(x) &= \frac{\cos x - \sin a}{x - a} = \frac{\cos(a+h) - \cos a}{h} = \frac{\cos a \cdot \cos h - \sin a \cdot \sinh - \cos a}{h} = \\ &= \cos a \cdot \frac{\cos h - 1}{h} - \sin a \cdot \frac{\sin h}{h} \end{aligned}$$

alakban, ahol $h = x - a$. A határértékre vonatkozó műveleti tulajdonságokat alkalmazva, a deriváltra

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} (\Delta_a f)(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \cos a \cdot \frac{\cos h - 1}{h} - \sin a \cdot \frac{\sin h}{h} = -\sin a$$

adódik.

6. Az $f(x) := \ln x$ ($x > 0$) **természetes alapú logaritmus – függvény** értelmezési tartományának minden pontjában differenciálható, és $f'(a) = \ln' a = \frac{1}{a}$, ($a > 0$).

A logaritmus függvény a pontbeli különbségi hányadosát a logaritmusra vonatkozó műveleti tulajdonságok alapján felírhatjuk

$$\begin{aligned} (\Delta_a f)(x) &= \frac{\ln x - \ln a}{x - a} = \frac{\ln(a+h) - \ln a}{h} = \frac{\ln \frac{a+h}{a}}{h} = \frac{1}{a} \cdot \frac{a}{h} \cdot \ln \left(1 + \frac{h}{a}\right) = \\ &= \frac{1}{a} \ln \left(1 + \frac{1}{\frac{a}{h}}\right)^{\frac{a}{h}} \end{aligned}$$

alakban, ahol $h = x - a$. Mint láttuk, $\lim_{|y| \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = e$, továbbá a logaritmusfüggvény folytonos az $a = e$ helyen, ezért deriváltra

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} (\Delta_a f)(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{a} \ln \left(1 + \frac{1}{\frac{a}{h}}\right)^{\frac{a}{h}} = \frac{1}{a}$$

adódik.

Az első három példában vizsgált függvényekből kiindulva — az algebrai műveletek véges számú alkalmazásával — a racionális függvényekhez jutunk. Ezek deriváltját az

— algebrai műveleteket és a deriválást összekapcsoló — ún. differenciálási szabályok ismeretében kiszámíthatjuk.

4.1.1. Differenciálási szabályok.

Az **összeg-, szorzat- és hányadosfüggvény deriváltjára** vonatkozik az alábbi állítás.

3. Tétel. *Tegyük fel, hogy az $f, g : H \rightarrow \mathbb{R}$ függvények differenciálhatók a H halmaz a belső pontjában. Ekkor $f + g$, fg és $g(a) \neq 0$ esetén f/g is differenciálható a -ban és*

$$\begin{aligned}(f + g)'(a) &= f'(a) + g'(a), \\ (fg)'(a) &= f(a)g'(a) + f'(a)g(a), \\ (f/g)'(a) &= \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.\end{aligned}$$

BIZONYÍTÁS. i) Az $f + g$ függvény a -hoz tartozó különbségi hányadosa az $x \in H$, $x \neq a$ helyen egyszerű átalakítás után felírható a

$$(\Delta_a(f + g))(x) = \frac{f(x) + g(x) - (f(a) + g(a))}{x - a} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$$

alakban. Az összegfüggvény határértékére vonatkozó tétel alapján a $\Delta_a(f + g)$ különbségi hányadosnak van határértéke az a helyen, és az $f'(a) + g'(a)$ számmal egyenlő.

ii) A szorzatra vonatkozó állítás igazolásához írjuk fel az fg a -hoz tartozó különbségi hányadosát az $x \in H$, $x \neq a$ helyen a

$$(\Delta_a(fg))(x) = \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x - a} = f(x)\frac{g(x) - g(a)}{x - a} + g(a)\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

alakban. Mivel f differenciálható az a pontban, ezért az 1. Tétel alapján f folytonos a -ban, következésképpen f -nek létezik határértéke a -ban és az $f(a)$ -val egyenlő. A szorzat- és összegfüggvény határértékére vonatkozó tétel alapján a szorzat különbségi hányadosának létezik határértéke az a helyen és

$$\begin{aligned}\lim_a \Delta_a(fg) &= \lim_{x \rightarrow a} f(x) \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} + g(a) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \\ &= f(a)g'(a) + g(a)f'(a).\end{aligned}$$

iii) A hányadosra vonatkozó állítást először az $f(x) := 1$ ($x \in H$) speciális esetre igazoljuk. Az $1/g$ függvénynek az $a \in H$ ponthoz tartozó különbségi hányadosa a

következésképpen írható fel

$$\frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}}{x - a} = -\frac{1}{g(x)g(a)} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \quad (x \in H, x \neq a).$$

Felhasználva a szorzat- és a hányadosfüggvény határértékére vonatkozó tételt, valamint a g függvény a -beli folytonosságát —, ami g differenciálhatóságából következik, — azt kapjuk, hogy a szóban forgó különbségi hányadosnak létezik az a pontban a határértéke és

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{1}{g(a)} \left(\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)}\right) \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = -\frac{g'(a)}{g^2(a)}.$$

A most igazolt speciális esetet a szorzatfüggvény deriválási szabályával kombinálva adódik az általános eset:

$$\begin{aligned} \left(\frac{f}{g}\right)'(a) &= \left(f \frac{1}{g}\right)'(a) = f'(a) \frac{1}{g(a)} + f(a) \left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \\ &= f'(a) \frac{1}{g(a)} - \frac{f(a)g'(a)}{g^2(a)} = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}. \end{aligned}$$

Ezzel a tételt igazoltuk. \square .

A konstans függvény és a szorzat deriválási szabályát felhasználva adódik, hogy bármely $\lambda \in \mathbb{R}$ számra f -fel együtt λf is differenciálható a -ban és

$$(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a).$$

A 3. Tételben két tag összegére, ill. két tényező szorzatára bizonyított állítások teljes indukcióval kiterjeszthetők véges sok tag összegére és véges sok tényező szorzatára. Nevezetesen, ha $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ és az $f_1, f_2, \dots, f_n : H \rightarrow \mathbb{R}$ függvények mindegyike differenciálható az $a \in H$ pontban, akkor az

$$f_1 + f_2 + \dots + f_n, \quad f_1 f_2 \dots f_n$$

függvények is differenciálhatók az a pontban és

$$\begin{aligned} (f_1 + f_2 + \dots + f_n)'(a) &= f_1'(a) + f_2'(a) + \dots + f_n'(a), \\ (f_1 f_2 \dots f_n)'(a) &= f_1'(a) f_2(a) \dots f_n(a) + \\ &\quad + f_1(a) f_2'(a) \dots f_n(a) + \dots + f_1(a) f_2(a) \dots f_n'(a). \end{aligned}$$

A 3. Tétel és az ahhoz fűzött megjegyzések a derivált helyett az **egyoldali deriváltakra** is fennállnak, s ezek szóról-szóra ugyanúgy igazolhatók.

A pontbeli differenciálhatóságot célszerű kiterjeszteni.

Definíció. Akkor mondjuk, hogy a $H \subset \mathbb{R}$ **nyílt halmazon** értelmezett $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ függvény a H **halmazon** differenciálható, ha annak minden pontjában differenciálható. Ilyenkor a H -n értelmezett

$$f' : H \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto f'(x)$$

függvényt f **deriváltfüggvényének** vagy **deriváltjának** nevezzük.

A továbbiakban néha a zárt intervallumon való differenciálhatóságot is használni fogjuk a következő értelemben: Az $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt differenciálhatónak nevezzük az $[\alpha, \beta]$ intervallumon, ha f differenciálható az intervallum belső pontjaiban továbbá, ha α -ban jobbról, β -ban balról differenciálható. A H halmazon differenciálható $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ típusú függvények összességét a $\mathcal{D}(H, \mathbb{R})$, vagy az egyszerűbb $\mathcal{D}(H)$ szimbólummal fogjuk jelölni.

A most igazolt differenciálási szabályok alapján sok függvény differenciálhatóságát, és deriváltját tudjuk megállapítani.

Példák

1. A **polinomok** mindenütt, a **racionális függvények** pedig értelmezési tartományuk minden pontjában differenciálhatók. Ha az n -edfokú P polinom

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \quad (x \in \mathbb{R})$$

alakú, akkor deriváltja a következő — tagonkénti deriválással kapott — polinom:

$$P'(x) = a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

A racionális törtfüggvényt is tudjuk természetesen, deriválni, de ennek általános felírásától most eltekintünk.

2. A **negatív egész kitevőjű hatványfüggvény**,

$$f(x) := x^{-n} = \frac{1}{x^n} \quad (x \in \mathbb{R}, x \neq 0, n \in \mathbb{N})$$

deriváltja a hányados differenciálási szabálya alapján

$$f'(x) = -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1} \quad (x \in \mathbb{R}, x \neq 0).$$

Ezt az előző pont 3. példában szereplő eredménnyel egybevetve kapjuk, hogy bármely $n \in \mathbb{Z}$ egész kitevőre

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1} \quad (x \in \mathbb{R}, x \neq 0, n \in \mathbb{Z}).$$

3. A hányados függvény differenciálási szabálya alapján a **tangens** és a **cotangens** függvények is differenciálhatók értelmezési tartományuk minden pontjában, és

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}' x &= \frac{\sin' x \cos x - \sin x \cos' x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{(k + \frac{1}{2})\pi, k \in \mathbb{Z}\}), \\ \operatorname{ctg}' x &= \frac{\cos' x \sin x - \cos x \sin' x}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}).\end{aligned}$$

4. Mivel minden $a > 0$, $a \neq 1$ esetén $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$, ezért a konstansszoros differenciálási szabálya alapján az a **alapú logaritmusfüggvény** is differenciálható értelmezési tartományán, és

$$\log'_a x = \frac{1}{\ln a} \ln' x = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x} \quad (x > 0, a > 0, a \neq 1)$$

4.1.2. A közvetett függvény deriváltja

Nemcsak az algebrai műveletek, hanem a közvetett függvény képzés sem vezet ki a differenciálható függvények köréből. Legyen $H, K \subseteq \mathbb{R}$ két nem üres halmaz. A továbbiakban az

$$f : H \rightarrow K, \quad g : K \rightarrow \mathbb{R}$$

függvényekből képzett $g \circ f$ közvetett függvény differenciálhatóságát vizsgáljuk. Erre vonatkozik az

4. Tétel. *Tegyük fel, hogy az $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ függvény differenciálható az $a \in H$ belső pontban, továbbá legyen $f(a)$ a K -nak belső pontja és tegyük fel, hogy g differenciálható az $f(a)$ pontban. Ekkor $g \circ f$ is differenciálható a -ban és*

$$(g \circ f)'(a) = (g' \circ f)(a) \cdot f'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a).$$

BIZONYÍTÁS. Megmutatjuk, hogy a $g \circ f$ függvény $(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)$ megváltozása felírható

$$(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a) = g'(f(a))f'(a)(x - a) + \epsilon(x)(x - a) \quad (x \in H)$$

alakban, ahol $\epsilon : H \rightarrow \mathbb{R}$ egy olyan a -ban folytonos függvény, amelyre $\epsilon(a) = 0$. Ez a 2. Tétel alapján ekvivalens a bizonyítandó állítással.

Az f függvény a pontbeli differenciálhatósága pontosan azt jelenti, hogy létezik olyan $\epsilon_1 : H \rightarrow K$, a -ban folytonos függvény, amelyre $\epsilon_1(a) = 0$ és

$$f(x) - f(a) = f'(a)(x - a) + \epsilon_1(x)(x - a) \quad (x \in H).$$

Az g függvény $b := f(a)$ pontbeli differenciálhatósága azzal ekvivalens, hogy létezik olyan $\epsilon_2 : K \rightarrow \mathbb{R}$, b -ben folytonos függvény, amelyre $\epsilon_2(b) = 0$ és

$$g(y) - g(b) = g'(b)(y - b) + \epsilon_2(y)(y - b) \quad (y \in K).$$

Ennek alapján az $y = f(x)$ jelölést használva a közvetett függvény megváltozása felírható a következő alakban:

$$\begin{aligned} g(f(x)) - g(f(a)) &= g'(b)(f(x) - f(a)) + \epsilon_2(f(x))(f(x) - f(a)) = \\ &= g'(b)(f'(a)(x - a) + \epsilon_1(x)(x - a)) + \epsilon_2(f(x))(f'(a)(x - a) + \epsilon_1(x)(x - a)) = \\ &= g'(b)f'(a)(x - a) + (g'(b)\epsilon_1(x) + \epsilon_2(f(x))(f'(a) + \epsilon_1(x)))(x - a) \\ &= g'(b)f'(a)(x - a) + \epsilon(x)(x - a), \end{aligned}$$

ahol

$$\epsilon(x) := g'(b)\epsilon_1(x) + \epsilon_2(f(x))(f'(a) + \epsilon_1(x)) \quad (x \in H).$$

Az ϵ_1 , ϵ_2 és ϵ értelmezése alapján nyilvánvaló, hogy $\epsilon(a) = 0$ továbbá az f a -pontbeli — differenciálhatóságból következő — folytonossága, valamint a közvetett függvény folytonossága alapján ϵ is folytonos az a helyen. Ezzel a tételt bebizonyítottuk. \square

A most igazolt tételből következik, hogy ha $f \in \mathcal{D}(H, K)$ és $g \in \mathcal{D}(K, \mathbb{R})$, akkor $g \circ f \in \mathcal{D}(H, \mathbb{R})$ és

$$(g \circ f)' = g' \circ f \cdot f'.$$

Ezt a formulát **lánkszabálynak** is szokás nevezni. Ennek alapján kiszámíthatjuk pl. a

$$h(x) := (x^2 + 1)^{100} \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvény deriváltját. A h függvény az

$$f(x) := x^2 + 1 \quad (x \in \mathbb{R}), \quad g(y) := y^{100} \quad (y \in \mathbb{R})$$

függvények kompozíciója: $h = g \circ f$. Minthogy

$$f'(x) = 2x \quad (x \in \mathbb{R}), \quad g'(y) = 100y^{99} \quad (y \in \mathbb{R}),$$

azért a lánkszabály szerint

$$h'(x) = g'(f(x))f'(x) = 100(1 + x^2)^{99}2x \quad (x \in \mathbb{R}).$$

4.1.3. Az inverz függvény deriváltja

Az inverz függvény deriválási szabályának megfogalmazásában intervallumon értelmezett, folytonos valós függvényekből indulunk ki. Az általános esetben fellépő problémákkal kapcsolatban a pont végén tett megjegyzésre utalunk.

5. Tétel. Legyen $f : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ szigorúan monoton, folytonos függvény. Ha f differenciálható az $a \in (\alpha, \beta)$ pontban és $f'(a) \neq 0$, akkor az f függvény f^{-1} inverze is differenciálható a $b := f(a)$ helyen és

$$(2) \quad (f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

BIZONYÍTÁS. A (2) igazolásához legyen $(y_n, n \in \mathbb{N})$ egy, az f értékkészletéből vett b -hez konvergáló sorozat és vezessük be az $x_n := f^{-1}(y_n)$ ($n \in \mathbb{N}$) jelölést. Ekkor $f^{-1}(b) = a$ és $f(x_n) = y_n$ ($n \in \mathbb{N}$), továbbá az inverz függvény folytonosságára vonatkozó tétel alapján f^{-1} folytonos a b pontban, azaz az átviteli elv alapján,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} f^{-1}(y_n) = f^{-1}(b) = a.$$

Ezeket felhasználva a f^{-1} függvény b -pontbeli különbségi hányadosa kifejezhető az f a -beli különbségi hányadosával:

$$\frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(b)}{y_n - b} = \frac{x_n - a}{f(x_n) - f(a)} = \frac{1}{\frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a}} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Innen az átviteli elv és a hányados határértékére vonatkozó szabály alapján — $f'(a) \neq 0$ figyelembevételével — következik, hogy a f^{-1} függvény differenciálható a b pontban és

$$(f^{-1})'(b) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(b)}{y_n - b} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a}} = \frac{1}{f'(a)}.$$

Ezzel a tételt igazoltuk. \square

Az inverz függvény differenciálhatóságára vonatkozó tételt számos függvény differenciálhányadosának kiszámítására használhatjuk.

Példák.

1. Alkalmazzuk az inverz függvény deriváltjára most igazolt tételt a természetes alapú exponenciális függvényre, azaz legyen $f(x) := \ln x$ ($x > 0$). Ekkor $f^{-1}(x) = e^x =$

$\exp(x)$ ($x \in \mathbb{R}$), és mivel $\ln' x = \frac{1}{x} \neq 0$ ($x > 0$), ezért a **természetes alapú exponenciális függvény** minden valós x esetén differenciálható, (2) alapján

$$\exp'(x) = \frac{1}{\ln'(\exp(x))} = \frac{1}{\frac{1}{\exp(x)}} = \exp(x) = e^x \quad (x \in \mathbb{R}).$$

2. Legyen $f(x) := \sin x$ ($x \in [-\pi/2, \pi/2]$). Ekkor $f^{-1}(x) = \arcsin x$ ($x \in [-1, 1]$). Mivel $f'(x) = \cos x > 0$, ha $x \in (-\pi/2, \pi/2)$, és $f'(x) = 0$, ha $x = \pm\pi/2$, ezért az **arcus sinus függvény** csak a $(-1, 1)$ intervallumon differenciálható, és (2) alapján

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} \quad (x \in (-1, 1)).$$

A négyzetes összefüggés alapján az utóbbi függvény nevezője a következőképpen írható fel:

$$\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))} = \sqrt{1 - x^2},$$

mivel $\cos(\arcsin(x)) > 0$, ha $x \in (-1, 1)$. Ezzel beláttuk, hogy

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (x \in (-1, 1)).$$

3. Legyen $f(x) := \operatorname{tg} x$ ($x \in (-\pi/2, \pi/2)$). Ekkor $f^{-1}(x) = \operatorname{arctg} x$ ($x \in \mathbb{R}$). Mivel $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x > 0$, ha $x \in \mathbb{R}$, ezért az **arcus tangens függvény** mindenütt differenciálható, és (2) alapján

$$\operatorname{arctg}'(x) = \frac{1}{\operatorname{tg}'(\operatorname{arctg}(x))} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg}(x))} = \frac{1}{1 + x^2} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

4. Legyen $f(x) := \cos x$ ($x \in [0, \pi]$). Ekkor $f^{-1}(x) = \arccos x$ ($x \in [-1, 1]$). Mivel $f'(x) = -\sin x < 0$, ha $x \in (0, \pi)$, és $f'(x) = 0$, ha $x = 0$ vagy $x = \pi$, ezért az **arcus cosinus függvény** csak a $(-1, 1)$ intervallumon differenciálható, és (2) alapján

$$\arccos'(x) = \frac{1}{\cos'(\arccos(x))} = \frac{1}{-\sin(\arccos(x))} \quad (x \in (-1, 1)).$$

A négyzetes összefüggés alapján az utóbbi függvény nevezője a következőképpen írható fel:

$$\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1 - \cos^2(\arccos(x))} = \sqrt{1 - x^2},$$

mivel $\sin(\arccos(x)) > 0$, ha $x \in (-1, 1)$. Ezzel beláttuk, hogy

$$\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (x \in (-1, 1)).$$

5. Legyen $f(x) := \operatorname{ctg} x$ ($x \in (0, \pi)$). Ekkor $f^{-1}(x) = \operatorname{arcctg} x$ ($x \in \mathbb{R}$). Mivel $f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \operatorname{ctg}^2 x) < 0$, ha $x \in \mathbb{R}$, ezért az **arcus cotangens függvény** mindenütt differenciálható, és (2) alapján

$$\operatorname{arcctg}'(x) = \frac{1}{\operatorname{ctg}'(\operatorname{arcctg}(x))} = -\frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2(\operatorname{arcctg}(x))} = -\frac{1}{1 + x^2} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

A természetes alapú exponenciális függvény differenciálhányadosának ismeretében sok más függvény deriváltját is meg tudjuk határozni.

6. Mivel az **a alapú exponenciális függvény** $\exp_a(x) = a^{(x)}$ ($a > 0$) felírható a természetes alapú exponenciális függvény segítségével,

$$\exp_a(x) = a^x = e^{\ln a^x} = e^{x \ln a},$$

ezért az összetett függvény differenciálási szabálya alapján \exp_a mindenütt differenciálható, és

$$\exp'_a x = e^{x \ln a} \ln a = a^x \ln a = \exp_a(x) \ln a \quad (x \in \mathbb{R}).$$

7. Legyen $\mu > 0$. A $h_\mu(x) = x^\mu$ ($x > 0$) **hatványfüggvény** kifejezhető a logaritmus és az exponenciális függvény függvényekkel:

$$h_\mu(x) := x^\mu = \exp(\mu \ln(x)) \quad (x > 0).$$

Ezt és a közvetett függvény differenciálási szabályát felhasználva azt kapjuk, hogy h_μ minden $x > 0$ pontban differenciálható és

$$h'_\mu(x) = \exp(\mu \ln(x)) \frac{\mu}{x} = \mu x^{\mu-1} \quad (x > 0).$$

Ezzel megmutattuk, hogy a hatványfüggvény korábban egész kitevőkre igazolt deriválási szabálya ugyanolyan alakú tetszőleges valós kitevő esetén.

8. Tetszőleges $f : H \rightarrow (0, +\infty)$, $g : H \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvények esetén az f^g **függvény** is differenciálható, mert f^g az exponenciális és logaritmus függvények tulajdonságait alkalmazva átírható differenciálható függvények, függvény-kompozíció, és függvény-szorítás segítségével

$$(f^g)(x) = f(x)^{g(x)} = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x) \ln f(x)}$$

alakba. Alkalmazva a differenciálási szabályokat, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} (f^g)'(x) &= e^{g(x) \ln f(x)} (g(x) \ln f(x))' = \\ &= f(x)^{g(x)} \left(g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{1}{f(x)} f'(x) \right) \quad (x \in H). \end{aligned}$$

9. Mivel a hiperbolikus függvényeket az exponenciális függvények lineáris kombinációjaként állítjuk elő, ezért a **sinus hiperbolikus** és a **cosinus hiperbolikus függvény** is mindenütt differenciálható, és

$$\begin{aligned}\sinh' x &= \frac{\exp'(x) - \exp'(-x)}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh \quad (x \in \mathbb{R}), \\ \cosh' x &= \frac{\exp'(x) + \exp'(-x)}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh \quad (x \in \mathbb{R}).\end{aligned}$$

10. Legyen $f(x) := \sinh x$ ($x \in \mathbb{R}$). Ekkor $f^{-1}(x) = \operatorname{arsinh} x$ ($x \in \mathbb{R}$). Mivel $f'(x) = \cosh x > 0$ ($x \in \mathbb{R}$), ezért az **area sinus hiperbolikus függvény** mindenütt differenciálható, és (2) alapján

$$\operatorname{arsinh}'(x) = \frac{1}{\sinh'(\operatorname{arsinh}(x))} = \frac{1}{\cosh(\operatorname{arsinh}(x))} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

A négyzetes összefüggés ($\cosh^2 \alpha - \sinh^2 \alpha = 1$) alapján az utóbbi függvény nevezője a következőképpen írható fel:

$$\cosh(\operatorname{arsinh}(x)) = \sqrt{1 + \sin^2(\arcsin(x))} = \sqrt{1 + x^2},$$

mivel $\cosh(\alpha) > 0$, ha $\alpha \in \mathbb{R}$. Ezzel beláttuk, hogy

$$\operatorname{arsinh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

11. Legyen $f(x) := \cosh x$ ($x \in [0, +\infty)$). Ekkor $f^{-1}(x) = \operatorname{arcosh} x$ ($x \in [1, +\infty)$). Mivel $f'(x) = \sinh x > 0$, ha $x > 0$, és $f'(x) = 0$, ha $x = 0$, ezért az **area cosinus hiperbolikus függvény** csak az $(1, +\infty)$ intervallumon differenciálható, és (2) alapján

$$\operatorname{arcosh}'(x) = \frac{1}{\cosh'(\operatorname{arcosh}(x))} = \frac{1}{\sinh(\operatorname{arcosh}(x))} \quad (x \in (1, +\infty)).$$

A négyzetes összefüggés alapján az utóbbi függvény nevezője a következőképpen írható fel:

$$\sinh(\operatorname{arcosh}(x)) = \sqrt{\cosh^2(\operatorname{arcosh}(x)) - 1} = \sqrt{x^2 - 1},$$

mivel $\sinh(\operatorname{arcosh}(x)) > 0$, ha $x > 1$. Ezzel beláttuk, hogy

$$\operatorname{arcosh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \quad (x \in (1, +\infty)).$$

12. A hányados függvény differenciálási szabálya alapján a **tangens hiperbolikus** és a **cotangens hiperbolikus** függvények is differenciálhatók értelmezési tartományuk minden pontjában, és

$$\begin{aligned}\operatorname{tgh}' x &= \frac{\sinh' x \cosh x - \sinh x \cosh' x}{\cosh^2 x} = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x} \quad (x \in \mathbb{R}), \\ \operatorname{ctgh}' x &= \frac{\cosh' x \sinh x - \cosh x \sinh' x}{\sinh^2 x} = \frac{\sinh^2 x - \cosh^2 x}{\sinh^2 x} = -\frac{1}{\sinh^2 x} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}).\end{aligned}$$

13. Legyen $f(x) := \operatorname{tgh} x$ ($x \in \mathbb{R}$). Ekkor $f^{-1}(x) = \operatorname{artgh} x$ ($x \in (-1, 1)$). Mivel $f'(x) = \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \operatorname{tgh}^2 x > 0$ ($x \in \mathbb{R}$), ezért az **area tangens hiperbolikus függvény** értelmezési tartományának minden pontjában differenciálható, és (2) alapján

$$\operatorname{artgh}'(x) = \frac{1}{\operatorname{tgh}'(\operatorname{artgh}(x))} = \frac{1}{1 - \operatorname{tgh}^2(\operatorname{artgh}(x))} = \frac{1}{1 - x^2} \quad (x \in (-1, 1)).$$

14. Legyen $f(x) := \operatorname{ctgh} x$ ($x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$). Ekkor $f^{-1}(x) = \operatorname{arctgh} x$ ($x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$). Mivel $f'(x) = -\frac{1}{\sinh^2 x} = 1 - \operatorname{ctgh}^2 x < 0$, ha $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, ezért az **area cotangens hiperbolikus függvény** értelmezési tartományának minden pontjában differenciálható, és (2) alapján

$$\operatorname{arctgh}'(x) = \frac{1}{\operatorname{ctgh}'(\operatorname{arctgh}(x))} = \frac{1}{1 - \operatorname{ctgh}^2(\operatorname{arctgh}(x))} = \frac{1}{1 - x^2}$$

minden $x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ esetén.

4.2. Lokális szélsőérték

Már eddig is több, olyan függvényre vonatkozó ún. **lokális tulajdonsággal** találkoztunk, amelyben a függvénynek egy pont környezetében felvett értékei játszanak szerepet. Ilyen pl. a (belső pontban való) differenciálhatóság. Ez a tulajdonság megmarad, ha az eredeti függvény helyett annak a szóban forgó pont bármely környezetére vonatkozó leszűkítését tekintjük.

Ebben a pontban intervallumon értelmezett valós függvényeket vizsgálunk. Az ilyen függvényekre korábban értelmezett monotonitás mellett célszerű bevezetni ennek a fogalomnak egy lokális változatát.

Definíció. Akkor mondjuk, hogy az $f : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ függvény az $a \in (\alpha, \beta)$ **pontban növekvő**, ha a -nak van olyan $K_r(a) \subseteq (\alpha, \beta)$ környezete, hogy

$$(3) \quad \begin{aligned} f(x) &\leq f(a), & \text{ha} & \quad a - r < x < a, & \text{és} \\ f(a) &\leq f(x), & \text{ha} & \quad a < x < a + r. \end{aligned}$$

Ha a -nak van olyan $K_r(a) \subseteq (\alpha, \beta)$ környezete, amelynek minden $x \in K_r(a)$ pontjában

$$f(x) \geq f(a), \text{ ha } a - r < x < a, \quad \text{és} \quad f(a) \geq f(x) \text{ ha } a < x < a + r$$

teljesül, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény az a **pontban fogyó**.

Ha a fenti értelmezésben a függvényértékekre vonatkozó feltétel a \leq egyenlőtlenségek helyett a $<$ relációval, a \geq helyett pedig a $>$ relációval teljesülnek, akkor f -et az a helyen **szigorúan növekedőnek**, illetve **szigorúan fogyónak** nevezzük.

A pontban való növekedés és fogyás nyilván lokális tulajdonság. Ezt azzal is szokás hangsúlyozni, hogy az előbb említett szóhasználat mellett azt is mondjuk, hogy az f függvény az a **pontban lokálisan növekedő**, illetve **lokálisan fogyó**.

A fenti értelmezést egybevetve a monoton függvény definíciójával nyilvánvaló, hogy a **monoton növekedő függvények** az értelmezési tartományuk minden pontjában **lokálisan növekedők**. Vannak viszont olyan függvények, amelyek valamely pontban növekedők, de ennek a pontnak egyetlen környezetében sem monoton növekedők. Ilyen pl. az

$$f(x) := \begin{cases} x, & (x \in \mathbb{Q}), \\ 2x, & (x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \end{cases}$$

függvény, amely a 0 pontban szigorúan növekedő, ugyanakkor az \mathbb{R} semmilyen részintervallumában sem monoton.

A szélsőértéknek egy lokális változatát fogalmazzuk meg az alábbi értelmezésben.

Definíció. Akkor mondjuk, hogy az $f : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek az $a \in (\alpha, \beta)$ pontban **lokális maximuma van**, ha létezik az a -nak olyan $K_r(a) \subseteq (\alpha, \beta)$ környezete, hogy

$$f(a) \geq f(x), \quad \text{ha } x \in K_r(a).$$

Ha az a pontnak van olyan $K_r(a) \subseteq (\alpha, \beta)$ környezete, amelynek minden pontjában

$$f(a) \leq f(x) \quad (x \in K_r(a))$$

teljesül, akkor azt mondjuk, hogy az f függvénynek az a helyen **lokális minimuma van**.

A lokális maximumot és lokális minimumot **lokális szélsőértékeknek** nevezzük. A korábban bevezetett maximumot és minimumot — elnevezésben is megkülönböztetve a lokális szélsőértékektől — néha **abszolút maximumnak** és **abszolút minimumnak** is nevezik.

A derivált segítségével jellemezhetjük a függvények most értelmezett lokális tulajdonságait. Erre vonatkozik a

6. Tétel. Tegyük fel, hogy az $f : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ függvény differenciálható az $a \in (\alpha, \beta)$ pontban.

- i) Ha f az a -ban nő, akkor $f'(a) \geq 0$, ha f az a -ban csökken, akkor $f'(a) \leq 0$.
- ii) Ha $f'(a) > 0$, akkor az f függvény az a pontban szigorúan nő, ha pedig $f'(a) < 0$, akkor f az a -ban szigorúan fogy.

BIZONYÍTÁS. i) Ha f az a pontban nő, akkor a -nak van olyan $K_r(a)$ környezete, amelyben (3) teljesül. Innen következik, hogy

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0 \quad (x \in (a - r, a + r), x \neq a).$$

Ezt felhasználva a 2.4. pont 1. Következménye alapján azt kapjuk, hogy

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0.$$

A lokális fogyásra vonatkozó állítás hasonlóan igazolható.

ii) Most tegyük fel, hogy $f'(a) > 0$. Ekkor a 2.4. pont 1. következménye alapján létezik olyan $K_r(a)$ környezet, amelynek minden pontjában

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0 \quad (x \in (a - r, a + r), x \neq a).$$

Innen következik, hogy

$$f(x) > f(a), \quad \text{ha } x > a, \quad \text{és} \quad f(x) < f(a), \quad \text{ha } x < a.$$

Ezzel megmutattuk, hogy az f függvény az a pontban szigorúan nő. Az állítás második része hasonlóan igazolható. \square

Megjegyezzük, hogy a 6. tétel i) része nem pontos megfordítása ii)-nek. Az

$$(4) \quad f(x) := x^3 \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvény a 0 pontban szigorúan nő, ugyanakkor $f'(0) = 0$. Ez a példa azt mutatja, hogy még az a pontbeli **szigorú növekedésből sem következik**, hogy $f'(a) > 0$.

A lokális szélsőérték és a derivált kapcsolatára vonatkozik az alábbi

7. Tétel. Ha az $f : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ függvény az $a \in (\alpha, \beta)$ pontban differenciálható és itt lokális szélsőértéke van, akkor $f'(a) = 0$.

BIZONYÍTÁS. Indirekt módon bizonyítunk. Az állítással ellentétben tegyük fel, hogy $f'(a) \neq 0$. Ekkor a 6. tétel alapján $f'(a) > 0$ esetén az f függvény az a pontban szigorúan nő, $f'(a) < 0$ esetén pedig az f függvény az a pontban szigorúan fogy. Következésképpen f -nek nem lehet lokális szélsőértéke a -ban. A kapott ellentmondással az állítást igazoltuk. \square

A most bizonyított tétel szerint az $f'(a) = 0$ **feltétel szükséges, de** — amint arról könnyen meggyőződhetünk — **nem elégséges** ahhoz, hogy f -nek a -ban lokális szélsőértéke legyen. Ez utóbbit a (4) alatt értelmezett f függvény példája mutatja. Ez ugyanis a 0 pontban szigorúan nő, ugyanakkor $f'(0) = 0$.

Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a 7. tétel az a -ban **differenciálható** függvényekre vonatkozik, s ezért pl. az abszolútérték-függvényre nem alkalmazható. Ennek a függvénynek a 0 helyen minimuma van, de ebben a pontban nem differenciálható.

4.3. A differenciálszámítás középérték-tételei

Ebben a pontban bebizonyítunk három alapvető tételt, amelyeket a későbbiek során gyakran felhasználunk.

Rolle-tétel. Tegyük fel, hogy az $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény folytonos az $[a, b] \subset \mathbb{R}$ **zárt** intervallumban, differenciálható az (a, b) **nyílt** intervallumban és $f(a) = f(b)$. Ekkor létezik olyan $\xi \in (a, b)$ hely, ahol $f'(\xi) = 0$.

BIZONYÍTÁS. A feltétel szerint az f függvény az $[a, b]$ véges, zárt halmazon folytonos. Weierstrass tétele alapján f -nek van abszolút maximuma és abszolút minimuma. Legyenek ezek

$$M := \max\{f(x) : x \in [a, b]\}, \quad m := \min\{f(x) : x \in [a, b]\}.$$

Ha $M = m$, akkor f állandó, s ilyenkor az f deriváltja az (a, b) minden pontjában eltűnik.

Ha $m < M$, akkor $f(a) = f(b)$ miatt a függvény a M és m számok közül legalább az egyiket az (a, b) intervallum valamely ξ belső pontjában veszi fel. Következésképpen f -nek a ξ helyen lokális szélsőértéke van. A 7. tétel alapján $f'(\xi) = 0$. \square

A most igazolt tételből közvetlenül adódik az alábbi

Következmény. Ha $f \in \mathcal{C}[a, b] \cap \mathcal{D}(a, b)$ és $f'(x) \neq 0$, ha $x \in (a, b)$, akkor $f(a) \neq f(b)$.

BIZONYÍTÁS. Az állítással ellentétben tegyük fel, hogy $f(a) = f(b)$. Ekkor a Rolle-tétel miatt létezik $\xi \in (a, b)$, melyre $f'(\xi) = 0$, ami ellentmond a $f'(x) \neq 0$, ha $x \in (a, b)$ feltételnek. A kapott ellentmondással az állítást igazoltuk. \square

A Rolle-tétel általánosítása az alábbi

Cauchy-tétel. Tegyük fel, hogy az $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ és $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvények folytonosak az $[a, b]$ **zárt** intervallumon és differenciálhatók az (a, b) **nyílt** intervallumon, továbbá $g'(x) \neq 0$, ha $x \in (a, b)$. Ekkor van olyan $\xi \in (a, b)$ hely, hogy

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

BIZONYÍTÁS. A feltételek alapján a következményt felhasználva adódik, hogy $g(a) \neq g(b)$, s ezért a bal oldalon álló tört nevezője nem 0.

Az állítás igazolásához vezessük be a

$$F(x) := f(x) - \lambda g(x) \quad (x \in [a, b])$$

függvényt, ahol a $\lambda \in \mathbb{R}$ számot úgy választjuk, hogy F kielégítse a Rolle-tétel feltételeit. Nyilvánvaló, hogy $F \in \mathcal{C}[a, b]$ és $F \in \mathcal{D}(a, b)$. Az $F(a) = F(b)$ feltétel azzal ekvivalens, hogy

$$f(a) - \lambda g(a) = f(b) - \lambda g(b),$$

azaz

$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

A Rolle-tételt az F függvényre alkalmazva azt kapjuk, hogy létezik olyan $\xi \in (a, b)$ hely, ahol

$$0 = F'(\xi) = f'(\xi) - \lambda g'(\xi).$$

Innen az

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lambda = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

bizonyítandó állítás következik. \square

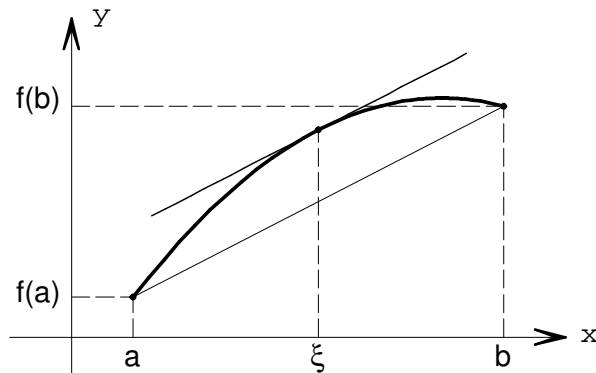
A most igazolt tételből a $g(x) := x$ ($x \in (a, b)$) speciális esetben adódik a

Lagrange-tétel. Ha az $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény folytonos az $[a, b]$ **zárt** intervallumon és differenciálható az (a, b) **nyílt** intervallumon, akkor létezik olyan $\xi \in (a, b)$ hely, hogy

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

A Lagrange-tételből az $f(a) = f(b)$ speciális esetben visszakapjuk a Rolle-tételt.

A Lagrange-tétel állítása — geometriailag fogalmazva — azt jelenti, hogy az f grafikonjának van olyan pontja, amelyben az érintő párhuzamos az $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ végpontokat összekötő szelővel.



2. ábra

Az említett tétel — figyelembe véve a benne szereplő fogalmak fizikai jelentését — úgy is interpretálható, hogy mindig van az átlagsebességgel egyenlő pillanatnyi sebesség.

A most bizonyított három tételt a **differenciálszámítás középérték-tételeinek** nevezzük. Az ezekben szereplő feltételek egyike sem hagyható el:

1. Az $f(x) := |x|$ ($x \in [-1, 1]$) függvény az $f \in \mathcal{D}[-1, 1]$ feltételnek nem tesz eleget.
2. A $g(x) := 0$ ($-1 \leq x < 1$), $g(1) := 1$ utasítással értelmezett függvény nem folytonos az 1 helyen.

Nyilvánvaló sem f -re, sem g -re nem teljesül a Lagrange-tétel állítása, ugyanis minden $\xi \in (-1, 1)$ pontban, ahol a derivált létezik

$$\frac{f(1) - f(-1)}{2} = 0 \neq f'(\xi) \in \{1, -1\}, \quad \frac{g(1) - g(-1)}{2} = 1 \neq g'(\xi) = 0.$$

A Lagrange-féle középértéktételből közvetlenül adódik az alábbi

8. Tétel. Legyen $f : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvény.

- i) Az f akkor és csak akkor monoton növekedő, ha minden $x \in (\alpha, \beta)$ pontban $f'(x) \geq 0$.
- ii) Az f akkor és csak akkor monoton fogyó, ha minden $x \in (\alpha, \beta)$ pontban $f'(x) \leq 0$.
- iii) Az f akkor és csak akkor konstans, ha minden $x \in (\alpha, \beta)$ pontban $f'(x) = 0$.

BIZONYÍTÁS. Ad i). Ha f monoton növekvő, akkor f minden $x \in (\alpha, \beta)$ pontban lokálisan nő, következésképpen a 6. tétel alapján $f'(x) \geq 0$.

Megfordítva, most induljunk ki abból, hogy $f'(x) \geq 0$ ($x \in (\alpha, \beta)$). Legyen $\alpha < x_1 < x_2 < \beta$ és alkalmazzuk a Lagrange-féle középérték-tételt az f függvény $[x_1, x_2]$ intervallumra vonatkozó leszűkítésére. Ennek alapján alkalmas $\xi \in (\alpha, \beta)$ számmal fennáll az

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi)$$

egyenlőség. Minthogy f' nemnegatív, ezért innen azt kapjuk, hogy minden, az értelmezési tartományba eső $x_1 < x_2$ pontpárra $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Ad ii). A monoton fogyó függvényekre vonatkozó állítás ugyanígy igazolható.

Ad iii). Minthogy f pontosan akkor konstans, ha egyszerre monoton növekvő és monoton fogyó, ezért iii) következik i)-ből és ii)-ből. \square

Megjegyezzük, hogy abból, hogy $f'(x) = 0$, ($x \in D_f$), általában nem következik, hogy f konstans a D_f -en. Ha $f : (\alpha, \beta) \cup (\gamma, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$, és $f' = 0$ D_f -en, akkor f -ről annyit tudunk, hogy szakaszonként konstans, azaz

$$f(x) = \begin{cases} c_1, & \text{ha } x \in (\alpha, \beta), \\ c_2, & \text{ha } x \in (\gamma, \delta), \end{cases}$$

de c_1 nem feltétlenül egyenlő c_2 -vel. A deriváltfüggvény egy érdekes tulajdonságát fogalmazzuk meg az alábbi állításban.

Darboux-tétel. Legyen $f : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható, $\alpha < x_1 < x_2 < \beta$ és $f'(x_1) \neq f'(x_2)$. Ekkor minden $f'(x_1)$ és $f'(x_2)$ közé eső c számhoz létezik olyan $\xi \in (x_1, x_2)$ hely, amelyre $f'(\xi) = c$.

BIZONYÍTÁS. Vezessük be az $F(x) := f(x) - cx$ ($x \in (\alpha, \beta)$) függvényt. A F függvény is differenciálható és deriváltja $F' = f' - c$. Megmutatjuk, hogy F -nek az (x_1, x_2) intervallumban van lokális szélsőértéke. ξ -vel jelölve F -nek egy ilyen szélsőérték helyét, a 7. tétel alapján ebben a pontban $F'(\xi) = f'(\xi) - c = 0$.

A lokális szélsőérték létezésének igazolásához induljunk ki pl. abból, hogy

$$(5) \quad f'(x_1) < c < f'(x_2).$$

Minthogy az F függvény $[x_1, x_2]$ -re vonatkozó leszűkítése folytonos, ezért a Weierstrass-tétel alapján F -nek az $[x_1, x_2]$ zárt intervallumban van abszolút maximuma és abszolút minimuma. A (5) feltételből

$$F'(x_1) = f'(x_1) - c < 0, \quad F'(x_2) = f'(x_2) - c > 0$$

következik. Innen — a 6. tétel alapján — azt kapjuk, hogy F az x_1 pontban szigorúan fogy, az x_2 pontban pedig szigorúan nő, következésképpen ezek egyike sem lehet abszolút minimumhely. F -nek a minimumhelye tehát valóban az (x_1, x_2) egy belső pontja. \square

A most igazolt tétellel kapcsolatban szokás a következő fogalmat bevezetni.

Definíció. A $g : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ **függvény Darboux-tulajdonságú**, ha minden olyan $\alpha < x_1 < x_2 < \beta$ helyhez, amelyre $g(x_1) \neq g(x_2)$ és minden $g(x_1)$ és $g(x_2)$ közé eső c számhoz létezik olyan $\xi \in (x_1, x_2)$ szám, hogy $g(\xi) = c$.

E szóhasználatnál elve a Bolzano-tétel pontosan azt fejezi ki, hogy a — nyílt intervallumon értelmezett — folytonos függvények Darboux-tulajdonságúak. A Darboux-tétel pedig a következőképpen fogalmazható meg: Minden nyílt intervallumon értelmezett, differenciálható függvény deriváltja Darboux-tulajdonságú.

Ha valamely $g \in \mathcal{D}(\alpha, \beta)$ függvény deriváltja folytonos, akkor — a Bolzano-tétel alapján — g deriváltja Darboux-tulajdonságú. A fenti tétel szerint g' akkor is Darboux-tulajdonságú, ha g' nem folytonos. Ilyen függvény például a következő:

$$g(x) := \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & (x \in \mathbb{R}, x \neq 0), \\ 0, & (x = 0). \end{cases}$$

1. Először kiszámoljuk a függvény deriváltját. A közvetett függvény differenciálási szabálya alapján g minden 0-tól különböző helyen deriválható és

$$g'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \cos \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \quad (x \neq 0).$$

A 0 pontban való differenciálhatóságot a definíció alapján igazolhatjuk. A g függvény 0 pontbeli különbségi hányadosára

$$\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = x \sin \frac{1}{x} \rightarrow 0, \quad \text{ha } x \rightarrow 0$$

teljesül. Ezzel megmutattuk, hogy g a 0 pontban is differenciálható és $g'(0) = 0$.

2. Igazoljuk, hogy g' -nek a 0-ban nincs sem bal-, sem jobboldali határértéke, azaz g -nek másodfajú szakadása van a 0-ban. Mivel

$$(6) \quad \lim_{x \rightarrow 0} g'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x},$$

és $\lim_{x \rightarrow 0} 2x \sin \frac{1}{x} = 0$, ezért ha nem létezik a $\lim_{x \rightarrow 0 \pm} \cos \frac{1}{x}$ határérték, akkor a (6) határérték sem létezik. A $\lim_{x \rightarrow 0+} \cos \frac{1}{x}$ határértéket vizsgáljuk meg átviteli elv segítségével.

Az $(x_n^{(1)} := \frac{1}{2n\pi}, n \in \mathbb{N}^*)$, és $(x_n^{(2)} := \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}, n \in \mathbb{N}^*)$ sorozatok választása esetén

$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n^{(1)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n^{(2)} = 0+$ teljesül, de a függvényértékek sorozata

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \cos \frac{1}{x_n^{(1)}} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \cos(2n\pi) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \cos \frac{1}{x_n^{(2)}} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0, \end{aligned}$$

különböző határértékhez tart, ezért az átviteli elv értelmében a $\lim_{x \rightarrow 0+} \cos \frac{1}{x}$ határérték valóban nem létezik. A baloldali határérték hasonlóan igazolható.

Ezzel beláttuk, hogy *Bolzano tételét nem lehet megfordítani, azaz ha egy függvény Darboux-tulajdonságú, akkor nem feltétlenül folytonos.*

Megjegyezzük, hogy a *Darboux-tulajdonságú függvényeknek nem lehet elsőfajú szakadása* (lásd a 26. Feladatot). Tehát, ha egy függvénynek van elsőfajú szakadási pontja, akkor nem Darboux-tulajdonságú.

4.5. Feladatok

1. Határozzuk meg az alábbi határértékeket!

$$\begin{array}{lll} a) \lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - 1}{x - e} & b) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\cos 2x} & c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos \alpha x}{\ln \cos \beta x} \\ d) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\ln \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{ctg} x} & e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} & f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x}{x} \end{array}$$

2. Legyen $f(x) = \sqrt{x}$ ($x > 0$). Határozzuk meg az $f'(3)$ és $f'(10)$ értékeket.

3. Igazoljuk, hogy az alábbi függvények a feltüntetett helyeken nem differenciálhatók:

$$\begin{array}{ll} a) f(x) := \sqrt[3]{x^2} \quad (x \in \mathbb{R}), a = 0, & b) f(x) := |x - 1| \quad (x \in \mathbb{R}), a = 1, \\ c) f(x) := |\cos(x)| \quad (x \in \mathbb{R}), a = \pi/2. & \end{array}$$

4. Állapítsuk meg, hogy az alábbi függvények értelmezési tartományuk melyik pontjában differenciálhatók, és határozzuk meg deriváltjukat. (Ahol nem differenciálhatók, ott vizsgáljuk meg, hogy léteznek-e a jobb- illetve baloldali differenciálhányadosok.)

$$\begin{array}{ll} a) f(x) := |x| \quad (x \in \mathbb{R}), & b) f(x) := x|x| \quad (x \in \mathbb{R}), \\ c) f(x) := \ln |x| \quad (x \in \mathbb{R}, x \neq 0), & d) f(x) := \begin{cases} 1 - x & (x < 0), \\ e^{-x} & (x \geq 0), \end{cases} \\ e) f(x) := \begin{cases} x + x^2 & (x < 0), \\ x - x^2 & (x \geq 0), \end{cases} & f) f(x) := \begin{cases} \frac{1}{x} & (x > 1), \\ x & (x \leq 1), \end{cases} \\ g) f(x) := \begin{cases} \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x}} & (x \neq 0), \\ 0 & (x = 0), \end{cases} & h) f(x) := \begin{cases} x \cos \frac{1}{x} & (x \neq 0), \\ 0 & (x = 0), \end{cases} \\ i) f(x) := \begin{cases} \frac{x}{1+e^{1/x}} & (x \neq 0), \\ 0 & (x = 0), \end{cases} & j) f(x) := \begin{cases} e^{2x} & (x < 0), \\ (x+1)^2 & (x \geq 0), \end{cases} \end{array}$$

5. Határozzuk meg az $a, b \in \mathbb{R}$ együtthatókat úgy, hogy az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x - a| + x|x - b|$ függvény deriválható legyen a valós számok halmazán.

6.

a) Határozzuk meg az $a, b \in \mathbb{R}$ együtthatókat úgy, hogy az

$$f(x) := \begin{cases} a \cdot e^x & (x \leq 0), \\ \frac{\sqrt{x+1}-b}{x} & (x > 0) \end{cases}$$

függvény deriválható legyen az \mathbb{R} halmazon.

b) Határozzuk meg az $a, b \in \mathbb{R}$ együtthatókat úgy, hogy az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x - a| + x|x - b|$ függvény deriválható legyen a valós számok halmazán.

c) Határozzuk meg az $a, b \in \mathbb{R}$ együtthatókat úgy, hogy az

$$f(x) := \begin{cases} a \cdot e^{2x} & (x \leq 0), \\ \sin 2x + b \cos 3x & (x > 0) \end{cases}$$

függvény deriválható legyen az \mathbb{R} halmazon.

7. Határozzuk meg az alábbi függvények deriváltját:

$$a) \quad f(x) := ax^2 + bx + c \quad (x \in \mathbb{C}), \quad b) \quad f(x) := \frac{2x+3}{x^2-5x+5} \quad (x \in \mathbb{R}),$$

$$c) \quad f(x) := \frac{ax+b}{cx-d} \quad (x \in \mathbb{R}, x \neq d/c), \quad d) \quad f(x) := x^2 \sqrt[3]{x^2} \quad (x \in \mathbb{R}),$$

$$e) \quad f(x) := \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \quad (x > 0), \quad f) \quad f(x) := \frac{x}{2} + \ln(2\sqrt{x}) \quad (x > 0).$$

8. Számítsuk ki az alábbi függvények deriváltját:

$$a) \quad f(x) := \operatorname{tg}(x) - \operatorname{ctg}(x) \quad (x \in \mathbb{R}, x \neq k\pi/2 \ (k \in \mathbb{Z})),$$

$$b) \quad f(x) := \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} \quad (x \in \mathbb{R}, \sin x \neq \cos x),$$

$$c) \quad f(x) := \frac{(1+x^2)\operatorname{arctg}(x) - x}{2} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

9. Számítsuk ki az alábbi valós függvények deriváltját. A függvények értelmezési tartománya az \mathbb{R} -nek az a legtágabb részhalmaza, amelyen a kijelölt utasításoknak van

értelme.

- | | |
|--|--|
| a) $f(x) := \operatorname{ctg}(x) - \operatorname{ctg}(\pi/4)$, | b) $f(x) = \sin^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}$, |
| c) $f(x) := \sin(x^2 - 5x + 1) + \operatorname{tg}\left(\frac{1}{x}\right)$, | d) $f(x) := xe^x + x$, |
| e) $f(x) := \arcsin\left(\frac{1}{x^2}\right)$, | f) $f(x) := \operatorname{arctg}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, |
| g) $f(x) := 5e^{-x^2}$, | h) $f(x) := \ln(\sin(x))$, |
| i) $f(x) := \ln(x+1) + \ln(\sqrt{x+1})$, | k) $f(x) := \ln^2 x - \ln(\ln x)$, |
| j) $f(x) := x \sin(2^x)$, | m) $f(x) := \log_2(3^x + 5)$, |
| ℓ) $f(t) := (2t+1)\sqrt{3t+2}\sqrt[3]{3t+3}$, | o) $f(x) := \arcsin\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)$, |
| n) $f(y) := \left(\frac{2+3y^n}{2-3y^n}\right)^m$, | r) $f(x) := e^{\sin^2 x}$, |
| p) $f(x) := \operatorname{arctg}\left(\frac{x \sin(\pi/4)}{1-x \cos(\pi/4)}\right)$, | t) $f(t) := e^t \cos t$, |
| s) $f(x) := \sqrt{x^2+1} - \ln\left(\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right)$, | v) $f(x) := \operatorname{arctg}(\ln x)$, |
| u) $f(x) := \frac{1}{3} \ln\left(\frac{\operatorname{tg}(x/2) + 2 - \sqrt{3}}{\operatorname{tg}(x/2) + 2 + \sqrt{3}}\right)$, | x) $f(x) := \operatorname{artgh}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$, |
| w) $f(x) := \operatorname{arcosh}(\ln x) + \sin^7 x^7$, | z) $f(x) := \operatorname{arcosh}(\cos x)$. |
| y) $f(x) := \operatorname{tgh}(x^2+1) + \operatorname{ctgh}(x^2-1)$, | |

10. Számítsuk ki az alábbi valós függvények deriváltját. A függvények értelmezési tartománya az \mathbb{R} -nek az a legtágabb részhalmaza, amelyen a kijelölt utasításoknak van értelme.

- | | | |
|---|---|--|
| a) $f(x) := x^x$, | b) $f(x) = x^{\sqrt{x}}$, | c) $f(x) := x^{1-x}$ |
| d) $f(x) := \sqrt[x]{x}$, | e) $f(x) := x^{(x^x)}$, | f) $f(x) := x^{2^x}$, |
| g) $f(x) := x^{\operatorname{arc\,tg\,} x}$, | h) $f(x) := \sqrt[x]{x^2+x}$, | i) $f(x) := (\cos x)^{\sin x}$, |
| j) $f(x) := x^{\operatorname{arc\,tg\,} x}$, | k) $f(x) := x^{\sin x}$, | ℓ) $f(x) := (\ln x)^x$, |
| m) $f(x) := x^{1/x}$, | n) $f(x) := \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$, | o) $f(x) := (\operatorname{arctg}(x))^x$. |

11. Legyen $f(x) = x^3 + ax^2$ ($x \in \mathbb{R}$). Milyen x pontban teljesül az $f'(x) = f(x)$ feltétel?

12. Igazoljuk, hogy az alább felsorolt függvények deriváltjai kielégítik a felírt egyenletet:

$$a) \quad f(x) := \frac{1}{1+x+\ln x}; \quad xf'(x) = f(x)(f(x)\ln x - 1) \quad (x > 0),$$

$$b) \quad f(x) := xe^{-\frac{x^2}{2}}; \quad xf'(x) := (1-x^2)f(x) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

13. Határozzuk meg az (a, b) intervallumnak azt a ξ pontját, amelyben az $f(x) := x^2$ ($x \in \mathbb{R}$) függvény grafikonjának érintője párhuzamos az $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ pontokat összekötő szelővel.

14. Legyen $f(x) = x^2$ ($x \in \mathbb{R}$) és $g(x) := 1/x$ ($x \in \mathbb{R}, x \neq 0$). Határozzuk meg az f és g metszéspontjában az f és g érintőjének hajlásszögét.

15.

- Milyen szöget zár be az $y = x \cos x$ görbéhez az $x = 0$ abszcisszájú pontjába húzott érintő az x tengellyel? Mi az érintő egyenlete?
- Milyen szöget zár be az $y = \sqrt{x^2 + 4x - 2}$ görbéhez az $x = 0$ abszcisszájú pontjába húzott érintő az x tengellyel? Mi az érintő egyenlete?
- Milyen szöget zár be az $y = \sqrt[3]{x}$ görbéhez az $x = 1$ abszcisszájú pontjába húzott érintő az x tengellyel? Mi az érintő egyenlete?
- Igazoljuk, hogy az $y = x^n$ ($n = 2, 3, \dots$) görbéhez bármely origótól különböző pontba húzott érintő n -ed résznyit vág le az érintési pont abszcisszájából!
- Bizonyítsuk be, hogy az $y = \frac{1}{x}$ hiperbolához húzott érintők a koordinátatengelyekkel állandó területű háromszögeket alkotnak!
- Az $y = a^x$ ($a > 0$) függvények közül melyik az, amelyik 45° -os szög alatt metszi az y tengelyt?

16. A differenciálszámítás segítségével igazoljuk a következőket. (Adjuk meg, hogy mely intervallumokon igaz az állítás!)

- Az $y = \cos 2x + 2 \sin^2 x$ függvény konstans.
- Az $y = \cos 2x - 2 \cos^2 x$ függvény konstans.
- Az $y = \arccos(2x^2 - 1) - 2 \arccos x$ függvény konstans.
- Az $y = \arccos x(4x^2 - 3) - 3 \arccos x$ függvény konstans.
- Az $y = \cos^2 x + \cos^2\left(\frac{\pi}{3} + x\right) - \cos x \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$ függvény konstans.
- Az $y = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ függvény konstans.
- Az $y = \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} \frac{x+2}{1-2x}$ függvény konstans.
- Az $y = \arcsin(2x\sqrt{1-x^2}) - 2 \arcsin x$ függvény konstans.

17.

- Felveti-e az $y = x \cos x$ függvény differenciálhányadosa a 0 értéket a $(0, \frac{\pi}{2})$ intervallumon?
- Felveti-e az $y = \sqrt{x}$ függvény differenciálhányadosa a 0 értéket a $(2, 4)$ intervallumon?
- Felveti-e az $y = x^x$ függvény differenciálhányadosa a 3 értéket a $(1, 2)$ intervallumon?
- Bizonyítsuk be, hogy ha $x > 1$, akkor $e^x > ex$.

- e) Bizonyítsuk be, hogy ha $x > 0$, akkor $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$.
 f) Bizonyítsuk be, hogy ha $b > a > 0$, akkor

$$\frac{a-b}{a} \leq \ln \frac{a}{b} \leq \frac{a-b}{b}.$$

- g) Bizonyítsuk be, hogy ha $b > a > 0$, $n \in \mathbb{N}$, akkor

$$n \cdot (b-a) \cdot a^{n-1} \leq b^n - a^n \leq n \cdot (b-a) \cdot b^{n-1}.$$

- h) Bizonyítsuk be, hogy ha $\frac{\pi}{2} > b > a > 0$, $n \in \mathbb{N}$, akkor

$$\frac{(b-a)}{\cos^2 a} < \operatorname{tg} b - \operatorname{tg} a < \frac{(b-a)}{\cos^2 b}.$$

- i) Legyen $f(x) := x(x+1)(x+2)(x+3)$ ($x \in \mathbb{R}$). Igazoljuk, hogy az $f'(x) = 0$ egyenletnek három valós gyöke van.

18. Legyen $f(x) := x^2 + 2$, $g(x) := x^3 - 1$ ($x \in [1, 2]$). Határozzuk meg azt a $\xi \in (1, 2)$ pontot, amelyre

$$\frac{f(2) - f(1)}{g(2) - g(1)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

teljesül.

19. Tanulmányozzuk a Rolle-tételének alkalmazhatóságát a következő függvényekre:

- a) $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := \begin{cases} x^2 & (x \in [-1, 0]) \\ x & (x \in (0, 1]) \end{cases}$
 b) $f : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := \begin{cases} \cos x & (x \in [0, \frac{\pi}{4}]) \\ \sin x & (x \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]) \end{cases}$
 c) $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := |\sin^3 x|$.

20. Tanulmányozzuk a Lagrange-tételének alkalmazhatóságát az alábbi függvényekre. (Ha alkalmazható Lagrange-tétele, akkor határozzuk meg a tételben szereplő ξ -t is, ha lehet.)

- a) $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := \begin{cases} x^2 & (x \in [0, 1]) \\ 2x - 1 & (x \in (1, 2]) \end{cases}$
 b) $f : [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := \ln \frac{x-1}{x+1}$
 c) Határozzuk meg a p, q, r paramétereket úgy, hogy teljesüljenek a Lagrange-tétel feltételei: $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := px^2 + qx + r$ ($p \in \mathbb{R}^*$, $q, r \in \mathbb{R}$)

21. Igazoljuk, hogy az $e^x = x + 1$ egyenletnek a 0 számon kívül nincs más valós gyöke.

22. Milyen intervallumon monotonok az alábbi függvények ?

$$\begin{array}{ll} a) & f(x) := 1 - 4x - 4x^2 \quad (x \in \mathbb{R}), \\ b) & f(x) = x^2(x - 3) \quad (x \in \mathbb{R}), \\ c) & f(x) := \frac{x}{x - 2} \quad (x \in \mathbb{R}), \\ d) & f(x) := \frac{x}{x^2 - 6x - 16} \quad (x \in \mathbb{R}), \\ e) & f(x) := (x - 3)\sqrt{x} \quad (x > 0), \\ f) & f(x) := 2e^{x^2 - 4x} \quad (x \in \mathbb{R}), \\ g) & f(x) := e^{\frac{1}{x-a}} \quad (x \in \mathbb{R}, x \neq a), \\ h) & f(x) := x \ln x \quad (x > 0), \\ i) & f(x) := \frac{e^x}{x} \quad (x \in \mathbb{R}, x \neq 0), \\ j) & f(x) := xe^{-x^2} \quad (x \in \mathbb{R}). \end{array}$$

23. Határozzuk meg az alábbi függvények lokális szélsőértékhelyeit.

$$\begin{array}{l} a) \quad f(x) := x^3 - 3x^2 + 3x + 2 \quad (x \in \mathbb{R}), \\ b) \quad f(x) := 2x^3 + 3x^2 - 12x + 5 \quad (x \in \mathbb{R}), \\ c) \quad f(x) := x^2(x - 12)^2 \quad (x \in \mathbb{R}), \\ d) \quad f(x) := 2\cos(x/2) + 3\cos(x/3) \quad (x \in \mathbb{R}), \\ e) \quad f(x) := x - \ln(1 + x) \quad (x > -1), \\ f) \quad f(x) := x \ln^2 x \quad (x > 0), \\ g) \quad f(x) := xe^{-x} \quad (x \in \mathbb{R}), \\ h) \quad f(x) := \frac{(x - 2)(8 - x)}{x^2} \quad (x \in \mathbb{R}, x \neq 0). \end{array}$$

24. Igazoljuk az alábbi egyenlőtlenségeket.

$$\begin{array}{l} a) \quad x + \frac{1}{x} \geq 2 \quad (x > 0), \\ b) \quad e^x > 1 + x \quad (x \in \mathbb{R}, x \neq 0), \\ c) \quad x - \frac{x^2}{2} < \ln(1 + x) < x \quad (x > 0), \\ d) \quad \cos x > 1 - \frac{x^2}{2} \quad (x \in \mathbb{R}, x \neq 0). \end{array}$$

25. Határozzuk meg az alábbi függvények abszolút maximumát és minimumát.

$$\begin{array}{l} a) \quad f(x) := \frac{x}{1 + x^2} \quad (x \in \mathbb{R}), \\ b) \quad f(x) = x^3 \quad (x \in [-1, 3]), \\ c) \quad f(x) := \sin^4 x + \cos^4 x \quad (x \in \mathbb{R}), \\ d) \quad f(x) := 22x^3 + 3x^2 - 12x + 1 \quad (x \in [-1, 5]), \\ e) \quad f(x) := 22x^3 + 3x^2 - 12x + 1 \quad (x \in [-10, 12]). \end{array}$$

26. Igazoljuk, hogy Darboux tulajdonságú függvényeknek nem lehet elsőfajú szakadása.
27. Igazoljuk, hogy az $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvény akkor és csak akkor szigorúan monoton növekvő, ha minden $x \in (a, b)$ pontban $f'(x) \geq 0$ és az f' az (a, b) egyetlen részintervallumában sem azonosan 0.

5. A differenciálszámítás néhány alkalmazása

Ebben a fejezetben — a deriválttal összefüggésben — néhány új fogalmat vezetünk be, továbbá bemutatjuk a differenciálszámítás néhány alkalmazását. Többek között megmutatjuk, hogyan lehet a differenciálszámítást határértékek kiszámítására és szélsőérték feladatok megoldására felhasználni. A differenciálszámítás felhasználható függvények geometriai vizsgálatára.

5.1. L'Hospital szabály

A hányados határértékére vonatkozó tételben feltettük, hogy a nevező határértéke nem nulla. Ha a számláló határértéke 0, a nevezőé pedig nem 0, akkor a hányadosnak nyilván nincs véges határértéke. Ha a számláló és a nevező határértéke egyaránt 0, akkor az említett tétel alapján nem lehet a határértéket kiszámítani. Ezekben az esetekben — amikor a hányados ún. **határozatlan** vagy „0/0” **alakú kifejezés** — alkalmazható az alábbi **L'Hospital-szabály** néven ismert állítás.

1. L'Hospital szabály. Legyen $-\infty \leq a < b < \infty$ és tegyük fel, hogy az $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ függvények differenciálhatók, továbbá $g'(x) \neq 0$, ha $x \in (a, b)$. Ha

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} g(x) = 0$$

és ha létezik a $\lim_{a+} f'/g'$ (véges vagy végtelen) határérték, akkor az f/g függvénynek is van jobboldali határértéke az a helyen és

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

BIZONYÍTÁS. i) Vizsgáljuk először az $a > -\infty$ esetet. Legyen $f(a) := f(b) := 0$ és vezessük be a

$$(3) \quad A := \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

jelölést. Az átviteli elvet alkalmazva megmutatjuk, hogy minden a -hoz konvergáló $a < x_n < b$ ($n \in \mathbb{N}$) számsorozatra

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = A.$$

Minthogy $f, g \in \mathcal{C}[a, x_n]$ és $f, g \in \mathcal{D}_{(a, x_n)}$ ($n \in \mathbb{N}$), továbbá $g'(x) \neq 0$, ha $x \in (a, b)$, ezért erre a függvénypárra az $[a, x_n]$ intervallumban teljesülnek a Cauchy-tétel feltételei. A szóban forgó tételt alkalmazva azt kapjuk, hogy létezik olyan $\xi_n \in (a, x_n)$ hely, amelyre

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f(x_n) - f(a)}{g(x_n) - g(a)} = \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}.$$

Mivel $a < \xi_n < x_n$ ($n \in \mathbb{N}$), ezért a rendőr elv alapján $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = a$, ezért azátviteli elv és (3) alapján

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} = A,$$

ahonnan ismét csak az átviteli elvet alkalmazva (2) már következik.

ii) Ha $a = -\infty$, válasszunk olyan $y_0 \in \mathbb{R}$ és $c > 0$ számot, amelyekre $\beta := y_0 - 1/c < b$ teljesül és vezessük be a

$$\varphi(y) := y_0 - \frac{1}{y} \quad (0 < y < c)$$

függvényt, amely a $(0, c)$ intervallumot a $(-\infty, \beta)$ intervallumra képezi kölcsönösen egyértelműen, hiszen φ szigorúan monoton nő, és $\lim_{y \rightarrow 0+} \varphi(y) = -\infty$, $\lim_{y \rightarrow c-} \varphi(y) = y_0 - \frac{1}{c} = \beta$.

A $(0, c)$ intervallumon értelmezett $F := f \circ \varphi$, $G := g \circ \varphi$ függvényekre — az $a = 0$ pontot véve — alkalmazható a tétel már igazolt i) változata. Valóban, pl. az átviteli elv alapján

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 0+} F(y) &= \lim_{y \rightarrow 0+} f(\varphi(y)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, \\ \lim_{y \rightarrow 0+} G(y) &= \lim_{y \rightarrow 0+} g(\varphi(y)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0, \end{aligned}$$

továbbá a közvetett függvény differenciálási szabálya alapján

$$\begin{aligned} (4) \quad F'(y) &= (f \circ \varphi)'(y) = f'(\varphi(y))\varphi'(y) = \frac{1}{y^2} f'(\varphi(y)), \quad (y \in (0, c)), \\ G'(y) &= (g \circ \varphi)'(y) = g'(\varphi(y))\varphi'(y) = \frac{1}{y^2} g'(\varphi(y)), \quad (y \in (0, c)). \end{aligned}$$

Innen és a (3) alatti határérték létezéséből — ismét az átviteli elv alapján — következik, hogy

$$\lim_{y \rightarrow 0+} \frac{F'(y)}{G'(y)} = \lim_{y \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{y^2} (f' \circ \varphi)(y)}{\frac{1}{y^2} (g' \circ \varphi)(y)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Alkalmazva a tétel már igazolt i) változatát azt kapjuk, hogy létezik a $\lim_{y \rightarrow 0+} \frac{F(y)}{G(y)}$ határérték, és arra

$$(5) \quad \lim_{y \rightarrow 0+} \frac{F(y)}{G(y)} = \lim_{y \rightarrow 0+} \frac{F'(y)}{G'(y)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

teljesül. Az átviteli elv alapján a $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ és $\lim_{y \rightarrow 0+} \frac{F(y)}{G(y)} = \lim_{y \rightarrow 0+} \frac{f(\varphi(y))}{g(\varphi(y))}$ határértékek egyszerre léteznek vagy nem léteznek és az első esetben a két határérték egyenlő. Következésképpen (5) alapján az f/g függvénynek is létezik a határértéke a $-\infty$ helyen és arra fennáll (2). \square

Nyilvánvaló, hogy hasonló állítás érvényes a baloldali határértékekre is. A most vizsgált eset mellett gyakran előfordulnak az ún. „ ∞/∞ ” **típusú határozatlan kifejezések**. Ezekre vonatkozik a

2. L'Hospital szabály. Legyen $-\infty \leq a < b < \infty$ és tegyük fel, hogy az $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ függvények differenciálhatók, továbbá $g'(x) \neq 0$, ha $x \in (a, b)$. Ha

$$(6) \quad \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} g(x) = \infty$$

és ha létezik a $\lim_{a+} f'/g'$ (véges vagy végtelen) határérték, akkor az f/g függvénynek is van jobboldali határértéke az a helyen és

$$\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

BIZONYÍTÁS. i) A (3)-ban bevezetett jelölést használva először tegyük fel, hogy A **véges**. A (3) és (6) feltételből következik, hogy létezik olyan $\beta \in (a, b)$ szám, hogy $f(x) > 0$, $g(x) > 0$, ha $x \in (a, \beta]$ és f'/g' korlátos ugyanebben az intervallumban.

A (3) határérték definíciója alapján minden $\epsilon > 0$ számhoz létezik olyan $(a, \alpha) \subseteq (a, \beta)$ intervallum, hogy ennek minden pontjában

$$(7) \quad \left| \frac{f'(y)}{g'(y)} - A \right| < \frac{\epsilon}{2} \quad (y \in (a, \alpha))$$

teljesül. Rögzítsük az α számot és az

$$\frac{f(x) - f(\alpha)}{g(x) - g(\alpha)} = \frac{f(x)}{g(x)} \frac{1 - \frac{f(\alpha)}{f(x)}}{1 - \frac{g(\alpha)}{g(x)}} \quad (x \in (a, \alpha))$$

azonosságból kiindulva vezessük be a

$$T(x) := \frac{1 - \frac{g(\alpha)}{g(x)}}{1 - \frac{f(\alpha)}{f(x)}} \quad (x \in (a, \alpha))$$

függvényt. Minden $x \in (a, \alpha)$ pont esetén alkalmazható az f, g függvénytípusra a Cauchy-féle konvergencia-kritérium az $[x, \alpha] \subset (a, \beta)$ intervallumon, azaz létezik olyan $\xi_x \in (x, \alpha)$ pont, amelyben

$$\frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} = \frac{f(x) - f(\alpha)}{g(x) - g(\alpha)} = \frac{f(x)}{g(x)} \frac{1}{T(x)} \quad (x \in (a, \beta)).$$

Innen

$$(8) \quad \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} T(x) = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} + \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} (T(x) - 1)$$

következik.

A (6) feltételből és a T értelmezése alapján nyilvánvaló, hogy $\lim_{x \rightarrow a+} T(x) = 1$. Mint-hogy az f'/g' függvény korlátos az (a, α) intervallumban, ezért a (8) jobb oldalán a második tagnak a jobboldali határértéke 0 az a -ban. (Ha átviteli elvet alkalmazunk, akkor egy korlátos, és egy nullsorozat szorzata nullsorozat.) Következésképpen létezik olyan $(a, \gamma) \subseteq (a, \alpha)$ intervallum, amelyben

$$\left| \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} (T(x) - 1) \right| < \frac{\epsilon}{2} \quad (x \in (a, \gamma))$$

teljesül. Ezt és a (7) egyenlőtlenséget felhasználva (8) alapján

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - A \right| = \left| \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} + \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} (T(x) - 1) - A \right| \leq \left| \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} - A \right| + \left| \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} (T(x) - 1) \right| < \epsilon$$

($x \in (a, \gamma)$) következik, hiszen $\xi_x \in (x, \alpha) \subset (a, \alpha)$. Ezzel véges A esetén megmutattuk, hogy

$$\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

ii) Ha $A = \infty$, akkor — a fenti bizonyítás gondolatmenetét követve — (7) helyett a következőt írhatjuk. A

$$\lim_{y \rightarrow a+} \frac{f'(y)}{g'(y)} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow a+} T(x) = 1$$

feltételekből következik, hogy minden $P > 0$ számhoz létezik olyan $(a, \alpha) \subset (a, \beta)$ intervallum, hogy ennek minden pontjában

$$\left| \frac{f'(y)}{g'(y)} \right| > 2P, \quad |T(x)| > \frac{1}{2} \quad (x, y \in (a, \alpha))$$

teljesül. Ezt felhasználva (8) alapján

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = \left| \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} \right| |T(x)| \geq 2P \frac{1}{2} = P \quad (x \in (a, \alpha)),$$

mert minden $x \in (a, \alpha)$ esetén $\xi_x \in (x, \alpha) \subset (a, \alpha)$. Ezzel $a = \infty$ esetén is igazoltuk a tételt. \square

Megjegyzések

1. Az 1. és 2. tételben a jobboldali határértéket baloldali határértékkal helyettesítve a baloldali határértékre vonatkozó L'Hospital-szabályokat kapjuk. Ezek hasonlóan igazolhatók, mint a szóban forgó tételek.
2. Az egyoldali határértékek és a határérték kapcsolatából kiindulva könnyen megfogalmazható a **határértékre vonatkozó L'Hospital-szabály**.
3. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a L'Hospital szabály nem minden esetben alkalmazható. Előfordulhat, hogy nem létezik a $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ határérték, de a $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ határérték létezik.
Legyen például $f(x) := 10x - \sin x$, $g(x) := 2x + \cos x$ ($x \in \mathbb{R}$). Ekkor $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, mindkettő függvény mindenütt differenciálható, de nem létezik a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10 - \cos x}{2 - \sin x}$$

határérték, mert periodikus függvénynek nem létezik határértéke $+\infty$ -ben. Viszont egyszerű számlással igazolható, hogy

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10x - \sin x}{2x + \cos x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10 - \frac{\sin x}{x}}{2 + \frac{\cos x}{x}} = \frac{10}{2} = 5.$$

Azaz a tétel kimondásában nagyon fontos, és nem elhagyható a „ha létezik a $\lim_{a+} f'/g'$ határérték” feltétel.

A most vizsgált „0/0” és „ ∞/∞ ” típusú határozatlan kifejezések mellett gyakran előfordulnak ún. „ $0 \cdot \infty$ ”, „ $\infty/(-\infty)$ ”, „ 0^0 ”, „ 1^∞ ”, „ $\infty - \infty$ ” **típusú határozatlan kifejezések**. Ezek az esetek is visszavezethetők a „0/0”, vagy „ ∞/∞ ” típusú határozatlan kifejezésekre.

- A „ $0 \cdot \infty$ ” elnevezés olyan $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x)$ határértékre vonatkozik, amelyben $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ és $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$. Az $fg = f/(1/g)$ vagy az $fg = g/(1/f)$ átalakítást alkalmazva ez a határérték visszavezethető a „0/0”, illetve a „ ∞/∞ ” típusra.
- Az g helyett a $-g$ függvényre alkalmazva a L'Hospital-szabályt, kiszámíthatjuk az „ $\infty/(-\infty)$ ”, illetve „ $0 \cdot (-\infty)$ ” típusú határozatlan kifejezések határértékét.
- Ha f pozitív az $(a \in \mathbb{R})$ pont egy környezetében, f, g függvények mindegyike differenciálható ebben a környezetben és, ha

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x) &= 1, & \text{és} & & \lim_{x \rightarrow a} g(x) &= +\infty & \text{vagy, ha} \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) &= 0, & \text{és} & & \lim_{x \rightarrow a} g(x) &= \infty & \text{vagy, ha} \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) &= 0, & \text{és} & & \lim_{x \rightarrow a} g(x) &= 0, \end{aligned}$$

és az f^g függvény határértékét szeretnénk meghatározni az a pontban, akkor az

$$f(x)^{g(x)} = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x) \cdot \ln f(x)}$$

átalakítást elvégezve a kitevőben egy szorzatfüggvényt kapunk. A L'Hospital szabály segítségével meghatározható az $A := \lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln f(x)$, „ $0 \cdot \infty$ ” típusú határérték. Ha $A \in \mathbb{R}$, akkor az exponenciális függvény folytonossága miatt $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = e^A$, ha $A = +\infty$, akkor mivel $\lim_{y \rightarrow +\infty} e^y = +\infty$, ezért — például az átviteli elv alapján — $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)^{g(x)} = +\infty$, ha pedig $A = -\infty$, akkor mivel $\lim_{y \rightarrow -\infty} e^y = 0$, ezért — például az átviteli elv alapján — $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)^{g(x)} = 0$.

- D) Ha $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ és $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$ valamely $(a \in \overline{\mathbb{R}})$ pontra, és f, g függvények mindegyike differenciálható az a pontnak egy környezetben, akkor a függvényektől függően, vagy — törtfüggvények esetén — közös nevezőre hozunk, vagy az egyik függvényt kiemeljük, ha a L'Hospital szabály segítségével szeretnénk a $\lim_{x \rightarrow a} f(x) - g(x)$, „ $\infty - \infty$ ” típusú határértéket meghatározni.

Az alábbiakban megmutatunk minden egyes határértéktípusra egy-egy példát.

Példák

1. Legyen

$$f(x) := (1+x)^n - 1, \quad g(x) := x \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Ekkor $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$. Minthogy

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{n(1+x)^{n-1}}{1} = n,$$

ezért

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^n - 1}{x} = n.$$

2. Legyen

$$f(x) := x^n, \quad g(x) := \ln x \quad (x > 0)$$

és vizsgáljuk az fg függvény jobboldali határértékét a 0 pontban. Az $f(x)g(x) = \ln x / x^{-n}$ átalakítás után „ ∞/∞ ” típusú határozatlan kifejezést kapunk. Minthogy

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{g'(x)}{(1/f)'(x)} = - \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1/x}{nx^{-n-1}} = -\frac{1}{n} \lim_{x \rightarrow 0+} x^n = 0,$$

ezért

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x^n \ln x = 0.$$

3. Legyen

$$f(x) := x^x, \quad (x > 0)$$

és vizsgáljuk az f függvény jobboldali határértékét a 0 pontban. Az x^x átírható

$$x^x = e^{x \ln x} \quad (x > 0)$$

alakba a logaritmus függvény ismert tulajdonságai alapján. Minthogy $\lim_{x \rightarrow 0+} x \ln x = 0$ (lásd 6. példa), ezért

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x^x = 1.$$

4. Legyen $f(x) := \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right)$ ($x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$) és meghatározzuk a függvény határértékét az $a = 1$ pontban. Ez egy „ $\infty - \infty$ ” típusú határozatlansági eset, ezért a L'Hospital szabályt nem lehet közvetlenül alkalmazni. Végrehajtvaz az

$$f(x) = \frac{x-1-\ln x}{\ln x \cdot (x-1)} \quad (x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

átalakítást, az $a = 1$ pontban egy „ $0/0$ ” típusú határértéket kell vizsgálni. Mivel a számláló és a nevező is differenciálható a pozitív félegyenesen, és a deriváltak hányadosának

$$(9) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \frac{1}{x}}{\frac{1}{x} \cdot (x-1) + \ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x-1+x \cdot \ln x}$$

határértéke szintén „ $0/0$ ” típusú, de a számláló és a nevező is differenciálható a pozitív félegyenesen, ezért ennek meghatározását is a L'Hospital szabály ismételt alkalmazásával próbáljuk elérni. Mivel létezik a a deriváltak hányadosának, a

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1 + \ln x + x \frac{1}{x}} = \frac{1}{2}$$

határértéke, ezért a L'Hospital-szabály értelmében létezik, és $1/2$ -del egyenlő a (9)-es határérték is, és

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) = \frac{1}{2}.$$

5.2. Többször differenciálható függvények

Ebben a pontban bevezetjük a magasabbrendű deriváltakat és bemutatjuk ezek néhány alkalmazását. Legyen $H \subset \mathbb{R}$ nyílt halmaz és $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvény.

Definíció. Ha az $f \in \mathcal{D}(H, \mathbb{R})$ függvény f' deriváltja differenciálható az $a \in H$ pontban, akkor azt mondjuk, hogy f **kétszer differenciálható** a -ban. Az

$$f''(a) := (f')'(a)$$

számot az f **függvény** a **pontbeli második deriváltjának** nevezük.

Az elsőrendű derivált mintájára értelmezhetjük a másodrendű deriváltat. Nevezetesen, tegyük fel, hogy az f függvény minden $x \in H$ pontban kétszer differenciálható. Ekkor az $f'' : H \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f''(x)$ utasítással értelmezett függvényt az f **második deriváltjának** nevezzük. Ehhez hasonlóan — az f függvény $f^{(n)}$ szimbólummal jelölt n -edik deriváltjából kiindulva — rekurzióval értelmezhetjük az $(n+1)$ -edik deriváltat:

$$f^{(n+1)}(a) := \left(f^{(n)}\right)'(a) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Emellett gyakran használjuk az

$$\frac{d^n f}{dx^n}(a) := f^{(n)}(a)$$

jelölést. A H nyílt halmazon értelmezett $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ típusú n -szer differenciálható függvények összességét a $\mathcal{D}^n(H, \mathbb{R})$ vagy az egyszerűbb $\mathcal{D}^n(H)$, illetve \mathcal{D}_H^n szimbólummal jelöljük. Ezenkívül célszerű még a 0-adik deriváltra az $f^{(0)} := f$ értelmezést bevezetni. Ha az $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek minden $n \in \mathbb{N}$ természetes számra létezik az n -edik deriváltja, akkor azt mondjuk, hogy az f **akárhányszor** vagy **végtelen sokszor** differenciálható és az ilyen tulajdonságú függvények összességét a $\mathcal{D}^\infty(H, \mathbb{R})$ vagy a $\mathcal{D}^\infty(H)$, illetve \mathcal{D}_H^∞ szimbólumok valamelyikével jelöljük.

Az n -edrendű derivált értelmezése alapján nyilvánvaló, hogy bármely $f, g \in \mathcal{D}^n(H, \mathbb{R})$ függvényre és minden $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ számpárra

$$\lambda_1 f + \lambda_2 g \in \mathcal{D}^n(H, \mathbb{R}) \quad \text{és} \quad (\lambda_1 f + \lambda_2 g)^{(n)} = \lambda_1 f^{(n)} + \lambda_2 g^{(n)} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

A szorzat függvény n -edik deriváltjára vonatkozik az alábbi

Leibniz-féle szabály. Minden $n \in \mathbb{N}$ természetes számra és bármely két $f, g \in \mathcal{D}^n(H)$ függvény szorzatára $fg \in \mathcal{D}^n(H)$ és

$$(10) \quad (fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

BIZONYÍTÁS. Az állítást n -re vonatkozó teljes indukcióval igazoljuk. Az $n = 0$ esetben a 0-adik derivált definíciója alapján az állítás nyilvánvaló. Tegyük fel, hogy (10) fennáll n -re és ebből kiindulva igazoljuk n helyett $(n+1)$ -re. Az indukciós feltevést és a szorzat deriválási szabályát felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} (fg)^{(n+1)} &= \left((fg)^{(n)}\right)' = \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}\right)' = \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n+1-k)}. \end{aligned}$$

Ha az első összegben a $k = i$ a másodikban pedig a $k = i - 1$ jelölést vezetjük be, akkor innen

$$(fg)^{(n+1)} = \binom{n}{0} fg^{(n+1)} + \sum_{i=1}^n \left(\binom{n}{i} + \binom{n}{i-1} \right) f^{(i)} g^{(n+1-i)} + \binom{n}{n} f^{(n+1)} g$$

következik. Felhasználva a binomiális együtthatókra vonatkozó

$$\binom{n}{i} + \binom{n}{i-1} = \binom{n+1}{i}, \quad \binom{n}{0} = \binom{n+1}{0} = 1, \quad \binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1} = 1$$

azonosságot a bizonyítandó

$$(fg)^{(n+1)} = \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} f^{(i)} g^{(n+1-i)}$$

állítást kapjuk. \square

Mivel bármely polinom deriváltja is polinom, ezért a polinomok akárhányszor differenciálhatók, továbbá ha P n -edfokú polinom, akkor

$$P^{(n+1)} = P^{(n+2)} = \dots = 0.$$

Minthogy minden f racionális függvény f' deriváltja is racionális és $D_f = D_{f'}$, ezért a racionális függvények is akárhányszor differenciálhatók. Az \exp , \sin , \cos , \sinh , \cosh függvények differenciálási szabálya alapján nyilvánvaló, hogy ezek is akárhányszor differenciálhatók.

5.3. Taylor formula

Gyakran szükség van arra, hogy bonyolult függvényeket meg tudjunk „közelíteni” olyan függvényekkel, melyek helyettesítési értékeit könnyen ki tudjuk számolni, tulajdonságait könnyen át tudjuk tekinteni, és amelyek aránylag mégis jól „simulnak” a megközelítendő függvényhez. Ilyen egyszerű függvények például a polinomok, és ezek aránylag jól illeszkednek is, ha a fokszámuk elég nagy. Persze a nagyon „rossz”, „ugráló” függvényeket ezekkel sem lehet jól közelíteni.

A következőkben n -szer differenciálható függvényeket vizsgálunk, ezekkel kapcsolatos

Taylor-formula. Legyen $n \in \mathbb{N}$, $K_R(a) \subset \mathbb{R}$ és tegyük fel, hogy az $f : K_R(a) \rightarrow \mathbb{R}$ függvény $(n+1)$ -szer differenciálható a $K_R(a)$ -ban. Ekkor minden $x \in K_R(a)$ ponthoz létezik olyan a és x közé eső ξ_x szám, hogy az $f(x)$ függvényérték felírható a következő alakban:

$$f(x) = (T_n f)(x) + (R_n f)(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}.$$

A $T_n f$ polinomot az a ponthoz tartozó n -edik **Taylor-polinomnak**, az $R_n f$ függvényt **Lagrange-féle maradéknak** hívjuk.

BIZONYÍTÁS. Tegyük fel, hogy $x > a$. Az $x < a$ eset hasonlóan vizsgálható. Legyen x tetszőleges pont az $(a, a+R)$ környezetben. Nyilvánvalóan megadható egy olyan $S(x)$ x -től függő érték, hogy teljesüljön az

$$(11) \quad f(x) = (T_n f)(x) + \frac{S(x)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$$

előállítás, ahol

$$(T_n f)(x) := f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n.$$

A kérdés az, hogy létezik-e olyan $\xi_x \in (a, x)$, hogy $S(x) = f^{(n+1)}(\xi_x)$. Tekintsük a

$$P(t) := (T_n f)(t) + \frac{S(x)}{(n+1)!} (t-a)^{n+1} \quad (t \in (a-R, a+R)),$$

polinomot, ahol $S(x)$ a (11) előállításban szereplő rögzített szám. P egy $(n+1)$ -ed fokú polinom, tehát akárhányszor differenciálható, és a deriváltjai az a pontban:

$$(12) \quad P(a) = f(a), \quad P'(a) = f'(a), \quad P''(a) = f''(a), \quad \dots, \\ P^{(n)}(a) = f^{(n)}(a), \quad P^{(n+1)}(a) = S(x).$$

$S(x)$ definíciója miatt $P(x) = f(x)$ egyenlőség is nyilván teljesül.

Tekintsük az $F(t) := f(t) - P(t)$ ($t \in (a-R, a+R)$) függvényt. F nyilván $(n+1)$ -szer differenciálható az $(a-R, a+R)$ intervallumban, ezért bármilyen zárt részintervallumán folytonos, és $(n+1)$ -szer differenciálható, valamint (12) miatt $F^{(k)}(a) = 0$ ($k = 0, \dots, n$).

1. Mivel $F(a) = F(x) = 0$, és $F \in \mathcal{C}_{[a,x]}$ $F \in \mathcal{D}_{(a,x)}$, ezért a Rolle-tétel alapján létezik $\xi_1 \in (a, x)$, melyre

$$F'(\xi_1) = f'(\xi_1) - P'(\xi_1) = 0$$

2. Mivel F' differenciálható az $(a-R, a+R)$ intervallumon, ezért $F' \in \mathcal{C}_{[a, \xi_1]}$ $F' \in \mathcal{D}_{(a, \xi_1)}$.
 $F'(a) = F'(\xi_1) = 0$, ezért a Rolle-tétel alapján létezik $\xi_2 \in (a, \xi_1)$, melyre

$$F'(\xi_2) = f'(\xi_2) - P'(\xi_2) = 0.$$

\vdots

- n. Mivel $F^{(n-1)}$ differenciálható az $(a-R, a+R)$ intervallumon, ezért $F^{(n-1)} \in \mathcal{C}_{[a, \xi_{n-1}]}$
 $F^{(n-1)} \in \mathcal{D}_{(a, \xi_{n-1})}$. $F^{(n-1)}(a) = F^{(n-1)}(\xi_{n-1}) = 0$, ezért a Rolle-tétel alapján létezik
 $\xi_n \in (a, \xi_{n-1})$, melyre

$$F^{(n)}(\xi_n) = f^{(n)}(\xi_n) - P^{(n)}(\xi_n) = 0.$$

- n+1. Mivel $F^{(n)}$ differenciálható az $(a-R, a+R)$ intervallumon, ezért $F^{(n)} \in \mathcal{C}_{[a, \xi_n]}$ $F^{(n)} \in \mathcal{D}_{(a, \xi_n)}$.
 $F^{(n)}(a) = F^{(n)}(\xi_n) = 0$, ezért a Rolle-tétel alapján létezik $\xi_{n+1} \in (a, \xi_n)$,
melyre

$$F^{(n+1)}(\xi_{n+1}) = f^{(n+1)}(\xi_{n+1}) - P^{(n+1)}(\xi_{n+1}) = 0.$$

Ezt összevetve (12)-vel azt kapjuk, hogy

$$S(x) = f^{(n+1)}(\xi_{n+1})$$

Bevezetve a $\xi_x := \xi_{n+1}$ jelölést, a bizonyítandó állítást kapjuk. \square

Ismeretes, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ számra

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} = 0.$$

Ezt figyelembe véve adódik az alábbi

1. Következmény. Legyen $f \in \mathcal{D}^\infty(U, \mathbb{R})$ és tegyük fel, hogy létezik olyan $M > 0$ szám, amelyre

$$(13) \quad |f^{(n)}(x)| \leq M \quad (x \in U, n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor minden $x \in U = K_R(a)$ pontban $\lim_{n \rightarrow \infty} (R_n f)(x) = 0$, következésképpen a $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x) - (T_n f)(x)) = 0$ minden $x \in U$ pontban.

Példák.

1. Legyen $f(x) := \exp(x) = e^x$ ($x \in \mathbb{R}$). Felírjuk a függvény $a = 0$ körüli Taylor-formuláját.

A **valós exponenciális függvény** mindenütt akárhányszor differenciálható, és

$$f^{(k)}(x) = e^x, \quad f^{(k)}(0) = 1 \quad (k \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}),$$

ezért minden $x \in \mathbb{R}$, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén létezik ξ_x , 0 és x közötti szám, melyre

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \frac{e^{\xi_x}}{(n+1)!} x^{n+1} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\xi_x}}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

2. Legyen $f(x) := \sin x$ ($x \in \mathbb{R}$). Felírjuk a függvény $a = 0$ körüli Taylor-formuláját.

A **sinus függvény** mindenütt akárhányszor differenciálható, és

$$\begin{aligned} f^{(2k)}(x) &= (-1)^k \sin x, & f^{(2k)}(0) &= 0 \quad (k \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}), \\ f^{(2k+1)}(x) &= (-1)^k \cos x, & f^{(2k+1)}(0) &= (-1)^k \quad (k \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}), \end{aligned}$$

ezért minden $x \in \mathbb{R}$, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén létezik ξ_x , 0 és x közötti szám, melyre

$$\begin{aligned} \sin x &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + (-1)^{n+1} \frac{\sin \xi_x}{(2n+2)!} x^{2n+2} = \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + (-1)^{n+1} \frac{\sin \xi_x}{(2n+2)!} x^{2n+2}. \end{aligned}$$

3. Legyen $f(x) := \cos x$ ($x \in \mathbb{R}$). Felírjuk a függvény $a = 0$ körüli Taylor-formuláját.

A **cosinus függvény** mindenütt akárhányszor differenciálható, és

$$\begin{aligned} f^{(2k)}(x) &= (-1)^k \cos x, & f^{(2k)}(0) &= (-1)^k \quad (k \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}), \\ f^{(2k+1)}(x) &= (-1)^{k+1} \sin x, & f^{(2k+1)}(0) &= 0 \quad (k \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}), \end{aligned}$$

ezért minden $x \in \mathbb{R}$, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén létezik ξ_x , 0 és x közötti szám, melyre

$$\begin{aligned} \cos x &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + (-1)^{n+1} \frac{\sin \xi_x}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \frac{\sin \xi_x}{(2n+1)!} x^{2n+1}. \end{aligned}$$

4. Legyen $f(x) := \sinh x$ ($x \in \mathbb{R}$). Felírjuk a függvény $a = 0$ körüli Taylor-formuláját.

A **sinus hiperbolikus függvény** mindenütt akárhányszor differenciálható, és

$$\begin{aligned} f^{(2k)}(x) &= \sinh x, & f^{(2k)}(0) &= 0 \quad (k \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}), \\ f^{(2k+1)}(x) &= \cosh x, & f^{(2k+1)}(0) &= 1 \quad (k \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}), \end{aligned}$$

ezért minden $x \in \mathbb{R}$, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén létezik ξ_x , 0 és x közötti szám, melyre

$$\begin{aligned} \sinh x &= \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \frac{\sinh \xi_x}{(2n+2)!} x^{2n+2} = \\ &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \frac{\sinh \xi_x}{(2n+2)!} x^{2n+2}. \end{aligned}$$

5. Legyen $f(x) := \cosh x$ ($x \in \mathbb{R}$). Felírjuk a függvény $a = 0$ körüli Taylor-formuláját. A **cosinus hiperbolikus** függvény mindenütt akárhányszor differenciálható, és

$$\begin{aligned} f^{(2k)}(x) &= \cosh x, & f^{(2k)}(0) &= 1 \quad (k \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}), \\ f^{(2k+1)}(x) &= \sinh x, & f^{(2k+1)}(0) &= 0 \quad (k \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}), \end{aligned}$$

ezért minden $x \in \mathbb{R}$, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén létezik ξ_x , 0 és x közötti szám, melyre

$$\begin{aligned} \cosh x &= \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \frac{\sinh \xi_x}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \\ &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \frac{\sinh \xi_x}{(2n+1)!} x^{2n+1}. \end{aligned}$$

Megjegyzések

1. Az $a = 0$ pont körüli Taylor-polinomot **MacLaurinpolinom**nak hívjuk.
2. A 1. Következményben megadott (15) feltétel **elégleges** de nem szükséges ahhoz, hogy az f -et Taylor polinomja tetszőlegesen „megközelítse”.
3. A Taylor-formula felhasználható az $R_n f$ maradéktag becslésére. A \sin függvényre alkalmazva a Taylor-formulát

$$\left| \sin x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) \right| = \left| \frac{\sin^{(2n+2)}(\xi_x)}{(2n+2)!} x^{2n+2} \right| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$

4. Vegyük észre, hogy $n = 0$ estén a Taylor-formula a Lagrange-tételre redukálódik.

$$f(x) = f(a) + f'(\xi_x)(x - a),$$

ahol ξ_x a és x közé esik. Ezért a tétel a Lagrange-tétel általánosításának is tekinthető.

4. Ha valamely függvény akárhányszor differenciálható a $K_R(a)$ környezetben, akkor tekinthetjük a függvény a -hoz tartozó tetszőleges fokszámú Taylor polinomját. Előfordulhat, hogy a Taylor polinom az a ponton kívül sehol sem „simul” rá a függvényre.

5.4. Konvex és konkáv függvények

Ebben a pontban a differenciálszámítás egy újabb, geometriai alkalmazását mutatjuk be. A matematikában de pl. az optikában is használják a **konvexitás** fogalmát. Ennek értelmezése előtt ezzel kapcsolatban bevezetünk egy fogalmat.

Definíció. Az $x, y \in \mathbb{R}^n$ vektorok

$$(14) \quad \alpha x + \beta y \quad (0 \leq \alpha, \beta \leq 1, \alpha + \beta = 1)$$

alakú lineáris kombinációit **konvex kombinációknak** nevezzük.

Az $x, y \in \mathbb{R}^n$ vektorok konvex kombinációi nyilván

$$(15) \quad \lambda x + (1 - \lambda)y = y + \lambda(x - y) \quad (0 \leq \lambda \leq 1)$$

alakban is felírhatók. Ebből a felírásból látható, hogy $n = 1, 2, 3$ esetén a fenti lineáris kombinációk összessége az x és az y **pontokat összekötő szakasszal** egyenlő. Ebből kiindulva — geometriai szóhasználatával élve — a szóban forgó halmazt $n > 3$ esetén is **szakasznak nevezzük**.

Definíció. Akkor mondjuk, hogy a $H \subseteq \mathbb{R}^n$ halmaz konvex, ha a H bármely két pontját összekötő szakaszát tartalmazza, azaz minden $x, y \in H$ pontra és $0 \leq \lambda \leq 1$ számra $\lambda x + (1 - \lambda)y \in H$ teljesül.

A fenti értelmezés alapján nyilvánvaló, hogy **konvex halmazok közös része konvex** továbbá az \mathbb{R} konvex részhalmazai az \mathbb{R} -beli **intervallumok** (lásd a 12. Feladatot). A monoton függvények mellett fontos szerepet játszanak a **konvex** és **konkáv** függvények.

Definíció. Legyen $H \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex halmaz és $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ a H halmazon értelmezett valós függvény. Akkor mondjuk, hogy az f **függvény konvex**, ha minden $x, y \in H$ pontpárra és ezek bármely $\lambda x + (1 - \lambda)y$ ($0 \leq \lambda \leq 1$) konvex kombinációira

$$(16) \quad f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

Ha bármely $\lambda x + (1 - \lambda)y \in H$ konvex kombinációra

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

teljesül, akkor azt mondjuk, hogy f **konkáv**. Ha a fenti egyenlőtlenségekben az egyenlőséget kizárjuk, a **szigorúan konvex**, ill. **szigorúan konkáv** függvény fogalmát kapjuk.

A továbbiakban csak $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ típusú konvex és konkáv függvényekkel foglalkozunk. Az \mathbb{R} -beli konvex halmazok említett jellemzéséből kiindulva intervallumon értelmezett valós függvényeket vizsgálunk. Mindenekelőtt a konvexitás egy geometriai átfogalmazását adjuk.

Legyen $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ az $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallumon értelmezett konvex függvény. Kiindulva az $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ pontpárból írjuk fel a (16) egyenlőtlenséget az $x \in (x_1, x_2)$ pontban. Először megkeressük, hogy mely $\lambda \in [0, 1]$ számra teljesül az $x = \lambda(x_1 - x_2) + x_2$ egyenlőség. Egyszerű átrendezéssel adódik, hogy $\lambda = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}$, ezért az x szám az

$$\alpha := \lambda = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}, \quad \beta := 1 - \lambda = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

nemnegatív, $\alpha + \beta = 1$ feltételnek eleget tevő együtthatókkal előállítható az x_1 és x_2 számok konvex kombinációjaként:

$$x = \alpha x_1 + \beta x_2.$$

E jelöléseket felhasználva (16) átírható a következő, (16)-tal ekvivalens alakba:

$$(17) \quad \begin{aligned} f(x) &\leq f(x_2) + \lambda(f(x_1) - f(x_2)) = f(x_2) + \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}(f(x_1) - f(x_2)) \\ &= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_2) + f(x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1). \end{aligned}$$

Ezt az egyenlőtlenséget geometriailag interpretálva azt kapjuk, hogy az $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény akkor és csak akkor konvex, ha bármely $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ esetén az f **grafikonjának** $\{(x, f(x)) : x \in (x_1, x_2)\}$ **része nincs az** $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$ **pontokat összekötő szakasz felett**. Ehhez hasonlóan szemléltethető a konkáv, illetve a szigorúan konvex és szigorúan konkáv függvény fogalma.

Egy további jellemzést fogalmazunk meg az alábbi állításban.

1. Tétel. Az $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény akkor és csak akkor konvex, ha tetszőleges $x_1 < y_1, y_2 < x_2$ I -beli pontokra

$$(18) \quad \frac{f(x_1) - f(y_1)}{x_1 - y_1} \leq \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \leq \frac{f(x_2) - f(y_2)}{x_2 - y_2}$$

teljesül. Az f akkor és csak akkor szigorúan konvex, ha a (17) állítás $a \leq$ helyett $a <$ relációval áll fenn.

A (18) állításban $a \leq$ jelet $a \geq$, ill. $a >$ relációval felcserélve a konkávitással, ill. a szigorú konkávitással ekvivalens feltételt kapunk.

BIZONYÍTÁS. i) Tegyük fel először, hogy f konvex. Ekkor az $(x_1, f(x_1))$ és az $(x_2, f(x_2))$ pontokat összekötő húrra az y_1 és az y_2 pontban felírva a (18) feltételt

$$\begin{aligned} f(y_1) &\leq \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}(y_1 - x_1) + f(x_1), \\ f(y_2) &\leq \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}(y_2 - x_2) + f(x_2) \end{aligned}$$

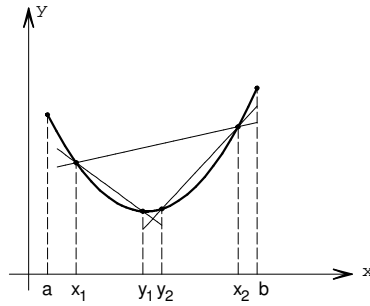
adódik. Innen $y_1 - x_1 > 0$ és $y_2 - x_2 < 0$ figyelembevételével egyszerű átalakítás után adódik a bizonyítandó egyenlőtlenség.

ii) Most induljunk ki abból, hogy tetszőleges $x_1 < y_1, y_2 < x_2$ I -beli pontokra fennáll a (18) egyenlőtlenség. Ekkor $y_1 = y_2 = x$ választás mellett (18)-ból azt kapjuk, hogy

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x},$$

ahonnan az (16)-tal ekvivalens (17) egyenlőség egyszerű átalakításal következik. A szigorúan konvex, ill. a konkáv függvényekre vonatkozó állítás hasonlóan igazolható.

□



1. ábra

Differenciálható függvények esetén a derivált felhasználható a konvexitás jellemzésére. Erre vonatkozik a

2. Tétel. Az $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvény akkor és csak akkor konvex, ha f' **monoton növekedő**, és akkor és csak akkor szigorúan konvex, ha f' **szigorúan monoton növekedő**. Az f függvény pontosan akkor konkáv, ha f' **monoton fogyó**, és pontosan akkor szigorúan konkáv, ha f' **szigorúan monoton fogyó**.

BIZONYÍTÁS. i) Tegyük fel először, hogy f konvex és tekintsük az (a, b) intervallum két tetszőleges $x_1 < x_2$ pontját. Ekkor az előbb igazolt 1. Tétel alapján minden $x_1 < y_1$, $y_2 < x_2$ esetén fennáll a (18) egyenlőtlenség. Ebből $y_1 \rightarrow x_1$ és $y_2 \rightarrow x_2$ határátmenettel a határárérték monotonitására vonatkozó tétel alapján az

$$f'(x_1) = \lim_{y_1 \rightarrow x_1} \frac{f(x_1) - f(y_1)}{x_1 - y_1} \leq \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \leq \lim_{y_2 \rightarrow x_2} \frac{f(x_2) - f(y_2)}{x_2 - y_2} = f'(x_2)$$

bizonyítandó egyenlőtlenséget kapjuk.

ii) Most tegyük fel, hogy f' monoton növekvő és tekintsünk két (a, b) -beli $x_1 < x_2$ pontot. Vezessük be az

$$\ell(x) := f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1), \quad r(x) := f(x) - \ell(x) \quad (x \in (a, b))$$

függvényeket. Az r értelmezése alapján nyilvánvaló, hogy $r(x_1) = r(x_2) = 0$. Míthogy ℓ lineáris függvény és f differenciálható, ezért r is differenciálható és

$$r'(x) = f'(x) - \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad (x \in (a, b)).$$

Az r függvényre az $[x_1, x_2]$ intervallumban — a most mondottak alapján — teljesülnek a Rolle-tétel feltételei ($r \in \mathcal{C}_{[x_1, x_2]}$, $r \in \mathcal{D}_{(x_1, x_2)}$, $r(x_1) = r(x_2)$), következésképpen van olyan $\xi \in (x_1, x_2)$ hely, amelyre $r'(\xi) = 0$. Minthogy f' monoton növekvő és r' ettől csak konstansban különbözik, ezért r' is monoton növekvő, következésképpen

$$r'(x) \leq 0 \quad (x_1 \leq x < \xi), \quad r'(x) \geq 0 \quad (\xi < x \leq x_2).$$

Innen következik, hogy r az $[x_1, \xi]$ intervallumban monoton fogyó, a $[\xi, x_2]$ intervallumban pedig monoton növekvő. Mivel $r(x_1) = r(x_2) = 0$, ezért az $[x_1, \xi]$, $[\xi, x_2]$ intervallumok mindegyikén $r(x) \leq 0$. Összefoglalva tehát azt kaptuk, hogy az $[x_1, x_2]$ intervallum minden x pontjában $r(x) \leq 0$, vagy — ami ezzel ekvivalens —

$$f(x) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1).$$

Ezzel megmutattuk, hogy f konvex.

iii) Ha f' szigorúan monoton növekvő, akkor a bizonyítás ii) részében a \leq relációt a $<$ relációval cserélve fel, adódik a szigorúan konvex esetre vonatkozó állítás első része.

iv) Ha f szigorúan konvex, akkor f' — a most bizonyítottak alapján — monoton növekedő. Megmutatjuk, hogy minden $x_1 < x_2$ (a, b) -beli pontpárra $f(x_1) < f(x_2)$. Ellenkező esetben ugyanis f' konstans, következésképpen f lineáris volna az $[x_1, x_2]$ intervallumban. Ez viszont nyilván ellentmond annak, hogy f szigorúan konvex.

A konkáv függvényekre vonatkozó állítás hasonlóan igazolható. \square

A most igazolt tételt a monoton függvények deriváltjára vonatkozó állítással kombinálva adódik a

2. Következmény.

i) Tegyük fel, hogy $f \in \mathcal{D}_{(a, b)}^2$. Az f függvény akkor és csak akkor konvex, ha minden $x \in (a, b)$ pontban $f''(x) \geq 0$.

ii) Ha $f \in \mathcal{D}_{(a, b)}^2$ és minden $x \in (a, b)$ pontban $f''(x) > 0$, akkor f szigorúan konvex.

A továbbiakban többször felhasználjuk a következő fogalmat.

Definíció. Akkor mondjuk, hogy az $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ függvény az $x_0 \in (a, b)$ pontban **(elő)jelet vált**, ha $f(x_0) = 0$ és ha létezik olyan $\delta > 0$ szám, hogy

$$i) \quad f(x) < 0 \quad (x \in (x_0 - \delta, x_0)), \quad f(x) > 0 \quad (x \in (x_0, x_0 + \delta)),$$

vagy

$$ii) \quad f(x) > 0 \quad (x \in (x_0 - \delta, x_0)), \quad f(x) < 0 \quad (x \in (x_0, x_0 + \delta)).$$

Az i) esetben azt szoktuk mondani, hogy az f **negatívból pozitívba** a ii) esetben pedig **pozitívból negatívba** megy át.

Definíció. Legyen $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Akkor mondhatjuk, hogy az $x_0 \in (a, b)$ hely f -nek **inflexiós pontja**, ha a

$$\varphi(x) := f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)) \quad (x \in (a, b))$$

függvény az x_0 pontban előjelet vált.

A most bevezetett fogalomnak a geometriai tartalma a következő: Ha pl. a φ függvény negatívból pozitívba megy át, akkor van olyan $\delta > 0$ szám, hogy az f grafikonjának $\{(x, f(x)) : x \in (x_0 - \delta, x_0)\}$ része az x_0 -beli érintő alatt, a grafikon $\{(x, f(x)) : x \in (x_0, x_0 + \delta)\}$ része pedig a szóban forgó érintő felett van.

Egyszerűen belátható, hogy

ha az $f \in \mathcal{D}_{(a,b)}$ függvény az (a, x_0) intervallumban konvex, az (x_0, b) intervallumban pedig konkáv (vagy megfordítva), akkor az x_0 pont az f -nek inflexiós helye.

Legyen például az f függvény az (a, x_0) intervallumon konvex, és konkáv az (x_0, b) intervallumon. A 2. tétel alapján ekkor f' monoton nő az (a, x_0) , és monoton csökken az (x_0, b) intervallumon. Mivel $\varphi'(x) = f'(x) - f'(x_0)$ ($x \in (a, b)$), ezért φ' is monoton nő az (a, x_0) , és monoton csökken az (x_0, b) intervallumon.

i) Ha $\varphi'(x_0) = 0$, akkor φ' monotonitása miatt

$$\varphi'(x) \leq 0 \quad (x \in (a, b)),$$

azaz — a 4.2./ 8. tétel alapján — φ monoton csökken az (a, b) intervallumon. Mivel $\varphi(x_0) = 0$, ezért

$$\varphi(x) \geq 0 \quad (x \in (a, x_0)) \quad \text{és} \quad \varphi(x) \leq 0 \quad (x \in (x_0, b)),$$

azaz φ az x_0 pontban valóban előjelet vált, tehát az x_0 pont inflexiós pontja f -nek.

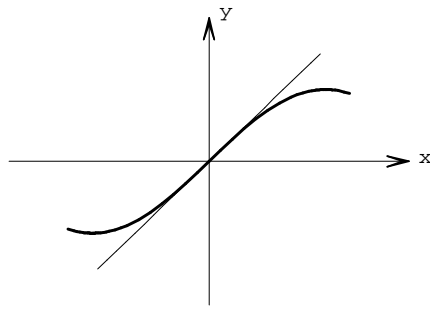
ii) Ha $\varphi'(x_0) > 0$, akkor — a 4.2./ 6. tétel alapján — φ szigorúan monoton nő az x_0 pontban. Mivel $\varphi(x_0) = 0$, ezért ez azt jelenti, hogy létezik $\delta > 0$ szám, hogy

$$\varphi(x) \leq 0 \quad (x \in (x_0 - \delta, x_0)) \quad \text{és} \quad \varphi(x) \geq 0 \quad (x \in (x_0, x_0 + \delta)),$$

azaz φ az x_0 pontban valóban előjelet vált, tehát az x_0 pont inflexiós pontja f -nek.

iii) Ha $\varphi'(x_0) < 0$, akkor az előzőhöz hasonlóan belátható, hogy φ az x_0 pontban előjelet vált.

Például a \sin függvény a $(-\pi/2, 0)$ intervallumban konvex, a $(0, \pi/2)$ intervallumban konkáv, ezért a \sin függvénynek a 0 inflexiós pontja.



2. ábra

Az intervallumra vonatkozó konvexitás mellett ennek az alábbi lokális változatát is szokás értelmezni.

Definíció. Akkor mondjuk, hogy az $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvény az $x_0 \in (a, b)$ pontban **lokálisan konvex**, ha létezik olyan $\delta > 0$ szám, hogy az x_0 δ -sugarú környezetének minden pontjában

$$f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta))$$

teljesül. Ha ez az egyenlőtlenség a \leq helyett a \geq relációval teljesül, akkor azt mondjuk, hogy f az x_0 pontban **lokálisan konkáv**.

E definíció geometriai tartalma a következő: Az f grafikonjának $\{(x, f(x)) : x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\}$ része az x_0 pontbeli érintő felett van. A most bevezetett fogalmat egybevetve az intervallumra vonatkozó konvexitással nyilvánvaló, hogy valamely nyílt intervallumon konvex függvény annak minden pontjában lokálisan konvex. A most megfogalmazott állítás megfordításával kapcsolatban a 13. feladatra utalunk.

5.5. Függvénydiszkusszió

Korábban bebizonyítottuk, hogy az $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvénynek az x_0 pontban szélsőértéke van, akkor $f'(x_0) = 0$. Ebben a pontban lokális szélsőértékre vonatkozó **elégéses feltételt** adunk.

3. Tétel. Ha f' az $x_0 \in (a, b)$ pontban előjelet vált, akkor f -nek az x_0 helyen lokális szélsőértéke van. Ha f' az x_0 -ban negatívból pozitívba megy át, akkor f -nek x_0 -ban minimuma van, ha pedig pozitívból negatívba megy át, akkor x_0 maximum hely.

BIZONYÍTÁS. Tegyük fel, hogy f' az x_0 pontban negatívból pozitívba megy át. Ekkor van olyan $\delta > 0$ szám, hogy

$$f'(x) \leq 0, \quad \text{ha } x_0 - \delta < x < x_0 \quad \text{és} \quad f'(x) \geq 0, \quad \text{ha } x_0 < x < x_0 + \delta.$$

Innen következik, hogy f az $(x_0 - \delta, x_0]$ intervallumban monoton fogyó, az $[x_0, x_0 + \delta)$ intervallumban pedig monoton növekvő, következésképpen f -nek az x_0 helyen valóban lokális minimuma van.

Az állítás második része hasonlóan igazolható. \square

A most igazolt tételből közvetlenül adódik az alábbi

3. Következmény. Ha az $x_0 \in (a, b)$ pontban kétszer differenciálható $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ függvényre $f'(x_0) = 0$ és $f''(x_0) \neq 0$, akkor f -nek az x_0 helyen lokális szélsőértéke van. Ha $f''(x_0) > 0$, akkor x_0 lokális minimumhely, ha pedig $f''(x_0) < 0$, akkor x_0 lokális maximumhely.

BIZONYÍTÁS. Valóban, ha $f''(x_0) > 0$, akkor a 4.2. pont 6. Tétel alapján f' az x_0 pontban szigorúan nő. Mivel $f'(x_0) = 0$, ezért f' az x_0 -ban negatívból pozitívba megy át. Ezért az előző tétel alapján x_0 minimumhely. A másik eset hasonlóan igazolható. \square

Többször differenciálható függvény esetében a magasabberendű derivált és a szélsőérték kapcsolatára vonatkozik az alábbi

4. Tétel. Tegyük fel, hogy az $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ függvény az $x_0 \in (a, b)$ pontban n -szer differenciálható, ahol $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$ és legyen

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Az f függvénynek akkor és csak akkor van lokális szélsőértéke az x_0 helyen, ha n páros. Ekkor $f^{(n)}(x_0) > 0$ esetén az x_0 lokális minimumhely, $f^{(n)}(x_0) < 0$ esetén pedig lokális maximumhely.

BIZONYÍTÁS. Az $f^{(n)}(x_0) > 0$ feltételből következik, hogy az $f^{(n-1)}$ az x_0 pontban (szigorúan) növekedő, s mivel $f^{(n-1)}(x_0) = 0$ ezért az $f^{(n-1)}$ függvény itt negatívból pozitívba megy át. Következésképpen van olyan $\delta > 0$ szám, hogy az $f^{(n-2)}$ függvény az $(x_0 - \delta, x_0]$ intervallumban monoton fogyó, az $[x_0, x_0 + \delta)$ intervallumban pedig monoton növekedő. Mivel $f^{(n-2)}(x_0) = 0$, ezért innen adódik, hogy az $f^{(n-2)}$ függvény az $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ intervallumban — az x_0 helyet kivéve — pozitív, következésképpen $f^{(n-3)}$ szigorúan növekedő ebben az intervallumban.

Ezt a gondolatmenetet $f^{(n-1)}$ helyett $f^{(n-3)}$ -ra megismételve azt kapjuk, hogy az $f^{(n-1)}$, $f^{(n-3)}$, $f^{(n-5)}$, ... függvények az x_0 pontban szigorúan növekednek, az $f^{(n-2)}$, $f^{(n-4)}$, $f^{(n-6)}$, ... függvényeknek pedig az x_0 helyen minimuma van. Ezt a gondo-

latmenetet lehet könnyen áttekinteni az alábbi táblázatban.

x	$(x_0 - \delta, x_0)$	x_0	$(x_0, x_0 + \delta)$
$f^{(n)}$		+	
$f^{(n-1)}$	–	\nearrow_0	+
$f^{(n-2)}$	$\searrow +$	0	$\nearrow +$
$f^{(n-3)}$	$\nearrow -$	0	$\nearrow +$
$f^{(n-4)}$	$\searrow +$	0	$\nearrow +$
$f^{(n-5)}$	$\nearrow -$	0	$\nearrow +$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

A mondottakból következik, hogy páros n esetén az x_0 lokális minimumhely, páratlan n esetén pedig az f függvény az x_0 helyen szigorúan növekedő, következésképpen itt nem lehet szélsőértéke.

Az $f^{(n)}(x_0) < 0$ esetben az előzőhöz hasonlóan igazolható az állítás. \square

A következő tételben az inflexiós pont létezésére vonatkozóan adunk egy szükséges és egy elégség feltételt.

5. Tétel. Legyen $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$.

- i) Ha f kétszer folytonosan differenciálható ($f \in \mathcal{D}_{(a,b)}^2, f'' \in \mathcal{C}_{(a,b)}$) és ha f -nek az $x_0 \in (a, b)$ hely inflexiós pontja, akkor $f''(x_0) = 0$.
- ii) Ha f háromszor folytonosan differenciálható az (a, b) intervallumon és az $x_0 \in (a, b)$ pontban $f''(x_0) = 0$ továbbá $f^{(3)}(x_0) \neq 0$, akkor x_0 az f -nek inflexiós pontja.

BIZONYÍTÁS. Ad i). Indirekt módon bizonyítunk. Az állítással ellentétben tegyük fel, hogy $f''(x_0) \neq 0$. Az f'' folytonos az x_0 pontban, ezért a fokozatos változás tulajdonsága alapján következik, hogy x_0 -nak van olyan $K_r(x_0)$ környezete, amelyben f'' állandó előjelű. Vegyük észre, hogy $n = 1$, és $a = x_0$ esetén a Taylor-formulában fellépő Lagrange-féle maradéktag éppen az inflexiós pont definíciójában szereplő φ függvénnyel egyenlő. Tehát φ a következőképpen írható fel:

$$\varphi(x) := f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = \frac{f''(\xi_x)}{2}(x - x_0)^2 \quad (x \in K_r(x_0)),$$

ahol $\xi_x \in K_r(x_0)$. Innen nyilvánvaló, hogy a φ függvény a $K_r(x_0)$ környezetben állandó előjelű, következésképpen x_0 nem lehet inflexiós pont. Az ellentmondással bebizonyítottuk az állítást.

Ad ii). Az $f^{(3)}$ folytonosságából következik — a fokozatos változás tulajdonsága alapján —, hogy x_0 -nak van olyan $K_r(x_0)$ környezete, amelyben $f^{(3)}$ állandó előjelű. A Taylor-formulát $n = 2$ esetén alkalmazva és az $f''(x_0) = 0$ feltételt figyelembe véve azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\varphi(x) &:= f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) - \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 = \\ &= \frac{f^{(3)}(\xi_x)}{3!}(x - x_0)^3 \quad (x \in K_r(x_0)),\end{aligned}$$

ahol $\xi_x \in K_r(x_0)$. Minthogy a jobb oldalon álló függvény az x_0 pontban jelet vált, ezért ugyanez igaz a φ -re is, következésképpen x_0 valóban inflexiós pont. \square

Adott függvény esetén azokat az egyeneseket, melyeket a függvény „tetszőlegesen megközelít, de soha nem ér el”, **aszimptotáknak** nevezzük. Ennek fajtáit, és pontos értelmezését tartalmazza a következő

Definíció.

i) Akkor mondjuk, hogy az $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ ($H \subseteq \mathbb{R}$) függvénynek az $x_0 \in H'$ pontban **van függőleges aszimptotája**, ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = \pm\infty \quad \text{vagy} \quad \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = \pm\infty.$$

Ekkor az $x = x_0$ egyenes az f függvény **függőleges aszimptotája**.

ii) Akkor mondjuk, hogy az $f : (a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek $a + \infty$ -ben **van vízszintes aszimptotája**, ha létezik a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \in \mathbb{R}$$

véges határérték. Az $y = A$ egyenletű egyenest az $f + \infty$ -ben vett vízszintes aszimptotájának nevezzük.

iii) Akkor mondjuk, hogy az $f : (a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek $a + \infty$ -ben **van ferde aszimptotája**, ha létezik olyan $\ell(x) := ax + b$ ($x \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $a, b \in \mathbb{R}$) lineáris függvény, melyre

$$(19) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \ell(x)) = 0.$$

Az ℓ grafikonját az $f + \infty$ -ben vett ferde aszimptotájának nevezzük.

A (19) alatti értelmezésből egyszerűen következik, hogy f -nek akkor és csak akkor van ferde aszimptotája, ha léteznek az

$$a := \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b := \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax)$$

határértékek és az aszimptota definíciójában szereplő lineáris függvény: $\ell(x) = ax + b$ ($x \in \mathbb{R}$). Valóban, hiszen

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax - b) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \left(\frac{f(x)}{x} - a \right) - b \right) = 0$$

határérték csak akkor teljesülhet, ha $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} - a = 0$

A fenti értelmezésben $f : (-\infty, a) \rightarrow \mathbb{R}$ típusú függvényekből kiindulva és a $+\infty$ helyen vett határértéket a $-\infty$ -beli határértékkel felcserélve megkapjuk a $-\infty$ -ben vett ferde/vízszintes aszimptota definícióját.

Az eddig ismertetett tételek alapján választ tudunk adni azokra a kérdésekre, amelyek $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ típusú függvények grafikonjával kapcsolatban szokás feltenni. Az ilyen típusú függvények diszkusszióján — elsősorban — az alábbi kérdések megválaszolását értjük:

- Vannak-e a függvénynek abszolút és lokális maximum és minimum helyei ?
- A függvény értelmezési tartománya felbontható-e olyan intervallumokra, amelyekben a függvény monoton ?
- A függvény értelmezési tartománya felbontható-e olyan intervallumokra, amelyekben a függvény konvex, ill. konkáv ?
- Vannak-e a függvénynek zérushelyei és inflexiós pontjai ?
- A függvény értelmezési tartományának torlódási pontjaiban létezik-e a határértéke ?
- Vannak-e a függvénynek aszimptotái ?

Az alábbiakban leírjuk a teljes függvényvizsgálat (függvénydiszkusszió) lépéseit.

1. Meghatározzuk a függvény (f) *értelmezési tartományát* (továbbiakban H). Megvizsgáljuk a függvény *szimmetriatulajdonságait* (paritás: páros, páratlan), *periodicitását*, *folytonosságát*, *differenciálhatóságát*.
2. Kiszámoljuk a függvény deriváltját azon a halmazon, melyen differenciálható. Megkeressük a derivált zérushelyeit, és a derivált előjeléből következtetünk a függvényünk *monotonitására*, és *szélsőértékeire*.
3. Kiszámoljuk a függvény második deriváltját azon a halmazon, melyen differenciálható. Megkeressük a második derivált zérushelyeit, és a derivált előjeléből következtetünk a függvényünk *konvexitására*, és *inflexiós pontjaira*. Az inflexiós pontban kiszámítjuk az első derivált értékét, így tudjuk, hogy mekkora a meredeksége az inflexiós pontba húzott érintőnek.
4. Kiszámoljuk a *függvény határértékét* az
 - (1) $x_0 \in \mathbb{R}$ pontban, ha

- x_0 **szinguláris pontja** a függvénynek ($x_0 \in H'$, de $x_0 \notin H$),
 - x_0 szinguláris pontja a függvénynek ($x_0 \in H$, de $f \notin \mathcal{C}_{x_0}$),
 - (2) $\pm\infty$ helyen, ha $\pm\infty \in H'$.
5. Kiszámoljuk a *függvény deriváltjának (f') határértékét* az x_0 pontban, ha
- a függvény nem differenciálható az x_0 pontban, de folytonos ($f \notin \mathcal{D}_{x_0}$, de $f \in \mathcal{C}_{x_0}$),
 - a függvény nem differenciálható az x_0 pontban, de létezik abban a pontban legalább féloldali véges határértéke ($f \notin \mathcal{D}_{x_0}$, de $\exists (\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) < \infty$, vagy $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) < \infty)$).
6. Amennyiben a függvénynek $\pm\infty$ -ben plusz / mínusz végtelen a határértéke, megvizsgáljuk, van-e *ferde aszimptotája*.
7. Az első hat pont eredményei alapján *ábrázoljuk a függvényt*.
8. Leolvassuk a grafikonról a függvény *értékkészletét*. Amennyiben nem tudjuk a függvény hozzárendelési szabályából megállapítani, hogy hány zérushelye van, a grafikonról leolvashatjuk.

Az következő három példán bemutatjuk a függvénydiszkusszió most vázolt menetét.

1. Példa

Ábrázoljuk az

$$f(x) := \frac{x(x^2 + 1)}{x^2 - 1}$$

függvényt.

1) Nyilvánvaló, hogy $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$. f páratlan, azaz minden $x \in D_f$ esetén $-x \in D_f$, és

$$f(-x) = \frac{-x((-x)^2 + 1)}{(-x)^2 - 1} = \frac{-x(x^2 + 1)}{x^2 - 1} = -f(x) \quad (x \in D_f).$$

Ezért a függvény vizsgálatánál elég a $[0, \infty) \setminus \{1\}$ halmazra szorítkozni. f nyilván nem periodikus, és a műveleti tulajdonságok alapján értelmezési tartományán folytonos és deriválható. Ennek a függvénynek könnyű meghatározni zérushelyét is, nyilván egyetlen zérushelye az $x = 0$ pont.

2) A differenciálási szabályok alapján deriváljuk a függvényt:

$$f'(x) = \frac{(3x^2 + 1)(x^2 - 1) - (x^3 + x)(2x)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^4 - 4x^2 - 1}{(x^2 - 1)^2} \quad (x \in D_f).$$

f' zérushelye megegyezik a számláló zérushelyével, ami egy x^2 -ben másodfokú polinom, tehát zérushelye könnyen megállapítható. Figyelembe véve, hogy $x^2 \geq 0$, és $x \geq 0$,

$$(x^2)_{p,m} = \frac{4 \pm \sqrt{32}}{2} = 2 \pm 2\sqrt{2}, \quad x_{1,2} = \pm \sqrt{2 + 2\sqrt{2}},$$

egyetlen pozitív gyöke van az f' függvénynek, nevezetesen $x_1 := \sqrt{2 + 2\sqrt{2}}$. Ennek alapján az f' a $[0, 1)$, $(1, x_1)$ és az (x_1, ∞) intervallumon állandó előjelű. Magát az előjelet

könnyen megkaphatjuk, például a számláló $(x + \sqrt{2 + 2\sqrt{2}})(x - \sqrt{2 + 2\sqrt{2}})(x^2 - 2 + 2\sqrt{2})$ szorzattá alakításából. Ennek alapján $f'(x) > 0$, ha $x > x_1$ és $f'(x) < 0$, ha $x \in [0, x_1)$, $x \neq 1$. Az f függvény tehát a $[0, 1)$ és $(1, x_1]$ intervallumokon szigorúan monoton fogyó, az $[x_1, \infty)$ intervallumban pedig szigorúan monoton növekvő. Az x_1 helyen az f -nek lokális minimuma van.

3) Az f második deriváltja:

$$f''(x) = \frac{(4x^3 - 8x)(x^2 - 1)^2 - (x^4 - 4x^2 - 1) \cdot 2 \cdot (x^2 - 1)2x}{(x^2 - 1)^4} = \frac{4x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3} \quad (x \in D_f).$$

Mínt hogy az $x^2 + 3$ tényező mindig pozitív az f'' előjele könnyen megállapítható:

$$f''(x) < 0, \quad \text{ha } x \in (0, 1), \quad f''(x) > 0, \quad \text{ha } x > 1, \quad \text{és } f''(0) = 0.$$

Innen következik, hogy f a $(0, 1)$ intervallumon konkáv, az $(1, \infty)$ intervallumon pedig konvex. Mivel f'' a 0 pontban előjelet vált, ezért itt inflexiós pontja van. Az inflexiós pontban az érintő irántangense $f'(0) = -1$. A 2., 3. pont eredményeit célszerű egy táblázatban is összefoglalni:

x	0	$(0, 1)$	1	$(1, x_1)$	x_1	$(x_1, +\infty)$
f'	-1	-	szinguláris pont	-	0	+
f''	0	-	szinguláris pont	+	+	+
f	0	\searrow	szinguláris pont	\searrow	lok. min.	\nearrow
f	inflexiós pont	\frown	szinguláris pont	\smile	$\approx 3,33$	\smile

4) Mínt hogy f folytonos a D_f minden pontjában, ezért ezekben a határérték a függvényértékkel egyenlő. Az értelmezési tartománynak a D_f pontjaitól különböző torlódási pontjaiban a függvény határértéke:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{x(x^2 + 1)}{x^2 - 1} = -\infty, \quad \text{mert} \quad \lim_{x \rightarrow 1} x(x^2 + 1) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 1-} x^2 - 1 = 0- \\ \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{x(x^2 + 1)}{x^2 - 1} = \infty, \quad \text{mert} \quad \lim_{x \rightarrow 1} x(x^2 + 1) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 1+} x^2 - 1 = 0+ \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(x^2 + 1)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x + \frac{1}{x})}{1 - \frac{1}{x^2}} = +\infty. \end{aligned}$$

5) Mivel f értelmezési tartományának minden pontjában differenciálható, és a 4)-es pontban nem kaptunk véges helyen véges határértéket, ezért nem kell f' határértékét vizsgálni.

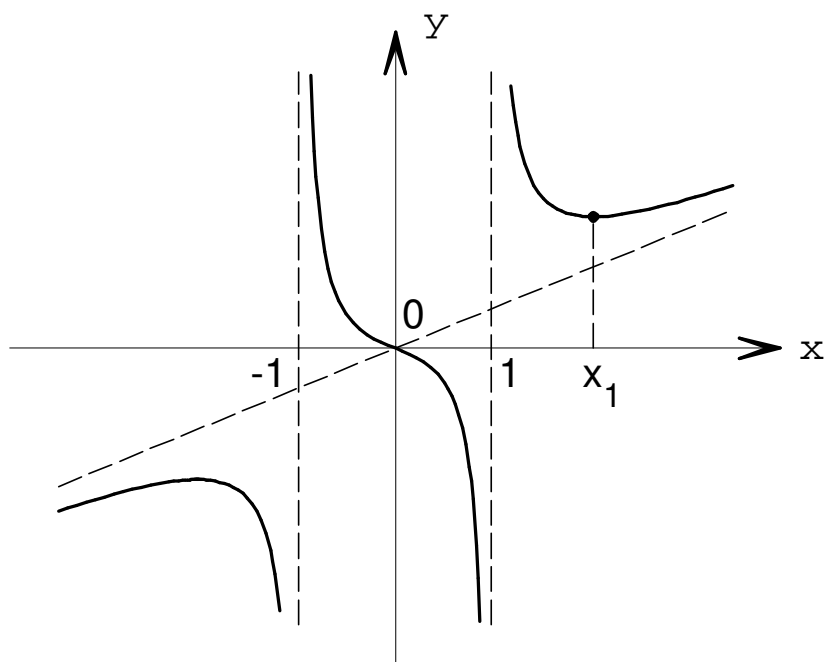
6) Mivel $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, ezért keresünk aszimptotát. Mivel

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1 + \frac{1}{x^2})}{1 - \frac{1}{x^2}} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\frac{2}{x})}{1 - \frac{1}{x^2}} = 0,$$

ezért f -nek a $+\infty$ -ben van ferde aszimptotája és $\ell(x) = x$ ($x \in \mathbb{R}$).

7) f grafikonját a következő ábrán szemléltetjük:



3. ábra

8) Az ábráról leolvashatjuk, hogy f értékkészlete a valós számok halmaza.

2. Példa

Ábrázoljuk az

$$f(x) := e^{-x^2}$$

függvény grafikonját.

1) Nyilvánvaló, hogy $D_f = \mathbb{R}$ f páros, azaz minden $x \in D_f$ esetén $-x \in D_f$, és

$$f(-x) = e^{-(-x)^2} = e^{-x^2} = f(x) \quad (x \in D_f).$$

Ezért a függvény vizsgálatánál elég a $[0, \infty)$ halmazra szorítkozni. f nyilván nem periodikus, és a műveleti tulajdonságok alapján értelmezési tartományán folytonos és deriválható. Ennek a függvénynek nincs zérushelye, mert az exponenciális függvény nem veszi fel a nulla értéket.

2) A differenciálási szabályok alapján deriváljuk a függvényt:

$$f'(x) = e^{-x^2} \cdot (-2x), \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Nyilvánvaló, hogy

$$f'(x) > 0, \quad \text{ha } x < 0, \quad f'(x) < 0, \quad \text{ha } x > 0, \quad f'(x) = 0, \quad \text{ha } x = 0.$$

Az f függvény tehát a $[0, +\infty)$ intervallumon szigorúan monoton fogyó, a $(-\infty, 0]$ intervallumban pedig szigorúan monoton növekvő. A 0 pontban az f -nek lokális maximuma van. A szimmetriatulajdonság miatt elég lett volna a monotonitást is a $[0, +\infty)$ intervallumon vizsgálni.

3) Az f második deriváltja:

$$f''(x) = e^{-x^2} \cdot (-2x) \cdot (-2x) + e^{-x^2} \cdot (-2) = 2(2x^2 - 1)e^{-x^2} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Mivel az exponenciális függvény értékkészlete a pozitív valós számok halmaza, ezért f'' csak akkor nulla, ha $2x^2 - 1 = 0$, és előjelét is ennek a másodfokú függvénynek az előjele határozza meg. Tehát $f''(x) = 0$, ha $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, és

$$f''(x) > 0, \quad \text{ha } 0 < x < \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad f''(x) < 0, \quad \text{ha } x \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty\right).$$

Innen következik, hogy f a $(0, x_1)$ intervallumon konvex, az $(x_1, +\infty)$ intervallumon pedig konkáv. Mivel f'' az x_1 pontban előjelet vált, ezért itt inflexiós pontja van. Az inflexiós pontban az érintő iránytangense $f'(x_1) = -\sqrt{2}/e$. A 2., 3. pont eredményeit célszerű egy táblázatban is összefoglalni:

x	0	$(0, \frac{1}{\sqrt{2}})$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$(\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty)$
f'	0	—	$-\sqrt{2} e^{-1/2}$	—
f''	—	—	0	+
f	lok. max.	\searrow	\searrow	\searrow
f	1	\frown	inflexiós pont	\smile

4) Minthogy f folytonos a D_f minden pontjában, ezért ezekben a határérték a függvényértékkel egyenlő. Az értelmezési tartománynak a D_f pontjaitól különböző torlódási pontjaiban a függvény határértéke:

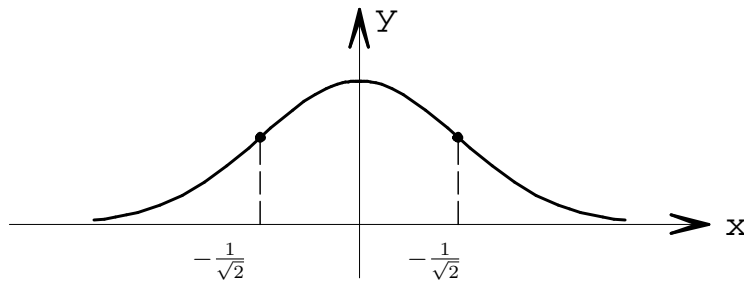
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2} = 0,$$

mert $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x^2 = -\infty$, és $\lim_{y \rightarrow -\infty} e^y = 0$.

5) Mivel f mindenütt differenciálható, nem kell f' határértékét vizsgálni.

6) Mivel $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, ezért a függvénynek vízszintes aszimptotája van a $+\infty$ -ben.

7) A fentiek figyelembevételével az f grafikonját az alábbiakban szemléltetjük:



4. ábra

8) Az ábráról leolvashatjuk, hogy f értékkészlete a $(0, 1]$ intervallum.

3. Példa

Jellemezzük az

$$f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$$

függvényt!

1.) $f(x)$ egy összetett inverztrigonometrikus racionális törtfüggvény. Értelmezési tartománya a valós számok halmaza, mivel az alábbi egyenlőtlenség bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén teljesül:

$$\begin{aligned} -1 &\leq \frac{2x}{1+x^2} \leq 1 \\ -1-x^2 &\leq 2x \leq 1+x^2 \\ -(1+x^2+2x) &\leq 0 \leq (1+x^2-2x) \\ -(1+x)^2 &\leq 0 \leq (1-x)^2. \end{aligned}$$

A tengelypontokat az $f(x) = 0$ és $x = 0$ helyettesítéssel kaphatjuk meg. $\arcsin \frac{2x}{1+x^2} = 0$ akkor és csak akkor, ha $2x/(1+x^2) = 0$, azaz ha $x = 0$, és $\arcsin 0 = 0$. Tehát a görbe a tengelyeket az origóban metszi. Mivel minden $x \in D_f$ esetén $-x \in D_f$, és

$$f(-x) = \arcsin \frac{-2x}{1+(-x)^2} = -\arcsin \frac{2x}{1+x^2} = -f(x),$$

így a függvény páratlan, ezért elegendő csak a $[0, +\infty)$ intervallumon vizsgálni.

f nyilván nem periodikus, és a műveleti tulajdonságok alapján értelmezési tartományán folytonos, a $x = \pm 1$ helyen kívül pedig mindenütt differenciálható.

2) A differenciálási szabályok alapján deriváljuk a függvényt az $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ halmazon:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}} \cdot \frac{2(1+x^2) - 2x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \sqrt{\frac{(1+x^2)^2}{(1-x^2)^2}} \cdot \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \\ &= \frac{1-x^2}{|1-x^2|} \cdot \frac{2}{1+x^2} = \operatorname{sign}(1-x^2) \frac{2}{1+x^2} = \begin{cases} \frac{2}{1+x^2}, & \text{ha } -1 < x < 1 \\ -\frac{2}{1+x^2}, & \text{ha } x < -1 \text{ vagy } x > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Látható, hogy az f' függvény nem veszi fel a nulla értéket, és mivel $1+x^2 > 0$ ($x \in \mathbb{R}$), így $f'(x) > 0$ ha $x \in (-1, 1)$ és $f'(x) < 0$, ha $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, azaz f szigorúan monoton nő, a $(-1, 1)$ intervallumon, és szigorúan monoton csökken a $(-\infty, -1)$, $(1, +\infty)$ intervallumokon. A függvény nem differenciálható az $x_{1,2} = \pm 1$ pontokban, de a függvény folytonosságából és monotonitásából következik, hogy , hogy a $x_1 = 1$ pont helyi maximum-, míg az $x_2 = -1$ pont helyi minimum hely.

3) f' a ± 1 pontokon kívül differenciálható, és

$$f''(x) = \begin{cases} -\frac{4x}{1+x^2}, & \text{ha } -1 < x < 1, \\ \frac{4x}{1+x^2}, & \text{ha } x < -1 \vee x > 1. \end{cases}$$

Az $f''(x) = 0$ egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $x = 0$, tehát a függvénynek $x = 0$ helyen inflexiós pontja lehet.

f'' előjelét a számláló előjele egyértelműen meghatározza, azaz $f''(x) > 0$ ha $x > 1$ vagy $x \in (-1, 0)$, és $f''(x) < 0$ ha $x \in (0, 1) \cup (-\infty, -1)$. Innen következik, hogy f a $(-\infty, 1)$, $(0, 1)$ intervallumokon konkáv, az $(-1, 0)$, $(1, +\infty)$ intervallumokon pedig konvex. Mivel f'' a 0 pontban előjelet vált, ezért itt inflexiós pontja van. Az inflexiós pontban az érintő irántangense $f'(0) = 2$.

A 2., 3. pont eredményeit célszerű egy táblázatban is összefoglalni:

x	0	$(0, 1)$	1	$(1, \infty)$
f'	2	+	szinguláris pont	–
f''	0	–	szinguláris pont	+
f	\nearrow	\nearrow	lok. max.	\searrow
f	infl. pont	\frown	$\pi/2$	\smile

4) Minthogy f folytonos a D_f minden pontjában, ezért ezekben a határérték a függvényértékkel egyenlő. Az értelmezési tartománynak a D_f pontjaitól különböző torlódási pontjaiban a függvény határértéke — kihasználva az \arcsin függvény folytonosságát—:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \arcsin \frac{\frac{2}{x}}{\frac{1}{x^2} + 1} = 0.$$

5) Mivel f a ± 1 pontokban nem differenciálható, de folytonos, ezért célszerű f' határértékét vizsgálni ezekben a pontokban. (A paritás miatt elegendő az egyik pontban megvizsgálni a határértéket).

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{-2}{1+x^2} = -1 \quad \text{és} \quad \lim_{x \rightarrow 1-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{2}{1+x^2} = 1.$$

Ez azt jelenti, hogy az egy pontban a függvénynek a baloldali érintője egy $+1$ meredekségű, a jobboldali érintője pedig egy -1 meredekségű egyenes.

6) Mivel $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$, ezért a függvénynek vízszintes aszimptotája van a $\pm\infty$ -ben.

7) A fentiek figyelembevételével az f grafikonját az alábbiakban szemléltetjük:

8) Az ábráról leolvashatjuk, hogy f értékkészlete a $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ intervallum.

5.7. Feladatok

1. Igazoljuk, hogy az

$$\begin{aligned} f(x) &:= x^\alpha \quad (x \in (0, \infty), \alpha > 1), & g(x) &:= \exp(x) \quad (x \in \mathbb{R}), \\ h(x) &:= x \ln x \quad (x \in (0, \infty)) \end{aligned}$$

függvények konvexek.

2. Igazoljuk, hogy az

$$f(x) := x^\alpha \quad (x \in (0, \infty), 0 < \alpha < 1), \quad g(x) := \ln x \quad (x \in (0, \infty))$$

függvények konkávok.

3. Igazoljuk az alábbi egyenlőtlenségeket:

- a) $\left(\frac{x+y}{2}\right)^n < \frac{x^n + y^n}{2} \quad (x, y > 0, x \neq y, n > 1),$
- b) $\exp\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{\exp(x) + \exp(y)}{2} \quad (x, y \in \mathbb{R}, x \neq y),$
- c) $(x+y) \ln\left(\frac{x+y}{2}\right) < x \ln x + y \ln y \quad (x, y > 0, x \neq y),$
- d) $x^{\lambda_1} y^{\lambda_2} \leq \lambda_1 x + \lambda_2 y \quad (\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1, x, y > 0).$

4. Határozzuk meg az alábbi határértékeket a L'Hospital-szabály segítségével:

- | | |
|--|---|
| a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh(x) - \cos x}{x^2},$ | b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{tg} x - 1}{x^2},$ |
| c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x},$ | d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x^2}{x^2 \sin x^2},$ |
| e) $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}},$ | f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - a^{\sin x}}{x^3} \quad (a > 0),$ |
| g) $\lim_{x \rightarrow 0+} \left(\ln \frac{1}{x} \right)^x,$ | h) $\lim_{x \rightarrow 1-} \ln x \cdot \ln(1-x),$ |
| i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} \quad (\alpha > 0),$ | j) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^{ax}} \quad (a > 0, n > 0),$ |
| k) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x^{100}},$ | l) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-0.1x},$ |
| m) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x^{1/x}) - e}{x},$ | n) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\lg x}}{(\ln x)^x},$ |
| o) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x) + x^2}{(1+x)^5 - 1 + x^2},$ | p) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - 1 + \cos 3x}{e^x - e^{-x}},$ |
| q) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} x - 1}{\sin 4x},$ | r) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$ |
| s) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos 3x}{\ln \cos 9x},$ | t) $\lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}},$ |
| u) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x),$ | v) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x \right)^x,$ |
| x) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin x}},$ | z) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{3}{x} \right)^{x^2}.$ |

5. Írjuk fel az alábbi f függvények adott a helyhez tartozó n -edik Taylor-polinomját, és a Lagrange-féle maradéktagot:

- $f(x) := \frac{1+x+x^2}{1-x+x^2} \quad (n=3, a=0),$
- $f(x) := \sqrt{1-2x+x^3} - \sqrt[3]{1-3x+x^2} \quad (n=3, a=0),$
- $f(x) := e^{2x-x^2} \quad (n=5, a=0),$
- $f(x) := \sin(\sin x) \quad (n=3, a=0),$
- $f(x) := \ln \frac{\sin x}{x} \quad (n=6, a=0),$
- $f(x) := \sqrt{x} \quad (n=3, a=1),$
- $f(x) := x^x - 1 \quad (n=3, a=0).$

6. Milyen pontossággal teljesülnek az alábbi közelítő egyenlőségek az adott intervallumban ?

$$a) \quad \sin x \approx x - \frac{x^3}{6} \quad (|x| \leq \frac{1}{2}),$$

$$b) \quad \operatorname{tg} x \approx x + \frac{x^3}{3} \quad (|x| \leq 0.1),$$

$$c) \quad e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} \quad (|x| \leq 0.2),$$

$$d) \quad \sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \quad (0 \leq x \leq 1),$$

$$e) \quad \cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2} \quad (|x| \leq 0.2).$$

7. Igazoljuk, hogy

$$\left| \sqrt[n]{a^n + x} - a - \frac{x}{na^{n-1}} \right| \leq \frac{n-1}{2n^2} \frac{x^2}{a^{2n-1}},$$

ha $n \geq 2$, $a > 0$, $x > 0$.

8. A Taylor-formula felhasználásával határozzuk meg az alábbi számokat adott r pontossággal:

$$\begin{array}{lll} a) \quad e \quad (r = 10^{-9}), & b) \quad \sin 1^\circ \quad (r = 10^{-8}), & c) \quad \cos 9^\circ \quad (r = 10^{-5}), \\ d) \quad \sqrt{5} \quad (r = 10^{-5}), & e) \quad \lg 11 \quad (r = 10^{-5}), & f) \quad \ln 1.2 \quad (r = 10^{-3}). \end{array}$$

9. Határozzuk meg a következő függvények a körüli n -ed fokú Taylor-polinomját és a maradék tagot:

$$\begin{array}{lll} a) \quad f(x) = \frac{1}{x} \quad a = -2, & b) \quad f(x) = \sin^2 x \quad a = \frac{\pi}{2}, & c) \quad f(x) = \frac{1}{1-x} \quad a = 0, \\ d) \quad f(x) = \sqrt{x} \quad a = 0, & e) \quad f(x) = \ln(1+x) \quad a = 0, & f) \quad f(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad a = 0. \end{array}$$

Határozzuk meg mindegyik függvény esetén, hogy hanyadfokú Taylor-polinomja közelíti meg a függvényt 10^{-3} pontossággal az $(a - 1/2, a + 1/2)$ intervallumon, illetve, hogy negyedfokú Taylor-polinomja mekkora intervallumon közelíti meg a függvényt 10^{-2} pontossággal.

10. Bizonyítsuk be a Taylor-formula segítségével az alábbi egyenlőtlenségeket:

$$\begin{array}{ll} a) \quad e^x \leq 1 + x \quad (x \in \mathbb{R}), & b) \quad e^x \leq 1 + x + \frac{x^2}{2} \quad (x \leq 0), \\ c) \quad e^x \leq 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}, \quad (x \in \mathbb{R}), & d) \quad \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} \quad (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}). \end{array}$$

11. A Taylor-formula alkalmazásával határozzuk meg az alábbi határértékeket.

$$\begin{aligned}
 a) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-x^2/2}}{x^4}, \\
 b) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}, \\
 c) \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} x^{3/2} (\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x}), \\
 d) \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} \left((x^3 - x^2 + \frac{x}{2})e^{1/x} - \sqrt{x^6 + 1} \right), \\
 e) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x + a^{-x} - 2}{x^2} \quad (a > 0), \\
 f) \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right), \\
 g) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right), \\
 h) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (\cos x)^{\sin x}}{x^2}.
 \end{aligned}$$

12. Legyen

$$f(x) := \begin{cases} e^{-1/x^2} & (x \in \mathbb{R}, x \neq 0), \\ 0, & (x = 0). \end{cases}$$

i) Teljes indukciót használva igazoljuk, hogy minden n természetes számra

$$f^{(n)}(x) = e^{-1/x^2} P_n \left(\frac{1}{x} \right) \quad (x \in \mathbb{R}, x \neq 0),$$

ahol P_n egy polinom.

ii) Ennek alapján mutassuk meg, hogy $f \in \mathcal{D}^\infty(\mathbb{R})$ és $f^{(n)}(0) = 0$ ($n = 1, 2, \dots$).

13. Igazoljuk, hogy a $H \subseteq \mathbb{R}$ halmaz akkor és csak akkor konvex, ha intervallum.

14. Legyen

$$f(x) := \begin{cases} x^2(2 + \sin 1/x) & (x \in \mathbb{R}, x \neq 0), \\ 0, & (x = 0). \end{cases}$$

Igazoljuk, hogy f lokálisan konvex a 0 pontban, de nem konvex egyetlen 0-át tartalmazó intervallumban sem.

15. Végezzük el az alábbi függvények teljes diszkusszióját:

- | | |
|--|---|
| a) $f(x) := 3x - x^3$, | b) $f(x) := 1 + x^2 - \frac{x^4}{2}$, |
| c) $f(x) := \frac{2 - x^2}{1 + x^4}$, | d) $f(x) := (x + 1)(x - 2)^2$, |
| e) $f(x) := x \ln x$, | f) $f(x) := \frac{x}{(1 + x)(1 - x)^2}$, |
| g) $f(x) := \frac{\ln x}{x}$, | h) $f(x) := \sin^4 x + \cos^4 x$, |
| i) $f(x) := x + e^{-x}$, | j) $f(x) := (1 + x^2)e^{-x^2}$, |
| k) $f(x) := e^{2x - x^2}$, | ℓ) $f(x) := \frac{x^2 - 1}{x^2 - 5x + 6}$, |
| m) $f(x) := 1 - \sqrt{ x^2 - 1 }$, | n) $f(x) := \sin x + \cos^2 x$, |
| o) $f(x) := xe^{-x^2}$, | p) $f(x) := \frac{\sin x}{2 + \cos x}$, |
| q) $f(x) := e^{\sin x}$, | r) $f(x) := \frac{\ln x}{1 + \ln x}$, |
| s) $f(x) := \ln \sin x$, | t) $f(x) := x - \ln(x + 1)$, |
| u) $f(x) := \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1}$, | v) $f(x) := e^{\frac{1}{x}} - x$, |
| w) $f(x) := \sqrt{\frac{x - 1}{x + 1}}$, | x) $f(x) := \frac{x\sqrt{1 - x}}{x + 1}$, |
| y) $f(x) := x - 2\arctg x$, | z) $f(x) := \arcsin(3x - 4x^3)$. |

16. Határozzuk meg azt a legnagyobb területű derékszögű háromszöget, amelynek átfogója c , befogóinak összege a .
17. Adott alkotójú kúpok közül határozzuk meg a maximális térfogatút.
18. Határozzuk meg az adott r sugarú gömbbe beírható maximális felszínű hengert.
19. Adjuk meg az R sugarú gömbbe írható maximális térfogatú henger adatait.
20. Tekintsünk egy v kezdősebességgel ferdén elhajított testet. Határozzuk meg, hogy a vízszinteshez viszonyítva milyen α szög alatt kell elhajítani, hogy a maximális távolságban érje el újból a vízszintet.
21. Egy vasút mellett fekvő A helységről bizonyos áruszállítmányt irányítanak a vasúttól 9 km távolságra levő B helységbe. B -nek a vasútvonalra való vetülete A -tól 30 km-re van. Tudjuk, hogy 1 tonna áru vasúti szállítási költsége α , tehergépkocsival való szállítási költsége pedig β ($\alpha < \beta$). Határozzuk meg a vasútnak azt a pontját, ahonnan a B helységbe vezető egyenes útnak kiindulnia kell ahhoz, hogy a szállítás a lehető legolcsóbb legyen.

22. Valaki egy gyalogút A pontjából egy ettől a , a gyalogúttól b távolságra lévő B pontjába akar a legrövidebb idő alatt eljutni. Mikor térjen le a gyalogútról, ha ott másfélszer olyan gyorsan halad, mint az utat szegélyező terepen?
23. Adott az $y^2 = 2px$ egyenletű parabola, ahol $p > 0$. Határozzuk meg a parabola tengelyére merőleges alapú parabola szeletbe beírható legnagyobb területű téglalapot, ha a parabola szelet alapjának a csúctól mért távolsága h .
24. Mekkora R külső ellenálláson keresztül zárjuk az e elektromotoros erejű és r belső ellenállású galvánelemet, hogy a külső ellenállás folytán keletkező $I^2 R$ Joule-féle energia maximális legyen?
25. Határozzuk meg az r sugarú félgömbbe írható maximális térfogatú négyzet alapú hasábot.
26. Vízszintes síkon álló függőleges falú tartályban m magasságig víz van. A tartály falában a víz szintje alatt x mélységben lukat ütve — a Toricelli-féle törvény alapján — a kiáramló víz sebessége $\sqrt{2gx}$, ahol g a gravitációs állandó. Az x milyen értéke mellett jut el a vízszög a legmesszebbre?
27. Három darab a szélességű deszkalapból készítsünk trapéz keresztmetszetű vályút. Milyen α szög alatt hajoljanak az oldallapok, hogy a vályú keresztmetszete, azaz a trapéz területe, maximális legyen?
28. Osszuk fel a 4-et két részre úgy, hogy az egyik rész négyzetének és a másik rész köbének összege maximális legyen.
29. Legyen $a > 0$ egy adott valós szám és $m, n \in \mathbb{N}$. Ha x és y olyan valós számok, melyekre $x + y = a$, az $x^m \cdot y^n$ szorzat milyen esetben lesz a legnagyobb?
30. Határozzuk meg az adott R alapsugarú, M magasságú kúpba írható
- a) legnagyobb térfogatú,
 - b) legnagyobb palástú hengert.
31. Határozzuk meg az $y^2 = 8x$ parabola azon pontját, amely a $(6, 0)$ ponttól a legkisebb távolságra van.
32. Egy a alapú és m magasságú általános háromszögbe szerkesztünk olyan legnagyobb területű paralelogrammát, melynek egyik oldala a háromszög alapján fekszik. (Hány megoldása van a feladatnak?)
33. Határozzuk meg az r sugarú félgömb köré írt legkisebb térfogatú kúpot!
34. Határozza meg azt a $P: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ polinomfüggvényt, amelyre a következők teljesülnek:
- (i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{x^3} = 3$,
 - (ii) $\forall x \in \mathbb{R}: P(-x) = -P(x)$,
 - (iii) A $Q(\frac{2}{3}, -2)$ pont helyi minimuma a függvénynek.
35. Határozza meg azt a $P: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ polinomfüggvényt, amelyre a következők teljesülnek:
- (i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{x^4} = 1$,
 - (ii) $\forall x \in \mathbb{R}: P(-x) = P(x)$,
 - (iii) A $Q(2, -16)$ pont inflexiós pontja a függvénynek.

36. Határozza meg azt a $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ harmadfokú polinomfüggvényt, melynek a $Q_1(\frac{2}{3}, 2)$ pont helyi minimuma, a $Q_2(-1, \frac{91}{27})$ pont helyi maximuma a függvénynek.
37. Adott az $f(x) = \frac{x^2+2ax+b}{x^2+1}$ ($x \in \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$) függvény. Határozzuk meg az a -t és b -t úgy, hogy $f(1) = 2$, és $f'(2) = 0$ legyen. ábrázoljuk az így kapott függvényt!
38. Adott az $f(x) = \frac{mx-2}{x^2+nx+1}$ ($x \in \mathbb{R}$, $x^2 + nx + 1 \neq 0$, $m, n \in \mathbb{R}$) függvény. Határozzuk meg az m és n paramétereket úgy, hogy az $x = 0$, és $x = 2$ pontokban a függvénynek helyi szélsőértéke legyen!
39. Adott az $f(x) = \alpha x(x-a)(x-b)$ ($x \in \mathbb{R}$, $\alpha, a, b \in \mathbb{R}$) függvény. Határozzuk meg az a -t és b -t úgy, hogy az f függvénynek az $x = \frac{4}{3}$ minimumpontja, az $x = 6$ pedig maximumpontja legyen. Határozzuk meg az α értékét úgy, hogy az f függvény maximuma 6 legyen.
40. Adott az $f(x) = \frac{x^4}{(ax+b)^3}$ ($x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{b}{a}\}$, $\alpha, a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$) függvény. Határozzuk meg az a és b paramétereket úgy, hogy a $2x - 16y - 3 = 0$ egyenletű egyenes ferde aszimptotája legyen a függvénynek.
41. Adott az $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\lambda} + \frac{\lambda}{\sqrt{x+1}}$ ($x > -1$, $\lambda > 0$) függvény. Igazoljuk, hogy a függvénynek van olyan minimumpontja, amely nem függ λ -tól.
42. Igazoljuk, hogy
- $e^x \geq x^e$, bármely $x > 0$ esetén;
 - $x^\alpha |\ln x| \leq \frac{1}{\alpha e}$, ha $0 < x < 1$ és $\alpha > 0$;
 - $e^x \geq 1 + \ln(1+x)$, bármely $x > -1$ esetén;
 - $\frac{\ln x}{x-1} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$, minden $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ esetén.