

JANUS PANNONIUS TUDOMÁNYEGYETEM

Eisner Tímea

Bevezetés az analízisbe II.

Határérték, folytonosság, differenciálhatóság

Pécs, 2005

Lektor:

DR. PAP MARGIT

egyetemi adjunktus, PhD

Előszó

Ez a jegyzet egy több kötetes sorozat része. A sorozat — szándékaink szerint — a matematikának a tanárképzés és a programozó matematikus képzés szempontjából legfontosabb fejezeteit dolgozza fel, figyelembe véve a tanárképző intézmények tanterveit. Ebben a jegyzetben a sorozat *Bevezetés az analízisbe I.* mellett *Matematikai alapok* című kötére támaszkodunk, amely a halmazelméleti logikai, valamint függvénytani alapokat tartalmazza.

Minden fejezethez egy feladatsor kapcsolódik, amely a gyakorlás mellett az anyag mélyebb elsajátítását is elősegítheti.

TARTALOM

Előszó	i.
1. Függvények	
1.1. Néhány nevezetes függvény	1
1.2. Polinomok és racionális függvények	3
1.3. Feladatok	7
2. Függvények határértéke	
2.1. Számhalmaz torlódási pontja	9
2.2. Függvények határértéke	11
2.3. Átviteli elv	17
2.4. Műveletek határértékekkel	19
2.5. Nevezetes határértékek	22
2.5.1. Polinomok határértéke	22
2.5.2. Racionális függvények határértéke	23
2.5.3. Gyökfüggvények határértéke	24
2.5.4. Trigonometrikus függvények határértéke	25
2.5.5. A $\frac{\sin x}{x}$ ($x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) függvény határértéke	29
2.5.6. Exponenciális függvény határértéke	30
2.5.7. Az $(1 + \frac{1}{x})^x$ ($x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) függvény határértéke	37
2.5.8. Hiperbolikus függvények határértéke	38
2.6. Feladatok	40
3. Folytonosság	
3.1. Függvények folytonossága	44
3.2. Műveletek folytonos függvényekkel	47
3.3. Folytonos függvények tulajdonságai	49
3.3.1. Weierstrass tétele	49
3.3.2. Egyenletes folytonosság	52
3.3.3. Az inverz függvény folytonossága	55
3.3.4. Bolzano tétele	57
3.4. Exponenciális- és logaritmushatványfüggvények	59
3.5. Irracionális kitevőjű hatványfüggvények	62
3.6. A trigonometrikus függvények inverze	62

3.7. A hiperbolikus függvények inverze	66
3.8. Feladatok	69
4. Differenciálható függvények	
4.1. A derivált értelmezése	74
4.1.1. Differenciálási szabályok.	81
4.1.2. A közvetett függvény deriváltja	84
4.1.3. Az inverz függvény deriváltja	86
4.2. Lokális szélsőérték	90
4.3. A differenciálszámítás középértéktételei	93
4.4. Feladatok	98
5. A differenciálszámítás néhány alkalmazása	
5.1. L'Hospital szabály	105
5.2. Többször differenciálható függvények	111
5.3. Taylor formula	113
5.4. Konvex és konkáv függvények	117
5.5. Feladatok	135

Jelölések

\mathbb{N}	a természetes számok halmaza
\mathbb{Z}	az egész számok halmaza
\mathbb{Q}	a racionális számok halmaza
\mathbb{R}	a valós számok halmaza
\mathbb{C}	a komplex számok halmaza
\mathbb{K}	a valós vagy a komplex számok halmaza
$K_r(a)$	az $a \in \overline{\mathbb{K}}$ pont $r > 0$ sugarú környezete
\mathcal{P}_n	az n -edfokú polinomok halmaza
\mathcal{P}	a polinomok halmaza
$\mathcal{F}(H, K)$	az $f : H \rightarrow K$ típusú függvények halmaza
$\mathcal{C}(H, K)$	a $\mathcal{F}(H, K)$ -beli folytonos függvények halmaza
$L_a(f), \lim_{x \rightarrow a} f(x)$	az f függvény a pontbeli határértéke
$L_{a+}(f), \lim_{x \rightarrow a+} f(x)$	az f függvény a pontbeli jobb oldali határértéke
$L_{a-}(f), \lim_{x \rightarrow a-} f(x)$	az f függvény a pontbeli bal oldali határértéke
$\Delta_a(f)$	az f függvény a pontbeli differenciahányadosa
$f'(a), \frac{df}{dx}(a)$	az f függvény a pontbeli deriváltja
$f^{(n)}(a), \frac{d^n f}{dx^n}(a)$	az f függvény a pontbeli n -edik deriváltja
$\mathcal{D}(H, K)$	az $\mathcal{F}(H, K)$ -beli differenciálható függvények halmaza
$\mathcal{D}^n(H, K)$	az n -szer differenciálható függvények halmaza
$\mathcal{C}^n(H, K)$	az n -szer folytonosan differenciálható függvények halmaza

Irodalomjegyzék

Felhasznált irodalom

- [1] *N. Dinculeanu — E. Radu — Balázs M.* A matematikai analízis elemei tankönyv. Editura didactica si pedagogica – Bucuresti, 1978
- [2] *Leindler L.* Analízis kézirat. Tankönyvkiadó, Budapest, 1987
- [3] *Németh J.* Analízis I. példatár JATE PRESS Szeged, 1993
- [4] *Schipp F.* Analízis II. egyetemi tankönyv University Press Pécs 1996
- [5] *T. Stoica — O. Stanasila — Gh. Gussi — Kovács-Pálfi* Matematika XI. tankönyv. Editura didactica si pedagogica – Bucuresti, 1990
- [6] *Tóth L. — Tóth L.* Feladatgyűjtemény, Zsotmar Press Kft, Szatmárnémeti, 1993

Javasolt Irodalom

- 1. *Leindler L. – Schipp F.* Analízis I. Egységes jegyzet. Tankönyvkiadó, Budapest, 1976
- 2. *Pál J. – Schipp F. – Simon P.* Analízis II. Tankönyvkiadó, Budapest, 1976
- 3. *Rudin W.* A matematikai analízis alapjai. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1978.
- 4. *Szőkefalvi-Nagy B.* Valós függvények és függvénysorok. Egyetemi tankönyv, 3. kiadás, Budapest, 1965
- 5. *Szőkefalvi-Nagy B.* Komplex függvénytan. Egységes jegyzet, Tankönyvkiadó, Budapest, 19xx