

1, Számítsa ki a következő függvények határértékét:

a,  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x - 1}{x^3 - x + 2} =$

b,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - x + 2}{-x^2 + 2x - 1}$

c,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x+1} \cdot (\sqrt{2x-1} - \sqrt{2x+1})$

d,  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x-3}$

e,  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - x - 2}$

f,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{7x}$

2, Folytonos-e az alábbi függvény? Ha nem, adja meg azt a helyet, amelyen folytonos! Adja meg a szakadási helyek festőjét!

a,  $f(x) = 2 \cdot 4^{5x^2 - 3x + 2} + 3 \quad (x \in \mathbb{R})$

b,  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{ha } x \geq 0 \\ 2x & \text{ha } x < 0 \end{cases}$

c,  $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \\ x & \text{ha } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$

3, Számítsa ki az alábbi függvények deriváltját!

a,  $f(x) = 4x^3 - 5 \cdot 2^x + 3 \log_2 x - \frac{3\sqrt{x^5}}{x\sqrt{x}} - \frac{3}{x^2} + 1$

b,  $f(x) = 5 \cdot (3x + 2)^7 + 3$

c,  $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$

d,  $f(x) = \frac{\sqrt{x} \cdot \sin(2x+1)}{x^2}$

e,  $f(x) = \log_2(\sin^2 x)$

1, a)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x - 1}{x^3 - x + 2} = \frac{4 + 4 - 1}{8 - 2 + 2} = \frac{7}{8}$

b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - x + 2}{-x^2 + 2x - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \cdot (x - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2})}{x^2 \cdot (-1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2})} = \frac{-\infty}{-1} = +\infty$

c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x+1} \cdot (\sqrt{2x-1} - \sqrt{2x+1}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x+1} \cdot \frac{2x-1 - (2x+1)}{\sqrt{2x-1} + \sqrt{2x+1}}$   
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2 \cdot \sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x-1} + \sqrt{2x+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} \cdot (-2\sqrt{2+\frac{1}{x}})}{\sqrt{x} \cdot (\sqrt{2-\frac{1}{x}} + \sqrt{2+\frac{1}{x}})} =$   
 $= \frac{-2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = -1$

d)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x-3} = \frac{\infty}{0} \Rightarrow$  jobb- és baloldali határértéket vizsgál.

$\lim_{x \rightarrow 3+0} \frac{1}{x-3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3+\frac{1}{n}-3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 3-0} \frac{1}{x-3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3-\frac{1}{n}-3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{-\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} -n = -\infty$

e)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+1)} = \frac{2+3}{2+1} = \frac{5}{3}$

f)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{7x} = \lim_{5x \rightarrow 0} \frac{5}{7} \cdot \frac{\sin 5x}{5x} = \frac{5}{7} \cdot 1 = \frac{5}{7}$

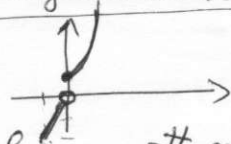
2, a)  $f(x) = 2 \cdot 4^{5x^2-3x+2} + 3$ ,  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvény polynomes, ezért polynomes függvény összetétele:

$f_1(x) = 2 \cdot 4^x + 3$

$f_2(x) = 5x^2 - 3x + 2$  esetén  $f(x) = (f_1 \circ f_2)(x) = f_1(f_2(x))$

$f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  és  $f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvények polynomosak...

b)  $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{ha } x \geq 0 \\ 2x & \text{ha } x < 0 \end{cases}$



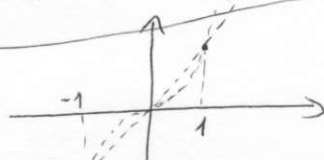
A függvény polynomos az  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ -n, hiszen ott egy-egy polinommal egyezik meg.

Az  $x=0$  helyen a függvénynek ugrása van, ami elsőfajú szakadási hely, hiszen  $\lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0-0} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = \left( \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) \right) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (x^2+1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = \left( \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) \right) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} (2x) = 0$$

c)  $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \\ x & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$



Az  $\mathbb{R} \setminus \{0, -1, 1\}$  helyeken a függvény nem polynomos, esem helyeken minden pontja II. fajtu szakadási hely, mert  $\nexists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  és  $\nexists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

bármilyen  $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, 1\}$  esetén.

Az  $x_0 \in (0, -1, 1)$  esetén a függvény polynomos az  $x_0$  ban, mert  $\exists \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$ ,  $\exists \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 = f(1)$  és

$$\exists \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -1 = f(-1)$$

3, a)  $f(x) = 4x^3 - 5 \cdot 2^x + 3 \log_2 x - \frac{3\sqrt{x^5}}{\sqrt{x}} - \frac{3}{-3 \cdot x^2} + 1$

$$\frac{5}{2} - 1 - \frac{1}{2} = 1$$

7p)  $f'(x) = 12x^2 - 5 \cdot 2^x \cdot \ln 2 + 3 \cdot \frac{1}{x \cdot \ln 2} - 3 + 6x^{-3}$

b)  $f(x) = 5 \cdot (3x+2)^7 + 3$

7p)  $f'(x) = 35 \cdot (3x+2)^6 \cdot 3$

c)  
7p)  $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$   $\rightarrow (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}} \cdot \frac{1(x-1) - (x+1) \cdot 1}{(x-1)^2} = -\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \cdot \frac{1}{(x-1)^2}$$

d)  
8p)  $f(x) = \frac{\sqrt{x} \cdot \sin(2x+1)}{x^2}$   $\left. \begin{array}{l} u \\ v \end{array} \right\}$   $u' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \sin(2x+1) + \sqrt{x} \cos(2x+1) \cdot 2$   
 $v' = 2x$

$$f'(x) = \frac{\left[ \frac{1}{2\sqrt{x}} \sin(2x+1) + \sqrt{x} \cos(2x+1) \cdot 2 \right] x^2 + \sqrt{x} \cdot \sin(2x+1) \cdot 2x}{x^4}$$

e)  
8p)  $f(x) = \log_2(\sin^2 x)$   $\left\{ \begin{array}{l} \log_2 x \rightarrow \frac{1}{x \cdot \ln 2} \\ x^2 \rightarrow 2x \\ \sin x \rightarrow \cos x \end{array} \right.$

$$f'(x) = \frac{1}{\sin^2 x \cdot \ln 2} \cdot 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$$

3, d, más lépés.

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} \cdot \sin(2x+1)}{x^2} = x^{-\frac{3}{2}} \sin(2x+1)$$

$$f' = -\frac{3}{2} \cdot x^{-\frac{5}{2}} \cdot \sin(2x+1) + x^{-\frac{3}{2}} \cdot \cos(2x+1) \cdot 2$$

Az új poligonok az  $x_0$  pontban  $\rightarrow$  I. fajti megoldási hely az  $x_0$   
 $\rightarrow$  megvárni a tetletet  
 $\rightarrow$  megvárni az  $x_0$ -t  
 $\rightarrow$  II. fajti megoldási hely az  $x_0$