KALKULUS II

Határozatlan integrál

$$x^2 \xrightarrow{\text{deriválás}} 2x$$

$$x^2+5 \longrightarrow 2x$$

határozatlan integrál

$2x$-nek a primitív fgv-e x^2 de az x^2+5 is

Def: Azt mondjuk hogy az $F: I \to \mathbb{R}$ fgv primitív fgv-e a $f: I \to \mathbb{R}$ fgv-nek ha F diffható I-n és $F'(x) = f(x)$ $(x \in I)$

Pl: A $f(x) = 2x$-nek a $F(x) = x^2$, $G(x) = x^2+5$ primitív fgv-ei

Tétel: Legyen $F: I \to \mathbb{R}$ a f fgv primitív fgv-e ekkor $G: I \to \mathbb{R}$ fgv akkor és csak akkor primitív fgv-e f-nek ha $G(x) = F(x) + C$ valamely $C \in \mathbb{R}$-re (létezik $C \in \mathbb{R}$ úgy hogy $G(x) = F(x) + C$)

Def: Legyen $f: I \to \mathbb{R}$ olyan fgv amelynek létezik primitív fgv-e. Az f primitív fgv-einek halmazát az f fgv határozatlan integráljának nevezzük. $\int f(x)\,dx$; $\int f$

Pl: $\int 2x\,dx = x^2 + C$

Alapintegrálok:

$\int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ $(\alpha \neq -1)$

$\int e^x\,dx = e^x + C$

$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$

$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ $(a \in \mathbb{R}^+)$

$\int \sin x = -\cos x + C$

$\int \cos x = \sin + C$

Integrálási szabályok:

Ha $f, g: I \to \mathbb{R}$ fgv-nek van primitív fgv-e és $\lambda \in \mathbb{R}$ akkor $f+g$, $\lambda \cdot f$ fgv-nek is van primitív fgv-e és

$$\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

$$\int \lambda f(x)\,dx = \lambda \cdot \int f(x)\,dx$$

Pl. 1, $\int \left(5x^3 + \underbrace{\frac{2}{x^2}}_{2x^{-2}} - \frac{3}{x} + \underbrace{7}_{7\cdot 1 = 7\cdot x^0}\right) dx = 5\cdot\frac{x^4}{4} + 2\cdot\frac{x^{-1}}{-1} - 3\cdot \ln|x| + 7\cdot x + C$

2, $\int \left(3\cdot \overbrace{\sqrt{x}}^{x^{\frac{1}{2}}} - 4\cdot 2^x + 7\cdot \sin x - 3\right) dx = 3\cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - 4\cdot\frac{2^x}{\ln 2} + 7(-\cos x) - 3x + C$

Tétel (Parciális integrálás)

Ha $f, g: I \to \mathbb{R}$ diff.ható fgv-e $f\cdot g'$-nek van primitív fgv-e akkor $f'\cdot g$-nek is van primitív fgv-e és

$$\int f'(x)\cdot g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)\cdot g'(x)\,dx$$

1. eset $\int \underbrace{P_n(x)}_{\substack{\text{Polinom} \\ g}} \cdot \underbrace{\begin{cases} e^x \\ \sin x \\ \cos x \end{cases}}_{f'} dx$

1, $\int \underbrace{(2x+5)}_{g} \cdot \underbrace{\sin x}_{f'}\, dx = \underbrace{(2x+5)}_{g}\cdot\underbrace{(-\cos x)}_{f} - \int \underbrace{(-\cos x)}_{f} \cdot \underbrace{2}_{g'}\, dx = \cancel{2x+5}$

$= (2x+5)\cdot(-\cos x) + 2\cdot\sin x + C$

$g = 2x+5 \xrightarrow{\text{derivál}} g' = 2$

$f' = \sin x \xrightarrow{\text{integrálás}} f = -\cos x$

2, $\int (x^2 + 2x - 3)\cdot \cos x\, dx =$

$$\int f' \cdot g = f \cdot g - \int f \cdot g'$$

1. eset $\int \underbrace{P_n(x)}_{g} \underbrace{\begin{Bmatrix} \sin x \\ \cos x \\ e^x \end{Bmatrix}}_{f'} dx$

$\int \underbrace{4x-3}_{g} \underbrace{\sin x}_{f'} dx =$ $\qquad g = 4x-3 \xrightarrow{der} g' = 4$

$\qquad f' = \sin x \xrightarrow{int} f = -\cos x$

$$= (4x-3)(-\cos x) - \int -4\cos x \, dx = (4x-3)\cdot(-\cos x) + 4 \cdot \sin x + C$$

2. ~~tények~~ eset $\int P_n(x) \cdot \begin{Bmatrix} \ln x \\ \log_a x \end{Bmatrix} dx$

1. $\int \underbrace{(10x^9 + 8x - 1)}_{f'} \cdot \underbrace{\ln x}_{g} \, dx = (*)$

$f' = 10x^9 + 8x - 1 \xrightarrow{int} f = 10\frac{x^{10}}{10} + 8\frac{x^2}{2} - x$

$g = \ln x \xrightarrow{der} g' = \frac{1}{x}$

$$(*) = (x^{10} + 4x^2 - x) - \ln x - \int \underbrace{(x^{10} + 4x^2 - x)\frac{1}{x}}_{x^9 + 4x - 1} dx = (x^{10} + 4x^2 - x) \cdot \ln x - \left(\frac{x^{10}}{10} + 4 \cdot \frac{x^2}{2} - x\right) + C$$

2. $\int (3x^5 - 1) \cdot \ln x \, dx = \left(\frac{x^6}{2} - x\right)\ln x - \int \underbrace{\left(\frac{x^6}{2} - x\right) \cdot \frac{1}{x}}_{\frac{1}{2}x^5 - 1} dx = \left(\frac{x^6}{2} - x\right) \cdot \ln x - \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{x^6}{6} - x\right) + C$

$f' = 3x^5 - 1 \xrightarrow{int} 3\frac{x^6}{6} - x$

$g = \ln x \xrightarrow{der} g' = \frac{1}{x}$

3. $\int \ln x \, dx = \int \underbrace{1}_{f'} \cdot \underbrace{\ln x}_{g} \, dx = x \cdot \ln x - \int \underbrace{x \frac{1}{x}}_{1} dx = x \ln x - x + C$

$f = x \quad g' = \frac{1}{x}$

TÉTEL (Integrálás helyettesítéssel)

Legyenek $I, J \subseteq \mathbb{R}$ intervallumok

$g: I \to J$ $\quad f: J \to \mathbb{R}$ olyan függvények melyekre teljesülnek az alábbi feltételek:

→ g diffható I-n

– f-nek létezik primitív fgv-e J-n

Ekkor $(f \circ g) \cdot g'$-nek is létezik primitív fgv-e és az $= F \circ g$, azaz

$$\boxed{\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = F(g(x)) + c}$$

Pl $\int \underbrace{\sin(3x+5)\cdot 3}_{f(g(x))\cdot g'} dx$

$\underline{I}$ mo: (tétel alapján)

$f(x) = \sin x \qquad F(x) = -\cos x$

$g(x) = 3x+5 \qquad g'(x) = 3$

$$\int \underbrace{\sin(3x+5)\cdot 3}_{f(g(x))\cdot g'} dx = \underline{\underline{-\cos(3x+5)+c}}$$

~~II mo $\int \sin(3x+5)\cdot$~~ $3dx$

II mo (változócsere)

$$\int \sin(3x+5)\cdot 3dx = \int \sin t\, dt = -\cos t = -\cos(3x+5)+c$$

$3x+5 = t$

$3dx = dt$

2, $\int (4x-3)^5\, dx = \int t^5 \frac{1}{4} dt = \frac{1}{4}\cdot\frac{t^6}{6} = \frac{1}{4}\frac{(4x-3)^6}{6} + c$

$4x-3 = t$

$4dx = dt$

$dx = \frac{1}{4}dt$

3) $\int (2x-3)^{11} dx = \int t^{11} \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \frac{t^{12}}{12} = \frac{1}{2} \frac{(2x-3)^{12}}{12} + c$

$2x-3=t$

$2dx = dt$

$dx = \frac{1}{2} dt$

4) $\int 5t^2 \cdot (1+t^3)^{10} dt = \int 5 \cdot u^{10} \frac{1}{3} du = \frac{5}{3} \cdot \frac{u^{11}}{11} = \frac{5}{3} \cdot \frac{(1+t^3)^{11}}{11} + c$

$1+t^3 = u$

$3t^2 dt = du$

$t^2 dt = \frac{1}{3} du$

5) $\int \sqrt{3x^5+4x-1} \cdot (30x^4+8) dx = \int \underbrace{\sqrt{t}}_{t^{\frac{1}{2}}} \cdot 2\, dt = 2 \cdot \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = 2 \cdot \frac{(3x^5+4x-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$

$3x^5+4x-1 = t$

$(15x^4+4) dx = dt$

6) $\int x^2 \cdot e^{x^3} dx = \int e^t \frac{1}{3} dt = \frac{1}{3} \cdot e^t = \frac{1}{3} \cdot e^{x^3} + c$

$x^3 = t$

$3x^2 dx = dt$

$x^2 dx = \frac{1}{3} dt$

7) $\int \frac{\ln x}{x} dx = \int t\, dt = \frac{t^2}{2} = \frac{\ln x^2}{2} + c$

$\ln x = t$

$\frac{1}{x} dx = dt$

8) $\int \frac{dx}{x \ln x} = \int \frac{1}{t} dt = \ln|t| = \ln|\ln x| + c$

$\ln x = t$

$\frac{1}{x} dx = dt$

9, $\int \frac{x^2}{4+x^3}\,dx = \int \frac{1}{3}\frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{3}\cdot \ln|t| = \frac{1}{3}\cdot \ln|4+x^3| + C$

$4+x^3=t$

$3x^2\,dx = dt$

$x^2\,dx = \frac{1}{3}dt$

Hf

1, $\int \cos(7x-1)\,dx$

2, $\int (x^2+2)^7 \cdot x\,dx$

3, $\int \frac{(\ln x)^{5/3}}{x}\,dx$

4, $\int \frac{8x^3+6x}{2x^4+3x^2+5}\,dx$

5 $\int 2x\cdot \sin(1+x^2)\,dx$ helyettesítés

Parciális

1, $\int (3x-2)\cdot \cos x\,dx$

2 $\int (4x^2+7x-1)\cdot \ln x\,dx$

– MEGOLDÁSOK A GYAKORLATI JEGYZETBEN

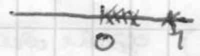
$\cancel{\int (3x+1)\ln x\,dx}$

Határozott integrál

Egy sorozat vagy halmaz legkisebb felső korlátját a s/h supremumának vagy felső korlátnak nevezzük. Jele $\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$, $\sup H$

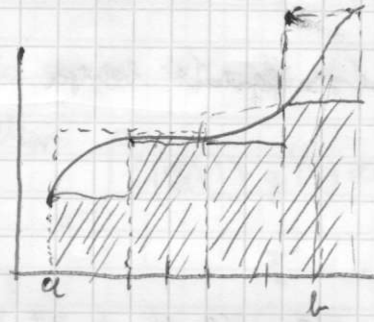
Egy s/h legnagyobb alsó korlátját a s/h infimumának vagy alsó határának nev. Jele $\inf_{n\in\mathbb{N}} a_n$, $\inf H$

Pl $H=\{\frac{1}{n}\ n\in\mathbb{N}^*\}$



legkisebb felső korlát $\sup H=1$

$\inf H=0$



Legyen $[a,b]\subseteq\mathbb{R}$ és ebben a felületben $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ folytonos fv.

Def A $\tau=\{a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b\}$ halmazt az $[a,b]$ intervallum egy felosztásának nevezzük

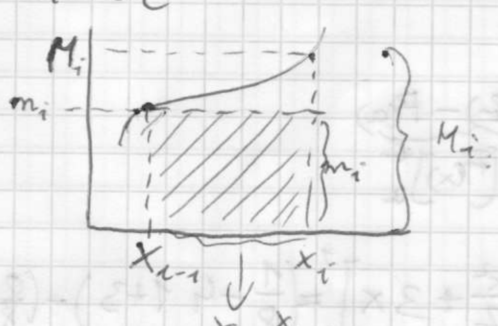
Az $[a,b]$ intervallum összes lehetséges felosztásainak halmazát $\tau[a,b]$-vel jelöljük.

Pl

$\tau=\{1<2<3\}$

$\tau=\{1<1,5<2<2,5<3\}$

Def Legyen τ_1 $\tau_2\in[a\ b]$ Azt mondjuk hogy a τ_2 felosztás finomítása ~~finomabb~~ a τ_1-nek ha $\tau_1<\tau_2$



(Def) Legyen $\tau=\{a=x_0<x_1<x_2<\dots<x_n=b\}$ egy felosztása $[a,b]$-nek $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ korlátos fgv.

$$s(f,\tau)=\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i-x_{i-1})$$
$$S(f,\tau)=\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i-x_{i-1})$$

Számokat az f fgv τ felosztáshoz tartozó alsó és felső összegének nevezzük.

Megj: ezek téglalapterületek területek $s(f,\tau)$ görbe alatti téglalapok területének összege
$S(f,\tau)$ — $\mathbb{R}$ felett — || — $\mathbb{R}$

Finomított felosztás akkor ezek összegek jobban közelítik a görbe alatti területet.

(Def) Legyenek

$$\underline{I}f[a,b]:=\sup\{s(f,\tau):\tau\in\underbrace{\mathcal{T}[a,b]}_{}\}$$

$\mathcal{T}$ az összes lehetséges felosztást befoglalja

$$\overline{I}f[a,b]:=\inf\{S(f,\tau):\tau\in\mathcal{T}[a,b]\}$$

Ha $\underline{I}f=\overline{I}f$, akkor mondjuk hogy f Riemann-integrálható és ezt a közös értéket az f fgv $[a,b]$ intervallumon vett R-integráljának (v. határozott integrálnak) nevezzük

Jele: $\int_a^b f(x)\,dx$ vagy $\int_a^b f$

Tétel (a R-integrál műveleti tulajdonságai)
Ha $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrálható fgv-ek, a $\lambda\in\mathbb{R}$ akkor $f+g$ és $\lambda\cdot f$ is Riemann integrálható (R-int) és $\int_a^b(f+g)=\int_a^b f+\int_a^b g$ és $\int_a^b\lambda f=\lambda\int_a^b f$

Tétel (Newton–Leibniz szabály)
Ha $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ R-int-ható van primitív fgv-e $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ $(F'=f)$ akkor

~~F folytonos [a,b]-n akkor~~

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$$

Jelölés: $\left[F(x)\right]_a^b$

Pl $\int_0^1(x^7-8x+3)\,dx=\left[\frac{x^8}{8}-8\cdot\frac{x^2}{2}+3x\right]_0^1=\underbrace{\left(\frac{1}{8}-4\cdot1+3\right)}_{F(1)}-\underbrace{\left(\frac{0}{8}-4\cdot0+3\cdot0\right)}_{F_0}=\dots$

Tétel (Parciális integrálás tétele)

Ha $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ R-int-ható, diff-ható fgv-ek f', g' folytonosak

akkor
$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x)\,dx = \Big[f(x) \cdot g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x)\,dx$$

Pl:
$$\int_0^1 \underbrace{x}_{f} \cdot \underbrace{e^x}_{g'}\,dx = \big[x \cdot e^x\big]_0^1 - \int_0^1 1 \cdot e^x\,dx = \big[x \cdot e^x\big]_0^1 - \big[e^x\big]_0^1 = \underbrace{1 \cdot e^1}_{F(1)} - \underbrace{0 \cdot e^0}_{F(0)} - (\underbrace{e^1}_{G(1)} - \underbrace{e^0}_{G(0)}) = \underline{\underline{1}}$$

$f' = 1 \quad g = e^x$

Tétel: (Helyettesítéses integrálás)

Ha $g: [a,b] \to [c,d]$ diff-ható g' folytonos $f: [c,d] \to \mathbb{R}$ folytonos

akkor
$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx$$

Pl
$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 3x\,dx = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,dt = \left[\frac{1}{3} \cdot \sin t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3} \cdot \sin\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3} \cdot \sin 0 = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

$3x = t$ $\quad x = 0 \Rightarrow t = 0$

$3dx = dt$ $\quad x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t = 3 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$

$dx = \frac{1}{3}dt$