

.

Feladatok valós számsorozatokkal

Írta és szerkesztette: Simon Ilona

Lektorálta: Dr.Pap Margit

Ahogy a természetes számok definíciója és ezáltal a $0 \in \mathbb{N}$ igaz vagy hamis volta megegyezésen alapul, úgy a sorzatok értelmezési tartománya is eltérő lehet a különböző szakirodalmakban. A továbbiakban találkozni fogunk 0-dik taggal induló sorozattal (Pl. $(\frac{1}{2^n}, n \in \mathbb{N})$); de a pozitív egészekben értelmezett sorozattal is (Pl. $(a_n = \frac{2n-1}{n}, n \in \mathbb{N}^*)$), itt az első taggal indul a sorozat. De például az $(a_n = \sqrt{n-5}, n \geq 5)$ sorozat az ötödik taggal kezdődik.

1) Határozzuk meg az alábbi sorozatok alsó és felső határát, valamint a legkisebb és legnagyobb elemét (a minimumát és maximumát) amennyiben felveszi azokat!

$$a) \left(a_n = \frac{2n-1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right)$$

$$b) \left(b_n = \frac{n-2}{4n}, n \in \mathbb{N}^* \right)$$

$$c) \left(c_n = \frac{2n-4}{3n}, n \in \mathbb{N}^* \right)$$

$$d) \left(d_n = \frac{3n+1}{4n}, n \in \mathbb{N}^* \right)$$

$$e) \left(e_n = \frac{1 - (-1)^n}{2}, n \in \mathbb{N} \right)$$

$$f) \left(f_n = \cos \frac{n\pi}{4}, n \in \mathbb{N} \right)$$

$$g) \left(g_n = n^{(-1)^n}, n \in \mathbb{N} \right)$$

$$h) \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{1}{2^n}, \frac{2^n-1}{2^n}, \dots \right)$$

$$i) \left(\frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right)$$

$$j) \left(n - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right)$$

Megoldás: a) $a_n = 2 - \frac{1}{n}$. Mivel $1 \leq \frac{2n-1}{n} \leq 2$ ($n \in \mathbb{N}^*$), és egyszerű számolással látható, hogy bármely 1-nél nagyobb szám nem alsó korlát, ezért $\inf_{n \in \mathbb{N}} a_n = 1$, s mivel ezt az értéket fel is veszi a sorozat, $\min_{n \in \mathbb{N}} a_n = 1$. Továbbá a sorozatnak felső korlátja a 2 és bármely 2-nél kisebb szám nem felső korlátja a sorozatnak, ezért $\sup_{n \in \mathbb{N}} a_n = 2$. De mivel ezt az értéket nem veszi fel a sorozat, ezért a sorozatnak nincs maximuma, tehát $\max_{n \in \mathbb{N}} a_n$ nem létezik.

e) $e_0 = 0, e_1 = 1, e_2 = 0, e_3 = 1, e_4 = 0 \dots$ a sorozat elemei váltakozva a 0 és az 1 értékek lesznek, ezért alsó határa 0 és mivel ezt az értéket a sorozat fel is veszi, a legkisebb eleme is 0, felső határa és legnagyobb eleme 1. Tehát $\sup_{n \in \mathbb{N}} e_n = \max_{n \in \mathbb{N}} e_n = 1$,

míg $\inf_{n \in \mathbb{N}} e_n = \min_{n \in \mathbb{N}} e_n = 0$.

f) Kiszámítjuk a sorozat néhány tagját: $f = \left(1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -1, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2} \dots\right)$
Mivel a $\cos$ függvény periódikus, s periódusa 2π , ezért a sorozat első 8 eleme periódikusan ismétlődik, és látjuk, hogy $-1 \leq f_n \leq 1$ ($n \in \mathbb{N}$). Ennél jobb alsó és felső korlátot nem adhatunk, hiszen ezeket az értékeket fel is veszi a sorozat. Ezért $\inf_{n \in \mathbb{N}} f_n = -1$, $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n = 1$. Mivel ezen értékek felvételnek, van legkisebb és legnagyobb eleme is a sorozatnak: $\min_{n \in \mathbb{N}} f_n = -1$ és $\max_{n \in \mathbb{N}} f_n = 1$.

g) $g_0 = 0, g_1 = 1, g_2 = 2, g_3 = \frac{1}{3}, g_4 = 4, g_5 = \frac{1}{5}, g_6 = 6, \dots$ látjuk, hogy a sorozat páratlan tagjaiból álló részsorozat az 1-től a 0-hoz közeledik ($g_{2n+1} = \frac{1}{2n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$)), míg a páros sorszámú tagok alkotta részsorozat ($g_{2n} = 2n$ ($n \in \mathbb{N}$)) felülről nem korlátos, ezért a sorozat felső határa: $\sup_{n \in \mathbb{N}} g_n = +\infty$, s nincs legnagyobb eleme. Alsó határa: $\inf_{n \in \mathbb{N}} g_n = 0$, hiszen $0 < \frac{1}{2n+1}$ és $0 < 2n$ ($n \in \mathbb{N}$) továbbá bármely pozitív szám nem alsó korlát. Ám $g_0 = 0$ miatt van legkisebb eleme, $\min_{n \in \mathbb{N}} g_n = 0$.

h) Itt újra két részsorozatról érdemes beszélni: míg a páratlan tagok monoton növekvően az 1-hez közelítenek, addig a párosak monoton csökkenően a 0-hoz ($h_{2n} = \frac{1}{2^{n+1}}, h_{2n+1} = \frac{2^{2n+1}-1}{2^{2n+1}}$ ($n \in \mathbb{N}^*$)) Ezért $\inf_{n \in \mathbb{N}} h_n = 0$, $\sup_{n \in \mathbb{N}} h_n = 1$, a sorozatnak legkisebb és legnagyobb eleme nincsen, mert a 0-t, illetve az 1-et nem veszik fel a sorozat elemei.

2) Vizsgáljuk az alábbi sorozatok korlátosságát és monotonitását; határozzuk meg alsó és felső korlátait- amennyiben léteznek ezek!

- | | |
|---|--|
| a) $a_n = \frac{n-1}{n}, n \in \mathbb{N}^*$ | f) $f_n = \frac{2n^2+1}{n^2+2}, n \in \mathbb{N}$ |
| b) $b_n = \frac{2n+3}{n}, n \in \mathbb{N}^*$ | g) $g_n = \frac{2^n}{n!}, n \in \mathbb{N}$ |
| c) $c_n = \frac{n-8}{4n}, n \in \mathbb{N}^*$ | h) $h_n = 1 + (-1)^n + (-1)^n \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*$ |
| d) $d_n = \frac{2n+4}{3n}, n \in \mathbb{N}^*$ | i) $i_n = n - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*$ |
| e) $e_n = \frac{2n}{n^2+1}, n \in \mathbb{N}^*$ | j) $j_n = \frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N}^*$ |
| | k) $k_{n+2} = k_{n+1} + 2 \cdot k_n^2$ ($n \in \mathbb{N}$), $k_0 < k_1$ |

Megoldások: a) $a_{n+1} - a_n = \frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n(n+1)} > 0$ ($n \in \mathbb{N}^*$), tehát szigorúan monoton növekvő a sorozat. A $0 \leq \frac{n-1}{n} < 1$ ($n \in \mathbb{N}^*$) egyenlőtlenség miatt a sorozat alulról és felülről is korlátos, alsó korlátnak megfelel az $a_1 = 0$, de bármely ennél kisebb szám is, felső korlát pl. az 1, hiszen $\frac{n-1}{n} < 1$ mivel az $n-1 < n$ igaz minden $n \geq 1$ -re.

e) $e_{n+1} - e_n = \frac{2n+2}{(n+1)^2+1} - \frac{2n}{n^2+1} = \frac{-2n^2-2n+2}{(n^2+2n+2)(n^2+1)} < 0$ ($n \in \mathbb{N}^*$), szigorúan monoton csökkenő sorozatot kaptunk, melynek felső korlátja az első tagja, $e_1 = 1$, alsó korlátja is van: pl. a 0, hiszen ha a számláló is, a nevező is pozitív, akkor az $e_n = \frac{2n}{n^2+1} > 0$. A sorozat tehát korlátos.

f) A sorozat szigorúan monoton növekvő, alsó korlátja: $f_0 = \frac{1}{2}$, felső korlát pl. 2, mert ha vizsgáljuk az $f_n = \frac{2n^2+1}{n^2+2} < 2$ egyenlőtlenség igaz voltát, látjuk, hogy a $2n^2+1 < 2(n^2+2)$ igaz, emiatt feltevésünk valóban teljesül. Tehát korlátos sorozatról beszélünk.

g) $g_{n+1} - g_n = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} - \frac{2^n}{n!} = \frac{2^n(2-n-1)}{(n+1)!} \leq 0$ ($n \in \mathbb{N}^*$), de pozitív, ha $n = 0$ ezért monoton csökkenő az első tagtól kezdve, de a nulladik tag miatt ezt a sorozatról általában nem állíthatjuk. Felső korlátja a sorozat első eleme: $d_1 = 2$, alsó korlát a 0, hiszen mind a 2^n , mind az $n!$ pozitív. Így újra korlátos sorozatot kaptunk.

h) $h_{n+1} - h_n = 1 + (-1)^{n+1} + (-1)^{n+1} \frac{1}{n+1} - 1 - (-1)^n - (-1)^n \frac{1}{n} = 2(-1)^{n+1} + (-1)^{n+1}(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}) = (-1)^{n+1}(2 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n})$ a szorzat második tagja minden $n \in \mathbb{N}$ -re pozitív, míg az első váltakozva pozitív illetve negatív, ezért a sorozat nem monoton. A -1 alsó korlátja, a 2,5 felső korlátja sorozatunknak. Ez a sorozat tehát korlátos, de nem monoton. (A páratlan tagokból álló részsorozat monoton növekvően tart a 0-hoz, mivel $h_{2n+1} = -\frac{1}{2n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$), a párosak által alkotott részsorozat pedig a $h_{2n} = 2 + \frac{1}{2n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$), mely a 2-höz monoton csökkenően tart.)

i) $i_{n+1} - i_n = n+1 - \frac{1}{n+1} - n + \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{n(n+1)} > 0$ ($n \in \mathbb{N}^*$), tehát a sorozat szigorúan monoton növekvő. Alsó korlátja pl. a 0, mivel $n \in \mathbb{N}^*$ esetén $n > \frac{1}{n}$, így $i_n = n - \frac{1}{n} > 0$, ám felülről nem korlátos, ezért a sorozat nem korlátos. Indirekt úton lássuk be, hogy felülről nem korlátos: tegyük fel, hogy a K valós szám felső korlátja a sorozatnak: $n - \frac{1}{n} < K \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$. Ekkor egyrészt $n^2 - nK - 1 < 0$ minden $n \in \mathbb{N}^*$ -ra, másrészt az $n^2 - nK - 1 < 0$ n-ben másodfokú függvény megoldásai a pozitív természetes számok $\mathbb{N}^*$ halmazán a $\left(\frac{K-\sqrt{K^2+4}}{2}, \frac{K+\sqrt{K^2+4}}{2}\right)$ intervallum, mivel grafikus képként egy fölfelé nyíló parabola pontjai adódnak, s a másodfokú függvényünk negatív értékeket a gyökök közötti számokon vesz fel. A fenti megoldáshalmaz nem egyezik meg a pozitív természetes számok $\mathbb{N}^*$ halmazával. Tehát egy monoton növekvő, felülről nem korlátos sorozatot kaptunk.

j) A sorozat nem monoton, de korlátos.

3) A határérték ε -os értelmezését felhasználva bizonyítsuk be, hogy

$$\begin{array}{ll} a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{2}{n} \right) = 3 & e) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2 + 2} = 0 \\ b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{3n + 1} = \frac{2}{3} & f) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n^2 + 1}{n + 1} = -\infty \\ c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n + 1}{3n - 2} = \frac{4}{3} & g) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + n^2}{n} = +\infty \\ d) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n - 1}{4n} = \frac{1}{2} & h) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{2n^2 + 3} = 0 \\ & i) \lim_{n \rightarrow \infty} (n + (-1)^n) = +\infty \end{array}$$

és minden esetben az $\varepsilon = 0,01$ -re adjuk meg a megfelelő küszöbszámot.

Megoldás: a) Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Be kell látnunk, hogy létezik olyan N természetes szám (küszöbindex), hogy bármely N -nél nagyobb indexű tagra $|a_n - 3| < \varepsilon$. Keresünk tehát egy olyan küszöbindexet, melynél nagyobb indexű tagokra fennáll, hogy:

$$\left| 3 + \frac{2}{n} - 3 \right| < \varepsilon.$$

A fenti egyenlőtlenséget a következő ekvivalens formákba írjuk át:

$$\begin{aligned} \frac{2}{n} &< \varepsilon \\ n &> \frac{2}{\varepsilon}, \end{aligned}$$

tehát létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex ($N \doteq \left[\frac{2}{\varepsilon} \right] + 1$), hogy a sorozat N -edik tagjától kezdve minden tagja ε -nál kisebb távolságra van a 3-tól. Pl. $\varepsilon = 0,01$ -re $N = 201$, azaz a sorozat tagjai a 201-ik tagtól kezdve a 3-nak $0,01$ sugarú környezetében vannak.

b) Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Keresendő egy olyan N természetes szám, az ún. küszöbindex, hogy bármely $n \geq N$ -re $|a_n - \frac{2}{3}| < \varepsilon$.

$$\left| \frac{2n}{3n + 1} - \frac{2}{3} \right| < \varepsilon.$$

A fenti egyenlőtlenséget a következő ekvivalens formákba írjuk át:

$$\begin{aligned} \left| \frac{-2}{3(3n + 1)} \right| &< \varepsilon \\ \frac{2}{3(3n + 1)} &< \varepsilon \end{aligned}$$

$$9n + 3 > \frac{2}{\varepsilon}$$

$$n > \frac{\frac{2}{\varepsilon} - 3}{9}$$

$$N = \left[\frac{\frac{2}{\varepsilon} - 3}{9} \right] + 1,$$

tehát létezik olyan N küszöbindex, hogy a sorozat N -edik tagjától kezdve minden tagja ε -nál kisebb távolságra van a $\frac{2}{3}$ -tól. Ezért a sorozat konvergens és tart a $\frac{2}{3}$ -hoz. Pl. $\varepsilon = 0,01$ -re $N = 22$, azaz a sorozat tagjai a 22. tagtól kezdve legfeljebb 0,01 távolságra lehetnek a $\frac{2}{3}$ -tól.

$$\text{c) } N = \left\lceil \frac{\frac{11}{\varepsilon} + 6}{9} \right\rceil + 1, \text{ d) } N = \left\lceil \frac{1}{4\varepsilon} \right\rceil + 1, \text{ e) } N = \left\lceil \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 2} \right\rceil + 1, \text{ ami az } \varepsilon = 0,01\text{-re}$$

$$N = 10, \text{ h) } N = \left\lceil \frac{\sqrt{\frac{2}{\varepsilon} - 3}}{2} \right\rceil + 1.$$

f) Azt a tényt, hogy a sorozat $-\infty$ -hez tart, a definíció alapján látjuk be: igazoljuk, hogy $\forall M \in \mathbb{R}$ -hez létezik $N \in \mathbb{N}$, úgy, hogy bármely N -nél nagyobb indexű tagra $a_n < M$. Legyen $M \in \mathbb{R}$ tetszőleges. (Itt M tetszőlegesen kicsi szám is lehet, pl. -100000)

$$\frac{-2n^2 + 1}{n + 1} < M$$

A fenti egyenlőtlenség ekvivalens az alábbiakkal:

$$\frac{-2n^2 - Mn + 1 - M}{n + 1} < 0$$

$$-2n^2 - Mn + 1 - M < 0$$

$$n \in (-\infty, n_1] \cup [n_2, +\infty)$$

(képként lefele nyíló parabolát adó függvény a gyökökön kívül negatív értékű)

$$n > \frac{M - \sqrt{M^2 + 8(1 - M)}}{-4} \quad (M < 0 \text{ esetén}),$$

$$N \doteq \left\lceil \frac{M - \sqrt{M^2 + 8(1 - M)}}{-4} \right\rceil + 1$$

Például $M = -100$ választással kapjuk, hogy az $N = 51$. tagtól kezdve a sorozat értékei -100 -nál kisebbek.

g) Azt, hogy a sorozat $+\infty$ -hez tart, a definíció alapján úgy látjuk be, hogy megmutatjuk, hogy $\forall M \in \mathbb{R}$ -hez létezik $N \in \mathbb{N}$ úgy, hogy bármely N -nél nagyobb indexű tagra $a_n > M$. A c) pontban látottakhoz hasonló gondolatmenettel kapjuk, hogy

$$N \doteq \left\lceil \frac{M + \sqrt{M^2 - 4}}{2} \right\rceil + 1.$$

4) Alkalmazva a monoton sorozatok konvergenciátételét igazoljuk, hogy a következő sorozatok konvergenssek:

$$\text{a) } \left(\frac{3^n}{n!}, n \in \mathbb{N} \right)$$

$$\text{d) } d_n = \frac{2n + 3}{n}, n \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{b) } \left(1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}, n \in \mathbb{N}^* \right)$$

$$\text{e) } e_n = \frac{n - 8}{4n}, n \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{c) } \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}, n \in \mathbb{N}^* \right)$$

$$\text{f) } f_n = \frac{2n + 4}{3n}, n \in \mathbb{N}^*.$$

Megoldás: a) Itt felhasználjuk azt a tételt, amely szerint ha egy valós számsorozat monoton és korlátos, akkor konvergens. $a_{n+1} - a_n = \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} - \frac{3^n}{n!} = \frac{3^n(2-n)}{(n+1)!}$, ami negatív, ha $n > 2$, tehát a sorozat ugyan nem monoton, de a 3. tagtól kezdve szigorúan monoton csökkenő. A konvergencia szempontjából viszont véges sok tag viselkedése nem számottevő. Mivel $3^n > 0$ és $n! > 0$, ezért $\frac{3^n}{n!} > 0$, a nulla alsó korlátja lesz a sorozatnak. A tárgyalt sorozat a harmadik tagtól kezdve monoton csökkenő és alulról korlátos, következésképpen konvergens. (Megjegyezzük, hogy egy monoton csökkenő sorozat felülről mindig korlátos, hiszen a nulladik vagy az első tagjánál minden tagja kisebb vagy egyenlő értékekkel rendelkezik.)

b) $b_n = 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$, ez a sorozat szigorúan monoton növekvő, mivel $b_{n+1} - b_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0$, ám felülről korlátos is, mivel $1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 + \frac{2-1}{1 \cdot 2} + \frac{3-2}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{n+1-n}{n(n+1)} = 1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 2 - \frac{1}{n+1} < 2$. Így a sorozat monoton növekvő és felülről korlátos, tehát konvergens.

c) Hasonlóan kapjuk, hogy $c_{n+1} - c_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$ ($n \in \mathbb{N}$), ezért a vizsgált sorozat szigorúan monoton növekvő és $0 < 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} < 2$, becslés miatt felülről korlátos, tehát konvergens.

A d) és f)-beli sorozat monoton csökkenő, az e)-ben szereplő pedig monoton csökkenő, s mindegyik korlátos, következésképpen konvergens.

5) Igazoljuk, hogy az alábbi sorozatok divergensek:

$$a) (1 + (-1)^n, n \in \mathbb{N})$$

$$b) ((-1)^n, n \in \mathbb{N})$$

$$c) \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right)$$

Útmutatás: c) A Cauchy-kritériummal.

6) Határozzuk meg az alábbi sorozatok határértékét:

$$\begin{array}{ll} a) \left(\frac{1}{n^2}, n \in \mathbb{N}^*\right) & d) \left(\left(2 + \frac{1}{n}\right) \left(3 - \frac{1}{n^2}\right) 5, n \in \mathbb{N}^*\right) \\ b) \left(\frac{1}{\sqrt{n}}, n \in \mathbb{N}^*\right) & e) \left(\frac{2 + \frac{1}{n^2}}{3 + \frac{1}{n^3}}, n \in \mathbb{N}^*\right) \\ c) \left(\frac{1}{2^n}, n \in \mathbb{N}\right) & f) \left(\frac{4 - \frac{1}{\sqrt{n^3}}}{7 + \frac{1}{2^n}}, n \in \mathbb{N}^*\right). \end{array}$$

Megoldás: Az a), b) és c) pontokban felhasználjuk, hogy egy végtelenbe divergáló sorozat tagjainak reciprokából képzett sorozat nullához konvergál, a d), e) és f) pontokban pedig a sorozatok határértékére vonatkozó műveleti szabályok, az úgynevezett határátmeneti szabályok alkalmazásával: d) $\frac{2}{3}$ e) $\frac{2}{3}$ f) $\frac{4}{7}$.

7) Elvégezve a megfelelő átalakításokat, számítsuk ki az alábbi határértékeket:

$$\begin{array}{ll}
 a) \lim_{n \rightarrow \infty} (2n^2 + 3n + 1) = & k) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n^6 + 3n^3 + 1}{n^5 - n^4 + 1} = \\
 b) \lim_{n \rightarrow \infty} (2n^2 - 3n + 1) = & l) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 1}{2n + 1} - \frac{3n^2 + 1}{6n + 1} \right) = \\
 c) \lim_{n \rightarrow \infty} (2 + 4n - 3n^2) = & m) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + \dots + n}{n^2} = \\
 d) \lim_{n \rightarrow \infty} (2n^5 - 3n^7 + 2) = & n) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n + 2} - \frac{n^2}{3} \right) = \\
 e) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 1}{n} = & o) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + \dots + n(n + 2)}{n^3} = \\
 f) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 2006}{n} = & p) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + 2 + \dots + n}{n + 2} - \frac{n}{2} \right) = \\
 g) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 3n + 1}{2n^2} = & q) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 3^2 + \dots + (2n - 1)^2}{n^3} = \\
 h) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 1}{3n^2 + 5n - 1} = & r) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)}{n^3} = \\
 i) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^4 - 3n + 2}{2n^4 + n^2 + 1} = & \\
 j) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 1}{2n^2 + 1} = &
 \end{array}$$

Megoldás: a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (2n^2 + 3n + 1) = +\infty$, itt a " $+\infty + \infty = +\infty$ " műveletet végeztük el.

b) A " $\infty - \infty$ " határozatlanság miatt alkalmas átalakításokkal a sorozatok határértékeire vonatkozó értelmes műveletekre vezetjük vissza. Ez esetben ki kell emelnünk a legmagasabb fokszámú tagot, és így a következőt kapjuk:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2n^2 - 3n + 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \cdot \left(2 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \right) = +\infty.$$

c) $-\infty$, d) $-\infty$

e) Mind a számlálóban, mind a nevezőben levő kifejezés a $+\infty$ -be tart, ami az ún. " $\frac{\infty}{\infty}$ " határozatlansági esetet eredményezi. Ez esetben az általános eljárás, amelylyel a sorozatok határértékeire vonatkozó ún. értelmes műveletekre jutunk az, hogy mind a számlálóból, mind pedig a nevezőből kiemeljük az n legnagyobb hatványát, hogy egyszerűsítéssel eltüntessük a " $\frac{\infty}{\infty}$ " határozatlanságot, s így a következőt kapjuk: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} =$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(1+\frac{1}{n})}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{1} = 1.$$

f) Hasonlóan, a számlálóban és nevezőben is n -et kiemelve majd egyszerűsítve kapjuk, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 2006}{n} = 2$.

$$g) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 3n + 1}{2n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(1 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2})}{n^2 \cdot 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}{2} = \frac{1}{2}.$$

h) $\frac{2}{3}$ i) $\frac{5}{2}$ j) 0 k) $-\infty$.

$$\begin{aligned}
& \text{l) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 1}{2n + 1} - \frac{3n^2 + 1}{6n + 1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^3 + n^2 + 6n + 1 - 6n^3 - 2n - 3n^2 - 1}{(2n + 1)(6n + 1)} = \\
& = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n^2 + 4n}{12n^2 + 8n + 1} = -\frac{1}{6}. \\
& \text{m) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + \dots + n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n}{2n^2} = \frac{1}{2}. \\
& \text{n) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n + 2} - \frac{n^2}{3} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6(n+2)} - \frac{n^2}{3} \right) = \\
& = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n^2 + n}{6(n+2)} = -\infty. \\
& \text{o) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + \dots + n(n+2)}{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)(2n+7)}{6n^3} = \frac{1}{3}, \text{ ahol felhasznál-} \\
& \text{tuk, hogy } 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + \dots + n(n+2) = \sum_{k=1}^n k(k+2) = \sum_{k=1}^n (k^2 + 2k) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \\
& + \frac{2n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}.
\end{aligned}$$

8) Számítsuk ki a következő sorozatok határértékét!

$$\begin{aligned}
& \text{a) } \left(\frac{1}{2^n} + (0,05)^n - 3, n \in \mathbb{N}^* \right) & \text{d) } a_n = \frac{5 \cdot 3^n + 7^n}{2 \cdot 7^n + 2^n}, n \in \mathbb{N} \\
& \text{b) } \left(5 \cdot \left(\left(\frac{2}{3} \right)^n - 1 \right), n \in \mathbb{N} \right) & \text{e) } a_n = \frac{2^n + 2 \cdot 3^n + 3 \cdot 5^n}{3^n + 3 \cdot 4^n + 7 \cdot 5^n}, n \in \mathbb{N} \\
& \text{c) } \left(\left(2 + \frac{1}{n} \right) \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^n, n \in \mathbb{N}^* \right) & \text{f) } a_n = \frac{\alpha^n + \beta^n}{\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}}, \alpha > 0, \beta > 0, n \in \mathbb{N} \\
& & \text{g) } a_n = \frac{2 \cdot 3^n - 7^n}{4 \cdot 7^n + 2^n}, n \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

Megoldás: a) Mivel az $\frac{1}{2}$ és a $0,05$ számok abszolút értéke 1-nél kisebb, ezért n -edik hatványuk a 0-hoz tart, s így $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2^n} + (0,05)^n - 3 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{1}{2} \right)^n + (0,05)^n - 3 \right) = -3$.

b) A $\left| \frac{2}{3} \right| < 1$ miatt $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n = 0$, s így $\lim_{n \rightarrow \infty} 5 \cdot \left(\left(\frac{2}{3} \right)^n - 1 \right) = -5$.

c) $2 \cdot 0 = 0$.

d) A " $\frac{\infty}{\infty}$ " határozatlanságot látva mind a számlálóban, mind a nevezőben ki kell emelnünk a legnagyobb alapú tagot, hogy egyszerűsítéssel eltüntessük a " $\frac{\infty}{\infty}$ " határozatlanságot: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 \cdot 3^n + 7^n}{2 \cdot 7^n + 2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 \left(\frac{3}{7} \right)^n + 1}{2 + \left(\frac{2}{7} \right)^n} = \frac{1}{2}$, hiszen $\left| \frac{3}{7} \right| < 1$ és $\left| \frac{2}{7} \right| < 1$ teljesül.

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 2 \cdot 3^n + 3 \cdot 5^n}{3^n + 3 \cdot 4^n + 7 \cdot 5^n} = \frac{3}{7}$, itt a számlálót is, nevezőt is 5^n -el osztottuk.

f)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha^n + \beta^n}{\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}} = \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n+1}}{\alpha \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n + \beta} = \frac{1}{\beta}, & \text{ha } \alpha < \beta \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n}{\alpha + \beta \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n} = \frac{1}{\alpha}, & \text{ha } \beta < \alpha \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n+1}}{\alpha \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n + \beta} = \frac{2}{\alpha + \beta}, & \text{ha } \alpha = \beta. \end{cases}$$

g) $-\frac{1}{4}$

9) A sorozatok határértékeivel végzett műveleti szabályokat alkalmazva számítsuk ki a következő sorozatok határértékét!

$$\begin{array}{ll} a) \left(\left(2 + \frac{1}{n} \right)^3, n \in \mathbb{N}^* \right) & e) a_n = 2^{\frac{3n^2 - n + 1}{n^2 + 3}}, n \in \mathbb{N} \\ b) \left(\frac{n}{2^n(n+1)}, n \in \mathbb{N} \right) & f) a_n = \lg \frac{10n^3 - 1}{n^3 + 1}, n \in \mathbb{N} \\ c) \left(\left(\frac{2n+1}{3^n} \right)^4, n \in \mathbb{N} \right) & g) a_n = \sqrt{\frac{2n^2 + 1}{8n^2 + 3}}, n \in \mathbb{N} \\ d) \left(\sqrt[5]{\frac{32n^2 + 1}{n^2 - 7}}, n \geq 3 \right) & h) a_n = \left(\frac{2n}{n+1} \right)^\pi, n \in \mathbb{N} \end{array}$$

Megoldás:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{n} \right)^3 = 2^3 = 8.$

b) Gondoljunk a határérték és a műveletek kapcsolatára:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 0 \cdot 1 = 0.$$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{3^n} \right)^4 = 0.$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[5]{\frac{32n^2 + 1}{n^2 - 7}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[5]{\frac{32 + \frac{1}{n^2}}{1 - \frac{7}{n^2}}} = \sqrt[5]{32} = 2.$

e) Mivel a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - n + 1}{n^2 + 3} = 3$ határérték létezik és véges, ezért $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\frac{3n^2 - n + 1}{n^2 + 3}} = 2^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - n + 1}{n^2 + 3}} = 2^3 = 8.$

f) Mivel a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10n^3 - 1}{n^3 + 1} = 10$ határérték létezik és véges, ezért $\lim_{n \rightarrow \infty} \lg \frac{10n^3 - 1}{n^3 + 1} = \lg \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10n^3 - 1}{n^3 + 1} \right) = \lg 10 = 1.$

10) Számítsuk ki a következő sorozatok határértékét!

$$a) a_n = 2n^3 - n^2 + 1, n \in \mathbb{N}$$

$$b) a_n = 1 + 3n - n^7, n \in \mathbb{N}$$

$$c) a_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n}, n \in \mathbb{N}$$

$$d) a_n = \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - 1}, n \geq 1$$

$$e) a_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}), n \in \mathbb{N}$$

$$f) a_n = \sqrt{n^2 + 2n + 3} - n, n \in \mathbb{N}$$

$$g) a_n = \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n-1}, n \in \mathbb{N}$$

$$h) a_n = \frac{\sqrt{n^2 - 3n + 1}}{n + 1}, n \in \mathbb{N}$$

$$i) a_n = \frac{n+2}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n+2}}, n \in \mathbb{N}$$

$$j) a_n = \frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n^2+1} - n)}, n \geq 1$$

$$k) a_n = \frac{\sqrt[n]{8} - 1}{\sqrt[n]{2} - 1}, n \in \mathbb{N}^*$$

$$l) a_n = \sqrt[n]{n+5}, n \in \mathbb{N}^*$$

$$m) a_n = \sqrt[n]{15}, n \in \mathbb{N}^*$$

$$n) a_n = \sqrt[n]{3^n + 2^n}, n \in \mathbb{N}^*$$

Megoldás: a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (2n^3 - n^2 + 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 (2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}) = +\infty.$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 3n - n^7) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^7 (\frac{1}{n^7} + \frac{3}{n^6} - 1) = -\infty.$

c) A $\infty - \infty$ típusú határozatlanság azon esetében, amikor $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ határértékét keressük, a $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ -vel, az ún. konjugálttal való beszorzással tüntetjük el a számlálóból a gyökök kifejezéseket. Így tehát a $(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = a - b$ azonosság miatt a számlálóban eltűnik a gyökök kifejezés, a nevezőben keletkező $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ már $\infty + \infty = +\infty$ határértékű lesz.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n+2} - \sqrt{n})(\sqrt{n+2} + \sqrt{n})}{(\sqrt{n+2} + \sqrt{n})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2-n}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} = 0.$$

d) Hasonlóan, a konjugálttal való bővítéssel: $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - 1}) =$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n + 1 - (n^2 - 1)}{\sqrt{n^2 + n + 1} + \sqrt{n^2 - 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{\sqrt{n^2 + n + 1} + \sqrt{n^2 - 1}} =$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(1 + \frac{2}{n})}{n(\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{n}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{2}.$

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1)} =$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} = \frac{1}{2}.$

f) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 2n + 3} - n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 2n + 3} - \sqrt{n^2}) =$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n + 3 - n^2}{\sqrt{n^2 + 2n + 3} + \sqrt{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2 + \frac{3}{n})}{n \left(\sqrt{1 + \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}} + 1 \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{n}}{\sqrt{1 + \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}} + 1} = 1.$$

g) Alkalmazzuk, hogy $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$, vagyis $a - b = (\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}) \cdot (\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2})$, így a $(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2})$ -val bővítve a számlálóból eltűnik a gyökös kifejezés:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1 - (n-1)}{\sqrt[3]{(n+1)^2} + \sqrt[3]{(n+1)(n-1)} + \sqrt[3]{(n-1)^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt[3]{(n+1)^2} + \sqrt[3]{(n+1)(n-1)} + \sqrt[3]{(n-1)^2}} = 0.$$

$$\text{h) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 - 3n + 1}}{n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}}{1 + \frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot \sqrt{1 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}}{n(1 + \frac{1}{n})} = 1.$$

$$\text{i) Hasonlóan, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n+2}} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{j) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n^2+1}-n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+1}+n}{\sqrt{n}(\sqrt{n^2+1}-n)(\sqrt{n^2+1}+n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2}}{\sqrt{n}(n^2+1-n^2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2}}{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}(\sqrt{n+\frac{1}{n}}+\sqrt{n})}{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+\frac{1}{n}}+\sqrt{n}) = +\infty.$$

k) Alkalmazzuk, hogy $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$, így a következő határértékhez jutunk: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{8} - 1}{\sqrt[3]{2} - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt[3]{2})^3 - 1^3}{\sqrt[3]{2} - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} ((\sqrt[3]{2})^2 + \sqrt[3]{2} + 1) = 3.$

l) 1, m) 1, n) 3.

11) Számítsuk ki az alábbi határértékeket:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } a_n = \frac{n-1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}^* & \text{d) } a_n = \frac{2n^5 - 3n^2 + 1}{-4n^3 + 2}, \quad n \in \mathbb{N} \\ \text{b) } a_n = \frac{2n}{n^2 + 1}, \quad n \in \mathbb{N} & \text{e) } a_n = \frac{2n^2 + 3}{4n + 5} - \frac{n^2 + 1}{2n + 3}, \quad n \in \mathbb{N} \\ \text{c) } a_n = \frac{2n^2 + 1}{n^2 + 2}, \quad n \in \mathbb{N} & \text{f) } a_n = \left(\left(\frac{2}{5} \right)^n + \left(\frac{5}{2} \right)^n - 3 \right), \quad n \in \mathbb{N} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
g) a_n = \left(2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n - (-0,3)^n\right), n \in \mathbb{N} & n) a_n = \sqrt[n]{n+3}, n \in \mathbb{N} \\
h) a_n = n^8 - n^7 + n^4, n \in \mathbb{N} & o) a_n = \sqrt[n]{45}, n \in \mathbb{N} \\
i) a_n = \sqrt{3n-2} - \sqrt{3n+5}, n \in \mathbb{N} & p) a_n = \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n}, n \in \mathbb{N} \\
j) a_n = \sqrt{4n+6} - \sqrt{2n+5}, n \in \mathbb{N} & q) a_n = \sqrt{n + \sqrt[3]{n^2}} - \sqrt{n}, n \in \mathbb{N} \\
k) a_n = \sqrt{n+2}(\sqrt{n^2-1}-n), n \in \mathbb{N}^* & r) a_n = \lg \frac{2n+5}{n+4}, n \in \mathbb{N} \\
l) a_n = \frac{2^{n+1} + 3^n}{2^n + 3^{n+1}}, n \in \mathbb{N} & s) a_n = \frac{\sqrt{n^2-6n+25}}{3n+2}, n \in \mathbb{N} \\
m) a_n = \frac{3^n + 5^{n+1}}{3^{n+1} + 5^n}, n \in \mathbb{N}
\end{array}$$

Eredmények: a) 1 b) 0 c) 2 d) $-\infty$ e) $\frac{1}{8}$ f) $+\infty$ g) $+\infty$ h) $+\infty$ i) 0 j) $+\infty$ k) 0 l) $\frac{1}{3}$ m) 5 n) 1 o) 1 p) $\frac{1}{2}$ q) $+\infty$ r) $\lg 2$ s) $\frac{1}{3}$.

12) Számítsuk ki az alábbi határértékeket:

$$\begin{array}{ll}
a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n & h) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n-2}{3n+5}\right)^{n-4} \\
b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n & i) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n-3}{5n+3}\right)^{-n-2} \\
c) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n & j) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{\sqrt{n}+1}\right)^{\sqrt{n}} \\
d) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+3}{n+5}\right)^{2n} & k) \lim_{n \rightarrow \infty} n \ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right) \\
e) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{2n-3}\right)^{5n} & l) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n \\
f) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n & m) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \\
g) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+3}{2n+5}\right)^{n+1} & n) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(0.9 + \frac{1}{n}\right)^n \\
& o) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1.1 + \frac{1}{n}\right)^n
\end{array}$$

Megoldás: a) Mivel az alap az 1-hez tart, a kitevő pedig a $+\infty$ -hez, ezért az ún. " 1^∞ " típusú határozatlansági esettel van dolgunk. Ilyenkor mindig a következő alaphatárértékek valamelyikét használjuk: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$; $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$, vagy ezek általánosításait: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{u_n}\right)^{u_n} = e$; s $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{u_n}\right)^{u_n} = \frac{1}{e}$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$ esetén. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

$$\begin{aligned} \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{(n+1)-1} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right] \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{-1} = e^{-1} \cdot 1 = \frac{1}{e} \text{ vagy a sorozatok határértékeivel} \\ &\text{végzett műveleti szabályok között szereplő } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{b_n} = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n\right)^{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} \text{ alapján eljárva:} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right]^{\frac{n}{n+1}} = \frac{1}{e}. \end{aligned}$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n \cdot \frac{1}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n}\right]^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}.$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+3}{n+5}\right)^{2n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+5-2}{n+5}\right)^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{\frac{n+5}{2}}\right)^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{\frac{n+5}{2}}\right)^{\frac{n+5}{2} \cdot 4 - 10} = \\ &= \left(\frac{1}{e}\right)^4 = e^{-4} \text{ vagy} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+3}{n+5}\right)^{2n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+5-2}{n+5}\right)^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{\frac{n+5}{2}}\right)^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{1}{\frac{n+5}{2}}\right)^{\frac{n+5}{2}}\right]^{\frac{2}{n+5} \cdot 2n} = \\ &= \left(\frac{1}{e}\right)^4 = e^{-4}. \end{aligned}$$

$$\text{e) } e^{10} \quad \text{f) } e^2 \quad \text{g) } \frac{1}{e} \quad \text{h) } \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{7}{3}} \quad \text{i) } e^{\frac{6}{5}}$$

$$\begin{aligned} \text{j) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{\sqrt{n+1}}\right)^{\sqrt{n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{\sqrt{n+1}}{3}}\right)^{\frac{\sqrt{n+1}}{3} \cdot 3 - 1} = e^3 \text{ vagy} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{\sqrt{n+1}}\right)^{\sqrt{n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{\sqrt{n+1}}{3}}\right)^{\frac{\sqrt{n+1}}{3}}\right]^{\frac{3}{\sqrt{n+1}} \cdot \sqrt{n}} = e^3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{k) } \lim_{n \rightarrow \infty} n \ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n = \ln \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n = \ln \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n \cdot \frac{1}{2}} = \\ &= \ln(e^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{l) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{\frac{1}{n}} = e^0 = 1.$$

$$\text{m) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^n = +\infty.$$

Az n) és o) pontban más típusú feladatokkal találkozunk: n) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(0,9 + \frac{1}{n}\right)^n = 0$, hiszen az alap egy adott indextől (a 20.-tól) kezdve kisebb mint 0,95; így 1-nél kisebb abszolút értékű alapú hatványokból álló sorozatról van szó, ezért a határértéke kisebb mint 0, ám nagyobb is mint 0, hiszen a sorozat tagjai pozitívak.

$$\text{o) Hasonló gondolatmenettel: } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1,1 + \frac{1}{n}\right)^n = +\infty.$$

13) Számítsuk ki az alábbi határértékeket:

$$\begin{aligned}
 a) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3} \right)^{\frac{n^2-2}{n}} \\
 b) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{1}{n} \right) \left(3 + \frac{2}{n} \right) + \left(-\frac{2}{5} \right)^n \\
 c) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{n}}{4 - \frac{3}{n}} \\
 d) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{4n-1} \right)^n \\
 e) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{n-2} \right)^{\frac{n+3}{n-1}} \\
 f) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+4}{2n^2-1} \right)^{2n-1n+2} \\
 g) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{1}{n} \right)^{\frac{2n+1}{3n-2}}
 \end{aligned}$$

Megoldások: a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3} \right)^{\frac{n^2-2}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3} \right)^{n-\frac{2}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3} \right)^n \cdot \sqrt[n]{3^2} = 0 \cdot 1 = 0$.

b) A határérték és a műveletek kapcsolata miatt: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{1}{n} \right) \left(3 + \frac{2}{n} \right) + \left(-\frac{2}{5} \right)^n = 2 \cdot 3 + 0 = 6$.

$$c) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{n}}{4 - \frac{3}{n}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{4n-1} \right)^n = 0$, mert az alap egy $\frac{1}{4}$ -hez tartó sorozat, ezért a rendőr-elv segítségével látható, hogy kisebb és nagyobb, mint egy 1-nél kisebb alapú, tehát 0-hoz tartó sorozat.

e) Hasonlóan, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{n-2} \right)^{\frac{n+3}{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{n-2} \right)^{1+\frac{4}{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{n-2} \right)^{n-1} \sqrt[n-1]{\left(\frac{2n+1}{n-2} \right)^4} = 2 \cdot 1 = 2$.

f) Mivel az alap egy 0-hoz, a kitevő pedig 2-höz tartó sorozat, ezért $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+4}{2n^2-1} \right)^{\frac{2n-1}{n+2}} = 0$.

$$g) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{1}{n} \right)^{\frac{2n+1}{3n-2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{1}{n} \right)^{\frac{2}{3} + \frac{7}{9n-6}} = 2^{\frac{2}{3}}.$$

14) Számítsuk ki az alábbi határértékeket!

$$\begin{array}{ll}
 a) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{3n^2 + n + 1} & g) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n^3 - 1} + \sqrt[3]{3n^2 - 2n^3 - 2}) \\
 b) \lim_{n \rightarrow \infty} (9n\sqrt{n} - 2n^2 - 3\sqrt{n}) & h) \lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 - \sqrt{n^4 + 1}) \\
 c) \lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 + \sqrt{n^4 + 3n^2 + 1}) & i) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n^3 - 1} - \sqrt{n^3 + 1}) \\
 d) \lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 - \sqrt{2n + 1}) & j) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n^2 - 1} - \sqrt[3]{n^3 + 3n + 5}) \\
 e) \lim_{n \rightarrow \infty} (3n^2 - \sqrt{n^2 + 2n - 5}) & k) \lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{2n^2 + 3n + 1}) \\
 f) \lim_{n \rightarrow \infty} (2n - \sqrt[3]{n^3 - 2n^2 + 3}) &
 \end{array}$$

Megoldások: a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{3n^2 + n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} n\sqrt{3 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} = +\infty \cdot \sqrt{3} = +\infty$.

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (9n\sqrt{n} - 2n^2 - 3\sqrt{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2(9\frac{1}{\sqrt{n}} - 2 - 3\frac{1}{n\sqrt{n}}) = +\infty \cdot (-2) = -\infty$.

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 + \sqrt{n^4 + 3n^2 + 1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(1 + \sqrt{1 + \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^4}}\right) = +\infty \cdot 2 = +\infty$.

A d) és e) pontokban hasonlóan kapjuk, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 - \sqrt{2n + 1}) = +\infty$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} (3n^2 - \sqrt{n^2 + 2n - 5}) = +\infty$.

f) $\lim_{n \rightarrow \infty} (2n - \sqrt[3]{n^3 - 2n^2 + 3}) = \lim_{n \rightarrow \infty} n(2 - \sqrt[3]{1 - \frac{2}{n} + \frac{3}{n^3}}) = +\infty \cdot (2 - 1) = +\infty$.

g) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n^3 - 1} + \sqrt[3]{3n^2 - 2n^3 - 2}) = \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[3]{1 - \frac{1}{n^3}} + \sqrt[3]{\frac{3}{n} - 2 - \frac{2}{n^3}}) = +\infty \cdot (1 - \sqrt[3]{2}) = -\infty$.

h) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 - \sqrt{n^4 + 1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^4} - \sqrt{n^4 + 1})(\sqrt{n^4} + \sqrt{n^4 + 1})}{\sqrt{n^4} + \sqrt{n^4 + 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{\sqrt{n^4} + \sqrt{n^4 + 1}} = 0$.

i) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n^3 - 1} - \sqrt{n^3 + 1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[3]{1 - \frac{1}{n^3}} - \sqrt{n + \frac{1}{n^2}}) = (+\infty)(-\infty) = -\infty$.

j) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n^2 - 1} - \sqrt[3]{n^3 + 3n + 5}) = \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[3]{\frac{1}{n} - \frac{1}{n^3}} - \sqrt[3]{1 + \frac{3}{n^2} + \frac{5}{n^3}}) = +\infty \cdot (-1) = -\infty$.

k) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{2n^2 + 3n + 1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} n(1 - \sqrt{2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}) = -\infty$.

15) Számítsuk ki az alábbi határértékeket:

$$\begin{aligned}
 a) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-1}{n+3} \right)^{\frac{3n^2-2n+1}{2-5n}} \\
 b) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2-2n+1}{n^2-3n+2} \right)^{\frac{2n-1}{3-4n}} \\
 c) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2-3n+5}{3n^2-n+1} \right)^{\frac{2n-3}{n^2-3n+4}} \\
 d) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3-n}{2n+1} \right)^{\sqrt{n}-\sqrt[3]{n}} \\
 e) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[n]{n} \cdot \frac{n-1}{5n+3} + \frac{4n-3}{5n+2} \right) \\
 f) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2-n+1}{3n-2} \right)^n \\
 g) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+3}{2n-1} \right)^{\frac{2n+4}{3-n}}
 \end{aligned}$$

Eredmények: a) $2^{-\infty} = 0$, b) $3^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$, c) $\left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1$, d) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{+\infty} = 0$,
 e) $1 \cdot \frac{1}{5} + \frac{4}{5} = 1$, f) $+\infty^{+\infty} = +\infty$, g) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$

16) Számítsuk ki!

$$\begin{aligned}
 a) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} & g) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^{2n} \\
 b) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{n} \right)^n & h) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3+1}{n^3+4} \right)^{n^3} \\
 c) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2} & i) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+2}{3n+5} \right)^{5n} \\
 d) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{3n} & j) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3^{3n}}{\left(3 + \frac{1}{n}\right)} \right)^{3n} \\
 e) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)^n & k) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{2n} \right)^{3n+1} \right] \\
 f) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{n}{n^2+1} \right)^{n+1} & l) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3+n^2+5n+7}{n^3+2n^2+3n+8} \right)^{\frac{5n^2+8n+2}{3n+6}}
 \end{aligned}$$

Eredmények: a) e , b) e^3 , c) $e^{+\infty} = +\infty$, d) e^3 , e) $e^0 = 1$, f) e , g) e^{-2} ,
 h) e^{-3} , i) e^5 , j) $+\infty$, k) $e \cdot e^{\frac{3}{2}} = e^{\frac{5}{2}}$, l) $e^{-\frac{5}{3}}$.

17) Számítsuk ki!

$$\begin{array}{ll}
 a) \lim_{n \rightarrow \infty} (2^n + 3^n + 4^n) & f) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^n + 3^n}{3^n + 4^n} \right) \\
 b) \lim_{n \rightarrow \infty} (2^n - 3^n - 5^n) & g) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2 \cdot 3^n + 5^n}{5^n - 2^n} \right) \\
 c) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^n + 3^n}{4^n + 5^n} \right) & h) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2 \cdot 5^n - 3 \cdot 2^n}{4 \cdot 3^n - 5 \cdot 2^n} \right) \\
 d) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^n + 5^n}{3^{n+1} + 5^{n+1}} \right) & i) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3 \cdot 4^n - 5^{n+1}}{2^n - 4 \cdot 3^n} \right) \\
 e) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^n + 3^n + 5^n}{3^{n-1} + 5^{n-1}} \right) &
 \end{array}$$

Eredmények: a) $+\infty$, b) $-\infty$, c) 0, d) $\frac{1}{5}$, e) 5, f) 0, g) 1, h) $+\infty$, i) $+\infty$.

18) Számítsuk ki az alábbi határértékeket:

$$\begin{array}{ll}
 a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} + \left(\frac{3}{4} \right)^n \right)^n & i) \lim_{n \rightarrow \infty} (2n^2 - \sqrt{n^2 - n + 1}) \\
 b) \lim_{n \rightarrow \infty} 4 \cdot [(0, 3)^n - 1] & j) \lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{n^2 - n + 2}) \\
 c) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(-\frac{3}{7} \right)^n + 4 - \frac{3}{n^2} \right) & k) \lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt[3]{n^3 - 1}) \\
 d) \lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 + 2n - 3) & l) \lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 - \sqrt{n^4 - 2n^3 + 4}) \\
 e) \lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 - 2n + 1) & m) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n^3 - 1} - \sqrt[3]{n^3 + 3}) \\
 f) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 + n + 1} & n) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n^3 + 1} - \sqrt[3]{2n^3 + 3n - 1}) \\
 g) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 3n - 2}{4n - 3n^2 + 1} & o) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n^3 - 3n^2 - 1} - \sqrt[3]{n^3 - 1}) \\
 h) \lim_{n \rightarrow \infty} (3n - 5n^2 + 1) & p) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n^3 + 1} - \sqrt[3]{n^3 - 2})
 \end{array}$$

Eredmények: a) 0, b) -4 , c) 4, d) $+\infty$, e) $+\infty$, f) $+\infty$, g) $-\frac{2}{3}$, h) $-\infty$, i) $+\infty$, j) $\frac{1}{2}$, k) 0, l) $+\infty$, m) 0, n) $+\infty(1 - \sqrt[3]{2}) = -\infty$, o) -1 , p) 0.

19) Határozzuk meg a határértékekét:

- a) $\left(\frac{2^n + 2^{-n}}{2^{-n} + 3^n}, n \in \mathbb{N}^* \right)$
b) $\left(\frac{\sqrt[4]{n^3 + n} - \sqrt{n}}{n + 2 + \sqrt{n+1}}, n \in \mathbb{N} \right)$
c) $\left(\frac{3}{1 - \sqrt[n]{2}}, n \in \mathbb{N}^* \right)$
d) $\left(1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}, n \in \mathbb{N}^* \right)$
e) $\left(\sqrt[2]{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \dots \cdot \sqrt[2n]{2}, n \in \mathbb{N} \right)$
f) $\left(\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \dots \right)$
f) $\left(\sqrt{\alpha}, \sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha}}, \sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha}}}, \dots \right)$

20) A rendőr-elv alkalmazásával határozzuk meg a következő sorozatok határértékét:

- a) $a_n = \frac{1}{n^2 + 1} + \frac{1}{n^2 + 2} + \dots + \frac{1}{n^2 + n} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$
b) $a_n = \frac{1}{\sqrt{9n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{9n^2 + 2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{9n^2 + n}} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$
c) $a_n = \frac{n}{n+1} + \frac{n+1}{n+2} + \dots + \frac{n+(n-1)}{n+n} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$

Útmutatás: a) $\frac{1}{n^2 + n} \leq \frac{1}{n^2 + k} \leq \frac{1}{n^2 + 1} \quad (k \in \{1, 2, 3, \dots, n\})$, ezért $b_n = \frac{n}{n^2 + n} \leq a_n \leq \frac{n}{n^2 + 1} = c_n$. Mind a $(b_n, n \in \mathbb{N}^*)$ sorozat, mind pedig a $(c_n, n \in \mathbb{N}^*)$ a 0-hoz tart, így a rendőr-elv alapján az $(a_n, n \in \mathbb{N}^*)$ is.

b) $\frac{1}{\sqrt{9n^2 + n}} \leq \frac{1}{\sqrt{9n^2 + k}} \leq \frac{1}{\sqrt{9n^2 + 1}} \quad (k \in \{1, 2, 3, \dots, n\})$, ezért $b_n = \frac{n}{\sqrt{9n^2 + n}} \leq a_n \leq \frac{n}{\sqrt{9n^2 + 1}} = c_n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$. Mind a $(b_n, n \in \mathbb{N}^*)$, mind pedig a $(c_n, n \in \mathbb{N}^*)$ az $\frac{1}{3}$ -hoz tart, így a rendőr-elv alapján az $(a_n, n \in \mathbb{N}^*)$ is.

c) Hasonlóan kapjuk, hogy a határérték $+\infty$.

21) A rendőr-elv alkalmazásával határozzuk meg a következő sorozatok határértékét:

$$a) a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+n)^2} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

$$b) a_n = \sqrt[n]{1^n + 2^n + \cdots + n^n}$$

$$c) a_n = \frac{1}{\sqrt[p]{n^p+1}} + \frac{1}{\sqrt[p]{n^p+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[p]{n^p+n}} \quad (p, n \in \mathbb{N}^*)$$

$$d) a_n = \sqrt[n]{1^n + 2^n + \cdots + 10^n}$$

$$e) a_n = \frac{1}{n+1} \left(\cos \frac{\pi}{n} + \cos \frac{\pi}{n+1} + \cdots + \cos \frac{\pi}{n+n} \right)$$

$$f) a_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

$$g) a_n = \frac{1}{(2n)^2} + \frac{1}{(2n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n+n-1)^2}.$$

22) Igazoljuk, hogy a következő sorozatok konvergensek:

$$a) x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + 1), \quad n \geq 2, \quad x_1 = 2$$

$$b) y_n = \frac{1}{y_{n-1} + 1}, \quad n \geq 1, \quad y_0 = 0$$

$$c) z_n = \sqrt{z_{n-1} + 2}, \quad n \geq 2, \quad z_1 = \sqrt{2}$$

$$d) t_n = \alpha + t_{n-1}, \quad n \geq 1, \quad t_0 = 0$$

$$e) u_n = \frac{1}{2} \cdot \left(u_{n-1} + \frac{\alpha}{u_{n-1}} \right), \quad n \geq 1, \quad u_0 = 1$$

$$f) v_n = v_{n-1} + v_{n-2}, \quad v_0 = 1, \quad v_1 = 1 \quad (\text{Fibonacci-sorozat}).$$

23) Az alábbi sorozatok közül melyek az $(\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*)$ sorozat részsorozatái?

$$a) \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right)$$

$$b) \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \dots \right)$$

$$c) \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \dots \right)$$

$$d) \left(1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots \right)$$

24) Adjuk meg az alábbi sorozatok egy monoton részsorozatát:

$$a) \left(\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right) \quad b) \left(\frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right) \quad c) ((-1)^{5n+4}, n \in \mathbb{N}^*)$$

25) Számítsuk ki:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a \cdot n + b\sqrt{cn^2 + 1}),$$

ha a) $a = 1$; $b = 1$; és $c = 1$ vagy b) $a = 2$; $b = -1$; és $c = 1$ vagy c) $a = 1$; $b = -1$; és $c = 2$ vagy d) $a = 1$; $b = -1$; és $c = 1$

26) Számítsuk ki:

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a^2 n^2 + bn + 1}, \text{ ha } a \in \mathbb{R}, b > 0;$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} (n + 1 - \sqrt{an^2 + 2n + 1}), \text{ ahol } a > 0;$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} (2n - \sqrt{an^2 + n + 1}), \text{ ahol } a > 0;$$

$$d) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{an^2 + 1} - 3n), \text{ ahol } a > 0;$$

$$e) \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{an^2 + bn + c} - n), \text{ ahol } a > 0;$$

$$f) \lim_{n \rightarrow \infty} (n + \sqrt[3]{1 + an^3}), \text{ ahol } a \in \mathbb{R};$$

$$g) \lim_{n \rightarrow \infty} (n + 1 - \sqrt[3]{1 + an^3}), \text{ ahol } a \in \mathbb{R};$$

$$h) \lim_{n \rightarrow \infty} (2n - 1 + \sqrt[3]{1 - an^3}), \text{ ahol } a \in \mathbb{R};$$

$$i) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n^2 + n - 1} - an), \text{ ahol } a \in \mathbb{R}.$$

27) Számítsuk ki a következő határértékeket, ha $a, b > 0$ valós számok:

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2a^n - 3}{a^n + 1} \quad d) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n + 3^n}{4^n + 5^n}$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n - a^{-n}}{a^n + a^{-n}} \quad e) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n + 5^n}{4^n - 5^n}$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n + b^n}{a^{n+1} + b^{n+1}} \quad f) \lim_{n \rightarrow \infty} (a^n - b^n).$$

28) Számítsuk ki:

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt{\frac{n+1}{n+2}} - 1 \right) \quad d) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n+2} + \sqrt{n+3})$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+4} - \sqrt{n+3}} \quad e) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{5n^2 + 2n + 2}}{4n + 1}$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \quad f) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^2 + 2} - \sqrt[3]{n^2 + 1}}$$

$$\begin{aligned}
g) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^3+2} - \sqrt[3]{n^3+1}} & k) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{n^2}(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n-1}) \\
h) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+n+1} - 2\sqrt{n^2-n+1}}{n} & l) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[12]{n} \cdot \frac{\sqrt[4]{n+1} - \sqrt[4]{n}}{\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}} \\
i) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n^3+n^2} - \sqrt{n^2+2n}) & m) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} n\sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} - 2\sqrt{n}) \\
j) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n}) & n) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} n^k \left(\sqrt{\frac{n+2}{n+5}} - 1 \right), (k \in \mathbb{N}).
\end{aligned}$$

29) Határozzuk meg $a \in \mathbb{R}$ értékét úgy, hogy

$$\begin{aligned}
a) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(1-a)^2 n^4 + n^2 + 1}}{an^2} = 2 \text{ legyen;} \\
b) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(1-a^2)^2 n^2 + 1}}{n} = 3 \text{ legyen.}
\end{aligned}$$

30) Számítsuk ki:

$$\begin{aligned}
a) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^5 - 1}{\left(2 + \frac{1}{n}\right)^3 - 8} \\
b) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + a + a^2 + \dots + a^n}{1 + b + b^2 + \dots + b^n} \quad \text{ha } a, b \in (0, 1) \cup (1, \infty).
\end{aligned}$$

31) Határozzuk meg az a , b , és c valós számok értékét úgy, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(an + \sqrt{2 + bn + cn^2}) = 1 \text{ legyen.}$$

Eredmény: $a = -1$, $b = 0$, $c = 1$.

32) Határozzuk meg $a, b \in \mathbb{R}$ értékeit úgy, hogy fennálljon a következő egyenlőség:

$$\begin{aligned}
a) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{1 - n^3} - an - b) = 0; \\
b) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2n^2 + 4n + 1} - an - b) = 2\sqrt{2} \\
c) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{3n^3 + 2n^2 + n + 1} - an - b) = \frac{1}{\sqrt[3]{9}}.
\end{aligned}$$

33) Ha $a_0, a_1, a_2, \dots, a_k$ valós számok és $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_k = 0$, akkor számítsuk ki a következő határértéket rögzített $k \in \mathbb{R}$ esetén:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_0 \sqrt[3]{n} + a_1 \sqrt[3]{n+1} + a_2 \sqrt[3]{n+2} + \dots + a_k \sqrt[3]{n+k}).$$

34) Számítsuk ki:

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{2n^3 + n + 3};$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + \dots + n}{n^2 + 2n};$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 3^2 + \dots + (2n-1)^2}{n^3 - n^2};$$

$$d) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^2 + 4^2 + \dots + (2n)^2}{1^2 + 3^2 + \dots + (2n-1)^2};$$

$$e) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n!}{(n+1)!};$$

$$f) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 + \dots + n(n+3)}{C_{n+3}^n};$$

$$g) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\left(x + \frac{a}{n} \right) + \left(x + \frac{2a}{n} \right) + \dots + \left(x + \frac{(n-1)a}{n} \right) \right] \quad a, x \in \mathbb{R} \text{ rögzített.}$$

35) Számítsuk ki az $(a_n, n \geq 1)$ sorozat határértékét, ha:

$$a) a_n = \frac{1^3 + 2^3 + \dots + n^3}{n^3} - \frac{n}{4};$$

$$b) a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)};$$

$$c) a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+2)};$$

$$d) a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)};$$

$$e) a_n = \sum_{k=1}^n \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2};$$

$$f) a_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!};$$

$$g) a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)! + k!};$$

$$h) a_n = \sum_{k=1}^n \frac{k+2}{k! + (k+1)! + (k+2)!};$$

$$i) a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)};$$

$$j) a_n = \prod_{k=2}^n \frac{k^2 + k - 2}{k(k-1)};$$

36) Igazoljuk, hogy a következő sorozatok monotonok és korlátosak, majd számítsuk ki a határértéküket!

$$\begin{array}{ll} a) a_n = \frac{n}{2^n} & d) a_n = \frac{n}{a^p}, \quad a \in (-1, 1), p \in \mathbb{R} \text{ rögzített} \\ b) a_n = nq^n \quad (q \in (0, 1)) & e) a_n = \frac{n!}{n^n} \\ c) a_n = \frac{2^n}{n!} & f) a_n = \frac{\alpha^n}{n!}, \alpha > 1, \alpha \in \mathbb{R}. \end{array}$$

37) A Cesaro-Stolz tétel segítségével számítsuk ki a következő határértékeket!

$$\begin{array}{l} a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{n}}{n} \\ b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}}{n} \\ c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k}{n^{k+1}} \quad (k \in \mathbb{N}) \\ d) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}{\ln n} \end{array}$$

Emlékeztető: Cesaro-Stolz-tétel: Ha az $x = (x_n, n \in \mathbb{N})$ és $y = (y_n, n \in \mathbb{N})$ olyan sorozatok, melyekre fennáll, hogy $y_n > 0$ ($n \in \mathbb{N}$), y egy nem korlátos, monoton növekvő sorozat, továbbá létezik a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = l$ határérték, akkor létezik a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = l$ határérték is.

38) Számítsuk ki:

$$\begin{array}{l} a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}} \\ b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (\ln 2 + \ln 3 + \dots + \ln n) \\ c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2^2\sqrt{2} + 3^2\sqrt[3]{3} + \dots + n^2\sqrt[n]{n}}{n(n+1)(n+2)} \\ d) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{nn} \right) \\ e) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \dots + \frac{1}{\ln n} \right) \end{array}$$

39) a) Lássuk be, hogy ha az $(x_n, n \in \mathbb{N})$ egy monoton sorozat, akkor a

$$\left(\sigma_n = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}, \quad n \in \mathbb{N}^* \right)$$

sorozat is monoton;

b) ha $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = l$.

40) a) Lássuk be, hogy ha az $(x_n, n \in \mathbb{N})$ sorozat pozitív tagú, és $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l$, akkor $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n}$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = l$.

b) Számítsuk ki a következő sorozatok határértékét!

$$x_n = \sqrt[n]{n!}$$

$$y_n = \sqrt[n]{n+1}$$

$$x_n = \sqrt[n]{n^3 - 3n + 1}$$

$$x_n = \sqrt[n]{\cos \frac{1}{2} \cdot \cos \frac{1}{3} \cdot \dots \cdot \cos \frac{1}{n}}$$

$$x_n = \sqrt[n]{\frac{2n+1}{n}}$$

41) Számítsuk ki a következő sorozatok határértékét!

$$a) x_n = \sqrt[n]{n}$$

$$b) x_n = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$$

$$c) x_n = \frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2) \dots (n+n)}$$

$$d) x_n = \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{(n!)^2}}$$

$$e) x_n = \sqrt[n]{\frac{3^{3n}(n!)^3}{(3n)!}}$$

$$f) x_n = \frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}}$$

$$g) x_n = \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\ln n}}$$

$$h) x_n = \sqrt[n]{\frac{(a+1)(a+2) \dots (a+n)}{n!}} \quad (a > 0)$$

$$i) x_n = \sqrt[n]{\sum_{k=0}^n C_n^k}$$

$$j) x_n = \frac{1}{n} \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n (a+k)} \quad (a > 0).$$

42) Adjuk meg az alábbi sorozatok alsó és felső határértékét!

$$a) (x_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N})$$

$$b) \left(y_n = 3 \left(1 - \frac{1}{n} \right) + 2 \cdot (-1)^n, n \in \mathbb{N} \right)$$

Feladatok valós számsorokkal

1) A részletösszegek sorozatának vizsgálatával igazoljuk, hogy az alábbi sorok konvergensnek és határozzuk meg az összegüket!

$$a) \sum_{k=0}^{\infty} 100 \cdot (0,9)^k$$

$$b) 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \dots + \frac{(-1)^n}{3^n} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{3^k}$$

$$c) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^k} + \frac{1}{5^k} \right)$$

$$d) \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{7} \right)^k$$

Megoldás: a) A geometriai sorok összegképlete alapján $\sum_{k=0}^{\infty} 100 \cdot (0,9)^k = 100 \cdot \frac{1}{1-0,9} = 1000$; továbbá $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{3^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3} \right)^k = \frac{1}{1 - (-\frac{1}{3})} = \frac{3}{4}$; és $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^k} + \frac{1}{5^k} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^k + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5} \right)^k = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{5}} = 2 + \frac{5}{4} = \frac{13}{4}$.

A d) pontban meglátjuk, hogy a szummációs index $k = 1$ -től megy, ezért hozzáadva és kivonva az 1-et, a következőhöz jutunk: $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{7} \right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{7} \right)^k - 1 = \frac{1}{1 - \frac{1}{7}} - 1 = \frac{1}{6}$.

2) A részletösszegek sorozatának vizsgálatával döntsük el, hogy az alábbi sorok konvergensnek-e és határozzuk meg az összegeiket!

$$a) \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} + \dots$$

$$b) \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)} + \dots$$

$$c) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$

$$d) \frac{5}{6} + \frac{13}{36} + \dots + \frac{3^n + 2^n}{6^n} + \dots$$

$$\begin{aligned}
e) & \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots + \frac{1}{(3n-2) \cdot (3n+1)} + \dots \\
f) & \frac{1}{1 \cdot 7} + \frac{1}{3 \cdot 9} + \dots + \frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+5)} + \dots \\
g) & \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+3)} + \dots \\
h) & \frac{3}{4} + \frac{5}{36} + \dots + \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} + \dots \\
i) & \frac{1}{9} + \frac{2}{225} + \dots + \frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2} + \dots \\
j) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}
\end{aligned}$$

Megoldás: A definíció alapján a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ sor akkor és csak akkor konvergens, ha az n -edik részletösszegek ($S_n = \sum_{k=0}^n a_k = a_0 + a_1 + \dots + a_n$, $n \geq 0$) sorozata konvergens. Ekkor definíció szerint $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$. A fenti sorok konvergenciáját tehát a definíció alapján vizsgálva arra törekszünk, hogy az S_n kifejezést a lehető legrövidebb, ún. zárt alakba írjuk, és így módon számoljuk az S_n határértékét.

a) Elemi törtek összegére bontjuk a sor n -edik tagját: $\frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)}$, ahonnan $S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$. Ezért $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$, következésképpen a sor konvergens és összege 1.

b) Hasonló gondolatmenettel: $\frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$, ezért $S_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right)$. Így a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2}$, ezért a sor konvergens és összege 1.

c) A k -adik tagot elemi törtek összegére bontjuk:

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1} + \frac{C}{k+2} = \frac{A(k^2+3k+2) + B(k^2+2k) + C(k^2+k)}{k(k+1)(k+2)},$$

tehát $A = \frac{1}{2}$, $B = -1$, $C = \frac{1}{2}$ következik, s így $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k+2} \right)$.

A részletösszezsorozat n -edik tagja: $S_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right)$, eképpen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right) = \frac{1}{4}.$$

d) A $\frac{3^n + 2^n}{6^n} = \frac{3^n}{6^n} + \frac{2^n}{6^n} = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}$ átalakítást elvégezve $S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} = (\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}) + (\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1 - \frac{1}{3^n}}{1 - \frac{1}{3}} = 1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3^n}$. Ebből a következő összegre jutunk: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 2^n}{6^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}) = \frac{3}{2}$.

e) $\frac{1}{3}$, f) $\frac{23}{90}$, g) $\frac{11}{18}$, h) 1, i) $s_n = \frac{1}{8} \left(1 - \frac{1}{(2n+1)^2} \right)$, így $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2} = \frac{1}{8}$.

Ha a sor n -edik részletösszezsorozatát, $(S_n, n \in \mathbb{N})$ -et nem tudjuk zárt alakra hozni, akkor a konvergenciáját a Leibniz-szabály, a gyökkritérium, a hányadoskritérium, vagy az összehasonlítási (majorálási) kritérium valamelyikével tudjuk vizsgálni. Ilyenkor általában nem tudjuk megadni a sor összegét, de el tudjuk dönteni, hogy konvergens-e.

3) Döntse el, hogy az alábbi sorok közül melyek konvergenssek!

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n^3}{10^n}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{2^{n-1}}$

f) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n+1}{3^n}$

g) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n+1}{2n+1}$

Útmutatás: A Leibniz-kritériummal egyszerű számolás eredményezi a válaszokat.

4) A gyökkritérium vagy a hányadoskritérium alapján igazoljuk, hogy az alábbi sorok konvergenssek:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{5^n}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$

f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n^2}}{n!}$

$$\begin{array}{ll}
g) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^3} & l) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2006}{2n+7} \right)^n \\
h) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^2} & m) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} \\
i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{((n+2)!)^3}{(2n)! \cdot (n-1)!} & n) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)! 2^n}{n^n} \\
j) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^n} & o) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(6+1)(2 \cdot 6+1) \dots (n \cdot 6+1)}{(7+1)(2 \cdot 7+1) \dots (n \cdot 7+1)} \\
k) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n} \right)^n &
\end{array}$$

- Megoldások:** a) A gyökkritérium alapján $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{2} = \frac{1}{2} < 1$, miszerint a sor konvergens.
- j) A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^n}$ sor konvergens a gyökkritérium alapján, mivel a $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log n} = 0 < 1$.
- k) A $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{2} < 1$ miatt adódik a vizsgált sor konvergenciája.
- l) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2006}{2n+7} = \frac{1}{2} < 1$.
- m) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt[n]{n})^2}{2} = \frac{1}{2} < 1$.
- n) Alkalmazzuk a hányadoskritériumot: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! 2^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{(n-1)! 2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n+1} = \frac{2}{e} < 1$. A vizsgált sor tehát konvergens.
- o) Hasonlóan, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(6+1)(2 \cdot 6+1) \dots (n \cdot 6+1)}{(7+1)(2 \cdot 7+1) \dots (n \cdot 7+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)6+1}{(n+1)7+1} = \frac{6}{7} < 1$.

5) Döntsük el, hogy az alábbi sorok konvergensek-e!

$$\begin{array}{ll}
 a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1000^n}{n!} & f) \frac{1000}{1} + \frac{1000 \cdot 1001}{1 \cdot 3} + \frac{1000 \cdot 1001 \cdot 1003}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \dots \\
 b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} & g) \frac{4}{2} + \frac{4 \cdot 7}{2 \cdot 6} + \frac{4 \cdot 7 \cdot 10}{2 \cdot 6 \cdot 10} + \dots \\
 c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1.5)^n n!}{n^n} & h) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(2 + \frac{\cos nx}{2})^n} \\
 d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n} & i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(2 + \frac{1}{n})^n} \\
 e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}} & j) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{(2n^2 + n + 1)^{\frac{n+1}{2}}} \\
 & k) \sin \frac{\pi}{2} + 4 \sin \frac{\pi}{4} + \dots + n^2 \sin \frac{\pi}{2^n} + \dots \\
 l) x + \frac{2x^2}{3} + \frac{2^2 x^3}{5} + \frac{2^3 x^4}{7} + \dots + \frac{2^{n-1} x^n}{2n-1} + \dots \\
 m) x + \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 3} x^2 + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 3 \cdot 5} x^3 + \dots + \frac{n!}{1 \cdot 3 \dots (2n-1)} x^n + \dots \\
 n) x + \frac{x^4}{1 \cdot 2} + \frac{x^9}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{x^{n^2}}{n!} + \dots \\
 o) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n}{(n+1)(n+2) \dots (2n)} \\
 p) \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n^2}
 \end{array}$$

Eredmények: a), b) és c) konvergensek; d) divergens; e), f), g), h), i), j), k) konvergens, l) $|x| < \frac{1}{2}$ esetén konvergens, m) $|x| < 2$ esetén konvergens, n) $|x| \leq 1$ esetén konvergens, o) konvergens, hányadoskritériummal, p) konvergens, hányadoskritériummal.

6) Bizonyítsuk be, hogy divergensek!

$$\begin{array}{ll}
 a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n-1} & d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \\
 b) \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{0,3} & e) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \\
 c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} & f) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt[n]{3}}
 \end{array}$$

7) Döntsük el, hogy az alábbi sorok közül melyek az abszolút és melyek a feltételesen konvergens sorok!

$$\begin{array}{ll}
 a) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} & e) 1 + q + q^2 + \dots + q^n + \dots \\
 b) \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{2^n}{n^2} & f) 1 + q + 2q^2 + \dots + nq^n + \dots \\
 c) \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{\log n}{n} & g) 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} + \dots \\
 d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha} & h) \frac{\sin x}{1\sqrt{1}} + \frac{\sin 2x}{2\sqrt{2}} + \dots + \frac{\sin nx}{n\sqrt{n}} + \dots \\
 & i) \frac{1}{\log 2} - \frac{1}{\log 3} + \dots + \frac{(-1)^n}{\log n} + \dots
 \end{array}$$

Megoldások: c) A $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{\log n}{n} = \frac{\log 2}{2} - \frac{\log 3}{3} + \frac{\log 4}{4}$ váltakozó előjelű sor konvergenciájához elegendő megmutatni, hogy $|a_n| \geq |a_{n+1}|$ ($n = 2, 3, \dots$) és $a_n \rightarrow 0$, azaz hogy tagjainak abszolút értékéből álló sorozat monoton csökkenően tart a nullához. A $\frac{\log n + 1}{n+1} \leq \frac{\log n}{n}$ ekvivalens azzal, hogy $\log \sqrt[n+1]{n+1} \leq \log \sqrt[n]{n}$, ami a log függvény monoton növekvő volta miatt az $\sqrt[n+1]{n+1} \leq \sqrt[n]{n}$ egyenlőtlenséggel egyenértékű. Ez minden $n \in \mathbb{N}$ számra igaz, hiszen a $\sqrt[n+1]{n+1} > \sqrt[n]{n}$ fordított egyenlőtlenségből $n(n+1)$ -edik hatványra emeléssel ellentmondáshoz jutunk. Tehát $(a_n, n \geq 2)$ sorozat monoton csökkenő, és $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \log \sqrt[n]{n} = \log 1 = 0$. A sor tehát feltételesen konvergens, mivelhogy nem abszolút konvergens: $\exists N \in \mathbb{N}$, hogy $a_n = \frac{\log n}{n} > \frac{1}{n}$ ($n \geq N$)

d) A sor $\alpha > 1$ esetén abszolút konvergens, hiszen ekkor a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ sor konvergens. Ha $0 < \alpha \leq 1$, akkor a sor a váltakozó előjelű sorokra vonatkozó kritérium (Leibniz-kritérium) alapján konvergens. A konvergencia itt feltételes, hiszen a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ sor divergens erre az α -ra.

e) Ha $|q| < 1$, akkor a sor abszolút konvergens.

f) A hányadoskritérium alapján a $1 + q + 2q^2 + \dots + nq^n + \dots$ sor abszolút konvergens, hiszen $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|(n+1)q^{n+1}|}{|nq^n|} = |q| < 1$, ezért a sor tagjainak abszolút értékeiből alkotott sorra alkalmazhattuk a hányadoskritériumot.

g) Mivel a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sor konvergens, ezért a $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ sor abszolút konvergens.

h) Láthatjuk, hogy $|\frac{\sin nx}{n\sqrt{n}}| \leq \frac{1}{n\sqrt{n}}$, továbbá a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ sor konvergens, így a vizsgálandó sor abszolút konvergens.

i) A sor konvergens, hiszen az $a_n = \frac{(-1)^n}{\log n}$ sorozat monoton csökkenően tart a nullához, ám nem abszolút konvergens, hiszen $|\frac{(-1)^n}{\log n}| > \frac{1}{n}$. Ekkor tehát feltételesen konvergens.

8) Döntsük el, hogy az alábbi sorok közül melyek az abszolút és melyek a feltételesen konvergens sorok!

$$\begin{aligned}
 a) & 1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} - \dots \\
 b) & \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^3} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2^4} + \dots \\
 c) & \frac{1}{\log 2} - \frac{1}{\log 3} + \frac{1}{\log 4} - \dots \\
 d) & -1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} - \dots \\
 e) & \frac{\sin \alpha}{1} + \frac{\sin 2\alpha}{4} + \frac{\sin 3\alpha}{9} + \dots \\
 f) & 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots \\
 g) & \frac{1}{3} - \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^3 - \left(\frac{4}{9}\right)^4 + \dots
 \end{aligned}$$

Eredmények: a) abszolút konvergens: $|a_n| = \frac{1}{(2n-1)^2} < \frac{1}{n^2}$.

e) abszolút konvergens: $|a_n| = \frac{|\sin n\alpha|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$.

g) $|a_n| = \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n < \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

9) Az összehasonlítókritérium alapján döntsük el, hogy az alábbi sorok konvergens-e:

$$\begin{aligned}
 a) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n-1}} & g) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt[3]{n}} \\
 b) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10n+3} & h) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 100\sqrt{n}}{\sqrt{n^7} - \sqrt{n^5}} \\
 c) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 10} & i) & \sum_{n=1}^{\infty} n^{1000} e^{-n} \cdot \cos n \\
 d) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} & j) & \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \\
 e) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} & k) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n - \log^2 n} \\
 f) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n^2 + 1)}}
 \end{aligned}$$

Megoldások: a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n-1}} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)\sqrt{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)^{\frac{3}{2}}}$ és felhasználjuk, hogy egy adott tagtól kezdve (a második tagtól) teljesül, hogy $\frac{1}{n-1} < 2\frac{1}{n}$, tehát $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)^{\frac{3}{2}}} < (2)^{\frac{3}{2}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$. Tehát a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ konvergens sor majorálja a vizsgált sort, mely emiatt konvergens kell legyen.

b) Sorunk minoránsa egy divergens sor, ezért divergens sort kaptunk: $\frac{1}{10n+3} > \frac{1}{11n}$ ($n \geq 3$), így $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10n+3} > \frac{1}{11} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$

c) $\frac{1}{n^2+10} < \frac{1}{n^2}$ és a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sor konvergens, így adódik a szóban forgó sor konvergenciája.

d) $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$ és a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ sor divergens, így sorunk is az.

e) konvergens

f) $\frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}} < \frac{1}{\sqrt{n(n^2)}} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ miatt konvergens a sor.

g) A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n}}$ sor divergens, ezt úgy látjuk be, hogy megadjuk egy divergens minoránsát. Aképpen becsüljük a sor n -edik tagját, hogy $(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$ -el bővítjük a törtet: $\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n}} = \frac{n+1-n}{\sqrt[3]{n}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} > \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+1})} > \frac{1}{2\sqrt[3]{n+1} \cdot \sqrt{n+1}} > \frac{1}{2\sqrt[3]{n+1} \cdot \sqrt{n+1}} = \frac{1}{2(n+1)}$. A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2(n+1)}$ sor tehát egy divergens minoránsa a vizsgált sornak, mely ez alapján divergens kell legyen.

h) A $\frac{n^2+100\sqrt{n}}{\sqrt{n^7}-\sqrt{n^5}} = \frac{n^2+100\sqrt{n}}{n^2(\sqrt{n^3}-\sqrt{n})} < \frac{n^2+100n^2}{n^2(\sqrt{n^3}-\sqrt{n})} = \frac{101}{\sqrt{n^3}-\sqrt{n}} = \frac{101}{\sqrt{n}(n-1)} < \frac{101}{\sqrt{n-1}(n-1)} = \frac{101}{(n-1)^{\frac{3}{2}}}$. A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)^{\frac{3}{2}}}$ sor konvergens, így a kezdeti sorunk is konvergens.

i) $|n^{1000}e^{-n} \cdot \cos n| \leq n^{1000}e^{-n}$ A $\sum_{n=1}^{\infty} n^{1000}e^{-n}$ sor konvergenciáját beláthatjuk hányadoskritériummal: $\frac{(n+1)^{1000}e^{-(n+1)}}{n^{1000}e^{-n}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{1000} \frac{e^n}{e^{n+1}} \rightarrow \frac{1}{e} < 1$ Így a majoráns sor konvergenciája biztosítja a vizsgált sor konvergenciáját.

j) $a_n = e^{-n} \ln(1 + \frac{1}{n})^{n^2} = ne^{-n} \ln(1 + \frac{1}{n})^n$, ám $(1 + \frac{1}{n})^n < e$ miatt $\ln(1 + \frac{1}{n})^n < \ln e = 1$, így $a_n = ne^{-n} \ln(1 + \frac{1}{n})^n < \frac{n}{e^n}$ A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n}$ sor konvergenciáját lássuk be a hányadoskritériummal: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{n+1}{e^{n+1}}}{\frac{n}{e^n}} = \frac{n+1}{n} \frac{1}{e} \rightarrow \frac{1}{e} < 1$. A szóban forgó sor tehát konvergens.

k) $\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n-\log^2 n} = \frac{1}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(n-\log^2 n)} < \frac{1}{(\sqrt{n}+\sqrt{n})(n-\log^2 n)} =$

$= \frac{1}{2\sqrt{n}(n - \log^2 n)}$ Folytassuk tovább a becslést: $\frac{n\sqrt{n}}{2\sqrt{n}(n - \log^2 n)} \rightarrow \frac{1}{2}$, ezért egy bizonyos n -től kezdve $\frac{n\sqrt{n}}{2\sqrt{n}(n - \log^2 n)} < 1$, tehát $\frac{1}{2\sqrt{n}(n - \log^2 n)} < \frac{1}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$. A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ sor pedig konvergens, mely majorálja sorunkat.

10) Az összehasonlítókritérium alapján döntsük el, hogy az alábbi sorok konvergensek-e:

$$\begin{aligned} a) & \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n}{1+n^2} \right)^2 \\ b) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n}} \\ c) & \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \\ d) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n} \\ e) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}} \end{aligned}$$

11) Mutassuk meg, hogy az alábbi sorok divergensek:

$$\begin{aligned} a) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^n} \\ b) & \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}} \end{aligned}$$

12) Igazoljuk, hogy az alábbi sorok konvergensek és határozzuk meg az összegüket:

$$\begin{aligned} a) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} & d) & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} \\ b) & \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} \right) & e) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \\ c) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} & f) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \end{aligned}$$

13) Az alábbi sorok közül melyek konvergensek?

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{0,01}$$

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n!}$$

$$c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$$

$$d) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$$

$$e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(1+n^2)}}$$

$$f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$$

$$g) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{2^n}$$

$$h) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

$$i) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{10^n}$$

$$j) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$$

$$k) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} n \left(\frac{n}{3}\right)^n$$

$$l) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$$

$$m) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+2)}}$$

14) Igazoljuk, hogy:

$$a) \left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n \right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)q^n \quad \text{ha } |q| < 1$$

$$b) \left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n \right)^3 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2} q^n \quad \text{ha } |q| < 1$$

15) Számítsuk ki az alábbi sorok összegét:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5^n} + \frac{(-1)^n}{n^2} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left((0.5)^n + \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \right)$$

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{(-1)^n}{3^n} \right)$$

16) Az x szám mely értékeire konvergensek az alábbi sorok?

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \cdot n^3} x^n$$

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n \cdot n!} (x+4)^n$$

$$c) \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} x^n$$

$$d) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)! x^n}{n!}$$

$$e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{\sqrt{n}}$$

$$f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{n+1} \cdot (x-1)^n$$