1. Mátrixok

1. Definíció. Legyen k és n két pozitív egész szám. Ekkor az $\mathbb{R}$ feletti $k \times n$-es mátrixon egy olyan téglalap alakú táblázatot értünk, melynek k sora, n oszlopa van és elemei valós számok. Ennek megfelelően egy $k \times n$-es mátrix általános alakja:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{bmatrix} \tag{1}$$

1. *Megjegyzés.* A tárgyalás leegyszerűsítése céljából nem vezetjük be külön a vektor fogalmát. Az n koordinátás vektorokat (oszlopvektorok) $n \times 1$-es mátrixoknak tekintjük. A sorvektoroknak pedig az $1 \times n$-es mátrixok feleltethetők meg. A továbbiakban ha külön nem hangsúlyozzuk vektoron mindig oszlopvektort értünk.

2. *Megjegyzés.* A valós számok teste fölötti $k \times n$-es mátrixok halmazát $\mathbb{R}^{k \times n}$ jelöli. A mátrixokat nagybetűkkel $(A, B, \dots)$, az oszlop-vektorokat aláhúzott kisbetűkkel $(\underline{a}, \underline{b}, \dots)$ a sor-vektorokat pedig $(\underline{a}^T, \underline{b}^T, \dots)$ jelekkel jelöljük. (A legutóbbi jelölés magyarázatára lásd a 5) Definíciót.

2. Definíció. Két mátrixon pontosan akkor egyenlő, ha elemeik rendre megegyeznek, azaz legyen $A, B \in \mathbb{R}^{k \times n}$, ekkor

$$A = B \quad \Leftrightarrow \quad a_{ij} = b_{ij} \ 1 \le i \le k \ 1 \le j \le n$$

1.1. Mátrixműveletek

3. Definíció. Legyen $A, B \in \mathbb{R}^{k \times n}$. Ekkor A és B mátrixok összegén egy olyan $C \in$ $\in \mathbb{R}^{k \times n}$ szintén $k \times n$-es mátrixot értünk, amelynek c_{ij} elemeire $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, vagyis

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & & \\ b_{k1} & b_{k2} & \dots & b_{kn} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + a_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{k1} + b_{k1} & a_{k2} + b_{k2} & \dots & a_{kn} + b_{kn} \end{bmatrix}$$

1. Tétel. *A $k \times n$-es mátrixok körében az összeadás asszociatív, kommutatív, létezik nullelelm (az a mátrix, melynek minden eleme 0) és minden elemnek létezik ellentetje, vagyis $(\mathbb{R}^{k \times n}, +)$ struktúra egy Ábel-csoport.*

4. Definíció. Legyen $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$ és $\lambda \in \mathbb{R}$. Ekkor az A mátrix λ-szorosán azt a $C \in \mathbb{R}^{k \times n}$ szintén $k \times n$-es mátrixot értjük, amelynek c_{ij} elemeire $c_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$, vagyis

$$\lambda \cdot A = \lambda \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \cdot a_{11} & \lambda \cdot a_{12} & \dots & \lambda \cdot a_{1n} \\ \lambda \cdot a_{21} & \lambda \cdot a_{22} & \dots & \lambda \cdot a_{2n} \\ \vdots & & & \\ \lambda \cdot a_{k1} & \lambda \cdot a_{k2} & \dots & \lambda \cdot a_{kn} \end{bmatrix}$$

2. Tétel. *Az $\mathbb{R}$-beli skalárokkal való szorzásra az alábbi tulajdonságok igazak ($A, B \in \mathbb{R}^{k\times n}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$):*

i $(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$

ii $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$

iii $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A) =$

iv $1A = A$

1. Következmény. $(\mathbb{R}^{k\times n}, +, \cdot)$ *egy vektortér.*

5. Definíció. Az $A \in \mathbb{R}^{k\times n}$ mátrix A^T transzponáltján azt a $A^T \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrixot értjük, melynek elemeire

$$a^T_{ij} = a_{ji} \;\; 1 \le i \le n \;\; 1 \le j \le k,$$

azaz az A^T mátrixot úgy kapjuk, hogy az A mátrix elemeit a főátlójára tükrözzük.

6. Definíció. Legyen $A \in \mathbb{R}^{k\times n}$ és $B \in \mathbb{R}^{n\times r}$. Ekkor $C = A \cdot B \;\in \mathbb{R}^{k\times r}$ és az i-edik sor j-edik eleme:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{sj} \;\; 1 \le i \le n \;\; 1 \le j \le r.$$

3. *Megjegyzés.* A 6 Definícióból nyilvánvaló, hogy két mátrix pontosan akkor szorozható össze, ha az első mátrixnak (A) ugyanannyi oszlopa van, mint ahány sora a második mátrixnak (B). Az $1\times n$ és az $n\times 1$-es mátrixok tehát összeszorozhatóak, vagyis képezhető egy sorvektor és egy ugyanannyi koordinátával rendelkező oszlopvektor szorzata. Könnyen ellenőrízhető, hogy ez a művelet a középiskolában tanult skaláris szorzatot adja vissza.

$$<\underline{a}, \underline{b}> = \underline{a}^T \cdot \underline{b}$$

4. *Megjegyzés.* A mátrixok szorzásához praktikus írásmód a következő. Helyezzük el az A és a B mátrixot az alábbi ábra szerint.

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1r} \\ b_{21} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2r} \\ b_{31} & \dots & b_{3j} & \dots & b_{3r} \\ \vdots & & & & \\ b_{n1} & \dots & b_{nj} & \dots & b_{nr} \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & & \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & c_{ij} & & \\ & & & & \\ & & & & \end{bmatrix}
\end{array}$$

1.2. Speciális mátrixok

7. Definíció. Az $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixot alsóháromszög-mátrixnak nevezzük, ha a főátló-ja fölött csak 0 elemeket tartalmaz, vagyis $\ell_{ij} = 0$, ha $i < j$.

8. Definíció. Az $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixot felsőháromszög-mátrixnak nevezzük, ha a főátlója alatt csak 0 elemeket tartalmaz, vagyis $u_{ij} = 0$, ha $i > j$.

5. *Megjegyzés.* Az felsőháromszög mátrixokakat szokás U-val (Upper) és R-rel (Right) is jelölni.

9. Definíció. Az $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixot diagonális-mátrixnak nevezzük, ha a főátlóján kívül csak 0 elemeket tartalmaz, vagyis $d_{ij} = 0$, ha $i \neq j$.

1.2.1. Műveletek speciális mátrixokkal

3. Tétel. *Legyen $L_1, L_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ két alsóháromszög-mátrix és $\lambda \in \mathbb{R}$ egy skalár. Ekkor*

a) $\lambda \cdot L_1$

b) $L_1 \pm L_2$,

c) $L_1 \cdot L_2$

szintén alsóháromszög-mátrix.

4. Tétel. *Legyen $U_1, U_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ két felsőháromszög-mátrix és $\lambda \in \mathbb{R}$ egy skalár. Ekkor*

a) $\lambda \cdot U_1$

b) $U_1 \pm U_2$,

c) $U_1 \cdot U_2$

szintén felsőháromszög-mátrix.

5. Tétel. *Legyen $D_1, D_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ két diagonális-mátrix és $\lambda \in \mathbb{R}$ egy skalár. Ekkor*

a) $\lambda \cdot D_1$

b) $D_1 \pm D_2$,

c) $D_1 \cdot D_2$

szintén diagonális-mátrix.

6. *Megjegyzés.* Tekintsük a $D \cdot A$ szorzatot, ahol $D = \mathrm{diag}(d_{11}, d_{22}, \ldots, d_{nn})$ egy diagonális-mátrix és az A mátrix sorai rendre $\underline{a}_1^T, \underline{a}_2^T, \ldots, \underline{a}_n^T$. Ekkor a szorzatmátrix sorai rendre $d_{11}\underline{a}_1^T, d_{22}\underline{a}_2^T, \ldots, d_{nn}\underline{a}_n^T$. Vagyis diagonális mátrix-szal úgy szorzunk, hogy a másik mátrix sorait rendre megszorozzuk a diagonális-mátrix adott sorában lévő elemével.

7. *Megjegyzés.* Tekintsük a $B \cdot D$ szorzatot, ahol $D = \mathrm{diag}(d_{11}, d_{22}, \ldots, d_{nn})$ egy diagonális-mátrix és a B mátrix oszlopai rendre $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_n$. Ekkor a szorzatmátrix sorai rendre $d_{11}\underline{b}_1, d_{22}\underline{b}_2, \ldots, d_{nn}\underline{b}_n$. Vagyis diagonális mátrix-ot úgy szorzunk, hogy a szorzó mátrix oszlopait rendre megszorozzuk a diagonális-mátrix adott oszlopában lévő elemével.

2. Determinánsok

10. Definíció. A $\det(A)\mathbb{R}^{n\times n}\mapsto\mathbb{R}$ leképezés rendelje az A mátrixhoz az alábbi szabály alapján számolt értéket:

$$\det(A) := \sum_{\sigma}(-1)^{I(\sigma)}a_{1\sigma(1))}a_{2\sigma(2))}\cdots a_{n\sigma(n))},$$

ahol σ végigfuta az $1,2,\ldots,n$ számok összes lehetséges permutációján. Vagyis képezzük az összes olyan n tényezős szorzatot, amelyben az A mátrix minden sorából és oszlopából pontosan egy elem szerepel. Ezeket a szorzatokat asszerint lássuk el előjelellel, hogy az oszlopindexek permutációja páros(+) vagy páratlan(−).

8. *Megjegyzés.* Nem kell megijedni a fenti definíciótól. Szinte soha nem számoljuk a determinánst a definíció alapján. A számolásokhoz sokkal praktikusabb a következő tételeket használni.

11. Definíció. Tekintsünk egy n-edrendű determinánst. Hagyjuk el az i-edik sort és a j-edik oszlopot, így egy $(n-1)\times(n-1)$-es determináns keletkezik. Az a_{ij} elemhez tartozó A_{ij} előjeles aldeterminánson ennek a determinánsnak a $(-1)^{i+j}$-szeresét értjük.

6. Tétel. *Kifejtési tétel*
Ha egy sor minden elemét megszorozzuk a hozzátartozó előjeles aldeterminánssal, az így kapott szorzatok összege a determinánssal egyenlő:

$$\det(A) = a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}$$

7. Tétel. *Determináns bármely sora, vagy oszlopa alapján kifejthető.*

8. Tétel. $\det A = \det A^T$

2. Következmény. *Az előző tétel alapján nyilvánvaló, hogy bármely tétel, ami a determináns soraira megfogalmazható, igaz a determináns oszlopaira is.*

9. *Megjegyzés.* A fenti tétel alapján nyilvánvaló, hogy a mátrix determinánsa visszavezethető 2-odrendű determinánsok kiszámítására. Könnyen belátható akár a definíció alapján is, hogy az

$$A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

másodrendű determináns értéke: $\det(A) = ad-bc$.

A következő tulajdonságok a kifejtési tétel alapján könnyedén igazolhatóak.

9. Tétel. *Diagonális, vagy háromszög-mátrix determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata.*

10. Tétel. *Ha a determináns valamelyik sorának minden eleme 0, akkor a determináns értéke 0.*

11. Tétel. *Ha valamelyik sor minden elemét $\lambda\in\mathbb{R}$ számmal megszorozzuk, a determináns értéke is λ-val szorzódik.*

12. Tétel. *Ha a determináns két sora egyenlő (azaz a megfelelő elemekre rendre megegyeznek), akkor a determináns értéke 0.*

13. Tétel. *Ha a determináns két sorát felcseréljük, a determináns értéke* (-1)*-szeresére változik.*

14. Tétel. *Ha a determináns egyik sorához egy másik sor* λ*-szorosát hozzáadjuk, a determináns értéke nem változik.*

10. *Megjegyzés.* Az előző tételek alapján a mátrixot háromszög-mátrixra transzformáljuk, melynek determinánsa megegyezik az eredeti mátrix determinánsával. (Gauss-eliminációszerű lépések)

2.1. Mátrix inverze

12. Definíció. Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix inverzén azt az $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixot értjük, amellyel

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I,$$

ahol I az egységmátrix, vagyis egy olyan diagonális mátrix, amelynek a főátlójában lévő elemek mind 1-esek.

15. Tétel. *Mátrix inverze az alábbi formula alapján határozható meg, ha* $\det A \neq 0$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\mathscr{A}^T,$$

ahol $\mathscr{A}^T$ *az* A *adjungált-mátrixa (FIGYELEM, nem keverendő össze a mátrix adjungáltjával!!!), amelynek* i*-edik sorának* j*-edik eleme a mátrix* A_{ij} *előjeles aldeterminánsa.*

11. *Megjegyzés.* A mátrix inverzét nagyon ritkán számoljuk a fenti tétel alapján. Erre vannak jóval hatékonyabb módszerek (pl. Gauss-Jordan elimináció).

2.1.1. Speciális mátrixok inverze

❶

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Azaz 2×2-es mátrix inverzét úgy kapjuk, hogy a főátlóbeli elemeket felcseréljük, a mellékátlóbelieket pedig -1-gyel szorozzuk, majd beszorozzuk az így kapott mátrixot az eredeti mátrix determinánsának reciprokával ($\frac{1}{\det A}$). (FIGYELEM, a módszer csak 2×2-es mátrix esetén működik.)

❷ Alsóháromszög-mátrix inverze alsóháromszög-mátrix, felsőháromszög-mátrix inverze pedig felsőháromszög-mátrix.

❸

$$D = \mathrm{diag}(d_{11}, d_{22}, \ldots, d_{nn}) = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & d_{22} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & d_{nn} \end{bmatrix}$$

diagonális mátrix inverze a

$$D^{-1} = \mathrm{diag}(\frac{1}{d_{11}}, \frac{1}{d_{22}}, \dots, \frac{1}{d_{nn}}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{d_{11}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{d_{22}} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{d_{nn}} \end{bmatrix}$$

szintén diagonális mátrix.

3. Lineáris egyenletrendszerek

13. Definíció. Az

$$\begin{array}{cccccc} a_{11}x_1+ & a_{12}x_2+ & \dots & a_{1n}x_n = & b_1 = & b_1 \\ a_{21}x_1+ & a_{22}x_2+ & \dots & a_{2n}x_n = & b_2 = & b_2 \\ \vdots & & & & & \\ a_{m1}x_1+ & a_{m2}x_2+ & \dots & a_{mn}x_n = & b_m = & b_m \end{array}$$

alkú rendszert (m egyenletből álló n ismeretlenes) lineáris egyenletrendszernek nevezzük. Azt az $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ szám-n-est, amely kielégít az összes (m darab) egyenletet, az egyenletrendszer megoldásának nevezzük.

12. *Megjegyzés.* A fenti alak helyett gyakran írják a lineáris egyenletrendszert vektoregyenletként a következő formában.

$$A\underline{x} = \underline{b},$$

ahol az $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrix i-edik sorának j-edik eleme az egyenletrendszer a_{ij} együtthatója, a $\underline{b} \in \mathbb{R}^m$ vektor koordinátái rendre az egyes egyenletek jobboldalán található értékek és az $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ vektor az ismeretleneket tartalmazza.

14. Definíció. Legyen $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n \in \mathbb{R}^m$ n darab vektor és $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ n darab szám, ekkor a

$$\underline{v} = \lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2, \dots, \lambda_n \underline{v}_n \in \mathbb{R}^m \in \mathbb{R}^m$$

vektort a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$ vektorok egy lineáris kombinációjának nevezzük.

16. Tétel. *A lineáris egyenletrendszernek pontosan akkor létezik megoldása, ha a jobboldal-vektor előáll az A mátrix oszlopvektorainak lineáris kombinációjaként.*

17. Tétel. *Cramer-szabály*

Legyen $n = m$ és legyen $\det(A) \neq 0$, ekkor a lineáris egyenletrendszernek létezik megoldása és az egyértelmű és az alábbi módon elő is állítható

$$x_j = \frac{D_j}{D},$$

ahol $D = \det(A)$ és a D_j determinánst úgy kapjuk, hogy D-ben a j-edik oszlop helyére a jobboldal-vektort (vagyis b-t) írjuk.

4. Sajátérték-probléma

15. Definíció. Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ négyzetes mátrix. Ha létezik olyan $\lambda \in \mathbb{R}$, hogy valamely $\underline{v} \neq \underline{0}$ vektor esetén

$$A\underline{v} = \lambda \underline{v}, \tag{2}$$

akkor λ-t az A vektor egy sajátértékének nevezzük $\underline{v}$ pedig egy a λ-hoz tartozó sajátvektor.

18. Tétel. *Ha $\underline{v}$ egy λ-hoz tartozó sajátvektor, akkor $c \cdot \underline{v}$, $c \in \mathbb{R}$ is egy a λ-hoz tartozó sajátvektor.*

19. Tétel. *Ha $\underline{v}_1$ és $\underline{v}_2$ λ-hoz tartozó sajátvektorok, akkor $\underline{v}_1 + \underline{v}_2$ is egy a λ-hoz tartozó sajátvektor.*

3. Következmény. *A fenti két tétel alapján nyilvánvaló, hogy az A mátrix adott λ sajátértékéhez tartozó sajátvektorok, kiegészítve a $\underline{0}$ vektorral, vektorteret alkotnak, ezt nevezik a λ sajátértékéhez tartozó sajátaltérnek, jelölése X^{λ}.*

20. Tétel. *A különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok különbözőek, vagyis*

$$X^{\lambda_1} \cap X^{\lambda_2} = \{\underline{0}\}.$$

21. Tétel. *A (2) sajátérték egyenletnek pontosan akkor van a $\underline{0}$ vektortól különböző megoldása, ha*

$$\det(A - \lambda \cdot I) = 0,$$

ahol I az egységmátrix.

16. Definíció. A $\kappa_A(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot I)$ polinomot az A mátrix karakterisztikus polinomjának nevezzük.

4. Következmény. *A sajátértékek a karakterisztikus polinom gyökei.*

22. Tétel. *Diagonáis, vagy háromszög mátrix sajátértékei a főátlóban lévő elemek.*

17. Definíció. Az A és B mátrixokat hasonlónak nevezzük, ha létezik olyan S nem szinguláris mátrix ($\det S \neq 0$), hogy $B = SAS^{-1}$. Jelölése: $A \sim B$.

23. Tétel. *A karakterisztikus polinom invariáns a hasonlósági transzformációra, vagyis* $\det(A - \lambda I) = \det(B - \lambda I)$, *ha $A \sim B$.*

5. Következmény. *Hasonló mátrixok sajátérétkei azonosak.*

6. Következmény. *Gyakran használt módszer a sajátértékek meghatározása, hogy a mátrixot hasonlósági transzformációkkal speciális alakú mátrixra transzformáljuk (diagonális-, vagy háromszögmátrix).*