

Dg $f(x)$ x_0 -ben lokálisan növekvő vagy x_0 -ben lokálisan csökkenő akkor és csak akkor ha
 bármely $x < x_0$ esetén $f(x) < f(x_0)$ és $x > x_0$ esetén $f(x) > f(x_0)$

Szerűen leírható...

3. Tétel Ha $f(x)$ x_0 helyen egyértelműen deriválható $f'(x_0) > 0$ ($f'(x_0) < 0$) akkor
 $f(x)$ x_0 -ban helyi minimum (maximum) alakul át. (szigorúan véve átl.)

Biz *9

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

0-ban is derékszögűen

x_0 -ben f helyi szélső értéke van akkor és csak akkor ha f deriválható és $f'(x_0) = 0$

4. Tétel

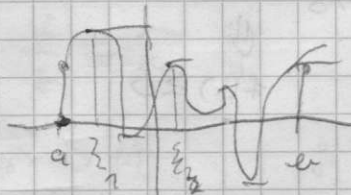
Ha f x_0 -ban helyi szélső értéke van és f differenciálható akkor
 $f'(x_0) = 0$

↓
 szélső érték levezetés szükséges feltétele de elegendő nem.

Közvetlen tétel

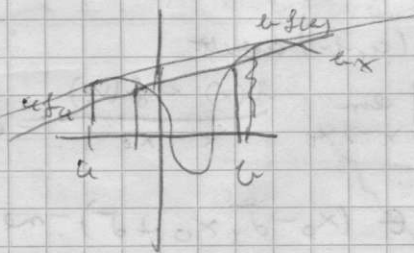
5. Tétel Rolle-tétel

Ha $f(x)$ $[a, b]$ -n folytonos (a, b) -ben differenciálható és $f(a) = f(b)$ akkor
 $\exists \xi \in (a, b)$ úgy $f'(\xi) = 0$



6. Tétel Lagrange-tétel

Ha $f(x)$ $[a, b]$ -n folytonos (a, b) -ben differenciálható akkor $\exists \xi \in (a, b)$ úgy $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$



24. sz. 9. sz.

Ma Bentons eller trivi

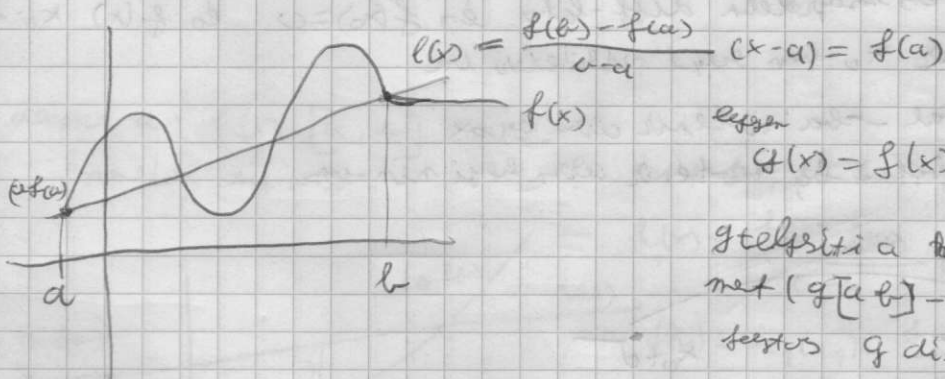
g ~~liegt~~ ^(neutrum) $az [a b] \Rightarrow g$ ~~ist~~ ^{ist} ~~selbst~~ ^{reel} ~~konstant~~

Ergebnis ist $\frac{1}{2}$ (nicht $\frac{1}{3}$)

↳ - en differenciati
 $f'(9) = 0$

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$(y - y_0 = m |x - x_0|)$$



$$g(x) = f(x) - e(x)$$

met $(g[a,b])$ - cu fegestas 2 fegestas fegestas
fegestas g de fegestas

$$g(a) = f(a) - l(a) = f(a) - f(a) = 0$$

$$g(b) = f(b) - l(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (b - a)$$

$\Rightarrow \exists \xi \in (a, b), \text{ s.t. } f'(\xi) = 0 = f'(\xi) - e'(\xi)$

$$0 = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Rightarrow f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

7: Ha az $f(a, b)$ -an differenciálható és

$f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) $\forall x \in (a, b)$ -re akkor az f fer. (a, b) szigorúan nö. (szigorúan cs.)

Biz

1, $f'(x) > 0$ (a, b)-an legyen $x_1, x_2 \in (a, b)$ tetszőleges! $x_1 \neq x_2$

Alk. Lagrange t-t $[x_1, x_2]$ -re! (Számitkodik a feltétel)

$$\exists \xi \in (x_1, x_2), \text{ hogy } \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi) > 0$$

$$\Rightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0 \quad \forall x_1, x_2 \in (a, b) \text{ -re } x_1 \neq x_2$$

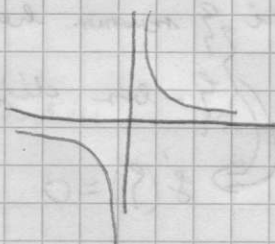
(dióhéj)

$\Rightarrow f$ szigorúan nö.

4. $f(x) = \frac{1}{x} \quad f' = -\frac{1}{x^2} < 0 \quad x \neq 0$

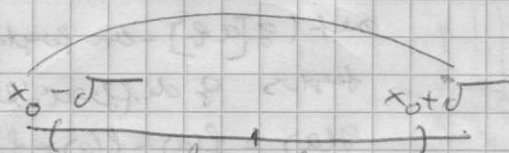
$\forall x \neq 0$

és az $\frac{1}{x}$ nem monoton



8, Ha az f az x_0 -ban és környezetében diff-ható és $f'(x_0) = 0$ és $f'(x)$ x_0 -ban előjelet vált akkor f -nek x_0 -ban helyi szélsőérték van
 Ha az előzőektől, f -ből -ba +tátnál akkor helyi max
 - -ba +ba tátnál akkor helyi min-van

Biz rak-ra



$f' > 0 \quad x_0 - \delta < x < x_0 \xrightarrow{f'}$ f szigorúan nö.
 $(x_0 - \delta, x_0)$ -an

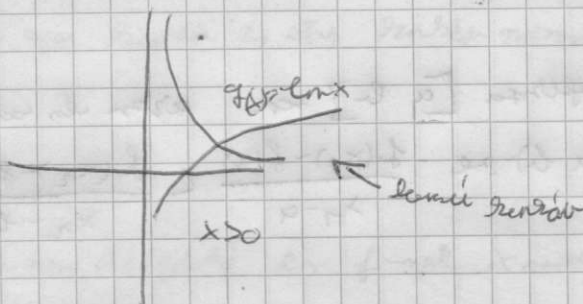
$f' < 0 \quad x_0 < x < x_0 + \delta \xrightarrow{f'}$ f szigorúan csorr

f diff-ható f az x_0 -ban folytonos
 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

$\Rightarrow (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ -an
 $f(x_0)$ a legnagyobb
 és a legkisebb
 $f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

oder ist f -nur x_0 -ben netto' lokale von.

	bei $f''(x_0) > 0$ dann liegt min
f'	bei $f''(x_0) < 0$ dann liegt max

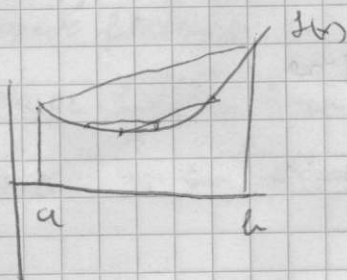


$$g'(x) = \frac{1}{x} > 0$$

$$g''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$$

serine 40

2. derivatata reves fap
2. derivatata ≥ 0



Frank der Bräutigam
nicht recht zu der Braut
in der Nacht
hier

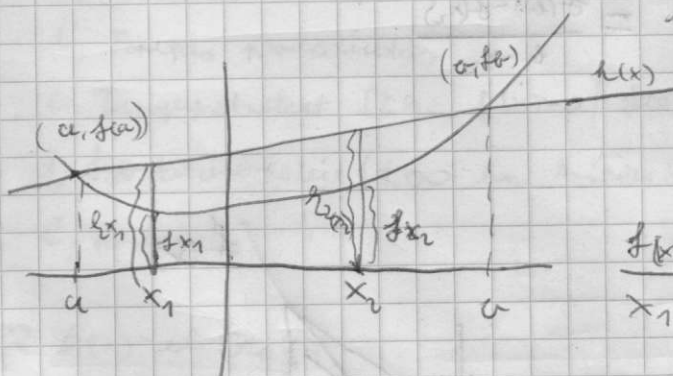
Suravil Selett

Definieren wir $f(x)$ $[a, b]$ genau!
(monoton, def. durch)

input sel. (a fca) (v fca) naton d'ne' eses geshot

$$h_1(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} (x - a) + f(a)$$

$$f(x_1) < h_1(x_1) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a} (x_1 - a) + f(a)$$



$$\frac{f(x_1) - f(a)}{x_1 - a} < \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (\times)$$

$$h_2(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) + f(a)$$

$$(x_0, y_0) \text{ adalah titik}$$

$$f(x_2) \approx L_2(x_2) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x_2 - a) + f(a)$$

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} < \frac{f(x_2) - f(b)}{x_2 - b} \quad (\otimes)_2$$

(*) és (**) - ből

$$\frac{f(x_1) - f(a)}{x_1 - a} < \frac{f(x_2) - f(b)}{x_2 - b} \quad \forall x_1, x_2 \in (a, b) \text{ -re}$$

monoton növekvő

1. tétel:

$f(x)$ folytonos grafikonja $[a, b]$ -en akkor és csak akkor szigorúan (szigorúan) lecsökkenő, ha

$$\forall x_1, x_2 \in (a, b) \text{ -re } \frac{f(x_1) - f(a)}{x_1 - a} < \frac{f(x_2) - f(b)}{x_2 - b} \quad \left(\frac{f(x_1) - f(a)}{x_1 - a} > \frac{f(x_2) - f(b)}{x_2 - b} \right)$$

Bizonyítás

2. tétel

Ha az f 2-szer differenciálható az $[a, b]$ -en szigorúan (szigorúan) konvex (konvex) akkor $f''(x) \geq 0$ ($f''(x) \leq 0$) $\forall x \in (a, b)$ -re

Bizonyítás

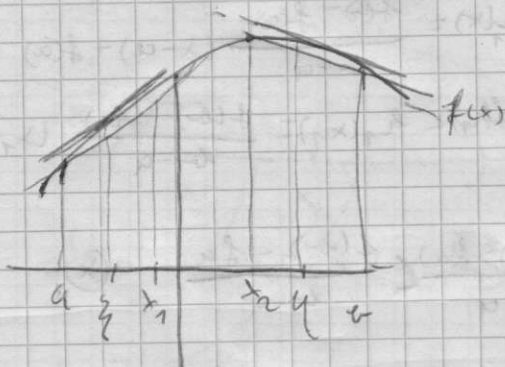
f $[a, b]$ -en kétszer differenciálható és $f''(x) > 0 \quad \forall x \in [a, b]$ -re

$$a < x_1 < x_2 < b \quad x_1, x_2 \in (a, b)$$

Alkalmazunk a $[a, x_1]$ és $[x_2, b]$ -re

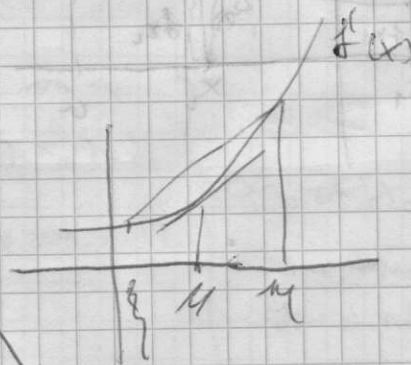
$$\exists \xi \in (a, x_1) \text{ hogy } f'(\xi) = \frac{f(x_1) - f(a)}{x_1 - a}$$

$$\exists \eta \in (x_2, b) \text{ hogy } f'(\eta) = \frac{f(b) - f(x_2)}{b - x_2}$$



Alkalmazunk $f'(x)$ -re $[\xi, \eta]$ -en

$$\exists \mu \in (\xi, \eta) \text{ hogy } f''(\mu) = \frac{f'(\eta) - f'(\xi)}{\eta - \xi} > 0$$



$$\eta - \xi > 0 \implies f'(\eta) > f'(\xi)$$

$$\frac{f(b) - f(x_2)}{b - x_2} > \frac{f(x_1) - f(a)}{x_1 - a}$$

$\forall x_1, x_2$ -re

3. T ha $0 \in f$ az $[a, b]$ -en 2-szer differenciálható $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$) akkor f az $[a, b]$ -en szigorúan konvex (konkáv).

ingadozó állás

az a pont melyen $0 \in f$ függvény egy szigorúan konvex és egy szigorúan konkáv között van az inflexiós pont.

4. T a pont létezéséről vizsgáljuk

Ha $0 \in f$ x_0 helyen és 0 környezetében 2-szer differenciálható és f -nél x nem inflexiós pont akkor azaz $f''(x_0) \neq 0$ (akkor lehet pont az az 0 helyen 2-szer differenciálható) mindegyik nem igaz.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 \\ f'(x) &= 4x^3 \\ f''(x) &= 12x^2 \\ x_0 &= 0 \quad x_0' = 0 \end{aligned}$$

5. elrendelt feltétel

Ha $0 \in f$ x_0 helyen és 0 környezetében 2-szer differenciálható és $f''(x_0) = 0$ és $f''(x)$ x_0 -ben előjelet vált. akkor f -nél x_0 -ban inflexiós pont van.

Teljes függvény vizsgálati elrendelt lépése

1. $f(x)$ -ről

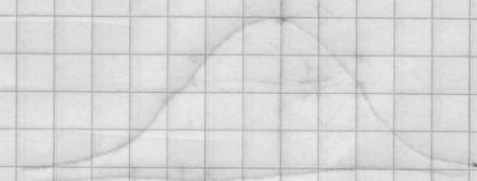
- BT, monotonitás vizsgálata
- Pontok periodicitása
- Tengelymetszetek (pl. $f(x) = 0$ / $f(0)$)
- Asimptoták ($\pm\infty$ -ben határérték)
- Ábrarajz

2. $f'(x)$ -el (BT)

- f lehetséges szélsőérték pontok ($f'(x) = 0$)
- f lehetséges inflexiós pontok vizsgálat

3. $f''(x)$ -el (BT)

- f lehetséges inflexiós pontok ($f''(x) = 0$)
- f lehetséges extrémumok és inflexiós pontok.



4. 2, 1, 2, 3 infordult a legkisebb értéket adja.

5. f EK és konkáv

Re

1. $f(x) = e^{-x^2}$

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$f(-x) = e^{-(x)^2} = e^{-x^2} = f(x)$
Páros

2. $f(0) = 1$

$f(0) = e^{-0^2} = 1$

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{e^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^{x^2} = 0$

folytonos $\forall x \in \mathbb{R}$ -re

2. $f'(x) = e^{-x^2} \cdot (-2x) \quad x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ lokális maximum

	$x < 0$	$x = 0$	$x > 0$
f'	+	0	-
f	↗	max	↘

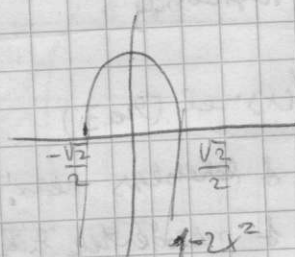
$f(0) = 1$

↑ helyen van a
↘ -1 - helyen

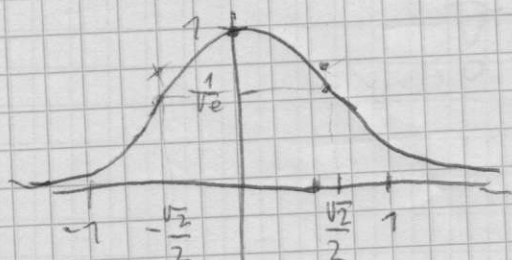
3. $f''(x) = 2[e^{-x^2} \cdot (-2x) \cdot x + e^{-x^2}] = 2e^{-x^2}(1 - 2x^2) \quad x \in \mathbb{R}$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ lokális inflexió

	$x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2} < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$	$x = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$x > \frac{\sqrt{2}}{2}$
$f''(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	konvex	inflexió	konkáv	inflexió	konvex



4



5. EK:

$0 < f(x) \leq 1$ monoton

$$① f(x) = \sqrt[3]{(x+1)^2}$$

BT $x \in \mathbb{R}$

Prüfung —

$$Zg. x = -1$$

$$f(0) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt[3]{(x+1)^2} = \infty$$

Skizze

$$2 f'(x) = \frac{2}{3}(x+1)^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x+1}} \quad x \neq -1$$

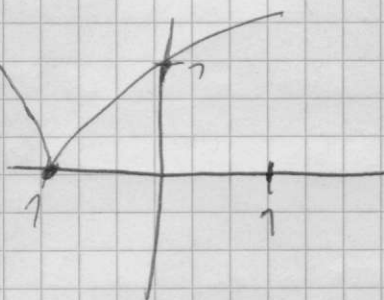
$$f'(x) = 0 \text{ nie möglich} \Rightarrow \text{nie localer Extremum}$$

	$x < -1$	$x > -1$	$x = -1$
f'	-	+	Vertikale Asymptote
f	\searrow	\nearrow	

$$f'' = \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot (x+1)^{-\frac{4}{3}} = -\frac{2}{9\sqrt[3]{(x+1)^4}} \quad x \neq -1$$

$$f''(x) = 0 \text{ nie möglich} \Rightarrow \text{nie Wendepunkt}$$

	$x < -1$	$x = -1$	$x > -1$
f''	-	Vertikale Asymptote	-
f	\cap		\cap



$$EK: f(x) \geq 0 \quad \text{außerhalb des Definitionsbereichs}$$