Kalkulus 1/II ZH A csoport ( szám. techn.)

1, Számitsa ki a következő függvények határértékét:

a, $\lim_{x \to 0} \frac{x^2+2x-1}{x^3-x+2} =$

b, $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3-x+2}{-x^2+2x-1}$

c, $\lim_{x \to +\infty} (2^x - 3 \cdot 5^x + 1)$

d, $\lim_{x \to -1} \frac{1}{1+x}$

e, $\lim_{x \to 5} \frac{x^2-4x-5}{x^2-7x+10}$

2, Folytonos-e az alábbi függvény? Ha nem, adja meg azokat az intervallumokat, amelyeken folytonos! Adja meg a szakadási helyek fajtáját!

a, $f(x) = 2x^2+3x-1 \quad (x \in \mathbb{R})$

b, $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{ha } x \neq 1 \\ 3 & \text{ha } x = 1 \end{cases}$

c, $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 1 & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$

3, Számitsa ki az alábbi függvények deriváltját!

a, $f(x) = 5x^7 - 2 \cdot e^x + \frac{1}{x^3} - \frac{3}{\sqrt{x}} + 2$

b, $f(x) = 2 \cdot \sin(7x-1)$

c, $f(x) = \sqrt{x} \cdot (2x+1)^5$

d, $f(x) = \frac{x^2 \cdot 2^x}{\log_2 x}$

Kalkulus 1/II.ZH A csoport – sztlhn. – megoldások

1) a) (8p)
$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2x-1}{x^3-x+2}=\underline{\underline{-\frac{1}{2}}}$$

b) (8p)
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-x+2}{-x^2+2x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}\cdot\overbrace{\left(x-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}^{+\infty}}{\cancel{x^2}\cdot\underbrace{\left(-1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}_{-1}}=\underline{\underline{-\infty}}$$

c) (8p)
$$\lim_{x\to+\infty}\left(2^x-3\cdot 5^x+1\right)=\lim_{x\to+\infty}\underbrace{5^x}_{\downarrow\ +\infty}\Big(\underbrace{\left(\tfrac{2}{5}\right)^x}_{\downarrow\ 0}-3+\underbrace{\left(\tfrac{1}{5}\right)^x}_{\downarrow\ 0}\Big)=\underline{\underline{-\infty}}$$

d) (8p)
$$\lim_{x\to-1}\frac{1}{1+x}\ \text{"}\frac{1}{0}\text{"}$$

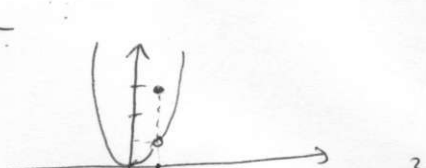
jobb:
$$\lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}}\frac{1}{1+x}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}n=\underline{\underline{+\infty}}$$
$x_n=-1+\frac{1}{n}$

bal:
$$\lim_{\substack{x\to-1\\x<-1}}\frac{1}{1+x}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{-\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}-n=\underline{\underline{-\infty}}$$
$x_n=-1-\frac{1}{n}$

e) (8p)
$$\lim_{x\to5}\frac{x^2-4x-5}{x^2-7x+10}\overset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{=}\lim_{x\to5}\frac{(x-5)(x+1)}{(x-5)(x-2)}=\frac{5+1}{5-2}=\frac{6}{3}=\underline{\underline{2}}$$

2) a) (8p) $f(x)=2x^2+3x-1$
Folytonos, mert → folytonos fv-ek összege folytonos
→ polinom

b) $f(x)=\begin{cases}x^2 & \text{ha } x\neq1\\ 3 & \text{ha } x=1\end{cases}$



(8p) Az $\mathbb{R}\setminus\{3\}$ pontokban folytonos a fv., mert ott a $P(x)=x^2$ polinom (folytonos fv.) el egyezik meg.

Az $x_0=3$ pontban I. fajú szakadási hely van, mely megszüntethető szak. hely, mert $\exists\lim_{x\to1}f(x)=1\neq f(1)=3$

c) (8p) $f(x)=\begin{cases}-1 & \text{ha } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\\ 1 & \text{ha } x\in\mathbb{Q}\end{cases}$ Minden $x_0\in\mathbb{R}$ pontban II-fajú szakadási pont van, tehát sehol sem folytonos, mivel $\nexists\lim_{\substack{x\to x_0\\x>x_0}}f(x)$ és $\nexists\lim_{\substack{x\to x_0\\x<x_0}}f(x)$ bármely $x_0$ esetén.

3, a, $f(x) = 5\cdot x^7 - 2\cdot e^x + \frac{1}{x^3} - \frac{3}{\sqrt{x}} + 2 = 5\cdot x^7 - 2\cdot e^x + x^{-3} - 3\cdot x^{-\frac{1}{2}} + 2$

8p

$f'(x) = 35\cdot x^6 - 2e^x - 3x^{-4} - 3\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}}$

b, $f(x) = 2\cdot\sin(7x-1)$

8p

külső $g(x) = 2\sin x$ $\quad g'(x) = 2\cos x$

belső fv. $h(x) = 7x-1$ $\quad h'(x) = 7$

$f'(x) = 2\cdot\cos(7x-1)\cdot 7$

c, $f(x) = \underbrace{\sqrt{x}}_{u=x^{\frac{1}{2}}}\cdot\underbrace{(2x+1)^5}_{v(x)=(2x+1)^5}$

10p

$g(x) = x^5$ $\quad g'(x) = 5\cdot x^4$

$h(x) = 2x+1$ $\quad h'(x) = 2$

$u' = \frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}}$

$v'(x) = 5\cdot(2x+1)^4\cdot 2$

$f'(x) = u'\cdot v + u\cdot v' = \frac{1}{2\sqrt{x}}(2x+1)^5 + \sqrt{x}\cdot 10(2x+1)^4$

d, $f(x) = \frac{x^2\cdot 2^x}{\log_2 x}$ $\begin{matrix}\}u\\ \}v\end{matrix}$

10p

$u' = 2x\cdot 2^x + x^2\cdot 2^x\cdot\ln 2$

$v' = \frac{1}{x\cdot\ln 2}$

$f'(x) = \frac{u'\cdot v - u\cdot v'}{v^2} = \frac{(2x\cdot 2^x + x^2\cdot 2^x\cdot\ln 2)\cdot\log_2 x - x^2\cdot 2^x\cdot\frac{1}{x\cdot\ln 2}}{\log_2^2 x}$

Σ: 100p