

MŰSZAKI FŐISKOLAI MATEMATIKA ANYAG
ELSAJÁTÍTÁSÁHOZ SZÜKSÉGES ALAPISMERETEK

összeállították a
JLTE PMMFK Matematika Tanszék oktatói

Kedves Hallgatóink!

Amint a hivatalos közlésből értesült, Ünt a JPTE PMMK elsőéves hallgatójaként örömmel köszönhetjük. Sikeres főiskolai tanulmányokat kívánunk.

Sajnos nagyon sok hallgató szereplése alapján azonban tudjuk, hogy a jelenleg örömteli érzés gyakran keserűségbe csap át, többek között a matematikai előképzettség hiányosságai miatt. Szeretnénk elérni, hogy ez ne így legyen!

A jelen levélben elküldött tematikával, a gyakorlásra kijelölt feladatok, valamint feladatsorok közlésével az a célunk, hogy a főiskolánkon való továbbtanulás szempontjából, a középiskolában megismert matematikai fogalmak, összefüggések, műveleti eljárások terén szilárd ismeretekkel kezdje el tanulmányait.

Az itt szereplő tematika (nevezzük bázisanyagnak) a középiskolai matematikai ismeretek azon részeit tartalmazza, amelyre a főiskolai matematika anyag épül, amelyek biztos ismerete szükséges feltétele a főiskolai tanulmányok sikerének. Ezért azt tanácsoljuk, hogy a **bázisanyag** témaköreinek **fogalmait**, **jelöléseit**, **tételeit**, **azonosságait** frissítse fel oly mértékben, hogy szilárd, biztos ismerete legyen! Ügyeljen arra, hogy egy tétel mindig két részből áll; feltételekből és állításból!

A bázisanyagban a tematikus részletezés után gyakorlásra kijelölt feladatokat is válogattunk az Ön által a középiskolában használt feladatgyűjteményekből. Javasoljuk, hogy az elmélet felfrissítése után ezek közül a feladatok közül minél többet oldjon meg! A feladatmegoldás során fektessen súlyt a taglalási készség kialakítására, ha eddig erre nem ügyelt eléggé! Ez azt jelenti, hogy például függvényekkel kapcsolatos feladatok vagy egyenletek megoldása során mindig gondoljon az értelmezési tartományra, az alkalmazott azonosságok érvényességi körére, az egyes lépések indoklására! Ennek a szemléletmódnak a kialakulása a főiskolai tanulmányok során is nagyon fontos lesz.

Tájékoztatásul közöljük, hogy az első félév első hetében szeretnénk meggyőződni arról, hogy tanácsainkat komolyan vette-e. Ezen a héten még olyan lehetőséget is biztosítunk, hogy a bázisanyag nehezebbnek tűnő részeit közösen tisztázzuk, és a feladatmegoldáskor esetleg felmerülő problémáit közösen megoldjuk.

I. Algebrai kifejezések és egyenletek

- Hatvány fogalma (a^n), a hatványozás azonosságai. Nevezetes szorzatok: $(a+b)(a-b)$, $(a+b)^2$, $(a+b)^3$, $a^n \cdot b^n$.
Műveletek racionális egész- és törtkifejezésekkel.
- Négyzetgyök fogalma, azonosságok a négyzetgyökös kifejezések körében.
- A hatványfogalom általánosítása (a^{-n} , a^q , a^0), műveletek nulla-, negatív-, törtkitevőjű hatványokkal, gyökös kifejezésekkel, gyökteleltetés.
- Abszolút érték fogalma.
- Hatványfüggvények.
- Egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek megoldása:
 - elsőfokú-, másodfokú egyenletek megoldása (a másodfokú egyenlet gyöktényező-s alakja, diszkrimináns, gyökök és együttthatók közötti összefüggés);
 - irracionális (gyökös) egyenletek megoldása;
 - egyenletek ekvivalenciája; gyökvesztés, hamis gyök;
 - abszolút értékű egyenletek;
 - törtes- és másodfokú egyenlőtlenségek;
 - kétismeretlenes elsőfokú egyenletrendszerek;
 - egyszerűbb másodfokú kétismeretlenes egyenletrendszerek.

Gyakorló feladatok:

Matematikai feladatgyűjtemény

I. kötet:

- III. 36, 38, 40, 43, 48, 54, 56, 61, 63, 65, 67, 71.
103, 108, 110, 117, 118, 122, 131, 132, 143, 157, 170, 177,
185, 187, 207, 208, 237, 239.
- IV. 66, 68, 73, 75, 80, 82, 85, 87, 194, 226, 227, 228, 229, 339,
341, 346, 356, 368, 373, 381, 382, 385, 386, 404, 408, 414,
419, 426, 475, 523, 526, 528, 540, 543, 545, 546, 553, 556,
557, 640, 669, 673, 710, 717, 718, 720, 734, 737, 738, 786, 787,
871, 873, 880, 900.
- V. 16, 23, 32, 73, 77, 206, 217, 281, 286, 395.

II. Exponenciális és logaritmus függvények, egyenletek

- Exponenciális függvények (a^x ha $0 < a < 1$, $a = 1$, $a > 1$)
- Egyszerűbb exponenciális egyenletek, egyenlőtlenségek
- A logaritmus fogalma ($\log_a b$)
 - a logaritmus azonosságai (szorzat, hányados, hatvány logaritmusai; áttérés más alapú logaritmusra)
 - számok logaritmusának meghatározása; számolás logaritmussal.
- A logaritmus függvények ($\log_a x$ ha $0 < a < 1$, $a > 1$)
- Egyszerűbb logaritmusos egyenletek, egyenlőtlenségek

Gyakorló feladatok:

Matematikai feladatgyűjtemény

II. kötet

I. 244, 256, 259

I. kötet

III. 241/d, e 242/c, d 243/a, d, e 244/a, b 245/b, c 246/a, d
247/a, d 249/a, e, i, j

IV. 1070, 1071, 1078, 1083, 1113, 1120, 1121, 1124, 1127, 1129,
1145, 1147, 1155, 1159, 1161, 1181, 1184, 1224, 1226, 1239,
1240, 1245, 1246.

III. Vektorok. Koordináta-geometria

Vektorok:

- a vektor fogalma; vektorok egyenlősége; egységvektor, helyvektor fogalma; vektor abszolútértéke
- vektorokkal végzett műveletek (összeg, különbség, számszoros, skaláris szorzat) és ezek tulajdonságai
- Vektorok egyértelmű felbontása, a vektor koordinátái; számolás koordinátáival adott vektorokkal.

Koordináta-geometria:

- az egyenes irányvektora, normálvektora, iránytangens; egyenes egyenletének felírása különböző adatokból (pont és normálvektor, két pont, pont és irányszög); az egyenesre jellemző adatok megállapítása az egyenes egyenletéből; egyenesek párhuzamosságának és merőlegességének feltétele
- kör egyenlete
- parabola egyenlete

Gyakorló feladatok:

Geometria feladatgyűjtemény I.

3028. a.) g.) h.)	3165. 3171.	3219. b.)
3066. c.)	3166. 3173.	3220.
3104.	3168. 3217. a.)	
3130. a.) b.)	3169.	

Geometria feladatgyűjtemény II.

556. b.)	599. b.)	641. d.)	1118. a.)
557. d.)	606. c.)	676. a.)	1160.
559. d.)	623.	693.	
566. a.)	634. b.)	800. a.)	
570. b.)	635. a.)	801. f.)	
572. c.)	636. j.)	825. f.)	
597.	638. a.) h.)		

IV. Trigonometria

Forgásszögek sinusának, cosinusának, tangensének, cotangensének értelmezése (szög ívmértéke); trigonometrikus függvények

- trigonometrikus függvények tulajdonságai; függvénytranszformáció

- nevezetes szögek szögfüggvényei (30° , 45° , 60°)

határszögek szögfüggvényei (0° , 90° , 180° , 270° , 360°)

- szögfüggvények közti kapcsolatok:

- pótszögek szögfüggvényei; pitagoraszí azonosság;

$(-\alpha)$ szögfüggvényei; összegezési képlet

- $\sin(\alpha \pm \beta)$, $\cos(\alpha \pm \beta)$ -; kétszeres szögek szögfüggvényei

- $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$;

Trigonometrikus egyenletek megoldása

Gyakorló feladatok:

Geometriai feladatgyűjtemény II.

25. a.)b.)c.)d.) első és negyedik oszlop

28. a.)e.)i.)

29. c.)g.)

74.

405. a.)d.)

502. f.)l.)

81.

407. b.)

503. b.)g.)

254.

425. c.)h.)

505. a.)b.)g.)h.)

266.

486. f.)p.)n.)

507. b.)

299.

499. c.) j.)

511. a.)h.)

307.

500. a.)e.)

401.

V. Függvények

- A függvény fogalma, leírásának módjai; ábrázolása derékszögű koordináta-rendszerben

- A függvény jellemzéséhez használt fogalmak:

értelmezési tartomány, értékészlet, egyértelmű leképezés, kölcsönösen egyértelmű leképezés, monoton növekedés, fogyás, párosság és páratlanság (képi vonatkozásai is), szélsőérték és szélsőérték-hely, periodicitás, zérushely, korlátosság

- inverz függvény fogalma (képi vonatkozás is)

- egyszerűbb elemi függvények (valós-valós) értelmezése, grafikonja és tulajdonságai:

konstans függvény

abszolútérték függvény

hatványfüggvények (x , x^2 , x^3 , $x^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt{x}$)

exponenciális függvények (a^x , ha $0 < a < 1$, $a=1$, $a > 1$)

logaritmusos függvények ($\log_a x$, ha $0 < a < 1$, $a > 1$)

trigonometrikus függvények ($\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$)

- függvénytranszformáció

Gyakorló feladatok

Matematikai feladatgyűjtemény

II. kötet

- I. 116/a,b 118/b,d 120/b,d 121/b,c 129/a,b
132/b,c 134/b,c,d,h 137/a,c 139/a,c
140/a,b 146/a,f,h 147., 193., 197/a
272/b. 275/b,d 276/b,c...

Geometria feladatok gyűjteménye II.

486. a, b, d, r, 487. a, b, e, f.

VI. Geometria; halmazelmélet; sorozatok

Geometria:

- síkidomok területe (háromszög, paralelogramma területe két oldalból és a közbezárt szögből; téglalap, trapéz területe; szabályos sokszög területe)
- testek felszíne és térfogata (hasáb, henger, gúla, kúp, gömb)
- Pitagorasz-tétel; befogó- és magasságtétel derékszögű háromszögben; számtani- és mértani közép fogalma, összehasonlítása

Halmazelmélet:

- Halmaz, részhalmaz fogalma; üres halmaz, véges és végtelen halmaz
- Műveletek halmazokkal (unió, metszet, különbség, komplementer)

Sorozatok:

- számsorozat fogalma; számtani- és mértani sorozat fogalma, n -edik eleme és első n elemének összege; az első n természetes szám összege

Gyakorló feladatok:

Geometria feladatgyűjtemény I.

- | | | |
|------------|-----------|--------------|
| 1429-1432. | 2114. | 2353. |
| 1437. | 2123. | 2354. a.) |
| 1441. | 2168. c.) | 2359. |
| 1444-1446. | 2172. a.) | 2385. |
| 1450-1453. | 2173. c.) | 2453. |
| 1455-1456. | | 2652. c.) |
| 1294-1301. | | 2653. a.)d.) |

Matematikai feladatgyűjtemény

II. kötet

- IV. 1., 155. a,d; 156. a, g; 157. d,e; 158. d.,f.;
166. b.,e; 167. a,c; 173., 218., 220.
239. a,c,d,f; 240. a,c,d; 241. a,d,f,g,h;
242. a,c,e.; 245. a,c,f; 253., 256. a,b,
298. a,b,c.

Minta feladatsorok

A feladatsorokat önállóan oldja meg, ezután az első feladatsor megoldási útmutatója alapján ellenőrizze, megoldása kb. hány százalékos! (Mintegy 80 % a minimális követelmény.)

I.

1./ Mely egész számokra igaz, hogy

$$\frac{x+1}{x-1} - \frac{x+2}{x+3} + \frac{4}{x^2+2x-3} = 0$$

2./ Táblázat nélkül határozza meg a következő kifejezés értékét!

$$100^{\frac{1}{2}} - \lg \sqrt[4]{4}$$

3./ Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$$\sin^2 x = \frac{\tan x}{2}$$

4./ Egy koordináta-rendszerben A(-8;0) B(0;-3) C(8;0) D(0;3). Igaz-e, hogy ez a négy pont rombuszt határoz meg? Válaszát indokolja!

5./ Adja meg a valós számoknak azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az $f(x) = \lg(x+1) + \frac{1}{x-2}$ függvény értelmezhető!

6./ Oldja meg a következő egyenlőtlenséget!

$$4x^2 + 20x + 26 > 0$$

II.

1./ Hozza egyszerűbb alakra:

$$\left(\frac{1}{a-\sqrt{ab}} - \frac{1}{b-\sqrt{ab}} \right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{b}} \right) \quad (a>0; b>0; a \neq b)$$

2./ Oldja meg az egyenletet a valós számok halmazán!

$$\frac{2 \lg z}{\lg(5z-4)} = 1$$

3./ Szögfüggvénytábla használata nélkül számítsa ki a többi szögfüggvény értékét, ha $\cos \alpha = \frac{3}{5}$.

Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amelynek irányszöge 60° és átmegy a $P(2;1)$ ponton!

5./ Ábrázolja az $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 1$ függvényt, adja meg monotonitási intervallumait!

6./ Oldja meg a következő egyenlőtlenséget:

$$\frac{x-1}{x+2} < 1$$

III.

1./ Legyen $0 < a < b$. Igazoljuk, hogy

$$\frac{\frac{a}{b} - \frac{b}{a}}{(2 - \frac{a}{b} - \frac{b}{a})(\frac{a}{b} + 1)} > 1$$

2./ Adja meg a következő egyenletek megoldásait a valós számok halmazán!

$$a./ 2^x = 4 \quad b./ 4^x = 2 \quad c./ \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2 \quad d./ 9 \cdot 3^{x-1} = 9^{-x}$$

3./ Oldja meg az alábbi trigonometrikus egyenletet!

$$\cos 2x + \sin 2x = -1$$

4./ Határozza meg, hogy az $ax - 2y - 1 = 0$ és a

$6x - 4y - b = 0$ egyenesek "a" és "b" milyen értéke

esetén

a/ metszik egymást

b/ párhuzamosnak

c/ egybeesők

5./ Adja meg az $f(x) = \sqrt{x+1}$ függvény értelmezési tartományát és értékkészletét, majd ábrázolja a függvényt!

6./ Számítsa ki a következő kifejezés értékét

$$\frac{(\operatorname{tg} 210^\circ)^2 + 2 \sin (-60^\circ) + \cos 150^\circ}{(\sin 45^\circ)^2 (\cos 60^\circ - \operatorname{tg} 45^\circ)}$$

Az 1. feladatsor megoldása

$$1./ \frac{x+1}{x-1} - \frac{x+2}{x+3} + \frac{4}{x^2+2x-3} = 0 \quad \begin{matrix} \text{/. } (x-1)(x+3) \\ x \neq 1 \\ x \neq -3 \end{matrix}$$

$$(x+1)(x+3) - (x+2)(x-1) + 4 = 0$$

$$x = -3$$

Nem megoldás, mert $x = -3$ helyen a nevező zérussá válik. Tehát a feladatnak a valós számok körében nincs megoldása, így az egész számok körében sincs.

$$2./ 100^{\frac{1}{2}} - \lg \sqrt[4]{4} = (10^2)^{\frac{1}{2}} - \lg \sqrt[4]{4} = 10^2 (\frac{1}{2} - \lg \sqrt[4]{4}) =$$

6 p.

(hatvány

hatványozása)

$$= 10^{1-2} \lg \sqrt[4]{4} = 10^1 - \lg 4^{\frac{1}{2}} = 10^1 \lg 10 - \lg 2 = 10^1 \lg 5 = 5$$

(hatvány
logaritmus)

(logaritmusok
különbsége)

(logaritmus
definíciója)

4 p.

$$3./ \sin^2 x = \frac{\operatorname{tg} x}{2}$$

$$\sin^2 x = \frac{\sin x}{2 \cos x} \quad \cos x \neq 0$$

$$2 \cos x \cdot \sin^2 x = \sin x$$

$$\sin x (2 \cos x \cdot \sin x - 1) = 0$$

Egy szorzat akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla.

$$\sin x = 0$$

$$x = 0 + k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \text{ (egész számok halmaza)}$$

vagy

$$2 \sin x \cdot \cos x - 1 = 0$$

$$\sin 2x = 1$$

$$2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

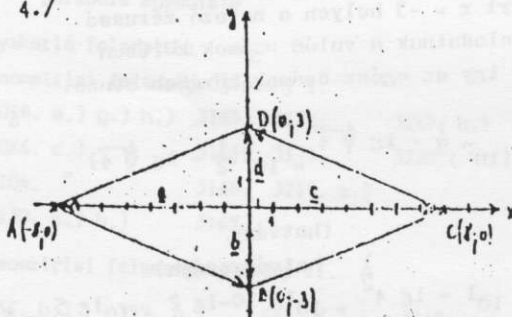
$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

tehát az egyenlet megoldásai

$$x = \begin{cases} 0 + k\pi \\ \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

6 p.

4./



$$\vec{AB} = \underline{b} - \underline{a} = (0; -3)$$

$$\vec{CD} = \underline{d} - \underline{c} = (-4; 3)$$

$$-\vec{AB} = \vec{CD}, \text{ tehát a}$$

négyszög paralelogramma.

$$\vec{AD} = (0; 3)$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{64+9} \quad |\vec{AD}| = \sqrt{64+9}, \text{ tehát } |\vec{AB}| = |\vec{AD}|,$$

ezért a paralelogramma rombusz.

5 p.

5./ $f(x) = \lg(x+1) + \frac{1}{x-2}$

A függvény az $f_1(x) = \lg(x+1)$ és az $f_2(x) = \frac{1}{x-2}$ függvények összege. Két függvény összegének értelmezési tartománya a függvények értelmezési tartományainak közös része.

$f_1(x) = \lg(x+1)$ É.T.-a $x > -1$

$f_2(x) = \frac{1}{x-2}$ É.T.-a $x \neq 2$

Tehát $f(x) = \lg(x+1) + \frac{1}{x-2}$ É.T.-a $x > -1$ és $x \neq 2$

4 p.

6./ $4x^2 + 20x + 26 > 0$ / :4
 $x^2 + 5x + 8,5 > 0$

Az $x^2 + 5x + 8,5 = 0$ egyenletnek nincs megoldása a valós számok körében. ($b^2 - 4ac < 0$). A másodfokú tag együtthatója pozitív, ezért az $y = x^2 + 5x + 8,5$ függvény képe felül nyitott parabola. Ezért az egyenlőtlenség minden valós x -re teljesül.

5 p.