Kalkulus 1 / I. ZH. A csoport (számítástechnika)

1, a, Adott $a \in \mathbb{R}$ esetén az $|x-a|$ geometriai jelentése

b, Oldja meg a valós számok halmazán: $|x-3|<1$!

c, Oldja meg a valós számok halmazán: $\frac{x+5}{x-3} \geq 0$

2, a, Az arcsin függvény

b, $A = \{a, b\}$ $B = \{1, 2, 3\}$ $A \times B = ?$

A Descartes-szorzat definíciója ...

3, a, Határozzuk meg az alábbi sorozatok alsó és felső határát, valamint a legkisebb és legnagyobb elemét (minimumát és maximumát) amennyiben felveszi azokat! $\left(a_n = \frac{2n-1}{n}, n \in \mathbb{N}\right)$; $\left(b_n = -\frac{1}{n} + n, n \in \mathbb{N}\right)$

b, Vizsgáljuk az alábbi sorozat monotonitását és korlátosságát! $\left(a_n = \frac{2n+4}{3n}, n \in \mathbb{N}\right)$

c, A határérték ε-os értelmezését felhasználva bizonyítsuk be, hogy $\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{3n+1} = \frac{2}{3}$!

4, Határozzuk meg az alábbi sorozatok határértékét!

a, $\left(a_n = \frac{1+2+\ldots+n}{7n^2}, n \in \mathbb{N}\right)$

f, $\left(a_n = \left(\frac{2n+1}{2n-3}\right)^{5n}, n \in \mathbb{N}\right)$

b, $\left(a_n = \frac{5 \cdot 3^n + 7^n}{2 \cdot 7^n + 2^n}, n \in \mathbb{N}\right)$

c, $\left(a_n = \sqrt{\frac{2n^2+1}{8n^2+3}}, n \in \mathbb{N}\right)$

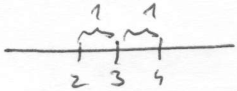
d, $\left(a_n = \sqrt{n^2+2n+3} - n, n \in \mathbb{N}\right)$

e, $\left(a_n = \sqrt[7n]{2n+3}, n \in \mathbb{N}\right)$

Kalkulus 1. / I zh   A csoport (szám. techn.)

1/a, (1p) $|x-a|$ geom. jel: x-nek az a-tól való távolsága

b, $|x-3| < 1$



(1p) $x \in \underline{(2,4)}$

c, $\dfrac{x+5}{x-3} \geq 0$

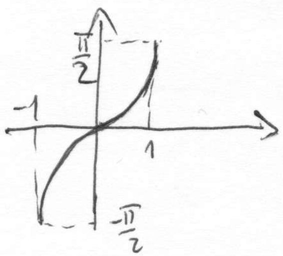
	$-\infty$	-5		3	$+\infty$	
$x+5$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$x-3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	1
$\frac{x+5}{x-3}$	$+$	0	$-$	|	$+$	

(2p)

$x \in (-\infty, -5] \cup (3, +\infty)$ 1

2 a, (3p) Az $f: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$, $f(x) = \sin x$ fv. inverze az $\tilde{f}: [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ $\hat{f}(x) = \arcsin(x)$ fv. 1

1 azt a $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ zárt intervallumba eső szöget jelenti az $\underline{\arcsin x}$, amelynek sinusa x-szel egyenlő



É.T. $[-1,1]$

1 { szig. mon. nővő.
zérushely $x=0$
páratlan $\arcsin(-x) = \arcsin x$ }

Értékkészlet: $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

{ alsó korlát: $k = -\frac{\pi}{2}$
felső -||- $K = \frac{\pi}{2}$ }

b, $A = \{a, b\}$
$B = \{1, 2, 3\}$
(2p)

$A \times B = \{(a,1), (a,2), (a,3), (b,1), (b,2), (b,3)\}$ 1

$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$ 1

/9

3, a, $\left(a_n = \frac{2n-1}{n}, n \in \mathbb{N}\right)$ $\quad$ $\Sigma: 32p$

1 felső határa: $2 = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$
maximuma nincs

1 alsó határa: $\inf_{n\in\mathbb{N}} a_n = \frac{1}{1} = 1$
$\min_{n\in\mathbb{N}} a_n = 1$

2p

$\left(b_n = -\frac{1}{n} + n, n \in \mathbb{N}\right)$

1 $\min b_n = \inf b_n = 0$

1 $\nexists \max b_n$, $\sup_{n\in\mathbb{N}} b_n = +\infty$

b, $\left(a_n = \frac{2n+4}{3n}, n \in \mathbb{N}\right)$

→ monotonitás: $a_{n+1} - a_n = \frac{2n+6}{3(n+1)} - \frac{2n+4}{3n} = \frac{\cancel{2n^2} + \cancel{6n} - (\cancel{2n^2} + \cancel{6n} + 4)}{3n(n+1)} =$ $\quad (2n+4)(n+1)$

2p $= -\frac{4}{3n(n+1)} < 0 \Rightarrow$ A sorozat szig. mon. csökkenő.

→ korlátosság:
csökkenő $\Rightarrow$ $a_1 = \frac{6}{3} = 2$ felső korlát ✓
$k = \frac{2}{3}$ alsó korlát: $\frac{2}{3} < \frac{2n+4}{3n}$ $\quad | \cdot 3n > 0$

2p $\quad 2n < 2n+4$
$0 < 4$ ✓

$\Rightarrow$ A sorozat korlátos. ✓

c, $\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{3n+1} = \frac{2}{3}$

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Keresendő olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $\forall n \geq N$ esetén $\left|\frac{2n}{3n+1} - \frac{2}{3}\right| < \varepsilon$ ✓

2p $\left|\frac{6n - 6n - 2}{3(3n+1)}\right| < \varepsilon$

$\frac{2}{3(3n+1)} < \varepsilon$

8 $\quad 3n+1 > \frac{2}{3\varepsilon}$ $\quad n > \frac{\frac{2}{3\varepsilon} - 1}{3}$ $\quad N := \left[\frac{\frac{2}{3\varepsilon} - 1}{3}\right] + 1$ ✓

A csoport

4,

a, (2p)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+\ldots+n}{7n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{14n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{14n^2} = \frac{1}{14}.$$

b, (2p)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5\cdot 3^n + 7^n}{2\cdot 7^n + 2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{7^n}\cdot\left(5\cdot\left(\frac{3}{7}\right)^n + 1\right)}{\cancel{7^n}\cdot\left(2+\left(\frac{2}{7}\right)^n\right)} = \frac{1}{2}.$$

c, (2p)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{2n^2+1}{8n^2+3}} = \sqrt{\frac{2}{8}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

d, (3p)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n+3} - n\right) \overset{\text{"}\infty-\infty\text{"}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}+2n+3-\cancel{n^2}}{\sqrt{n^2+2n+3}+\sqrt{n^2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}\cdot\left(2+\frac{3}{n}\right)}{\cancel{n}\cdot\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}+1\right)} = \frac{2}{2} = 1$$

e, (3p)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[7n]{2n+3} = 1$$

$$1 < \sqrt[7n]{2n+3\cdot 1} \leq \sqrt[7n]{2n+3n} = \sqrt[7n]{5n} < \sqrt[n]{5}\cdot\sqrt[n]{n}$$

$$\sqrt[n]{5} \to 1, \quad \sqrt[n]{n} \to 1$$

Rendőrelv... $\Leftarrow$ 1 1

f, (3p)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{2n-3}\right)^{5n} \overset{\text{"}1^\infty\text{"}}{=} \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{2n-3}{4}}\right)^{\frac{2n-3}{4}}\right]^{\frac{5n\cdot 4}{2n-3}} = e^{10}.$$

$$\frac{2n+1}{2n-3} = \frac{2n-3+4}{2n-3} = 1+\frac{1}{\frac{2n-3}{4}}$$

15