I Hiperbolikus fv-ek és inverzeik (area fv-ek)

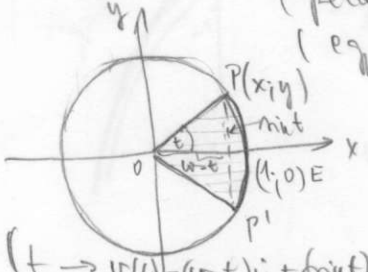
- A műszaki életben — a közgépiskolákban megismert fv. megadási, leírási módokon kívül — (a fizikában is) fontos szerepet játszik az u.n. parameteres megadási mód. Ez a leírási mód nagyon gyakran nem is fv-t ad meg, hanem görbék egyenletét.

Pl. az $x^2+y^2=1$ kör egyenletét

$x=\cos t \quad y=\sin t \quad 0\le t\le 2\pi$ alakban írhatjuk fel. $(\cos^2 t+\sin^2 t=1)$

(például egy test ezen a körpályán mozog, ez a pálya egyenlete, nem fv.!)

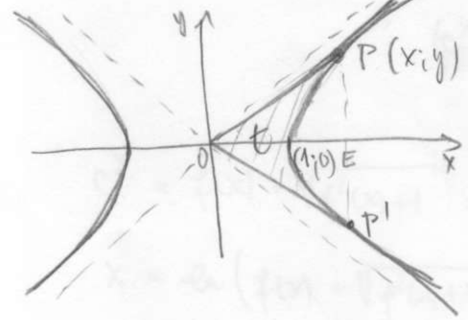
(egyenletes körmozgás: egységnyi szögsebesség, $r=1$)



t a szög, de egyúttal az $OPEP'$ körcikk területe is!

$(t \to \underline{r}(t)=(\cos t)\underline{i}+(\sin t)\underline{j})$

- Vajon mi lehet az $x^2-y^2=1$ egyenletű hiperbola pályán mozgó tömegpont parameteres egyenletrendszere?



A P hiperbolapont abszcisszája (x) is, ordinátája (y) is a t pm (OPEP' idom területe) fv-eként írható fel. Ezen fv-ek hasonló tulajdonságokat mutatnak a trigonometrikus fv-ek tul-ihoz, és mivel hiperbola pm-es előállítását adják, cosinushiperbolikus ill. sinushiperbolikus elnevezéssel illetjük őket. Tehát az $x^2-y^2=1$ hiperbola parameteres előállítása:

$$\underbrace{x=\operatorname{ch} t \quad y=\operatorname{sh} t}$$

$$t \to \underline{r}(t)=(\operatorname{ch} t)\underline{i}+(\operatorname{sh} t)\underline{i}$$

$$(\operatorname{ch}^2 t-\operatorname{sh}^2 t=1)$$

Ezeket az új függvényeket már ismert fv-ekkel ki tudjuk fejezni.

$$\operatorname{sh} x=\frac{e^x-e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{ch} x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

(sinushiperbolikus, cosinushiperbolikus)

$$\operatorname{th} x=\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} \qquad \operatorname{cth} x=\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$$

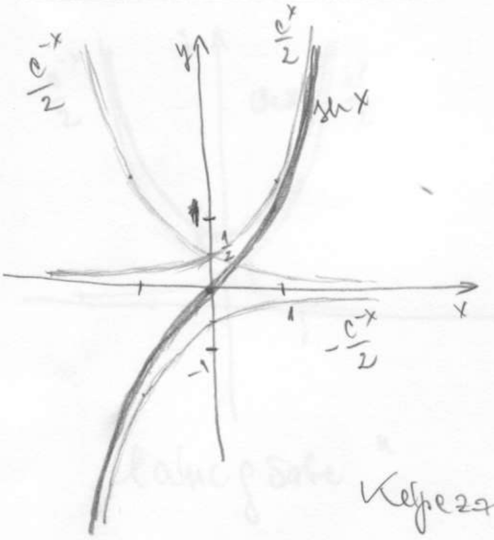
(tangenshiperbolikus (cotangenshiperbolikus)

$$\boxed{f(x) = \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}}$$

$D_f: x \in \mathbb{R} \qquad R_f: \operatorname{sh} x \in \mathbb{R}$

$f(-x) = \frac{e^{-x} - e^{x}}{2} = -\frac{e^x - e^{-x}}{2} = -f(x) \Rightarrow$ páratlan

$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = 0 \Leftrightarrow e^x - \frac{1}{e^x} = 0 \Leftrightarrow e^{2x} = 1 \Leftrightarrow x = 0$ Zh.



Az sh x sz.mon. nő (kölcsönösen egyértelmű) $\Rightarrow$ invertálható. Inverzét areasinushiperbolikusnak nevezzük.

Fejezzük az inverzét!

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad / \cdot 2e^x$$

$$2e^x \cdot f(x) = (e^x)^2 - 1$$

$$0 = (e^x)^2 - 2f(x) \cdot e^x - 1$$

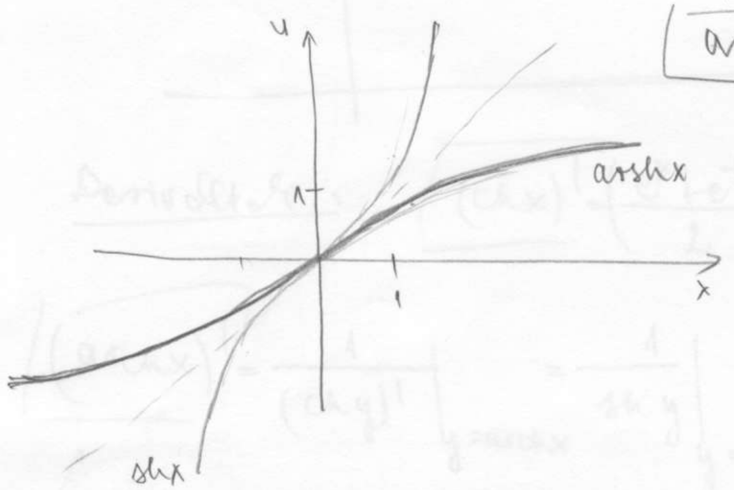
$$(e^x)_{1,2} = \frac{2f(x) \pm \sqrt{4 \cdot f^2(x) + 4}}{2} = f(x) \pm \sqrt{f^2(x)+1}$$

($e^x > 0$, ezért csak a $+\sqrt{\ }$ jön szóba)

$$e^x = f(x) + \sqrt{f^2(x)+1}$$

$x = \ln\left(f(x) + \sqrt{f^2(x)+1}\right)$. A változók cseréjét végrehajtva az sh x inverze: $\bar{f}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ $D_{\bar{f}}: x \in \mathbb{R}$, $R_{\bar{f}}: \bar{f}(x) \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\operatorname{arsh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)}$$



deriválás

$$\boxed{(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x}$$

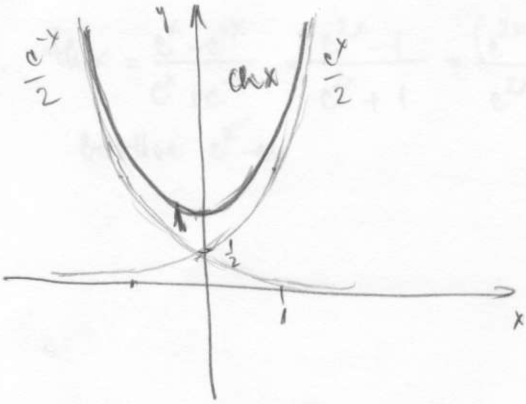
$$\boxed{(\operatorname{arsh} x)'} = \frac{1}{(\operatorname{sh} y)'}\bigg|_{y=\operatorname{arsh} x} = \frac{1}{\operatorname{ch} y}\bigg|_{y=\operatorname{arsh} x} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 y}}\bigg|_{y=\operatorname{arsh} x} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2(\operatorname{arsh} x)}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}$$

inverz deriválási szabálya alapján

$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$ miatt

lehet az $\bar{f}(x) = \ln(\ldots$ -ből közvetlenül is!!

$$\boxed{f(x)=\operatorname{ch}x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}}$$ $D_f: x\in\mathbb{R}$ $R_f: \operatorname{ch}x\geq 1$



$f(-x)=\frac{e^{-x}+e^x}{2}=f(x) \Rightarrow$ páros

$$\operatorname{ch}^2x-\operatorname{sh}^2x=\frac{e^{2x}+e^{-2x}+2e^x\cdot e^{-x}}{4}-\frac{e^{2x}+e^{-2x}-2e^xe^{-x}}{4}=\frac{4}{4}=1$$

$$\operatorname{ch}^2x+\operatorname{sh}^2x=\operatorname{ch}2x \quad \text{Bizt. Hf.}$$

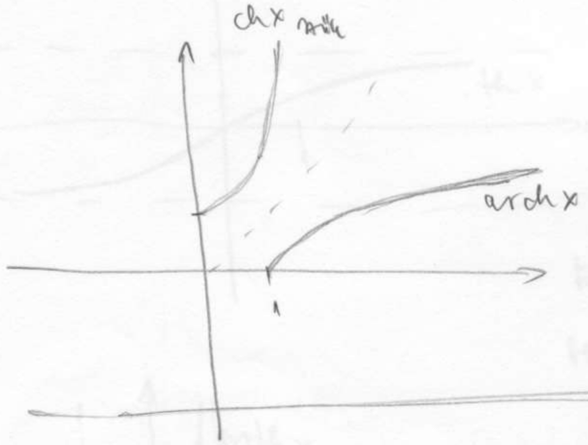
„láncgörbe"

Nem invertálható! Szűkítsük le az értelmezési tartományt $x\geq 0$-ra! Így kölcs. egyértelmű.

Inverze: $\overline{f}(x)=\boxed{\operatorname{arch}x=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}$ Hf. levezetni!

$D_{\overline{f}}: x\geq 1$ $R_{\overline{f}}: \overline{f}(x)\geq 0$

olv.: areacosinushiperbolikus



Deriváltak: $\boxed{(\operatorname{ch}x)'=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)'=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\operatorname{sh}x}$

$$\boxed{(\operatorname{arch}x)'}=\frac{1}{(\operatorname{ch}y)'}\bigg|_{y=\operatorname{arch}x}=\frac{1}{\operatorname{sh}y}\bigg|_{y=\operatorname{arch}x}=\frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}^2y-1}}\bigg|_{y=\operatorname{arch}x}=\frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}^2(\operatorname{arch}x-1)}}=\boxed{\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}}$$

$\boxed{x>1}$

inverz fv. deriváltjával!

$\operatorname{ch}^2y-\operatorname{sh}^2y=1$-et alkalmazva!

$\operatorname{ch}y>1$

Vigyázat! $x\geq 1$-re értelmezett, de csak $x>1$-re diff.ható az arch x!!

lehet közvetlenül az $\overline{f}(x)=\ln(\quad)$…-ből is!!

$$\boxed{f(x)=\operatorname{th}x=\frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}}\qquad D_f:\ x\in\mathbb{R}$$

R_f meghat.

$$\operatorname{th}x=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=\frac{(e^{2x}+1)-2}{e^{2x}+1}=1-\frac{2}{e^{2x}+1}.$$

bővítve e^x-el

$e^{2x}>0$

$e^{2x}+1>1$

$0<\frac{1}{e^{2x}+1}<1 \quad /\cdot(-2)$

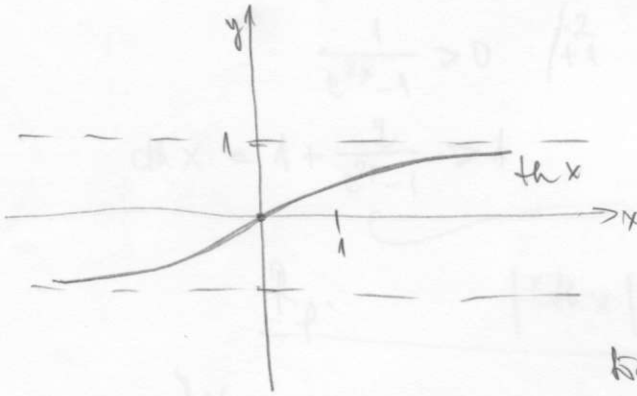
$0>-\frac{2}{e^{2x}+1}>-2 \quad /+1$

$1>1-\frac{2}{e^{2x}+1}>-1$

$\boxed{1>\operatorname{th}x>-1}$ értékkészlet

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x-e^{-x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}=\frac{1}{1}=1\ ;\quad \lim_{x\to-\infty}\operatorname{th}x=-1 \quad \text{mert}$$

th x páratlan $\left(f(-x)=\frac{e^{-x}-e^{x}}{e^{-x}+e^{x}}=-\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=-f(x)\right)$



invertálható

inverz: $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$

bővítve e^x-el !

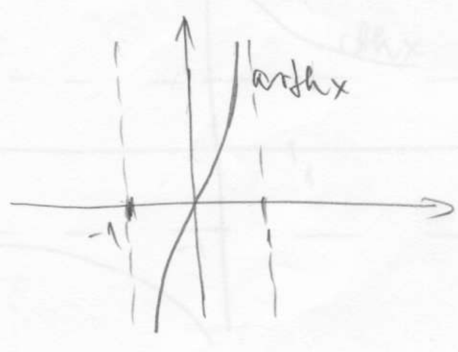
Változócsere: $f(x)\cdot e^{2x}+f(x)=e^{2x}-1$;

rendezve, kiemelve: $[f(x)-1]e^{2x}=-[f(x)+1]$

$e^{2x}=-\frac{f(x)+1}{f(x)-1}=\frac{f(x)+1}{1-f(x)}\quad (f(x)\neq 1)$

$x=\frac{1}{2}\ln\frac{f(x)+1}{1-f(x)} \ \longrightarrow\ \boxed{\bar{f}(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{1-x}=\operatorname{arth}x}$

$D_{\bar{f}}:\quad -1<x<1$



$\boxed{\text{Deriválás}}$: $\boxed{(\operatorname{th}x)'=\left(\frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x}\right)'=\frac{\operatorname{ch}^2x-\operatorname{sh}^2x}{\operatorname{ch}^2x}=\frac{1}{\operatorname{ch}^2x}=1-\operatorname{th}^2x}$

hányados!

$$\boxed{(\operatorname{arth}x)'}=\frac{1}{(\operatorname{th}y)'}\bigg|_{y=\operatorname{arth}x}=\frac{1}{1-\operatorname{th}^2y}\bigg|_{y=\operatorname{arth}x}=\frac{1}{1-\operatorname{th}^2(\operatorname{arth}x)}=\boxed{\frac{1}{1-x^2}}\quad -1<x<1$$

inverz deriv.!

lehet közvetlenül az $\bar{f}(x)$-ből deriválni!

$$\boxed{f(x) = \mathrm{cth}\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}} \qquad D_f : x \neq 0$$

Páratlan, mert $f(-x) = \frac{\mathrm{ch}(-x)}{\mathrm{sh}(-x)} = \frac{\mathrm{ch}\, x}{-\mathrm{sh}\, x} = -\mathrm{cth}\, x = -f(x)$ $\quad x \neq 0$-ra

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{e^{2x}}}{1 - \frac{1}{e^{2x}}} = 1 \qquad \lim_{x\to-\infty} \mathrm{cth}\, x = -1 \ (\text{mert páratlan})$$

Értékkészlet meghat.:

$$\mathrm{cth}\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1} = \frac{e^{2x}-1+2}{e^{2x}-1} = 1 + \frac{2}{e^{2x}-1}$$

bővítve e^x-el

1) ha $x > 0$

$e^{2x} > 1$

$e^{2x} - 1 > 0$

$\frac{1}{e^{2x}-1} > 0 \quad \Big/ \cdot 2, +1$

$\mathrm{cth}\, x = 1 + \frac{2}{e^{2x}-1} > 1$

2) ha $x < 0$

$0 < e^{2x} < 1 \quad \Big/ -1$

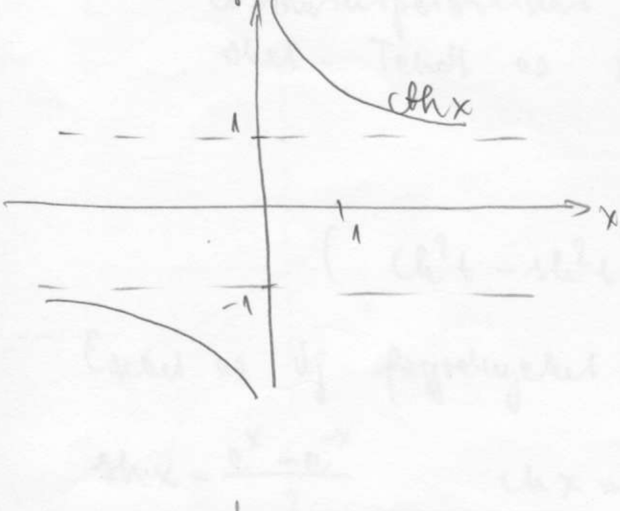
$-1 < e^{2x} - 1 < 0$

$\frac{1}{e^{2x}-1} < -1 \quad \Big/ \cdot 2$

$\frac{2}{e^{2x}-1} < -2 \quad \Big/ +1$

$\mathrm{cth}\, x = 1 + \frac{2}{e^{2x}+1} < -1$

R_f: $\quad |\mathrm{cth}\, x| > 1$

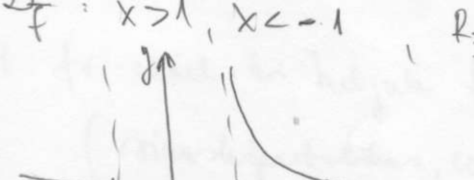


Invertálható

Inverz: $\quad \overline{f}(x) = \boxed{\mathrm{arcth}\, x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}}$

Hf. levezetés!!

$D_{\overline{f}}$: $x > 1$, $x < -1$, $\quad R_{\overline{f}}$: $\overline{f}(x) \neq 0$



Deriválás:

$$\boxed{(\mathrm{cth}\, x)' = \left(\frac{\mathrm{ch}\, x}{\mathrm{sh}\, x}\right)' = \frac{\mathrm{sh}^2 x - \mathrm{ch}^2 x}{\mathrm{sh}^2 x} = -\frac{1}{\mathrm{sh}^2 x} = 1 - \mathrm{cth}^2 x} \qquad x \neq 0$$

$$(\mathrm{arcth}\, x)' = \frac{1}{2} \cdot \frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{\overbrace{(x-1)-(x+1)}^{-2}}{(x-1)^2} = -\frac{1}{\underbrace{(x+1)(x-1)}_{x^2-1}} = \frac{1}{1-x^2} \qquad |x| > 1$$

képletéből

Összetett fv. ill. tört fv. deriválása!