

.

Integrálszámítás

Dr. Pap Margit

Bevezetés

Ez a jegyzet a Schipp Ferenc által írt Analízis I. és Analízis II. jegyzetek folytatása. A jegyzetben a matematika tanárképzés szempontjából fontos integrálszámítás témakör kerül bemutatásra, figyelembevéve a matematika BSc szak tantervét.

A jegyzetben a kötelező tananyagon túlmenően néhány olyan rész is szerepel, amely az ismeretek elmélyítését szolgálja. Az elméleti anyag mellett sok megoldott és kitűzött feladatot is tartalmaz, amelyek a gyakorlás mellett az anyag mélyebb elsajátítását, a levelező oktatásban az anyag önálló elsajátítását is lehetővé teszik.

Az ábrák a jegyzet függelékében találhatók.

Az ábrákat Pilgermajer Ákos készítette.

A jegyzet szerkesztésében Horváth Györgyné segített.

Ezúton is köszönöm mindkettőjük munkáját.

Továbbá köszönöm Dr. Eisner Tímea precíz lektori munkáját és észrevételeit.

1. Egyváltozós függvények határozatlan integrálja

1.1 A primitív függvény fogalma

Tekintsük az I ($I \subseteq \mathbb{R}$) intervallumon értelmezett $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt. Ebben a paragrafusban a következő kérdésekre keressük a választ:

- A) Milyen feltételek mellett van olyan $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, amelynek a deriváltja az I intervallumon az előre adott f függvény?
 B) Hogyan határozható meg egy ilyen tulajdonságú F függvény, ha ismerjük az f -et?
 Ezzel kapcsolatos az alábbi fogalom.

Definíció. Legyen $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Az $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt az f **primitív függvényének** vagy **antideriváltjának** nevezzük, ha

- 1) F deriválható az I intervallumon ($F \in \mathcal{D}(I)$) és
- 2) $F'(x) = f(x) \quad (\forall x \in I)$.

Nyilvánvaló, hogy ha F az f -nek primitív függvénye és c bármely az I intervallumon értelmezett konstans függvény, akkor

$$(F + c)' = F' = f$$

alapján $F + c$ is primitív függvénye f -nek.

Megfordítva, ha F_1 és F_2 a f függvény primitív függvénye az I intervallumon, akkor

$$(F_1 - F_2)' = F_1' - F_2' = f - f = 0$$

figyelembevételével azt kapjuk, hogy $F_1 - F_2$ állandó. Következésképpen f primitív függvényeinek összessége valamely F primitív függvényéből kiindulva

$$\{F + c : c \in \mathbb{R}\}$$

alakban adható meg.

A primitív függvény fogalma általánosítható olyan f függvények esetére is, amelyek véges számú diszjunkt intervallum egyesítésén értelmezettek. Ebben az esetben azonban nem érvényes az az állítás, hogy két primitív függvény csak egy állandóban különbözik.

Például tekintsük az $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$ függvényt. Ekkor az

$$F, G : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, F(x) = \frac{x^3}{3} \text{ és a}$$

$$G(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} + 1, & x < 0 \\ \frac{x^3}{3} + 2, & x > 0 \end{cases}$$

függvények deriválhatók az $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ halmazon, és ezen a halmazon

$$F'(x) = f(x) = G'(x).$$

A két függvény különbsége, a $G - F$ azonban nem az állandó függvény az $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ -n, mivel

$$G(x) - F(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 2, & x > 0. \end{cases}$$

Definíció. Legyen $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ olyan fggvny, amelynek van primitív függvénye. Az f fggvny primitív függvényeinek halmazát az f függvény **határozatlan integráljának** nevezzük, és az

$$\int f(x)dx \text{ vagy } \int f$$

szimbólummal jelöljük.

Az $\int$ szimbólum az integrál jel. Az integrál jel alatt szereplő f függvényt integrandusnak is nevezzük. Ha ismert a f egy F primitív függvénye, akkor a f határozatlan integrálja:

$$\int f(x)dx = \{F(x) + c, c \in \mathbb{R}\}.$$

A gyakorlatban a határozatlan integrál felírásakor a halmaz jelölésére használt kapcsolószerűjelek kiírásától el szoktak tekinteni.

Azt a leképezést, amely differenciálható függvényekhez deriváltjukat rendeli differenciál-operátornak nevezzük és a D szimbólummal jelöljük, azaz

$$D : \mathcal{D}(I) \rightarrow \mathcal{F}(I), \quad Df = f' \quad (f \in \mathcal{D}(I)),$$

ahol $\mathcal{F}(I)$ az I intervallumon értelmezett függvények halmaza.

A D leképezés

$$\mathcal{D}'(I) = \{Df : f \in \mathcal{D}(I)\}$$

értékkészletét alkotják azok a függvények, amelyeknek van primitív függvénye. A D leképezés nem injektív és az $f \in \mathcal{D}'(I)$ függvény D által létesített ősképei, azaz a

$$D^{-1}(f) = \{F \in \mathcal{D}(I) : DF = f\}$$

függvényhalmaz az f függvény határozatlan integrálja.

Adott fggvny primitív függvényeinek a megkeresését integrálásnak nevezzük.

Az alábbiakban néhány gyakran előforduló fggvny primitív függvényét adjuk meg.

I. Alapintegrálok

ssz.	$f: I \rightarrow \mathbb{R}$ integrandus	$F: I \rightarrow \mathbb{R}, (c \in \mathbb{R})$ a f primitív függvénye ($F'(x) = f(x), \forall x \in I$)	I az ért.tart. résztart. intervalluma
1	$f(x) = 1$	$F(x) = x + c$	$I \subseteq \mathbb{R}$
2	$f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$I \subseteq \mathbb{R},$
3	$f(x) = x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$F(x) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$	$I \subseteq (0; +\infty)$
4	$f(x) = \frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$	$F(x) = -\frac{1}{(n-1) \cdot x^{n-1}} + c$	$I \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$
5	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + c$	$I \subseteq (0; \infty)$
6	$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + c$	$I \subseteq \mathbb{R}$
7	$f(x) = a^x, a > 0, a \neq 1$	$F(x) = \frac{a^x}{\ln a} + c$	$I \subseteq \mathbb{R}$
8	$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln x + c$	$I \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$
9	$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x + c$	$I \subseteq \mathbb{R}$
10	$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x + c$	$I \subseteq \mathbb{R}$
11	$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$	$F(x) = \operatorname{tg} x + c$	$I \subseteq \mathbb{R} \setminus$ $\left\{ (2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$
12	$f(x) = \frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \operatorname{ctg}^2 x$	$F(x) = -\operatorname{ctg} x + c$	$I \subseteq \mathbb{R} \setminus$ $\{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$
13	$f(x) = \frac{1}{x^2 - a^2}, a \neq 0$	$F(x) = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{x-a}{x+a} \right + c$	$I \subseteq \mathbb{R} \setminus$ $\{-a; a\}$
14	$f(x) = \frac{1}{x^2 + a^2}, a \neq 0$	$f(x) = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c$	$I \subseteq \mathbb{R}$
15	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}, a \neq 0$	$F(x) = \arcsin \frac{x}{a} + c$	$I \subseteq (- a , a)$
16	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}, a \neq 0$	$F(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + c$	$I \subseteq \mathbb{R}$
17	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}, a \neq 0$	$F(x) = \ln x + \sqrt{x^2 - a^2} + c$	$I \subseteq$ $(-\infty, -a) \cup (a, +\infty)$
18	$f(x) = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$	$F(x) = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	$I = \mathbb{R}$
19	$f(x) = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	$f(x) = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$	$I = \mathbb{R}$

A táblázatban feltüntetett F primitív függvényeket, ha deriváljuk visszakapjuk a megfelelő f -et. Például az $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$ függvény primitív függvénye $F(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + c$. Valóban, ha kiszámítjuk az F deriváltját, akkor a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} F'(x) &= (\ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + c)' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + a^2}}(x + \sqrt{x^2 + a^2})' = \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + a^2}}(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Tehát $\int f(x)dx = F(x) + c$, ($c \in \mathbb{R}$).

Felmerül a kérdés, hogy milyen tulajdonságú függvényeknek létezik primitív függvénye? A következőkben a primitív függvény létezésének egy szükséges, de nem elégséges feltételét adjuk meg. Ezért emlékeztetünk a Darboux-tulajdonság definíciójára:

Definíció. Az $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény ($I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum) **Darboux-tulajdonságú**, ha két felvett függvényérték között minden közbeeső értéket is felvesz, azaz minden $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, és minden $f(x_1)$ és $f(x_2)$ közé eső c számhoz van olyan $\xi \in (x_1, x_2)$, amelyre $f(\xi) = c$ teljesül.

Mivel a Darboux-tétel szerint bármely függvény deriváltja Darboux-tulajdonságú, ezért érvényes a következő állítás:

1. Tétel. Ha az f függvénynek az I intervallumon van primitív függvénye, akkor az f Darboux-tulajdonságú.

Ezzel a primitív függvény létezésének egy szükséges feltételét adtuk meg. (Későbbiekben megmutatjuk, hogy ez egy szükséges de nem elégséges feltétele a primitív függvény létezésének.) A fenti tételnek azonnali következménye a következő két állítás:

1. Következmény. Ha $I \subset \mathbb{R}$ intervallumon értelmezett $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény,

$$f(I) = \{f(x) : x \in I\}$$

értékkészlete nem intervallum, akkor az f függvénynek nincs primitív függvénye.

2. Következmény. Ha az $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek van elsőfajú szakadása, akkor f -nek nincs primitív függvénye.

Példák olyan függvényekre, amelyeknek nincs primitív függvénye:

1) Az

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

függvénynek nincs primitív függvénye.

Valóban, az értelmezési halmaz $\mathbb{R}$ intervallum, de az értékkészlet $f(\mathbb{R}) = \{-1, 1\}$ halmaz, nem intervallum. Tehát az 1. Következmény alapján, f -nek nincs primitív függvénye.

A 2. következmény alapján, ha az $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek van primitív függvénye, akkor f -nek csak másodfajú szakadási pontjai lehetnek.

Az alábbi példában olyan függvényt mutatunk be, amelynek 0-ban másodfajú szakadása van, értelmezési tartományának bármely részintervallumán Darboux-tulajdonságú, de mégis primitív függvénye. Tehát a Darboux-tulajdonság a primitív függvény létezésének szükséges, de nem elégséges feltétele.

2) Tekintsük az

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$$

függvényt.

Nem nehéz belátni, hogy a f függvény Darboux tulajdonságú.

Mivel az

$$f_1 : (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_1(x) = 0,$$

$$f_2 : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_2(x) = \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$$

függvényeknek van primitív függvényük, ezek:

$$F_1(x) = c, \quad F_2(x) = x \sin \frac{1}{x},$$

ezért, ha az f függvénynek lenne $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ primitív függvénye, akkor

$$F|_{(-\infty, 0]} = F_1 + c_1 = c + c_1 := k \quad \text{és} \quad F|_{(0, +\infty)} = F_2 + c_2.$$

Bármely primitív függvény deriválható, tehát folytonos. Következésképpen F folytonos a 0-ban, és így

$$F(0) = \lim_{x \rightarrow 0, x < 0} F(x) = k, \quad F(0) = \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} F(x) = c_2,$$

ahonnan $k = c_2$. Tehát ha f -nek a F primitív függvénye lenne, akkor az F függvény a következő alakú lenne:

$$F(x) = \begin{cases} k, & \text{ha } x \leq 0 \\ k + x \sin \frac{1}{x}, & \text{ha } x > 0. \end{cases}$$

Bármely $x > 0$ esetén

$$\frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \sin \frac{1}{x}.$$

Mivel az $x \rightarrow \sin \frac{1}{x}$ függvénynek nincs határértéke az $x = 0$ pontban, ezért F nem deriválható az $x = 0$ pontban.

Ez ellentmond annak, hogy F deriválható az $\mathbb{R}$ -en. Tehát F nem lehet f -nek primitív függvénye.

A következőkben elégséges feltételeket adunk a primitív függvény létezésére. Későbbiekben igazolni fogjuk a következő tételt.

2. Tétel *Bármely intervallumon folytonos függvénynek van primitív függvénye.*

Könnyen igazolható, hogy hatványsorok összegfüggvényeinek mindig van primitív függvénye, amely maga is előállítható hatványsor alakjában. Erre vonatkozik a következő tétel.

3. Tétel *Legyen $a_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, x_0 \in \mathbb{R}$ és tegyük fel, hogy a*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \quad \text{hatványsor} \quad R := \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$$

konvergencia sugara nem nulla. Ekkor az

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \quad x \in (x_0 - R, x_0 + R)$$

utasítással értelmezett f összegfüggvénynek az

$$(1.1) \quad F(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1} \quad x \in (x_0 - R, x_0 + R)$$

utasítással adott függvény egy primitív függvénye.

BIZONYÍTÁS. Mivel az (1.1)-ben szereplő hatványsor konvergencia sugara

$$\frac{1}{\limsup \sqrt[n+1]{\frac{|a_n|}{n+1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n+1]{n+1} \limsup \frac{1}{\sqrt[n+1]{|a_n|}} = R,$$

azért az (1.1) hatványsorral egy $F : (x_0 - R, x_0 + R) \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt értelmeztünk. Mivel a hatványsor összegfüggvénye a konvergencia tartomány bármely belső pontjában deriválható és deriváltját tagonkénti deriválással számítjuk ki, ezért F deriválható bármely $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ pontban és

$$F'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (n+1) (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = f(x), \quad \forall x \in (x_0 - R, x_0 + R),$$

ami azt jelenti, hogy F az f -nek primitív függvénye. ■

1.2 Műveletek primitív függvényekkel

A differenciálási szabályok felhasználásával egyszerűen igazolhatók az alábbi, határozatlan integrálok meghatározására vonatkozó műveleti szabályok:

4. Tétel. Ha az $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvényeknek van primitív függvénye és λ valós szám, akkor az $f + g$ és λf függvényeknek is van primitív függvénye és

$$\begin{aligned}\int (f(x) + g(x))dx &= \int f(x)dx + \int g(x)dx, \\ \int \lambda f(x)dx &= \lambda \int f(x)dx.\end{aligned}$$

BIZONYÍTÁS. Legyen $\int f(x)dx = F(x) + c_1$, ($c_1 \in \mathbb{R}$) és $\int g(x)dx = G(x) + c_2$, ($c_2 \in \mathbb{R}$), akkor az F és G deriválhatók I -n és

$$F' = f \quad G' = g.$$

Innen következik, hogy $F + G$ és λF deriválhatók I -n és

$$\begin{aligned}(F + G)' &= F' + G' = f + g \\ (\lambda F)' &= \lambda F' = \lambda f.\end{aligned}$$

vagyis $F + G$ primitív függvénye $f + g$ -nek, és λF primitív függvénye λf -nek. Tehát $\int (f(x) + g(x))dx = \{F(x) + G(x) + c, (c \in \mathbb{R})\}$, azaz $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$ és $\int \lambda f(x)dx = \{\lambda F(x) + c, c \in \mathbb{R}\} = \lambda \int f(x)dx$. ■

1.3 Gyakorlatok

Határozzuk meg a következő függvények primitív függvényét (az f értelmezési tartománya az a legbővebb $\mathbb{R}$ -beli halmaz, amelyen a kijelölt műveleteknek értelme van):

1) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

2) $f(x) = x^2 + 2x + 3$

3) $f(x) = x + \frac{1}{x}$

4) $f(x) = x\sqrt{x}$

5) $f(x) = x^3(x^2 - 1)$

6) $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - 2x + 4}{x}$

7) $f(x) = \frac{(x+2)^3}{\sqrt{x}}$

8) $f(x) = \sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}$

9) $f(x) = a \sin x + b \cos x$

10) $f(x) = e^x + x^3 + 2^x - \frac{2}{x} + 3$

11) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

12) $f(x) = x\sqrt{x} + 2x\sqrt[3]{x^4}$

13) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$

14) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-9x^2}}$

15) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}$

16) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}$

17) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+9}}$

18) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{9x^2+4}}$

$$\begin{array}{ll}
19) f(x) = \frac{1}{25 + x^2} & 20) f(x) = \frac{1}{25 + 4x^2} \\
21) f(x) = \frac{1}{25 - x^2} & 22) f(x) = \frac{1}{25 - 4x^2} \\
23) f(x) = \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} & 24) f(x) = \frac{1}{1 + \cos 2x}
\end{array}$$

1.4. Integrálási eljárások.

Az alapintegrálok és a határozatlan integrálokra vonatkozó műveleti szabályok mellett a határozatlan integrálok kiszámításakor még két másik integrálási szabályt szoktunk alkalmazni. Ezek az ún. parciális integrálás szabályai és az integrálás helyettesítéssel.

1.4.1. Parciális integrálás szabálya.

A szorzatfüggvény deriválási szabályából következik a

4. Tétel (Parciális integrálás szabálya.) Legyen f, g két deriválható függvény az I intervallumon ($f, g \in \mathcal{D}(I)$). Ha az $f'g$ függvénynek van primitív függvénye, akkor $g'f$ -nek is van primitív függvénye, és

$$\int f g' = f g - \int f' g.$$

BIZONYÍTÁS. Mivel f, g deriválhatók, és $(fg)' = f'g + fg'$, ezért $fg' = (fg)' - f'g$. Tehát az fg' függvény felírható két olyan függvény különbségeként, amelyeknek van primitív függvénye, következésképpen fg' -nek is van primitív függvénye, és

$$\int f g' = \int (fg)' - \int f' g = fg - \int f' g.$$

■

Ezzel a tétellel az fg' függvény primitív függvényének a meghatározását az $f'g$ primitív függvényének a meghatározására vezettük vissza. Ez a módszer akkor hatékony, ha $\int f'g$ egyszerűbb mint $\int fg'$. Az alábbiakban bemutatunk néhány fontos esetet, amikor a primitív függvény meghatározható parciális integrálással.

1. Típus

$$\int P(x)e^{ax} dx, \quad a \neq 0, \quad \text{ahol } P(x) \text{ egy polinom.}$$

Ebben az esetben az $f(x) = P(x)$, $g'(x) = e^{ax}$ szereposztással célravezető a parciális integrálás. A következő feladattal szemléltetjük az eljárást.

1a) Határozzuk meg az $\int x e^x dx$ határozatlan integrált.

Az $f(x) = x$, $g'(x) = e^x$ ($x \in \mathbb{R}$) választás esetén $f' = 1$, $g(x) = e^x$, és így:

$$\int x e^x dx = \int f g' = f g - \int f' g = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + c, \quad (c \in \mathbb{R}).$$

Ha az integrandusban az e^x mellett szereplő polinom n -ed fokú, akkor a parciális integrálást egymásután n -szer alkalmazva jutunk eredményhez.

1b) Például:

$$\begin{aligned}\int x^2 e^x dx &= \int x^2 (e^x)' dx = x^2 e^x - \int (x^2)' e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x (e^x)' dx = \\ &= x^2 e^x - 2(x e^x - \int (x)' e^x dx) = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + c, c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

2. Típus

$$\int P(x) \ln x dx, \text{ ahol } \mathbf{P}(x) \text{ egy polinom.}$$

Ebben az esetben az $g'(x) = P(x)$, $f(x) = \ln x$ szereposztással célravezető a parciális integrálás.

2a) Határozzuk meg az $\int x^n \ln x dx$ határozatlan integrált.

Legyen $f(x) = \ln x$, $g'(x) = x^n$ ($x > 0$) és tegyük fel, hogy $n \neq -1$. Ekkor $g(x) = \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$, $x > 0$ és parciális integrálással a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned}\int x^n \ln x dx &= \int f g' = f g - \int f' g = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \int \frac{x^{n+1}}{n+1} \frac{1}{x} dx = \\ &= \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \int \frac{x^n}{n+1} dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + c, (c \in \mathbb{R}).\end{aligned}$$

Ha $n = -1$, akkor $g(x) = \ln x$, $x > 0$, ebben az esetben

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \ln^2 x - \int \frac{\ln x}{x} dx.$$

A fenti összefüggés a keresett $\int \frac{\ln x}{x} dx$ függvényre egy egyenlet. Ezt megoldva

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2} \ln^2 x + c, (c \in \mathbb{R}).$$

2b) Határozzuk meg az $\int \ln x dx$ -et. Legyen $g'(x) = 1$, $f(x) = \ln x$, $x > 0$. Ekkor $g(x) = x$, $f'(x) = 1/x$.

$$\int 1 \ln x dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + c, (c \in \mathbb{R}).$$

3. Típus

$$\int e^{ax} \sin bxdx \text{ vagy } \int e^{ax} \cos bxdx.$$

A fenti integrálok esetében ha a szorzat bármely tagját jelöljük f -el a másikat meg g' -tal az eljárás célravezető lesz.

A következő feladattal szemléltetjük az eljárást.

Határozzuk meg az $\int e^x \sin x dx$ határozatlan integrált.

Legyen $f(x) = \sin x$, $g'(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$. Ekkor $f'(x) = \cos x$, $g(x) = e^x$.

$$\int e^x \sin x dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx.$$

Az $\int e^x \cos x dx$ meghatározása érdekében, alkalmazzuk még egyszer a parciális integrálás szabályát az $f_1(x) = \cos x$, $g'(x) = e^x$ szereposztással. Ekkor $f_1(x) = -\sin x$, $g(x) = e^x$ továbbá

$$\begin{aligned} \int e^x \sin x dx &= e^x \sin x - \int e^x \cos x dx = \\ &= e^x \sin x - [e^x \cos x - \int (-\sin x) e^x dx] = \\ &= e^x \sin x - e^x \cos x - \int \sin x e^x dx. \end{aligned}$$

Tehát:

$$\int e^x \sin x dx = e^x \sin x - e^x \cos x - \int \sin x e^x dx$$

Ahonnán:

$$\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2}(e^x \sin x - e^x \cos x) + c, c \in \mathbb{R}.$$

4. Típus

Az integrál jel alatt valamely inverz trigonometrikus függvény szerepel.

Határozzuk meg az $\int \operatorname{arctg} x dx$ $x \in \mathbb{R}$ integrált.

Legyen $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $g'(x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$. Ekkor $f'(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$, $g(x) = x$.

$$\int \operatorname{arctg} x dx = \int f(x)g'(x)dx = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{x^2 + 1} dx.$$

Mivel $\left(\frac{1}{2} \ln(x^2 + 1)\right)' = \frac{x}{x^2 + 1}$, ezért

$$\int \operatorname{arctg} x dx = \int f(x)g'(x)dx = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + c, c \in \mathbb{R}.$$

1.4.2. Példák

Parciális integrálással határozzuk meg az alábbi integrálokat:

1) $\int x^2 \ln x dx$

2) $\int \ln^2 x dx$

3) $\int x^3 \ln^2 x dx$

4) $\int x^2 e^x dx$

5) $\int (x^3 - 2x^2 + 1)e^x dx$

6) $\int (x^2 - 2x) \operatorname{ch} x dx$

- | | |
|--|--|
| 7) $\int x^2 \cos x \, dx$ | 8) $\int \sin^2 x \, dx$ |
| 9) $\int \sin^n x \, dx$ | 10) $\int \cos^2 x \, dx$ |
| 11) $\int \cos^n x \, dx$ | 12) $\int x^n e^{\alpha x} \, dx$ |
| 13) $\int e^x \sin 2x \, dx$ | 14) $\int e^{\alpha x} \cos \beta x \, dx$ |
| 15) $\int e^x (\sin x - \cos x) \, dx$ | 16) $\int \arcsin x \, dx$ |
| 17) $\int x \arctg x \, dx$ | 18) $\int x \arccos x \, dx$ |

1.4.3 Integrálás helyettesítéssel

A közvetett függvény deriválási szabályából adódik a következő tétel.

5. Tétel. (*Integrálás helyettesítéssel*) Legyenek I és J intervallumok és tekintsük az

$$\varphi : I \rightarrow J \quad f : J \rightarrow \mathbb{R}$$

függvényeket, amelyek a következő tulajdonságokkal rendelkeznek:

- a) φ deriválható az I intervallumon,
- b) legyen F a f primitív függvénye,

akkor az $(f \circ \varphi)\varphi'$ függvénynek az $F \circ \varphi$ függvény primitív függvénye, következésképpen

$$\int (f \circ \varphi)\varphi' = F \circ \varphi + c, \quad (c \in \mathbb{R}).$$

BIZONYÍTÁS. Mivel f -nek az F primitív függvénye a J intervallumon ezért F deriválható és $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in J$.

Figyelembe véve, hogy a φ deriválható I -n, ezért $F \circ \varphi$ is deriválható I -n és a függvények kompozíciójára vonatkozó deriválási szabály alapján

$$(F \circ \varphi)'(t) = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t), \quad \forall t \in I.$$

Tehát az $F \circ \varphi$ függvény az $(f \circ \varphi)\varphi'$ primitív függvénye, azaz $\int (f \circ \varphi)\varphi' = F \circ \varphi + c$, $(c \in \mathbb{R})$. ■

A következőkben néhány példán keresztül bemutatjuk a helyettesítő módszer alkalmazását.

1.4.4 Példák

1) Határozzuk meg az

$$\int (at + b)^n dt, \quad a \neq 0, n \neq -1.$$

integrált.

Legyen $\varphi(t) := at + b$, $f(x) = x^n$. Ekkor $\varphi'(t) = a$ és az integráljel alatti kifejezés felírható

$$\int (at + b)^n dt = \frac{1}{a} \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

alakban. Mivel az $f(x) = x^n$ függvénynek $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ primitív függvénye, ezért az előbbi tétel alapján

$$\int (at + b)^n dt = F(\varphi(t)) + c = \frac{1}{a} \cdot \frac{(at + b)^{n+1}}{n+1} + c, \quad (c \in \mathbb{R}).$$

2) Határozzuk meg

$$\int \operatorname{tg} t \, dt \quad t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

integrál.

A $\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t}$ alakot írva, legyen $\cos t = \varphi(t)$, ekkor $\varphi'(t) = -\sin t$ és legyen $f(x) = 1/x$. Tehát az integráljel alatti kifejezés felírható

$$\int \frac{\sin t}{\cos t} dt = - \int \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} dt = - \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

alakban. Mivel az f függvénynek a $F(x) = \ln |x|$ egy primitív függvénye, ezért

$$\int \operatorname{tg} t \, dt = -F(\varphi(t)) + c = -\ln |\cos t| + c, \quad (c \in \mathbb{R}).$$

3) Határozzuk meg

$$\int \frac{1}{\sin t} dt \quad t \in (0, \pi).$$

integrált.

1. Módszer. Azért, hogy az integrál alatti kifejezést $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ alakú függvényként írjuk fel, a következő átalakítást végezzük

$$\frac{1}{\sin t} = \frac{\sin t}{\sin^2 t} = \frac{\sin t}{1 - \cos^2 t}.$$

Jelöljük $\varphi := \cos t$, $\varphi'(t) = -\sin t$, legyen $f = \frac{1}{1-x^2}$, amelynek a $F(x) = -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right|$ egy primitív függvénye. Ekkor

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sin t} dt &= - \int \frac{\varphi'(t)}{1 - \varphi^2(t)} dt = - \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \\ &= -F(\varphi(t)) + c = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1} \right| + c, \quad (c \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

2. Módszer A következő átalakításokat is végezhetjük volna

$$\frac{1}{\sin t} = \frac{1}{\frac{2 \operatorname{tg}(t/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(t/2)}} = \frac{(\operatorname{tg}(t/2))'}{\operatorname{tg}(t/2)}.$$

Ha $\varphi(t) = \operatorname{tg} \frac{t}{2}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ jelölés használjuk, akkor $F(x) = \ln |x|$, és a helyettesítési módszer alapján

$$\int \frac{1}{\sin t} dt = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right| + c, \quad (c \in \mathbb{R}).$$

Megjegyzés

A különböző módszerek alkalmazása során kapott eredmények látszólag különbözőek, azonban megfelelő átalakításokkal ki lehet mutatni, hogy a kapott eredmények egymástól legfeljebb egy konstansban térnek el.

4) Határozzuk meg

$$\int \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 t} dt, \quad t \in (-\pi/2, \pi/2),$$

integrált.

A következő átalaktást célszerű végezni:

$$\int \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 t} dt = \int \frac{1 + \operatorname{tg}^2 t}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 t}} dt.$$

Legyen $\varphi : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(t) = \operatorname{tg} t$, $\varphi'(t) = 1 + \operatorname{tg}^2 t$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$.

Ekkor $F(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$ az f primitív függvénye és

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 t} dt &= \int \frac{\varphi'(t)}{\sqrt{1 + \varphi^2(t)}} dt = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \\ &= F(\varphi(t)) + c = \ln \left(\operatorname{tg} t + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 t} \right) + c, \quad (c \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Az 5. Tétel néhány speciális esetét a f konkrét megválasztásával a paragrafus végén táblázatban foglaljuk össze.

Az első helyettesítési módszer esetében igyekszünk az integráljel alatti $h(t)$ kifejezést

$$h(t) = f(\varphi(t)) \varphi'(t)$$

alakban felírni. Ekkor a h egyik H primitív függvényét az f függvény F primitív függvényéből az F és φ összetett függvényeként kapjuk

$$H = F \circ \varphi.$$

Vannak esetek, amikor könnyebb a $h = (f \circ \varphi) \varphi'$ függvény primitív függvényeit megkeresni, mint az f függvény primitív függvényeit. Ilyenkor bizonyos feltételek mellett az előző tételt fordított irányban alkalmazzuk : megkeressük a $h = (f \circ \varphi) \varphi'$ függvény H primitív függvényét, F -et H -ból úgy kapjuk meg, hogy:

$$F = H \circ \varphi^{-1}.$$

Azért, hogy az eljárás minden lépése helyes és elvégezhető legyen, a következő feltételeket kell kirónunk:

6. Tétel (Második helyettesítési módszer)

Tekintsük az I és J valós intervallumokat és az

$$\varphi : I \rightarrow J, \quad f : J \rightarrow \mathbb{R}$$

függvényeket, amelyek a következő tulajdonságokkal rendelkeznek:

- a) φ bijektív, deriválható és a derivált függvénynek nincs valós gyöke az I intervallumon,
- b) a $h = (f \circ \varphi)\varphi'$ függvénynek van primitív függvénye, legyen ez H ,

akkor f -nek a $H \circ \varphi^{-1}$ egy primitív függvénye, vagyis

$$\int f(x)dx = H \circ \varphi^{-1}(x) + c, c \in \mathbb{R}.$$

BIZONYÍTÁS. Mivel H primitív függvénye h -nak, H deriválható és $H' = h = (f \circ \varphi)\varphi'$. Az a) tulajdonság alapján a φ^{-1} inverzfüggvény deriválható a J intervallumon, tehát $H \circ \varphi^{-1}$ deriválható a J intervallumon és

$$\begin{aligned} (H \circ \varphi^{-1})'(x) &= H'(\varphi^{-1}(x))(\varphi^{-1})'(x) = (f \circ \varphi)(\varphi^{-1}(x))\varphi'(\varphi^{-1}(x))(\varphi^{-1})'(x) = \\ &= f(x)\varphi'(\varphi^{-1}(x))\frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} = f(x), \quad \forall x \in J. \end{aligned}$$

Tehát $H \circ \varphi^{-1}$ az f egyik primitív függvénye. ■

Megjegyzések

- Az a) és b) tulajdonságok helyettesíthetők a következő erősebb feltételekkel:
 - a') φ bijektív, deriválható, a derivált folytonos és a derivált függvényének nincs gyöke az I intervallumon,
 - b') f folytonos a J intervallumon.
 Az a') és b') tulajdonságú függvények esetében a két helyettesítési módszer egyenértékű.
- Ha az f függvény primitív függvényét meg tudjuk határozni az alapintegrálok, a parciális integrálás vagy a helyettesítési módszer segítségével, akkor azt mondjuk, hogy az f **elemien integrálható**.
- Vannak olyan függvények is, amelyeknek van primitív függvényük de az nem határozható meg az előbb felsorolt módszerek egyikével sem. Az ilyeneket elemien nem integrálható függvényeknek nevezzük. Ilyen például az $f(x) = e^{-x^2}$. Ha az elemien nem integrálható függvény egy hatványsor összegfüggvénye, akkor a 3. Tétel alapján meg tudjuk határozni a primitív függvény hatványsorba fejtését.

Példák

Számítsuk ki a következő függvények primitív függvényeit:

1)

$$\int \frac{e^{2x}}{1 + e^x} dx.$$

Az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^{2x}}{1+e^x}$ folytonos függvény. Legyen $e^x = t$, innen $x = \ln t$. Legyen $\varphi : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \varphi(t) = \ln t$. Ez a függvény bijektív, az inverz függvénye $\varphi^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty) t = \varphi^{-1}(x) = e^x$, deriválható: $\varphi'(t) = \frac{1}{t}, t \in (0, \infty)$ és deriváltjának nincs gyöke.

Megkeressük az

$$f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = \frac{t^2}{1+t} \cdot \frac{1}{t} = \frac{t}{1+t}$$

függvény egy primitív függvényét, amelyet H -val jelölünk:

$$\begin{aligned} \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt &= \int \frac{t}{1+t} dt = \int \frac{t+1}{t+1} dt - \int \frac{1}{t+1} dt = \\ &= t - \ln(1+t) + c = H(t), c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Innen a 6. Tétel alapján

$$\int \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx = H \circ \varphi^{-1}(x) = e^x - \ln(1+e^x) + c, c \in \mathbb{R}.$$

Röviden: $e^x = t \Rightarrow x = \ln t, dx = \frac{1}{t} dt$, tehát

$$\begin{aligned} \int \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx &= \int \frac{t^2}{1+t} \cdot \frac{1}{t} dt = t - \ln(1+t) + c \\ &= e^x - \ln(1+e^x) + x + c, c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2)

$$\int \frac{1}{x(1+\ln^2 x)} dx, \quad x > 0.$$

Röviden: $t = \ln x \Rightarrow x = e^t, dx = e^t dt$.

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x(1+\ln^2 x)} dx &= \int \frac{1}{e^t(1+t^2)} \cdot e^t dt = \int \frac{1}{1+t^2} dt = \\ &= \arctg t + c = \arctg(\ln x) + c, c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

3) $\int \sqrt{a^2 - x^2}, x \in (-a, a), a$ pozitív.

Legyen $\varphi : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow (-a, a) \varphi(t) = a \sin t, a > 0, \varphi$ bijektív, deriválható és $\varphi'(t) \neq 0, \forall t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right); \varphi^{-1}(x) = \arcsin \frac{x}{a};$

$$\begin{aligned} g(t) &= \varphi(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} \cdot a \cos t = \\ &= a^2 \cos^2 t, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int g(t)dt &= \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int a^2 \cos^2 t dt = a^2 \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \\ &= \frac{a^2}{2}(t + \sin t \cos t) + c = G(x), c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\int f(x)dx = G(\varphi^{-1}(x)) = \frac{a^2}{2} \left(\arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{a} \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \right) + c, c \in \mathbb{R}.$$

Röviden: $x = a \sin t \Rightarrow t = \arcsin \frac{x}{a}, dx = a \cos t dt$

$$\begin{aligned}\int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \int \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} \cdot a \cos t dt = \int a^2 \cos^2 t dt = \\ &= a^2 \int \frac{1 + \cos 2t}{2} = \frac{a^2}{2} (t + \sin t \cos t) + c = \\ &= \frac{a^2}{2} \left(\arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \right) + c, c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Határozatlan integrálok táblázata $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ folytonosan deriválható függvény, $c \in \mathbb{R}$

$$(1) \int \varphi^n(x) \varphi'(x) dx = \frac{\varphi^{n+1}(x)}{n+1} + c, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$(2) \int \varphi^a(x) \varphi'(x) dx = \frac{\varphi^{a+1}(x)}{a+1} + c, \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \varphi(I) \subset (0, \infty)$$

$$(3) \int a^{\varphi(x)} \varphi'(x) dx = \frac{a^{\varphi(x)}}{\ln a} + c, \quad a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}.$$

$$(4) \int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} dx = \ln |\varphi(x)| + c, \quad \varphi(x) \neq 0, \forall x \in I$$

$$(5) \int \frac{\varphi'(x)}{\varphi^2(x) - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{\varphi(x) - a}{\varphi(x) + a} \right| + c, \quad \varphi(x) \neq \pm a, \forall x \in I, a \neq 0$$

$$(6) \int \frac{\varphi'(x)}{\varphi^2(x) + a^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{\varphi(x)}{a} + c, \quad a \neq 0$$

$$(7) \int \varphi'(x) \sin \varphi(x) dx = -\cos \varphi(x) + c$$

$$(8) \int \varphi'(x) \cos \varphi(x) dx = \sin \varphi(x) + c$$

$$(9) \int \frac{\varphi'(x)}{\cos^2 \varphi(x)} dx = \operatorname{tg} \varphi(x) + c, \quad \varphi(x) \notin \left\{ (2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}, \quad \forall x \in I$$

$$(10) \int \frac{\varphi'(x)}{\sin^2 \varphi(x)} dx = -\operatorname{ctg} \varphi(x) + c, \quad \varphi(x) \notin \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}, \quad \forall x \in I$$

$$(11) \int \varphi'(x) \operatorname{tg}(\varphi(x)) dx = -\ln |\cos \varphi(x)| + c, \quad \varphi(x) \notin \left\{ (2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}, \quad \forall x \in I$$

$$(12) \int \varphi'(x) \operatorname{ctg}(\varphi(x)) dx = \ln |\sin \varphi(x)| + c, \quad \varphi(x) \notin \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}, \quad \forall x \in I$$

$$(13) \int \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{\varphi^2(x) + a^2}} dx = \ln[\varphi(x) + \sqrt{\varphi^2(x) + a^2}] + c, \quad a \neq 0$$

$$(14) \int \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{\varphi^2(x) - a^2}} dx = \ln |\varphi(x) + \sqrt{\varphi^2(x) - a^2}| + c, \quad \begin{array}{l} \varphi(I) \subset (-\infty, -a) \text{ vagy} \\ \varphi(I) \subset (a, \infty), a > 0 \end{array}$$

$$(15) \int \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{a^2 - \varphi^2(x)}} dx = \arcsin \frac{\varphi(x)}{a} + c, \quad a > 0, \varphi(I) \subset (-a, a)$$

1.4.5. Gyakorlatok

A helyettesítési módszert alkalmazva határozzuk meg a következő függvények primitív függvényeit:

1) $\int \cos(3t - 1) dt$

2) $\int 2t(t^3 + 1)^5 dt$

3) $\int \frac{x^2}{4 + x^3} dx$

4) $\int \frac{8x^3 + 6x}{2x^4 + 3x^2 + 5} dx$

5) $\int \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx$

6) $\int \frac{1}{\cos x}$

7) $\int \frac{1 + tg^2 x}{tg x} dx$

8) $\int x^2 e^{x^3} dx$

9) $\int \frac{dx}{x \ln x}$

10) $\int \frac{\ln x}{x} dx$

11. $\int 2x \sin(1 + x^2) dx$

12. $\int \sin x \cos^2 x dx$

13. $\int \sin^3 x \cos^2 x dx$

14. $\int \sin^3 x dx$

15. $\int \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$

16. $\int (tg x + tg^3 x) dx$

17. $\int \frac{\sin 2x}{\sin^2 x + 4} dx$

18. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 - \cos^4 x}} dx$

19. $\int \frac{x}{\sqrt{1 - x^4}} dx$

1.4.6. A racionális függvények integrálása

1. Elemi törtfüggvények

Definíció. Elemi törtfüggvénynek nevezzük az 1. $f(x) := a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, x \in \mathbb{R};$

$$2. f(x) := \frac{A}{(x-a)^n} \quad (n \in \mathbb{N}^+, x \neq a;$$

$$3. f(x) := \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n} \quad n \in \mathbb{N}^+, (b^2-4ac < 0), x \in \mathbb{R}$$

alakú függvényeket.

Tétel. Bármely racionális függvény felbontható véges számú elemi törtfüggvény összegére, vagyis, ha

$$f: I \rightarrow \mathbb{R}, f(x) := \frac{P(x)}{Q(x)} \quad (Q(x) \neq 0, \forall x \in I)$$

racionális függvény, ahol P és Q relatív prím polinomok, és Q valós együtthatós irreducibilis tényezőkre bontása

$$Q(x) = (x-a_1)^{\alpha_1} \dots (x-a_m)^{\alpha_m} (x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1} \dots (x^2+p_nx+q_n)^{\beta_n}$$

$$(x^2+p_ix+q_i=0\text{-nak nincs valós gyöke, } i = \overline{1, n}),$$

akkor

$$f(x) = L(x) + \sum_{i=1}^m \left[\frac{A_1^{(i)}}{(x-a_i)^{\alpha_i}} + \frac{A_2^{(i)}}{(x-a_i)^{\alpha_i-1}} + \dots + \frac{A_{\alpha_i}^{(i)}}{x-a_i} \right] +$$

$$+ \sum_{j=1}^n \left[\frac{B_1^{(j)}x + C_1^{(j)}}{(x^2+p_jx+q_j)^{\beta_j}} + \frac{B_2^{(j)}x + C_2^{(j)}}{(x^2+p_jx+q_j)^{\beta_j-1}} + \dots + \frac{B_{\beta_j}^{(j)}x + C_{\beta_j}^{(j)}}{x^2+p_jx+q_j} \right]$$

$$(L \text{ polinom, } A_k^{(i)}, B_h^{(j)}, C_h^{(j)}, p_j, q_j \in \mathbb{R}, p_j^2 - 4q_j < 0).$$

Bontsuk elemi törtfüggvények összegére az $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ racionális függvényeket:

$$1) f(x) := \frac{7x+4}{x^3+x^2-8x-12}.$$

Megoldás. Ha a számláló fokszáma kisebb mint a nevező fokszáma, akkor $L(x) = 0$.

Először a nevezőt valós együtthatós irreducibilis tényezők szorzatára bontjuk.

$$x^3+x^2-8x-12 = (x+2)^2(x-3), \text{ így}$$

$$\frac{7x+4}{(x+2)^2(x-3)} = \frac{A}{(x+2)^2} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-3}.$$

Az A, B, C valós állandókat a határozatlan együtthatók módszerével számítjuk ki:

$$\frac{7x+4}{(x+2)^2(x-3)} = \frac{A(x-3) + B(x+2)(x-3) + C(x+2)^2}{(x+2)^2(x-3)};$$

$$\frac{7x+4}{(x+2)^2(x-3)} = \frac{(B+C)x^2 + (A-B+4C)x + (-3A-6B+4C)}{(x+2)^2(x-3)},$$

ahonnan a

$$\begin{cases} B + C = 0 \\ A - B + 4C = 7 \\ -3A - 6B + 4C = 4 \end{cases}$$

egyenletrendszert kapjuk, melynek megoldása: $A = 2$, $B = -1$, $C = 1$. Tehát

$$f(x) = \frac{2}{(x+2)^2} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-3}.$$

$$2) f(x) := \frac{x^4 - 14x^3 + 29x^2 - 26x + 9}{(x^2 - x + 1)^2(3x - 2)}.$$

Megoldás.

$$\frac{x^4 - 14x^3 + 29x^2 - 26x + 9}{(x^2 - x + 1)^2(3x - 2)} = \frac{Ax + B}{(x^2 - x + 1)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 - x + 1} + \frac{E}{3x - 2}.$$

A határozatlan együtthatók módszerével azt kapjuk, hogy

$$A = 2, B = 0, C = 0, D = -4, E = 1, \text{ tehát}$$

$$f(x) = \frac{2x}{(x^2 - x + 1)^2} - \frac{4}{x^2 - x + 1} + \frac{1}{3x - 2}.$$

$$3) f(x) := \frac{2x^4 + 6x^3 + 9x^2 + 1}{(x+1)^3}.$$

Megoldás. Ha a számláló fokszáma nagyobb mint a nevező fokszáma, akkor először elosztjuk a számlálót a nevezővel. A maradékos osztás tétele alapján $P(x) = L(x) \cdot Q(x) + P_1(x)$, ahol $\text{gr } P_1 < \text{gr } Q$. Ekkor

$$P(x) = \frac{L(x) \cdot Q(x) + P_1(x)}{Q(x)} = L(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)}.$$

A fenti kifejezésben a $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ tört számlálójának fokszáma kisebb mint a nevező fokszáma, ezért a felbontás az előző példákhoz hasonlóan történik. A számlálót a nevezővel osztva, azt kapjuk:

$$f(x) = 2x + \frac{3x^2 - 2x + 1}{(x+1)^3}.$$

A $\frac{3x^2 - 2x + 1}{(x+1)^3}$ elemi törtekre bontása:

$$\frac{3x^2 - 2x + 1}{(x+1)^3} = \frac{A}{(x+1)^3} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x+1}.$$

A határozatlan együtthatók módszerével számolva

$$A = 6, B = -8, C = 3, \text{ tehát}$$

$$f(x) = 2x + \frac{6}{(x+1)^3} - \frac{8}{(x+1)^2} + \frac{3}{x+1}.$$

2. Az elemi törtfüggvények integrálása

I. Az $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $x \rightarrow a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ polinomfüggvényt tagonként integráljuk.

Példa

$$\int (3x^4 - 7x^2 + x + 2) dx = 3 \frac{x^5}{5} - 7 \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + c = \frac{3}{5} x^5 - \frac{7}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 + 2x + c, c \in \mathbb{R}.$$

II. Az $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $x \rightarrow \frac{A}{(x-a)^n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$, $I \subset (-\infty, a)$ vagy $I \subset (a, +\infty)$) függvény integrálása:

a) Ha $n = 1$, akkor $\int \frac{A}{x-a} dx = A \ln |x-a| + c, c \in \mathbb{R}.$

b) Ha $n \geq 2$, akkor $\int \frac{A}{(x-a)^n} dx = -\frac{A}{n-1} \cdot \frac{1}{(x-a)^{n-1}} + c, c \in \mathbb{R}.$

Megjegyzés

Ha $f(x) = \frac{A}{(mx+p)^n}$ ($m \neq 0$) alakú, akkor $f(x) = \frac{A}{m^n} \cdot \frac{1}{(x-a)^n}$, ahol $\frac{p}{m} = -a$. Tehát az $f(x) = \frac{A}{(mx+p)^n}$ racionális függvény integrálása visszavezethető az előbbi esetre.

Példák:

Számítsuk ki a következő függvények határozatlan integrálját:

1) $f(x) := \frac{1}{(x-3)^4}, x \in (3, +\infty).$

Megoldás. Legyen $\varphi(x) = x-3$, $\varphi'(x) = 1$.

$$\int f(x) dx = \int \varphi^{-4}(x) \varphi'(x) dx = \frac{1}{-3} \varphi^{-3}(x) + c = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(x-3)^3} + c, c \in \mathbb{R}.$$

2) $f(x) := \frac{7}{(2x+5)^3}, x \in \left(-\infty, -\frac{5}{2}\right).$

Megoldás. Legyen $\varphi(x) = 2x+5$, $\varphi'(x) = 2$.

$$\int f(x) dx = \frac{7}{2} \int \varphi^{-3}(x) \varphi'(x) dx = \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{-2} \varphi^{-2}(x) + c = -\frac{7}{4} \cdot \frac{1}{(2x+5)^2} + c, c \in \mathbb{R}.$$

III. Az $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}$, ($n \in \mathbb{N}^*$, $\Delta = b^2 - 4ac < 0$) függvény

integrálásakor először az $ax^2+bx+c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$ átalakítást végezzük

el. A $t = x + \frac{b}{2a}$ változócserevel az alábbi típusú integrálokra vezetjük vissza a függvény integrálását:

a) $\int \frac{1}{x^2+a^2} dx$ b) $\int \frac{x}{x^2+a^2} dx$

c) $\int \frac{x}{(x^2+a^2)^n} dx$ d) $\int \frac{1}{(x^2+a^2)^n} dx, \quad n \neq 1.$

Az a) integrál az alapintegrál szerint:

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c, c \in \mathbb{R}.$$

A b) és c) integrálokat helyettesítéssel számítjuk ki. Legyen $\varphi(x) = x^2 + a^2$, ekkor $\varphi'(x) = 2x$,

$$\int \frac{x}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2 + a^2) + c, c \in \mathbb{R}.$$

$$\int \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} dx = \frac{1}{2} \int \varphi'(x) \cdot \varphi^{-n}(x) dx = -\frac{1}{2(n-1)} \cdot \frac{1}{(x^2 + a^2)^{n-1}} + c, (n \neq 1).$$

A d) típusú integrált egy rekurziós összefüggés segítségével határozzuk meg. A rekurziós összefüggéshez parciális integrálással jutunk.

$$\begin{aligned} I_n &= \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^n} dx = \frac{1}{a^2} \int \frac{a^2}{(x^2 + a^2)^n} dx = \frac{1}{a^2} \int \frac{x^2 + a^2 - x^2}{(x^2 + a^2)^n} dx = \\ &= \frac{1}{a^2} I_{n-1} - \frac{1}{2a^2} \int \frac{2x^2 dx}{(x^2 + a^2)^n}. \end{aligned}$$

A parciális integrálás alapján ez utóbbi integrál a következő alakra hozható ($f(x) = x, g'(x) = 2x/(x^2 + a^2)^n$ jelöléssel)

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2 dx}{(x^2 + a^2)^n} &= \frac{x}{(1-n)(x^2 + a^2)^{n-1}} - \frac{1}{1-n} \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{n-1}} = \\ &= \frac{x}{(1-n)(x^2 + a^2)^{n-1}} - \frac{I_{n-1}}{1-n}, \end{aligned}$$

következésképpen

$$I_n = \frac{x}{2(n-1)a^2(x^2 + a^2)^{n-1}} + \frac{2n-1}{2(n-1)a^2} I_{n-1}, n = 2, 3, \dots$$

Mivel I_1 -et már kiszámítottunk, a fenti rekurzió segítségével I_n kiszámolható bármely $n = 2, 3, \dots$ értékére.

A $J_n = \int \frac{Ax + B}{(ax^2 + bx + c)^n} dx, (n > 1, \Delta = b^2 - 4ac < 0)$ integrál kiszámítása visszavezethető az I_n -re a következő átalakításokkal:

$$\begin{aligned} J_n &= \frac{A}{2a} \int \frac{2ax + \frac{2Ba}{A}}{(ax^2 + bx + c)^n} dx = \frac{A}{2a} \int \frac{2ax + b + \frac{2Ba}{A} - b}{(ax^2 + bx + c)^n} dx = \\ &= \frac{A}{2a} \int \frac{(ax^2 + bx + c)'}{(ax^2 + bx + c)^n} dx + (B - \frac{bA}{2a}) \int \frac{dx}{a^n [(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{-\Delta}{4a^2}]^n}. \end{aligned}$$

Az utóbbi integrálban az $y = x + \frac{b}{2a}$ változócsere elvégezve az

$$J_n = \frac{A}{2a(1-n)(ax^2 + bx + c)^{n-1}} + (B - \frac{bA}{2a}) I_n(x + \frac{b}{2a})$$

eredményre jutunk.

Példák:

Számítsuk ki a következő függvények határozatlan integrálját:

1. $f(x) := \frac{1}{(x^2 + 1)^3}, x \in \mathbb{R}.$

Megoldás. Felhasználjuk a 3. b) pontban felírt rekurziós összefüggést:

$$I_1 = \int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \arctg x + c, c \in \mathbb{R};$$

$$I_2 = \int \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{x^2 + 1} + I_1 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{x^2 + 1} + \arctg x \right) + c, c \in \mathbb{R};$$

$$I_3 = \int \frac{1}{(x^2 + 1)^3} dx = \frac{1}{4} \left[\frac{x}{(x^2 + 1)^2} + 3I_2 \right] = \\ = \frac{1}{4} \left[\frac{x}{(x^2 + 1)^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{x}{x^2 + 1} + \arctg x \right) \right] + c, c \in \mathbb{R}.$$

Tehát

$$\int f(x) dx = I_3 = \frac{1}{4} \cdot \frac{x}{(x^2 + 1)^2} + \frac{3}{8} \cdot \frac{x}{x^2 + 1} + \frac{3}{8} \arctg x + c, c \in \mathbb{R}.$$

2. $f(x) = \frac{1}{x^2 + 3x + 4}, x \in \mathbb{R}.$

Megoldás. $\Delta = 9 - 16 = -7, f(x) = \frac{1}{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}} \cdot A t = x + \frac{3}{2}, dt = dx$ helyettesítéssel

az f függvény integrálját a következő integrálra vezetjük vissza:

$$\int \frac{1}{t^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2} dt = \frac{2\sqrt{7}}{7} \arctg \frac{2\sqrt{7}t}{7} + c, c \in \mathbb{R}$$

tehát

$$\int f(x) dx = \frac{2\sqrt{7}}{7} \arctg \frac{2\sqrt{7}\left(x + \frac{3}{2}\right)}{7} + c = \frac{2\sqrt{7}}{7} \arctg \frac{\sqrt{7}(2x + 3)}{7} + c, c \in \mathbb{R}.$$

3. $f(x) := \frac{3x - 5}{2x^2 + 6x + 5}, x \in \mathbb{R}.$

Megoldás. A nevező diszkriminánsa: $\Delta = 36 - 40 = -4$, a nevező deriváltja: $(2x^2 + 6x + 5)' = 4x + 6$.

$$\int f(x) dx = \frac{3}{4} \int \frac{4\left(x - \frac{5}{3}\right) + 6 - 6}{2x^2 + 6x + 5} dx = \\ = \frac{3}{4} \int \frac{4x + 6}{2x^2 + 6x + 5} dx - \frac{19}{2} \int \frac{1}{2x^2 + 6x + 5} dx.$$

$$I_1 = \int \frac{4x + 6}{2x^2 + 6x + 5} dx = \int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \ln |\varphi(x)| + c = \ln(2x^2 + 6x + 5) + c, c \in \mathbb{R}.$$

$$\varphi(x) = 2x^2 + 6x + 5, \varphi'(x) = 4x + 6.$$

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int \frac{1}{2x^2 + 6x + 5} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} dx = \\
 &= \frac{1}{2} \cdot 2 \operatorname{arctg} 2 \left(x + \frac{3}{2}\right) + c = \operatorname{arctg}(2x + 3) + c, c \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

Tehát

$$\int f(x) dx = \frac{3}{4} I_1 - \frac{19}{2} I_2 = \frac{3}{4} \ln(2x^2 + 6x + 5) - \frac{19}{2} \operatorname{arctg}(2x + 3) + c, c \in \mathbb{R}.$$

1.4.7. Trigonometrikus függvények racionális kifejezéseinek integrálása

1. Egyszerűbb típusok

1. a) $\sin^{2n+1} x \cos^k x$ alakú kifejezések integrálásakor a következő átalakításokat végezzük:

$$\sin^{2n+1} x \cos^k x = \sin x \sin^{2n} x \cos^k x = \sin x (1 - \cos^2 x)^n \cos^k x.$$

A hatványozás és a szorzás műveleteket elvégezve, az $f(x) = \cos x, f'(x) = -\sin x$ jelölést használva, az összeg minden egyes tagja $\lambda f^n(x) f'(x)$ típusú lesz, tehát az integrálás tagonként elvégezhető lesz.

Példák: 1. a)-hoz

1. $\int \sin^5 x dx = \int \sin x \sin^4 x dx = \int \sin x (1 - \cos^2 x)^2 dx =$
 $\int \sin x dx - 2 \int \sin x \cos^2 x dx + \int \sin x \cos^4 x dx =$
 $-\cos x + 2 \int f'(x) f^2(x) dx - \int f'(x) f^4(x) dx =$
 $-\cos x + \frac{2}{3} f^3(x) - \frac{1}{5} f^5(x) + c = \cos x + \frac{2}{3} \cos^3 x - \frac{1}{5} \cos^5 x + c, c \in \mathbb{R}.$
2. $\int \sin^3 x \cos x dx = \int \sin x \sin^2 x \cos x dx = \int \sin x (1 - \cos^2 x) \cos x dx = \int \sin x \cos x dx - \int \sin x \cos^3 x dx =$
 $-\int f'(x) f(x) dx + \int f'(x) f^3(x) dx = -\frac{1}{2} f^2(x) + \frac{1}{4} f^4(x) + c =$
 $-\frac{1}{2} \cos^2 x + \frac{1}{4} \cos^4 x + c, c \in \mathbb{R}.$

1. b) $\cos^{2n+1} x \sin^k x$ alakú kifejezések integrálásakor a következő átalakítást végezzük

$$\cos^{2n+1} x \sin^k x = \cos x \cos^{2n} x \sin^k x = \cos x (1 - \sin^2 x)^n \sin^k x.$$

A kijelölt műveleteket elvégezve, az $f(x) = \sin x, f'(x) = \cos x$ jelölést használva, az összeg minden egyes tagja $\lambda f^n(x) f'(x)$ típusú lesz, tehát az integrálás tagonként elvégezhető lesz.

Példák 1. b)-hez:

1. $\int \cos^3 x dx = \int \cos x \cos^2 x dx = \int \cos x (1 - \sin^2 x) dx =$
 $= \int \cos x dx - \int \cos x \sin^2 x dx$
 $= \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x + c, c \in \mathbb{R}.$

$$\begin{aligned}
2. \quad \int \cos^5 x \sin^2 x dx &= \int \cos x \cos^4 x \sin^2 x dx = \int \cos x (1 - \sin^2 x)^2 \sin^2 x dx = \\
&= \int \cos x \sin^2 x dx - 2 \int \cos x \sin^4 x dx + \int \cos x \sin^6 x dx = \\
&= \frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{2}{5} \sin^5 x + \frac{1}{7} \sin^7 x + c, c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

1. c) Ha az integrandusban a szinusz és a coszinusz is páros hatványon szerepelnek, azaz $\sin^{2n} x \cos^{2m} x$ kifejezést akarjuk integrálni, akkor a kétszeres szögfüggvényeire tanult azonosságokat használjuk az integrandus átalakítására, azaz az

$$\begin{aligned}
\sin x \cos x &= \frac{1}{2} \sin 2x \\
\sin^2 x &= \frac{1 - \cos 2x}{2} \\
\cos^2 x &= \frac{1 + \cos 2x}{2}.
\end{aligned}$$

összefüggéseket.

Az $\int \sin^{2n} x \cos^{2m} x dx$ integrálban elvégezve a fenti összefüggések alapján az átalakításokat az 1.a) vagy 1.b) típusú integrálok kiszámítása lesz a feladat.

Példák 1. c)-hez:

$$\begin{aligned}
1. \quad \int \sin^2 x dx &= \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \int \cos 2x dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x + c, c \in \mathbb{R}. \\
2. \quad \int \cos^4 x dx &= \int \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 dx = \int \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{4} \cos^2 2x \right) dx = \frac{1}{4} x + \frac{1}{4} \sin 2x + \\
&\quad \frac{1}{4} \int \frac{1 + \cos 4x}{2} dx = \frac{1}{4} x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{8} x + \frac{1}{32} \sin 4x + c, c \in \mathbb{R}. \\
3. \quad \int \sin^2 x \cos^4 x dx &= \int (\sin x \cos x)^2 \cos^2 x dx = \int \frac{\sin^2 2x}{4} \cos^2 x dx = \\
&= \frac{1}{4} \int \frac{1 - \cos 4x}{2} \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{16} \int (1 + \cos 2x - \cos 4x - \cos 2x \cos 4x) dx = \frac{1}{16} \left(x + \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{4} \sin 4x - \int \frac{\cos 6x + \cos 2x}{2} dx \right) = \frac{1}{16} \left(x + \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{4} \sin 4x - \frac{1}{12} \sin 6x + \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{4} \sin 2x \right) + c, c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

A fenti példában talákoztunk az $\int \cos ax \cos bxdx$ típusú integrállal és láttuk, hogy kiszámításakor a koszinuszok szorzatát kifejeztük koszinuszok összegével. Az eljárás általában is alkalmazható. Az

$$\int \cos ax \cos bxdx, \quad \int \cos ax \sin bxdx, \quad \int \sin ax \sin bxdx$$

integrálokat úgy számítjuk ki, hogy először az integrandus alatti kifejezéseket átalakítjuk a következő trigonometrikus azonosságok segítségével

$$\begin{aligned}
\cos ax \cos bx &= \frac{1}{2} (\cos(a+b)x + \cos(a-b)x) \\
\sin ax \sin bx &= -\frac{1}{2} (\cos(a+b)x - \cos(a-b)x) \\
\cos ax \sin bx &= \frac{1}{2} (\sin(a+b)x - \sin(a-b)x),
\end{aligned}$$

majd tagonként elvégezzük az integrálást.

2. Az $\int R(\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x)$ (ahol R egy racionális kifejezés) alakú integrálok kiszámításakor mindig célravezető a

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \operatorname{tg} x = \frac{2t}{1-t^2},$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1-t^2}{2t}$$

helyettesítés.

Példák:

1. Számítsuk ki az $\int \frac{1+\cos x}{1-\sin x} dx$ $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ integrált.

Elvégezve a fent leírt változó cserét a következőt kapjuk:

$$\int \frac{1+\cos x}{1-\sin x} dx = \int \frac{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}}{1-\frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{2}{(1-t)^2} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt.$$

Az integrandus t -ben racionális törtfüggvény, amit parciális törtekre bontunk.

$$\frac{2}{(1-t)^2} \cdot \frac{2}{1+t^2} = \frac{A}{(t-1)^2} + \frac{B}{(t-1)} + \frac{Ct+D}{t^2+1};$$

$$4 = A(t^2+1) + B(t-1)(t^2+1) + (Ct+D)(t-1)^2;$$

$$4 = (B+C)t^3 + (A-B-2C+D)t^2 + (B+C-2D)t + (A-B+D).$$

Az együtthatók egyenlőségéből a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{cases} B+C=0 \\ A-B-2C+D=0 \\ B+C-2D=0 \\ A-B+D=4, \end{cases}$$

amelynek megoldása $A=C=2, B=-2, D=0$. Behelyettesítve az együtthatókat

$$\int \frac{2}{(1-t)^2} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int \left(\frac{2}{(t-1)^2} - \frac{2}{(t-1)} + \frac{2t}{t^2+1} \right) dt =$$

$$-\frac{2}{t-1} - 2 \ln |t-1| + \int \frac{(1+t^2)'}{(1+t^2)} dt = -\frac{2}{t-1} - 2 \ln |t-1| + \ln(1+t^2) + c, c \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Tehát } \int \frac{1+\cos x}{1-\sin x} dx = -\frac{2}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1} - 2 \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1 \right| + \ln(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}) + c, c \in \mathbb{R}.$$

2. Számítsuk ki az $I(x) = \int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$, $x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Hasonlóan mint az előző feladat esetén, elvégezve a változócsert a

$$-4 \int \frac{tdt}{(t^2+1)(t^2-2t-1)}$$

integrálhoz jutunk, amely elemi törtekre bontással egyszerűen kiszámíthatunk. Azonban fel szeretnénk hívni a figyelmet arra, hogy ezt az integrált még két másik eljárással is

meg lehet határozni.

Ha az integrandus alatti racionális kifejezésre teljesül **az** $R(\sin x, \cos x) = R(-\sin x, -\cos x)$ **egyenlőség, akkor a** $t = \tan x, dx = \frac{1}{1+t^2}$ **helyettesítés** egyszerűbb racionális integrálandó függvényhez vezet, mint a $t = \tan \frac{x}{2}$ helyettesítés. Az előző feladat megoldása ezzel a helyettesítéssel a következő lesz:

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx = \int \frac{\tan x}{\tan x + 1} dx = \int \frac{t}{(t+1)(t^2+1)} dt = \\ &= \frac{1}{2} \int \left(-\frac{1}{t+1} + \frac{t+1}{t^2+1} \right) dt = \frac{1}{2} \left(-\ln|t+1| + \frac{1}{2} \ln|t^2+1| + \arctan t \right) + c = \\ &= \frac{1}{2} \left(-\ln|\tan x + 1| + \frac{1}{2} \ln|\tan^2 x + 1| + x \right) + c. \end{aligned}$$

Egy harmadik megoldási eljárás a következő: Tekintsük a $J(x) = \int \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$ integrált. Vegyük észre, hogy

$$\begin{cases} I(x) + J(x) = \int \frac{\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x} dx = x + c \\ I(x) - J(x) = \int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} dx = -\int \frac{(\sin x + \cos x)'}{\sin x + \cos x} dx = \ln|\sin x + \cos x| + c. \end{cases}$$

Innen $I(x) = \frac{1}{2}(\ln|\sin x + \cos x|) + x + c, c \in \mathbb{R}$. Az eredmények látszólag különböznek egymástól, de azonos átalakításokat végezve igazolhatók, hogy legfeljebb egy konstansban különböznek. (Ennek ellenőrzését az olvasóra bízunk.)

1.4.8. Irracionális függvények integrálja

Az irracionális függvények általában elemien csak akkor integrálhatók, ha felírhatók megfelelően választott új változónak racionális függvényeként. A következőkben néhány ilyen esetet tárgyalunk.

1. **Az** $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx, n \geq 2$ **természetes szám, R racionális kétváltozós valós függvény.** Ekkor a

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^n,$$

változó cserével a t változóban racionális integrálhoz jutunk.

Azaz tekintjük az

$$x = \varphi(t) = \frac{dt^n - b}{a - ct^n}$$

helyettesítést az R függvény értelmezési tartományának egy $\mathcal{I}$ intervallumból. Ekkor a $\varphi : I \rightarrow \mathcal{I}$ deriváltja folytonos, φ, φ' racionális függvények, tehát $R(\varphi(t), t)\varphi'(t)$ racionális függvényt értelmez és határozatlan integrálja létezik és a tanult eljárásokkal kiszámítható.

Példák: Számítsuk ki a következő határozatlan integrálokat:

1.

$$\int (x+2)\sqrt[3]{x+1}dx.$$

Jelöljük

$$t = \sqrt[3]{x+1}, \text{ ekkor } x = \varphi(t) = t^3 - 1, \quad \varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi'(t) = 3t^2.$$

Alkalmazva a fenti helyettesítést a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} \int (x+2)\sqrt[3]{x+1}dx &= \int (t^3+1)3t^2dt = \frac{3}{7}t^7 + \frac{3}{4}t^4 + c = \\ &= \frac{3}{7}(\sqrt[3]{x+1})^7 + \frac{3}{4}(\sqrt[3]{x+1})^4 + c, c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2.

$$\int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx \quad x \in (-1, 1).$$

Jelöljük

$$t = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}, \quad x = \varphi(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \varphi: (0, +\infty) \rightarrow (-1, 1), \quad \varphi'(t) = \frac{-4t}{(t^2+1)^2}.$$

A fenti helyettesítés alkalmazásával a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx &= \int \frac{t^2+1}{1-t^2} t \frac{-4t}{(t^2+1)^2} dt = 4 \int \frac{-t^2}{(1-t^2)(1+t^2)} dt = \\ &= 4 \int \left(1 - \frac{1}{1-t^2}\right) \frac{1}{1+t^2} dt = 4 \operatorname{arctg} t + 2 \int \left(\frac{1}{1-t^2} + \frac{1}{1+t^2}\right) dt = \\ &= 6 \operatorname{arctg} t + \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + c = 6 \operatorname{arctg} t + \ln \left| \frac{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} - 1}{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + 1} \right| + c, c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2. Az $R(x, \sqrt{a^2 - x^2})$, $x \in (-a, a)$, $a > 0$, alakú integrálok, ahol R kétváltozós valós racionális függvény.

Ha az integrandus független változónak, az x valamint $\sqrt{a^2 - x^2}$ -nek racionális függvénye, akkor az

$$\begin{aligned} x &= a \sin t, \quad a > 0, \quad t \in (-\pi/2, \pi/2), \quad dx = a \cos t dt, \\ \sqrt{a^2 - x^2} &= \sqrt{a^2(1 - \sin^2 t)} = a \cos t \end{aligned}$$

helyettesítéssel a t trigonometrikus függvényévé alakítható.

Példa: Számítsuk ki a következő határozatlan integrált:

1.

$$\int x^2 \sqrt{4 - x^2} dx, x \in (-2, 2).$$

Az

$$x = 2 \sin t, \quad t \in (-\pi/2, \pi/2), \quad dx = 2 \cos t,$$

helyettesítést alkalmazva a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} \int x^2 \sqrt{4-x^2} dx &= \int 4 \sin^2 t \sqrt{4-4 \sin^2 t} 2 \cos t dt = \int 16 \sin^2 t \cos^2 t dt = \\ &= 4 \int \sin^2 2t dt = 2 \int (1 - \cos 4t) dt = 2t - \frac{1}{2} \sin 4t + c = \\ &= 2 \arcsin \frac{x}{2} - \frac{x \sqrt{4-x^2} (1 - \frac{x^2}{2})}{2} + c, c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

3. Az $R(x, \sqrt{a^2+x^2})$ alakú integrálok, ahol R kétváltozós valós racionális függvény.

Ha az integrandus független változónak, az x , valamint $\sqrt{a^2+x^2}$ -nek a racionális függvénye, akkor az

$$x = a \sinh t, \quad t \in \mathbb{R}, \quad dx = a \cosh t dt, \quad \sqrt{a^2+x^2} = \sqrt{a^2(1+\sinh^2 t)} = a \cosh t$$

helyettesítéssel a gyöktényező kiküszöbölhető.

Példák: Alkalmazva az előző helyettesítést, számítsuk ki a következő integrálokat:

1.

$$\int x^2 \sqrt{1+x^2} dx$$

Az

$$x = \sinh t, \quad t \in \mathbb{R}, \quad dx = \cosh t dt, \quad \sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+\sinh^2 t} = \cosh t$$

helyettesítéssel

$$\int x^2 \sqrt{1+x^2} dx = \int \sinh^2 t \cosh^2 t dt$$

integrálhoz jutunk. Mivel $\sinh^2 t = (\cosh 2t - 1)/2$, $\cosh^2 t = (\cosh 2t + 1)/2$, ezért

$$\begin{aligned} \int x^2 \sqrt{1+x^2} dx &= \frac{1}{4} \int (\cosh 2t - 1)(\cosh 2t + 1) dt = \frac{1}{4} \int (\cosh^2 2t - 1) dt = \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{\cosh 4t + 1}{2} dt - \frac{t}{4} = \frac{\sinh 4t}{32} + \frac{t}{8} - \frac{t}{4} + c, c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Mivel $x = \sinh t$ és $\sinh 4t = 2 \sinh 2t \cosh 2t = 4 \sinh t \cosh t (\sinh^2 t + \cosh^2 t) = 4 \sinh t \sqrt{1+\sinh^2 t} (\sinh^2 t + 1 + \sinh^2 t) = 4x \sqrt{1+x^2} (1+2x^2)$, ezért

$$\int x^2 \sqrt{1+x^2} dx = \frac{1}{8} x \sqrt{1+x^2} (1+2x^2) - \frac{1}{8} \operatorname{arsinh} x + c, c \in \mathbb{R}.$$

2.

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{4+25x^2}} dx.$$

Először a nevezőből kiemelünk 5-öt a nevezőből:

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{4+25x^2}} dx = \frac{1}{5} \int \frac{x^3}{\sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^2 + x^2}} dx.$$

Ha $x = \frac{2}{5} \sinh t$, akkor a gyök alatti mennyiség $\sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^2 + x^2} = \frac{2}{5} \cosh t$ és $dx = \frac{2}{5} \cosh t dt$,

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{4+25x^2}} dx = \frac{1}{5} \int \frac{\frac{8}{125} \sinh^3 t}{\frac{2}{5} \cosh t} \frac{2}{5} \cosh t dt = \frac{8}{625} \int \sinh^3 t dt =$$

$$\frac{8}{625} \int \sinh t (\cosh^2 t - 1) dt = \frac{8}{625} \int \sinh t \cosh^2 t dt - \frac{8}{625} \int \sinh t dt =$$

$$\frac{8}{1875} \cosh^3 t - \frac{8}{625} \cosh t + c = \frac{1}{3} \sqrt{\left(\left(\frac{2}{5}\right)^2 + x^2\right)^3} - \frac{4}{25} \sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^2 + x^2} + c, c \in \mathbb{R}.$$

4. Az $R(x, \sqrt{x^2 - a^2})$ alakú integrálok, ahol R kétváltozós valós racionális függvény.

Ha az integrandus a független változónak, x -nek, valamint $\sqrt{x^2 - a^2}$ -nek a racionális függvénye, akkor az

$$x = a \cosh t, \quad t \in [0, \infty), \quad dx = a \sinh t dt, \quad \sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2(\cosh^2 t - 1)} = a \sinh t$$

helyettesítéssel a gyöktényező kiküszöbölhető.

Példák:

1.

$$\int \sqrt{(x^2 - 1)^3} dx, \quad x \geq 1.$$

Jelöljük $x = \cosh t$, $t \geq 1$, akkor $dx = \sinh t dt$, $\sqrt{x^2 - 1} = \sinh t$ és

$$\begin{aligned} \int \sqrt{(x^2 - 1)^3} dx &= \int \sinh^3 t \sinh t dt = \int \sinh^4 t dt = \int \left(\frac{\cosh 2t - 1}{2} \right)^2 dt = \\ &= \frac{1}{4} \int \cosh^2 2t dt - \frac{1}{2} \int \cosh 2t dt + \frac{1}{4} t = \frac{1}{4} \int \frac{\cosh 4t + 1}{2} dt - \frac{1}{4} \sinh 2t + \frac{1}{4} t = \\ &= \frac{1}{32} \sinh 4t - \frac{1}{4} \sinh 2t + \frac{3}{8} t + c = \frac{1}{8} x \sqrt{x^2 - 1} (2x^2 - 1) - \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 - 1} + \\ &+ \frac{3}{8} \operatorname{arcosh} x + c, c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2.

$$\int \frac{x^2 - x}{\sqrt{4x^2 - 9}} dx, \quad x > \frac{3}{2}.$$

Emeljünk ki a nevezőből 2-öt:

$$\int \frac{x^2 - x}{\sqrt{4x^2 - 9}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{x^2 - x}{\sqrt{x^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2}} dx.$$

Jelöljük $x = \frac{3}{2} \cosh t$, $t > 1$, akkor $dx = \frac{3}{2} \sinh t dt$, $\sqrt{x^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3}{2} \sinh t$ és

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 - x}{\sqrt{4x^2 - 9}} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2 \cosh^2 t - \frac{3}{2} \cosh t}{\frac{3}{2} \sinh t} \frac{3}{2} \sinh t dt = \\ &= \frac{9}{8} \int \frac{\cosh 2t + 1}{2} dt - \frac{3}{4} \int \cosh t dt = \frac{9}{32} \sinh 2t - \frac{3}{4} \sinh t + \frac{9}{16} t + c, = \\ &= \frac{1}{4} x \sqrt{x^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} - \frac{1}{2} \sqrt{x^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} + \frac{9}{16} \operatorname{arcosh} \frac{2x}{3} + c, c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

5. Tekintsük az $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$, integrált ahol R kétváltozós valós racionális függvény.

Az R értelmezési tartománya függ a másodfokú trinom előjelétől és az R függvény nevezőjétől. Az integrált mindig az értelmezési tartomány egy $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ intervallumán vesszük. Ha az integrandus a független változónak, x -nek, valamint $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ -nek a racionális függvénye, akkor a paraméterek természetétől függően a következő módon alakítjuk át az irracionális kifejezést:

I. Módszer.

- I. a) **Ha $a > 0$, akkor $\sqrt{a} \cdot t$, ha $a < 0$, akkor $\sqrt{-a} \cdot t$ emelünk ki a gyökjel elé.**
 I. b) **Legyen $a > 0$, akkor a kiemelés elvégzése után a gyök alatti mennyiséget felírjuk két négyzet összegeként vagy különbségeként (azaz a másodfokú kifejezést kanonikus alakra hozzuk):**

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a} \sqrt{x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}} = \sqrt{a} \sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right)}.$$

Jelöljük $\Delta = b^2 - 4ac$ -vel a másodfokú kifejezés diszkriminánsát és végezzük el az

$$y = x + \frac{b}{2a}, \quad dx = dy$$

vátozócserét, így az

$$\begin{aligned} \int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx &= \int R\left(y - \frac{b}{2a}, \sqrt{a} \sqrt{y^2 - \frac{\Delta}{4a^2}}\right) dy = \\ &= \int R_1\left(y, \sqrt{y^2 - \frac{\Delta}{4a^2}}\right) dy, \end{aligned}$$

ahol R_1 szintén egy kétváltozós racionális kifejezés.

Ha $a \Delta > 0$, akkor az utóbbi integrált a **3.**-ban tárgyaltak alapján az

$$y = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \cosh t, \quad t \in [0, \infty), \quad dy = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \sinh t dt,$$

változó csere alkalmazásával számítjuk ki. **Ha $a \Delta < 0$** akkor **2.**-ban tárgyaltak alapján az

$$x = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} \sinh t, \quad t \in \mathbb{R}, \quad dx = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} \cosh t dt$$

változócserevel vezetjük vissza racionális tört integráljához.

- I. c) **Ha az $a < 0$, akkor $\sqrt{-a} \cdot t$** emelünk ki az integrál jel alól és kanonikus alakra hozzuk a gyök alatti másodfokú kifejezést:

$$\begin{aligned} \sqrt{ax^2 + bx + c} &= \sqrt{-a} \sqrt{-x^2 - \frac{b}{a}x - \frac{c}{a}} = \sqrt{-a} \sqrt{-\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}} = \\ &= \sqrt{-a} \sqrt{-\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{\Delta}{4a^2}}. \end{aligned}$$

Ha $a \Delta < 0$, akkor a gyök alatti mennyiség x bármely értékére negatív, tehát az integrandus a valós számok halmazán nem értelmezett és így a feladat nem oldható meg.

Ha $a \Delta > 0$, akkor először az

$$y = x + \frac{b}{2a}, \quad dx = dy$$

változócserevel

$$\begin{aligned} \int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx &= \int R\left(y - \frac{b}{2a}, \sqrt{-a} \sqrt{-y^2 + \frac{\Delta}{4a^2}}\right) dy = \\ &= \int R_2\left(y, \sqrt{-y^2 + \frac{\Delta}{4a^2}}\right) dy, \end{aligned}$$

majd az **1.** alapján az

$$y = \frac{\sqrt{\Delta}}{2|a|} \sin t, \quad t \in (-\pi/2, \pi/2), \quad dy = \frac{\sqrt{\Delta}}{2|a|} \cos t dt$$

változócserevel vezetjük vissza racionális tört integráljára.

II. Módszer. Az Euler féle helyettesítések.

- II.a) **Ha az $a > 0$** akkor az

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a}x + t, \quad x = \frac{t^2 - c}{-2\sqrt{a}t + b} = \varphi(t), \quad \varphi : I \rightarrow \mathcal{I} \quad dx = \varphi'(t)dt$$

változócsereét végezzük el. Mivel φ' folytonos, φ és φ' racionális függvények ezért a változócsere alkalmazása során

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx = \int R(\varphi(t), \sqrt{a}\varphi(t) + t) \varphi'(t) dt.$$

Ez utóbbi integrálban az integrandus t -nek racionális függvénye, tehát kiszámítható.

Példa: Az előbbi módszer alkalmazásával számítsuk ki a következő integrált:

$$\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}}, \quad x \in (0, +\infty).$$

A következő helyettesítést végezzük: $\sqrt{x^2 + x + 1} = x + t$. Az egyenlőség mindkét oldalát négyzetre emeljük, majd kifejezzük x -et és azt kapjuk, hogy $x = \frac{t^2 - 1}{1 - 2t} = \varphi(t)$, $\varphi : (-\infty, 1) \rightarrow (0, +\infty)$ továbbá $\varphi'(t) = \frac{2(t - t^2 - 1)}{(1 - 2t)^2}$. Elvégezve a helyettesítést a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}} &= \int \frac{1}{\frac{t^2 - 1}{1 - 2t} + t} \frac{2(t - t^2 - 1)}{(1 - 2t)^2} dt = \int \frac{2(t - t^2 - 1)}{(t - 2)(1 - 2t)} dt = \\ &= \int \left(1 - \frac{3t + 2}{(t - 2)(1 - 2t)}\right) dt = t + \frac{8}{3} \int \frac{1}{t - 2} dt + \frac{7}{3} \int \frac{1}{1 - 2t} dt = \\ &= t + \frac{8}{3} \ln |t - 2| - \frac{7}{6} \ln |1 - 2t| + c = \sqrt{x^2 + x + 1} - x + \frac{8}{3} \ln \left| \sqrt{x^2 + x + 1} - x - 2 \right| - \\ &- \frac{7}{6} \ln \left| 1 - 2(\sqrt{x^2 + x + 1} - x) \right| + c, c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

II.b) **Ha** $a > 0$ akkor alkalmazhatjuk a következő helyettesítést.

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{c} + tx.$$

Mindkét oldal négyzetre emelése után a szabadtagok kiesnek, majd ha mindkét oldalt elosztjuk x -szel és kifejezzük x -et a következőt kapjuk:

$$x = \frac{b - 2\sqrt{c}t}{t^2 - a} = \varphi(t), \quad dx = \varphi'(t)dt.$$

Elvégezve az előbb bemutatottak alapján a helyettesítést ismét racionális törtfüggvény integráljához jutunk.

Példa: Alkalmazva az előbb bemutatott eljárást számítsuk ki:

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3x + 1}} dx, \quad x > 0.$$

Jelöljük $\sqrt{x^2 + 3x + 1} = 1 + tx$ -el. Az utóbbi egyenlőségből kifejezve x -et

$$x = \frac{3 - 2t}{t^2 - 1} = \varphi(t), \quad dx = \frac{2t^2 - 6t + 2}{(t^2 - 1)^2} dt$$

kapjuk. Elvégezve a változócserét a következőt kapjuk:

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3x + 1}} dx = \int \frac{3 - 2t}{t^2 - 1} \left(1 + t \frac{3 - 2t}{t^2 - 1}\right)^{-1} \frac{2t^2 - 6t + 2}{(t^2 - 1)^2} dt = -2 \int \frac{3 - 2t}{(t^2 - 1)^2} dt$$

$$\begin{aligned}
& 2 \int \frac{2t}{(t^2-1)^2} dt - 6 \int \frac{1}{(t-1)^2(t+1)^2} dt = \\
& = \int \frac{(t^2-1)'}{(t^2-1)^2} dt - \frac{6}{4} \int \left(\frac{1}{(t-1)^2} - \frac{1}{(t-1)} + \frac{1}{(t+1)} + \frac{1}{(t+1)^2} \right) dt = \\
& = \frac{1}{t^2-1} - \frac{3}{2} \left(-\frac{1}{t-1} - \ln|t-1| + \ln|t+1| - \frac{1}{t+1} \right) + c = \\
& = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{x^2+3x+1}-1}{x} \right)^2 - 1} - \frac{3}{2} \left(-\frac{1}{\frac{\sqrt{x^2+3x+1}-1}{x} - 1} - \right. \\
& \quad \left. - \ln \left| \frac{\sqrt{x^2+3x+1}-1}{x} - 1 \right| + \ln \left| \frac{\sqrt{x^2+3x+1}-1}{x} + 1 \right| - \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{\frac{\sqrt{x^2+3x+1}-1}{x} + 1} \right) + c, c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

II.c) **Ha az** $ax^2 + bx + c = 0$ **másodfokú egyenletnek az** x_1, x_2 **valós gyökei, akkor az** új ismeretlent a következőképpen is bevezethetjük:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - x_1).$$

Az x -et ismét könnyen ki tudjuk fejezni a t segítségével. Figyelembe véve, hogy az x_1, x_2 gyökök ezért $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, négyzetre emelve a fenti egyenlőséget a következőt kapjuk:

$$a(x - x_1)(x - x_2) = t^2(x - x_1)^2,$$

ahonnan

$$x = \frac{ax_2 - t^2x_1}{a - t^2} = \varphi(t).$$

Elvégezve az $x = \varphi(t)$ helyettesítést az eredeti integrált racionális tört integráljára vezetjük vissza.

Példa. Alkalmazva az előbb bemutatott eljárást számítsuk ki:

$$\int \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 3x + 2}} dx, \quad x > 2.$$

Az $x^2 - 3x + 2 = 0$ egyenlet gyökei az $x_1 = 1, x_2 = 2$. Jelöljük

$$\sqrt{x^2 - 3x + 2} = t(x - 1).$$

Innen $(x - 1)(x - 2) = t^2(x - 1)^2$, egyszerűsítve $(x - 1)$ -gyel ($x - 1 \neq 0$ mivel $x > 2$) azt kapjuk, hogy $x = \frac{t^2 - 2}{t^2 - 1}$, $dx = \frac{2t}{(t^2 - 1)^2} dt$. Elvégezve a változócsere a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 3x + 2}} dx &= \int \frac{1}{\frac{t^2 - 2}{t^2 - 1} + t\left(\frac{t^2 - 2}{t^2 - 1} - 1\right)} \frac{2t}{(t^2 - 1)^2} dt = \\
&= \int \frac{t^2 - 1}{(t^2 - t - 2)(t^2 - 1)^2} dt = 2 \int \frac{t}{(t + 1)^2(t - 2)(t - 1)} dt.
\end{aligned}$$

A fenti racionális tört integrálásához először a törtet elemi törtekre bontjuk

$$\frac{t}{(t+1)^2(t-2)(t-1)} = \frac{A}{(t+1)^2} + \frac{B}{t+1} + \frac{C}{t-2} + \frac{D}{t-1}.$$

Az együtthatók egyenlővé tételéből azt kapjuk, hogy

$$\begin{cases} B + C + D = 0 \\ A + 2B + C + 4D = 0 \\ A - B - C + 3D = 1 \\ -2A - 2B - C + 2D = 0, \end{cases}$$

ahonnan $A = \frac{3}{5}, B = \frac{-11}{10}, C = \frac{12}{10}, D = \frac{1}{10}$.

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 3x + 2}} dx &= \frac{-A}{t+1} + B \ln|t+1| + C \ln|t-2| + D \ln|t-1| + c = \\ &= \frac{-A}{\sqrt{\frac{x-2}{x-1}} + 1} + B \ln \left| \sqrt{\frac{x-2}{x-1}} + 1 \right| + C \ln \left| \sqrt{\frac{x-2}{x-1}} - 2 \right| + D \ln \left| \sqrt{\frac{x-2}{x-1}} - 1 \right| + c, \\ c &\in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

5. A binom-differenciál integrálja. Így nevezik az

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx, \quad m, n, p \in \mathbb{Q}$$

alakú integrálokat, ahol az m, n, p egyidőben nem egész számok. Ha $x^n = t$, akkor az

$$x = t^{\frac{1}{n}} = \varphi(t), \quad dx = \frac{1}{n} t^{\frac{1}{n}-1} dt$$

helyettesítést végezzük (ha n páratlan, akkor $t \in \mathbb{R}$, ha n páros, akkor $t \geq 0$) és a következő integrált kapjuk:

$$(*) \quad \int x^m (a + bx^n)^p dx = \frac{1}{n} \int t^{\frac{m+1}{n}-1} (a + bt)^p dt.$$

Ezután a következő eseteket különböztetjük meg:

- a) Ha $a \neq 0$ és $\frac{m+1}{n} - 1$ **egész számok**, akkor az integrálandó függvény racionális, tehát ki tudjuk számítani az integrálját.
- b) Ha $a \neq 0$ és $\frac{m+1}{n} - 1$ **nem egész szám**, akkor legyen $\frac{m+1}{n} - 1 = \frac{q}{s}$ ahol az s és q egész számok relatív prímek, $s \neq 0$. Ekkor az utóbbi integrálban a következő helyettesítést végezzük:

$$t = u^s = \psi(u), \quad dt = su^{s-1} du$$

így az

$$\frac{s}{n} \int u^{q+s-1} (a + bu^s)^p du$$

integrálhoz jutunk, ahol p, q, s egész számok, így egy racionális törtfüggvény integrálját kell meghatároznunk.

- c) **Ha az $\frac{m+1}{n}$ egész szám**, akkor a (*)-gal jelölt integrálban a második tényező lehet irracionális függvény. Ha $p = \frac{r}{v}$, ahol r és v relatív prím egész számok $v \neq 0$, akkor

$$a + bt = z^v, \quad dt = \frac{v}{b} z^{v-1} dz$$

helyettesítéssel a

$$\frac{v}{bn} \int \left(\frac{z^v - a}{b} \right)^{\frac{m+1}{n}-1} z^{r+v-1} dz = \frac{v}{nb^{\frac{m+1}{n}}} \int z^{r+v-1} (z^v - a)^{\frac{m+1}{n}-1} dz$$

integrálhoz jutunk, ahol $r, v, \frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$, azaz az integrálandó függvény racionális.

- d) **Ha az $\frac{m+1}{n} + p$ egész szám**, akkor a (*)-gal jelölt integrált a következő alakban írjuk:

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx = \frac{1}{n} \int t^{\frac{m+1}{n}-1} (a + bt)^p dt = \frac{1}{n} \int t^{\frac{m+1}{n}+p-1} \left(\frac{a+bt}{t} \right)^p dt.$$

A fenti integrálban szereplő két tényező közül csak a második lehet irracionális. Legyen $p = \frac{k}{\ell}$ ahol k és ℓ relatív prím egészek $\ell \neq 0$. Végezzük el a

$$\frac{a+bt}{t} = z^\ell$$

változcserét és egy racionális tört függvény integráljához jutunk.

Példa. Az előzőekben bemutatott helyettesítési eljárások alapján számítsuk ki a következő határozatlan integrált:

$$I(x) = \int \sqrt[3]{\frac{2 - \sqrt[3]{x}}{x}} dx,$$

ha $x \in (0, +\infty)$.

Az integrált a következő alakba írjuk:

$$I(x) = \int x^{-\frac{1}{3}} (2 - x^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{3}} dx.$$

Igy már látjuk, hogy $m = -\frac{1}{3}$, $n = p = \frac{1}{3}$. Először az

$$\sqrt[3]{x} = t, \quad x = t^3, \quad dx = 3t^2 dt, \quad t > 0$$

helyettesítéssel az

$$I(x) = \int t^{-1} (2 - t)^{\frac{1}{3}} 3t^2 dt = 3 \int t(2 - t)^{\frac{1}{3}} dt$$

integrálhoz jutunk. Észrevesszük, hogy $\frac{m+1}{n} = \frac{-1/3+1}{1/3} = 2$ egész, tehát a c) eset alapján a

$$2-t=z^3, \quad t=2-z^3=\psi(t), \quad \psi: (-\infty, 2) \rightarrow (0, +\infty), \quad dt = -3z^2 dz$$

helyettesítéssel

$$\begin{aligned} I(x) &= 3 \int (2-z^3)z(-3z^2)dz = -9 \int (z^6 - 2z^3)dz = -\frac{9}{7}z^7 + \frac{9}{2}z^4 + c = \\ &= -\frac{9}{7}(2-t)^{\frac{7}{3}} + \frac{9}{2}(2-t)^{\frac{4}{3}} + c = -\frac{9}{7}(2-\sqrt[3]{x})^{\frac{7}{3}} + \frac{9}{2}(2-\sqrt[3]{x})^{\frac{4}{3}} + c, c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

1.5. Összefoglaló feladatok

Határozzuk meg, hogy melyik halmazon létezik primitív függvénye az alábbi függvényeknek, és határozzuk meg a primitív függvényeiket!

- | | |
|---|--|
| I. 1) $f(x) = x \ln(x^2 + 1)$ | 2) $f(x) = (x^2 + x + 3)e^{2x}$ |
| 3) $f(x) = (x^3 + x + 1)e^{-x}$ | 4) $f(x) = x \cos 2x$ |
| 5) $f(x) = x^3 \sin 3x$ | 6) $f(x) = e^{-x} \sin 2x$ |
| 7) $f(x) = e^{2x} \cos^2 x$ | 8) $f(x) = \sin(\ln x)$ |
| 9) $f(x) = x^2 \sinh x$ | 10) $f(x) = \arccos(4x + 1)$ |
| 11) $f(x) = x \arctg x$ | 12) $f(x) = \arctg \sqrt{2x - 1}$ |
| 13) $f(x) = \frac{\cos^2 x}{e^x}$ | 14) $f(x) = x \ln \frac{x-1}{x+1}$ |
| 15) $f(x) = e^{\arccos x}$ | 16) $f(x) = e^{\arcsin x} \cdot \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| 17) $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ | 18) $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ |
| II. 1) $f(x) = \frac{x^3}{1-x}$ | 2) $f(x) = \frac{x}{x^4 - 1}$ |
| 3) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$ | 4) $f(x) = \frac{x^5}{x^3 - 4x}$ |
| 5) $f(x) = \frac{1}{x^3 - 1}$ | 6) $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2 x}$ |
| 7) $f(x) = \frac{2x^2}{x^4 + 1}$ | 8) $f(x) = \frac{2x^3 - 4x^2 + x - 5}{(x-1)(x^2 + 4)^2}$ |
| 9) $f(x) = \frac{x}{2x^2 + 3x + 1}$ | 10) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ |
| 11) $f(x) = \frac{1}{x(x^2 + 1)^2}$ | 12) $f(x) = \frac{x^7 + 1}{x^2(x-1)^3}$ |
| III. 1) $f(x) = \frac{1}{\cos 2x}$ | 2) $f(x) = \frac{\sin^3 x}{\cos x}$ |
| 3) $f(x) = \sin^2 x$ | 4) $f(x) = \cos^4 x$ |
| 5) $f(x) = \sin^3 2x$ | 6) $f(x) = \sin^2 2x \cos^3 2x$ |
| 7) $f(x) = \sin^3 x \cos x$ | 8) $f(x) = \sin^4 x \cos^2 x$ |
| 9) $f(x) = \frac{1}{\sin x \cos x}$ | 10) $f(x) = \frac{1}{2 \sin x - \cos x + 5}$ |
| 11) $f(x) = \frac{1}{3 + \operatorname{tg} x}$ | 12) $f(x) = \frac{1 - \sin x}{1 + \cos x}$ |
| 13) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}$ | 14) $f(x) = \frac{\sin^2 x \cos x}{\sin x + \cos x}$ |
| 15) $f(x) = \frac{\sin 2x}{1 + \sin^2 x}$ | 16) $f(x) = \frac{1}{\cos^4 x \sin^2 x}$ |

$$\begin{array}{ll} \text{IV. 1) } f(x) = \frac{e^x}{1 + e^{2x}} & 2) f(x) = \frac{e^{3x}}{e^x + 1} \\ 3) f(x) = \sqrt{\frac{e^x - 1}{e^x + 1}} & 4) f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{e^x - 1}} \\ 5) f(x) = \frac{1}{e^x + e^{-x} + 2} & 6) f(x) = \frac{\sqrt{e^x + 1}}{e^{2x}} \\ 7) f(x) = sh^3 x & 8) sh^2 x \, ch^2 x \\ 9) f(x) = ch^4 x & 10) f(x) = \frac{1}{sh \, x \, ch \, x} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{V. 1) } f(x) = (x + 3)\sqrt{2x + 1} & 2) f(x) = x\sqrt[3]{x + 2} \\ 3) f(x) = \frac{x + 2}{\sqrt{x + 7}} & 4) f(x) = \sqrt{\frac{x + 1}{x - 1}} \\ 5) f(x) = x\sqrt{\frac{x + 2}{x - 2}} & 6) f(x) = \sqrt[3]{\frac{x + 1}{2x - 1}} \\ 7) f(x) = x\sqrt{1 - x^2} & 8) f(x) = \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} \\ 9) f(x) = x^2\sqrt{1 - x^2} & 10) f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{4 - x^2}} \\ 11) f(x) = (x + 3)\sqrt{(1 - x^2)^3} & 12) f(x) = x^2\sqrt{1 + x^2} \\ 13) f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 9}} & 14) f(x) = x^3\sqrt{x^2 - 1} \\ 15) f(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 9}} & 16) f(x) = \frac{x}{1 + \sqrt{4 + x^2}} \\ 17) f(x) = \frac{1}{1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}} & 18) f(x) = \frac{1}{(1 + x)\sqrt{1 + x - x^2}} \\ 19) f(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - x + 1}} & 20) f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2} \\ 21) f(x) = \frac{1 + x}{\sqrt{-x^2 + 4x + 5}} & \end{array}$$

VI. Adjunk rekurziós összefüggést a következő integrálok kiszámítására. ($n \in \mathbb{N}^*$)

$$\begin{array}{ll} 1) f(x) = \sin^n x & 2) f(x) = \cos^n x \\ 3) f(x) = \ln^n x & 4) f(x) = \frac{1}{\sin^n x} \\ 5) f(x) = \frac{1}{\cos^n x} & 6) f(x) = tg^n x \\ 7) f(x) = ctg^n x & \end{array}$$

VII. Mutassuk meg, hogy a következő $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényeknek van primitív függvényük:

$$\begin{array}{l} 1) f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & , \text{ha } x \neq 0 \\ 1 & , \text{ha } x = 0 \end{cases} \\ 2) f(x) = \begin{cases} \frac{tg \, 2x}{x} & , \text{ha } x \neq 0 \\ 2 & , \text{ha } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

- 3) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x^2}} & , \text{ha } x \neq 0 \\ 0 & \text{ha } x = 0 \end{cases}$
- 4) $f(x) = |x|$
- 5) $f(x) = \sqrt{|1 - x^2|}$
- 6) $f(x) = \max(1, x^2)$
- 7) $f(x) = \begin{cases} 2 & , \text{ha } x < 0 \\ \sqrt{x^2 - 4x + 4} & , \text{ha } x \geq 0 \end{cases}$
- 8) $f(x) = \begin{cases} x + 1 & , \text{ha } x < 0 \\ e^x & , \text{ha } x \geq 0 \end{cases}$
- 9) $f(x) = \begin{cases} \cos \frac{1}{x} & , \text{ha } x \neq 0 \\ 0 & , \text{ha } x = 0 \end{cases}$

VIII. Mutassuk meg, hogy a következő $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényeknek nincs primitív függvényük:

- 1) $f(x) = \operatorname{sgn} x$
- 2) $f(x) = [x]$
- 3) $f(x) = (1 + x^2) \operatorname{sgn} x$
- 4) $f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ha } x \leq 0 \\ \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x} & , \text{ha } x > 0 \end{cases}$
- 5) $f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{tg} x}{x} & , \text{ha } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \setminus \{0\} \\ -1 & , \text{ha } x = 0 \end{cases}$

IX. Határozzuk meg az a valós szám azon értékeit, amelyre a következő függvényeknek van primitív függvényük:

- 1) $f(x) = \begin{cases} x^2 & , \text{ha } x \leq 1 \\ 2x + a & , \text{ha } x > 1 \end{cases}$
- 2) $f(x) = \begin{cases} x^3 - 2x & , \text{ha } x < 0 \\ x^2 & , \text{ha } x \in [0, 2] \\ 3x + a & , \text{ha } x > 2 \end{cases}$
- 3) $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & , \text{ha } x \neq 0 \\ a & , \text{ha } x = 0 \end{cases}$

X. Adjunk példát két olyan függvényre, melyeknek az $\mathbb{R}$ -en nincs primitív függvényük, de az összegüknek van primitív függvénye.

XI. Bizonyítsuk be, hogy az $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & , \text{ha } x \neq 0 \\ 0 & , \text{ha } x = 0 \end{cases} \text{ és } g(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} & , \text{ha } x \neq 0 \\ 0 & , \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

valamint $h(x) = g(x) - f(x)$ függvényeknek van primitív függvénye, de a $h^2(x) = (g(x) - f(x))^2$, $h^2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek nincs.

XII. Bizonyítsuk be, hogy az $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \sin^2 \frac{1}{x} - \sin \frac{1}{x} & , \text{ ha } x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & , \text{ ha } x = 0 \end{cases} \quad \text{és} \quad g(x) = \begin{cases} \sin^2 \frac{1}{2} + \sin \frac{1}{2} & , \text{ ha } x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & , \text{ ha } x = 0 \end{cases}$$

függvényeknek van primitív függvénye, de a $h = fg : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek nincs.

2. Határozott integrál

2.1. Archimédész módszere a parabola alatti terület kiszámítására

Feladat. Határozzuk meg az $f(x) = x^2$ függvény grafikus képe, az Ox tengely az $x = 0, x = 1$ egyenesek által határolt síkidom területét.

A terület meghatározása érdekében osszuk fel a $[0, 1]$ intervallumot n egyenlő részre. A kapott osztópontok halmazát jelöljük τ -val:

$$\tau = \{x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{n}, \dots, x_k = \frac{k}{n}, \dots, x_n = \frac{n}{n} = 1\}.$$

Lásd a 2.1 ábrát. A megadott osztópontokhoz tartozó „ f grafikonjába beírt téglalapok” területének összege:

$$\begin{aligned} s_n(f, \tau) &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{k}{n}\right)^2 = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k^2}{n^3} = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \\ &= \frac{1}{n^3} \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} = \frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(2 - \frac{1}{n}\right), \end{aligned}$$

amely növekszik az osztópontok n számának növelésével.

Az f grafikonja „köré írt téglalapok” területének összege:

$$\begin{aligned} S_n(f, \tau) &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{k}{n}\right)^2 = \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^3} = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 = \\ &= \frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right), \end{aligned}$$

amely csökken az osztópontok n számának növelésével.

Ha nagyon sok osztópontot tekintünk, akkor a „beírt” és „köré írt téglalapok” területének összege nagyon jól megközelíti (hiánnyal, illetve többlettel) a kiszámítandó területet. Vagyis a felvetett problémára választ kapunk, ha kiszámítjuk az s_n vagy az S_n kifejezéseinek a határértékét midőn az n tart a végtelenbe.

$$\begin{aligned} T &= \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(f, \tau) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f, \tau) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

1. Kérdés. Lehet-e a módszert általánosítani bármely függvényre? Bizonyos függvényosztályok esetén elméletben jó a módszer, de gyakorlatban nem mindig sikerül

a s_n és a S_n összegeket olyan (zárt) alakra hozni amely lehetővé teszi a határértékük kiszámítását. Például az $f(x) = \sin x, x \in [0, 1]$ esetén $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \sin \frac{k}{n}$ felső közelítő összeg határértékének meghatározása nem egyszerű.

Észrevétel. A $f(x) = x^2$ függvénynek a $F = \frac{x^3}{3}$ függvény primitív függvénye ($F'(x) = f(x) \forall x \in [0, 1]$). Vegyük észre azt az érdekes tényt, hogy

$$F(1) - F(0) = 1/3 = T.$$

Ennek alapján felmerül az a sejtés, hogy a primitív függvény „megváltozása” megadja a görbe alatti síkrész területét bizonyos függvényosztályok esetén.

2. Kérdés. Milyen függvényosztályok esetén igaz az, hogy a primitív függvény „megváltozása” megadja a görbe alatti síkrész területét?

A következőkben a fent megfogalmazott kérdésekre adjuk meg a választ. Megmutatjuk, hogy az $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvények esetén a bemutatott eljárás általánosítása a határozott integrál definíciójához vezet. Az általánosítás érdekében az $[a, b]$ intervallumot n nem feltétlenül egyenlő részre osztjuk. Az így kapott osztópontok segítségével vezetjük be az $[a, b]$ intervallum felosztásának fogalmát. Az adott felosztáshoz tartozó „beírt” és „körülírt” téglalapok területeinek összegével definiáljuk az s_n és S_n alsó ill. felső közelítő összegeket. Megmutatjuk, hogy ha az f korlátos az $[a, b]$ -n akkor a bármely lehetséges módon felírt alsó közelítő összegek halmazának van szuprénuma és az összes lehetséges módon felírt felső közelítő összegek halmazának van infimuma. Az olyan függvényeket, amelyekre igaz az, hogy az alsó közelítő összegek szuprénuma egyenlő a felső közelítő összegek infimumával, az $[a, b]$ -n határozott integrállal rendelkező függvényeknek, vagy egyszerűbben $[a, b]$ -n integrálható függvényeknek fogjuk nevezni.

A későbbiekben a második kérdésre is fogunk válaszolni. Nevezetesen, megmutatjuk, hogy azokra a függvényekre, amelyek egyidőben integrálhatók az $[a, b]$ -n és van primitív függvényük igaz az, hogy az $[a, b]$ -n vett határozott integráljuk éppen a primitív függvényük $[a, b]$ -n vett megváltozásával lesz egyenlő. Ezt a nagyon fontos eredményt a Newton-Leibniz tételnek nevezzük és a gyakorlatban ezt használjuk, ha valahányszor ki akarunk számítani egy határozott integrált. s most térjünk rá a határozott integrál precíz definíciójára.

2.2 A határozott integrál fogalma

1. Definíció

Legyen $I = [a, b]$ egy zárt, véges intervallum. Az I intervallum a és b végpontjait tartalmazó véges részhalmazait az I intervallum felosztásainak nevezzük, amelyet általában

$$\tau = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\}$$

alakban írunk.

Az I felosztásainak halmazát $\mathcal{F}(I)$ -vel jelöljük. Nyilvánvaló, hogy bármely két $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{F}(I)$ felosztásra $\tau_1 \cup \tau_2 \in \mathcal{F}(I)$, $\tau_1 \cap \tau_2 \in \mathcal{F}(I)$.

2. Definíció

Legyen $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ egy korlátos függvény és $\tau := \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \in \mathcal{F}(I)$ az I intervallum egy felosztása. Jelöljük

$$m_i = \inf\{f(x) : x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$$

$$M_i = \sup\{f(x) : x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$$

Az

$$S(f, \tau) := \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) M_i,$$

ill. az

$$s(f, \tau) := \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) m_i,$$

számot az f -nek a τ felosztáshoz tartozó felső, ill. alsó közelítő összegének nevezzük.

Lásd a 2.2 ábrát.

Az f függvény korlátosságából következik, hogy $m_i, M_i, (i = \overline{1, n})$ véges számok. Következésképpen a $S(f, \tau)$ és a $s(f, \tau)$ is véges számok. Ha $f(x) > 0, x \in I$, akkor $S(f, \tau)$ az „ f grafikonja köré írt”

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x_{i-1} \leq x \leq x_i, 0 \leq y \leq M_i\}$$

téglalapok területének összegét jelenti. A $s(f, \tau)$ az „ f grafikonjába beírt”

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x_{i-1} \leq x \leq x_i, 0 \leq y \leq m_i\}$$

téglalapok területének összegével egyenlő.

Ha az f függvény negatív értéket is felvesz, akkor az m_i és M_i számok között lesznek negatív számok is. Ebben az esetben az $s(f, \tau)$ és $S(f, \tau)$ a beírt és körülírt téglalapok egyesítésével adódó halmaz **előjeles területének** nevezzük.

Nyilvánvaló, hogy $m_i = \inf\{f(x) : x_{i-1} \leq x \leq x_i\} \leq \sup\{f(x) : x_{i-1} \leq x \leq x_i\} = M_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), következésképpen bármely τ felosztás esetén:

$$(1) \quad s(f, \tau) := \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) m_i \leq \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) M_i =: S(f, \tau).$$

Azaz bármely τ felosztáshoz tartozó alsó közelítő összeg kisebb vagy egyenlő mint a τ felosztásához tartozó felső közelítő összeg.

1. Tétel. a) Ha $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{F}(I)$ és $\tau_1 \subset \tau_2$, akkor

$$s(f, \tau_1) \leq s(f, \tau_2), \quad S(f, \tau_1) \geq S(f, \tau_2),$$

b) Bármely két $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{F}(I)$ felosztásra

$$s(f, \tau_1) \leq S(f, \tau_2).$$

Ha $\tau_1 \subset \tau_2$, akkor a τ_2 több osztópontot tartalmaz. Ilyenkor azt mondjuk, hogy a τ_2 felosztás a τ_1 felosztás finomítása. A tételt első részét úgy is megfogalmazhatjuk, hogy **a felosztás finomításával az alsó közelítő összegek nem csökkenek, a felső közelítő összegek pedig nem nőnek, a második részét pedig úgy, hogy bármely alsó közelítő összeg kisebb vagy egyenlő, mint bármely felső közelítő összeg.**

BIZONYÍTÁS. Az a) állítás igazolásához tegyük fel először, hogy τ_2 csak eggyel több pontot tartalmaz mint τ_1 , azaz legyen $\tau_2 := \tau_1 \cup \{x'\}$, ahol $\tau_1 = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_{n-1} < x_n = b\}$ és $x_{i-1} < x' < x_i$. Ekkor $s(f, \tau_1)$ -ből az $s(f, \tau_2)$ úgy adódik hogy az $m_i(x_i - x_{i-1})$ tag helyett az

$$m'(x' - x_{i-1}) + m''(x_i - x')$$

összeget írjuk, ahol

$$m' := \inf\{f(x) : x_{i-1} \leq x \leq x'\}$$

és

$$m'' = \inf\{f(x) : x' \leq x \leq x_i\}.$$

Mivel $m', m'' \geq \inf\{f(x) : x_{i-1} \leq x \leq x_i\} = m_i$, ezért

$$m_i(x_i - x_{i-1}) = m_i(x' - x_{i-1}) + m_i(x_i - x') \leq m'(x' - x_{i-1}) + m''(x_i - x')$$

s így valóban

$$s(f, \tau_1) \leq s(f, \tau_2).$$

Felhasználva a

$$M' := \sup\{f(x) : x_{i-1} \leq x \leq x'\}, \quad M'' = \sup\{f(x) : x' \leq x \leq x_i\} \leq M_i$$

egyenlőtlenséget hasonlóan adódik, hogy

$$S(f, \tau_1) \geq S(f, \tau_2).$$

Az általános esetben τ_1 -hez τ_2 -nek egy-egy (τ_1 -ben nem szereplő) pontját véve véges sok lépésben megkapjuk a τ_2 felosztást. Mivel a most igazoltak alapján minden egyes lépésben $s(f, \tau_1)$ nem csökken, $S(f, \tau_2)$ pedig nem nő, ezért valóban fennállnak a bizonyítandó

$$s(f, \tau_1) \leq S(f, \tau_2), S(f, \tau_1) \geq S(f, \tau_2)$$

egyenlőtlenségek.

A b) állítást felhasználva a most igazolt állítást és az (1) egyenlőtlenséget, a következőképpen bizonyítható:

$$(2) \quad s(f, \tau_1) \leq s(f, \tau_1 \cup \tau_2) \leq S(f, \tau_1 \cup \tau_2) \leq S(f, \tau_2)$$

A (2) egyenlőtlenség alapján nyilvánvaló, hogy **bármely korlátos $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvényre a $\{s(f, \tau) : \tau \in \mathcal{F}(I)\}$ számhalmaz felülről, a $\{S(f, \tau) : \tau \in \mathcal{F}(I)\}$ számhalmaz pedig alulról korlátos, tehát a $\sup\{s(f, \tau), \tau \in \mathcal{F}(I)\}$ és $\inf\{S(f, \tau), \tau \in \mathcal{F}(I)\}$ léteznek és végesek.**

3. Definíció.

Az $I_*(f) := \sup\{s(f, \tau) : \tau \in \mathcal{F}(I)\}$ számot az f (**Darboux féle**) **alsó integráljának**, az $I^*(f) := \inf\{S(f, \tau) : \tau \in \mathcal{F}(I)\}$ számot az f **Darboux-féle felső integráljának** nevezzük.

Azt mondjuk, hogy az $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvény (**Riemann-integrálható**) (létezik az $[a, b]$ -n a határozott integrálja, röviden integrálható), ha $I_*(f) = I^*(f)$. A közös $I_*(f) = I^*(f)$ számot az f függvény **Riemann-integráljának** (röviden integráljának) nevezzük, és az alábbi szimbólumok valamelyikével jelöljük:

$$I(f), \quad \int_a^b f, \quad \int_a^b f(x)dx.$$

Az $[a, b]$ intervallumon Riemann-integrálható függvények halmazát $\mathcal{R}[a, b]$ -vel jelöljük. A fenti értelmezésből a (2)-es alapján következik, hogy:

$$I_*(f) \leq I^*(f).$$

Figyelembe véve a $S(f, \tau)$ és $s(f, \tau)$ geometriai jelentését kézenfekvő az alábbi:

3. Definíció.

Azt mondjuk, hogy az $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ függvény esetén a

$$H := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

halmaznak (az $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény grafikonja alatti tartománynak vagy szubgrafikonjának) van területe, ha f integrálható és akkor az $\int_a^b f$ számot a H halmaz területének nevezzük:

$$T(H) := \int_a^b f(x)dx.$$

Lásd a 2.3 ábrát.

Az $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_-$ függvény esetén a

$$K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq 0\}$$

halmaznak akkor van területe, ha f integrálható és

$$T(K) := - \int_a^b f(x)dx.$$

A következőkben kiszámítjuk a definíció alapján néhány egyszerű függvény $[a, b]$ -n vett határozott integrálját, ha létezik.

Példák:

- 1) Legyen $f(x) = 1, x \in [a, b]$. Határozzuk meg az f integrálját.
Mivel bármely $\tau := \{x_0, \dots, x_n\} \in \mathcal{F}(I)$ felosztásra

$$S(f, \tau) = s(f, \tau) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = b - a,$$

ezért :

$$\int_a^b f = b - a.$$

- 2) Határozzuk meg az $g(x) = x, x \in [a, b]$ integrálját.
A g függvény integráljának kiszámításához tekintsük a $\tau_n = \{a, a+h_n, a+2h_n, \dots, a+nh_n\} (n \in \mathbb{N})$ felosztásokat, ahol $h_n = (b-a)/n$. Ekkor

$$\begin{aligned} s(g, \tau_n) &= \sum_{k=1}^n h_n(a + (k-1)h_n) = nh_na + h_n^2 \sum_{k=1}^n (k-1) = \\ &= a(b-a) + \frac{(b-a)^2 n(n-1)}{2n^2}, \end{aligned}$$

$$S(g, \tau_n) = \sum_{k=1}^n h_n(a + kh_n) = a(b-a) + \frac{(b-a)^2 n(n+1)}{2n^2}.$$

Mivel

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)}{2n^2} = \frac{1}{2},$$

ezért

$$\sup_n s(g, \tau_n) = \inf_n S(g, \tau_n) = a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{2} = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

Innen

$$\sup_n s(g, \tau_n) \leq I_*(g) \leq I^*(g) \leq \inf_n S(g, \tau_n)$$

alapján következik, hogy

$$\int_a^b g = \int_a^b x dx = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

A későbbiekben belátjuk, hogy a függvények viszonylag tág osztálya integrálható.

- 2) **Van azonban olyan függvény is, amely nem integrálható**. Tekintsük például a következő függvényt:

$$D(x) := \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1], \\ 0, & x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Mivel minden intervallum tartalmaz racionális és irracionális számot, ezért bármely $[x_{i-1}, x_i] \subset [0, 1]$ esetén

$$\inf\{D(x) : x_{i-1} \leq x \leq x_i\} = 0, \quad \sup\{D(x) : x_{i-1} \leq x \leq x_i\} = 1.$$

Innen nyilvánvaló, hogy minden $\tau = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \in \mathcal{F}(I)$ felosztásra $s(D, \tau) = 0, S(D, \tau) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot 1 = 1$, mivel $I_*(D) = 0 \neq I^*(D) = 1$ következik, hogy D valóban nem integrálható.

Az integrálhatóságnak egy egyszerű és jól használható kritériuma adható meg az alábbi fogalommal.

5. Definíció.

Az

$$\Omega(f, \tau) := S(f, \tau) - s(f, \tau) \quad \tau \in \mathcal{F}(I)$$

számot az $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvény $\tau \in \mathcal{F}(I)$ felosztásához tartozó **oszcillációs összegének** nevezzük.

Lásd a 2.4 ábrát.

Az oszcillációs összeg geometriai jelentése nem más mint a (2.4) ábrán a bevonalkázott síkrész területe. Az 1. Tétel a) állításából egyszerűen következik, hogy az I intervallum bármely két $\tau_1 \subset \tau_2$ felosztására

$$\Omega(f, \tau_1) \geq \Omega(f, \tau_2),$$

azaz a felosztás finomításával az oszcillációs összeg csökken. Az oszcillációs összeg fogalmát felhasználva az integrálhatóság következő szükséges és elégséges feltételét tudjuk igazolni:

2. Tétel. (Oszcillációs kritérium)

Az $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvény akkor és csak akkor integrálható, ha

$$(3) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \tau \in \mathcal{F}(I) \text{ felosztás úgy, hogy } \Omega(f, \tau) < \varepsilon.$$

BIZONYÍTÁS. Először tegyük fel, hogy f integrálható, azaz $I_*(f) = I^*(f) = I(f)$. Ekkor az I_* és I^* értelmezése alapján

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \tau_1 \in \mathcal{F}(I) \quad \text{úgy, hogy} \quad I(f) - \varepsilon/2 < s(f, \tau_1) \leq I(f),$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \tau_2 \in \mathcal{F}(I) \quad \text{úgy, hogy} \quad I(f) \leq S(f, \tau_2) < I(f) + \varepsilon/2.$$

Legyen $\tau := \tau_1 \cup \tau_2$. Ekkor az 1. Tétel a) állítása alapján azt kapjuk, hogy

$$I(f) - \varepsilon/2 < s(f, \tau) \leq I(f) \leq S(f, \tau) < I(f) + \varepsilon/2,$$

azaz valóban $\Omega(f, \tau) = S(f, \tau) - s(f, \tau) < \varepsilon$.

Most induljunk ki abból a tényből, hogy f -re teljesül a (3) állítás. Mivel bármely $\tau \in \mathcal{F}(I)$ felosztásra $0 \leq I^*(f) - I_*(f) \leq S(f, \tau) - s(f, \tau)$, ezért (3) alapján nyilvánvaló, hogy $I^*(f) - I_*(f) = 0$. Ezzel beláttuk, hogy (3)-ból az f integrálhatósága valóban következik. ■

Megjegyzés

Az integrál értelmezéséhez felhasznált alsó és felső összegek mellett szokás még az ún. **Riemann-féle közelítő összeget** vagy **téglányösszeget** bevezetni.

5. Definíció.

Tetszőleges $\tau = \{x_0, \dots, x_n\} \in \mathcal{F}[a, b]$ esetén legyen a felosztás normája: $\|\tau\| := \max\{x_i - x_{i-1} : i = 1, \dots, n\}$ és vezessük be az

$$A_\tau := \{\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) : x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i, i = 1, \dots, n\}$$

ún. közbeeső pontok rendszerét. A

$$\sigma(f, \tau, \xi) := \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \quad \tau \in \mathcal{F}[a, b], \quad \xi \in A_\tau$$

számot az $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény (τ, ξ) -hez tartozó **Riemann-féle közelítő összegének** nevezzük.

Nyilvánvaló, hogy bármely $\tau \in \mathcal{F}[a, b]$, $\xi \in A_\tau$ esetén

$$s(f, \tau) \leq \sigma(f, \tau, \xi) \leq S(f, \tau).$$

A $\sigma(f, \tau, \xi)$ szám az $[x_{i-1}, x_i]$ intervallumok fölé $f(\xi_i)$ "magassággal" rajzolt téglalapok területének összegével egyenlő, amelyet a (2.5) ábrán szemléltetünk. Lásd a 2.5 ábrát.

6. Definíció.

Akkor mondjuk, hogy a $\sigma(f, \tau, \xi)$, $\tau \in \mathcal{F}[a, b]$, $\xi \in A_\tau$ téglányösszegeknek az I szám a határértéke, ha

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall \tau \in \mathcal{F}[a, b], \text{ amelyre } \|\tau\| < \delta, \forall \xi \in A_\tau : |\sigma(f, \tau, \xi) - I| < \varepsilon.$$

Bebizonyítható a következő tétel:

3. Tétel. Az $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény akkor és csak akkor integrálható, ha a $\sigma(f, \tau, \xi)$, $\tau \in \mathcal{F}[a, b]$, $\xi \in A_\tau$ Riemann-féle közelítő összegeknek van határértéke és ez a határérték az f integráljával egyenlő.

A Riemann közelítő összegek segítségével bevezetett integrálhatóság fogalma esetén az $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvényről nem tételeztük fel, hogy korlátos az $[a, b]$ -n. Azonban igazolni lehet, hogy ha $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény Riemann közelítő összegeinek egy véges I szám a határértéke, akkor ebből következik az f függvény korlátossága. Valóban:

Tétel 4. Ha az $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrálható az $[a, b]$ intervallumon, akkor f korlátos $[a, b]$ -n.

BIZONYÍTÁS. Legyen $I = \int_a^b f$ és $\varepsilon = 1$, akkor a Definíció alapján létezik olyan $\delta > 0$, amelyre $\forall \tau \in \mathcal{F}[a, b]$ -re, amelyre $\|\tau\| < \delta$ és $\forall \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$ igaz az, hogy $|\sigma(f, \tau, \xi) - I| < 1$. A $\tau = \{t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_{i-1} < t_i < \dots < t_n\}$ felosztás minden $[t_{i-1}, t_i]$ intervallumán, kivéve az $[t_{j-1}, t_j]$ -t, rögzítsünk egy-egy $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$ közbeeső értéket, ξ_j -t pedig válasszuk tetszőlegesen az $[x_{j-1}, x_j]$ -ben. Ekkor a

$$\sigma = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(t_i - t_{i-1})$$

minden tagja a j -ediket kivéve rögzített és eleget tesz a $|\sigma - I| < 1$ egyenlőtlenségnek, $\forall \xi_j \in [t_{j-1}, t_j]$. Innen

$$|\sigma| = |\sigma - I + I| \leq |\sigma - I| + |I| < 1 + |I|,$$

tehát σ korlátos. A σ kifejezéséből:

$$f(\xi_j) = \frac{1}{t_j - t_{j-1}} \left(\sigma - \sum_{i \neq j} f(\xi_i)(t_i - t_{i-1}) \right), \quad \forall \xi_j \in [t_{j-1}, t_j].$$

Mivel $t_j, t_{j-1}, \xi_i, i \neq j, t_{i-1}, t_i$ rögzítettek és σ korlátos ezért $f(\xi_j)$ is korlátos. $\forall \xi_j \in [t_{j-1}, t_j]$. Ez azt jelenti, hogy az $[t_{j-1}, t_j]$ -n f korlátos. Mivel a j -t tetszőlegesen választottuk, ezért ez azt jelenti, hogy a τ felosztás bármely részintervallumán f korlátos, következésképpen f korlátos $[a, b]$ -n. ■

1. Következmény. Ha az $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény nem korlátos az $[a, b]$ intervallumon, akkor f nem integrálható $[a, b]$ -n.

2.3. Műveletek integrálható függvényekkel

Két függvény összegének és egy függvény számszorosának integrálhatóságára vonatkozik az alábbi tétel.

4. Tétel. Tegyük fel, hogy az $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, függvények integrálhatók és legyen $\lambda \in \mathbb{R}$. Ekkor $f + g$ és λf is integrálható és

$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g, \quad \int_a^b (\lambda f) = \lambda \int_a^b f.$$

BIZONYÍTÁS. Legyen $\tau := \{x_0, \dots, x_n\} \in \mathcal{F}[a, b]$ és vezessük be a következő jelöléseket:

$$F_i := \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}, \quad G_i := \sup\{g(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\},$$

$$f_i := \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}, \quad g_i := \inf\{g(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

$$i = 1, \dots, n$$

Az alsó és felső határ értelmezése alapján nyilvánvaló, hogy $f_i + g_i \leq f(x) + g(x) \leq F_i + G_i$, ha $x \in [x_{i-1}, x_i]$, ahonnan

$$\begin{aligned} f_i + g_i &\leq \inf\{f(x) + g(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} \leq \sup\{f(x) + g(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} \leq \\ &\leq F_i + G_i \end{aligned}$$

következik. A most kapott egyenlőtlenségből $(x_i - x_{i-1})$ -gyel való szorzás és összegzés után a következő adódik:

$$s(f, \tau) + s(g, \tau) \leq s(f + g, \tau) \leq S(f + g, \tau) \leq S(f, \tau) + S(g, \tau).$$

Ezt az egyenlőtlenséget felhasználva először az összeg integráljára vonatkozó állítást igazoljuk. Az 1. Tétel a) része és (1) alapján bármely $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{F}[a, b]$ felosztásra

$$s(f, \tau_1) + s(g, \tau_2) \leq s(f, \tau_1 \cup \tau_2) + s(g, \tau_1 \cup \tau_2) \leq s(f + g, \tau_1 \cup \tau_2) \leq I_*(f + g).$$

Innen először a $\tau_1 \in \mathcal{F}[a, b]$ majd a $\tau_2 \in \mathcal{F}[a, b]$ felosztásokra a bal oldal felső határát véve - következik, hogy $I_*(f) + I_*(g) \leq I_*(f + g)$. Hasonlóan igazolható az $I^*(f + g) \leq I^*(f) + I^*(g)$ egyenlőtlenség. A most kapott egyenlőtlenségeket egybevetve

$$I(f) + I(g) = I_*(f) + I_*(g) \leq I_*(f + g) \leq I^*(f + g) \leq I^*(f) + I^*(g) = I(f) + I(g)$$

következik. Innen nyilvánvaló, hogy $f + g$ is integrálható és $\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$. A λf függvényre vonatkozó állítás egyszerű következménye az

$$s(\lambda f, \tau) = \lambda s(f, \tau) \quad S(\lambda f, \tau) = \lambda S(f, \tau) \quad \lambda \geq 0,$$

$$s(\lambda f, \tau) = \lambda S(f, \tau) \quad S(\lambda f, \tau) = \lambda s(f, \tau) \quad \lambda \leq 0,$$

egyenlőségeknek. Ez utóbbi egyenlőségek a felső és alsó határ ismert tulajdonságaiból közvetlenül adódnak. A szorzat és a hányados függvény integrálhatóságára vonatkozik az alábbi tétel, amelyet bizonyítás nélkül jelentünk ki:

5. Tétel. Legyenek $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrálható függvények.

a) Akkor fg is integrálható.

b) Ha ezen kívül

$$\exists m > 0 \quad \text{úgy, hogy} \quad \forall x \in [a, b], \quad m \leq |g(x)|$$

is teljesül, akkor f/g is integrálható.

Az integrálás egy másik fontos tulajdonságára (az ún. intervallum szerinti additivitásra) vonatkozik az alábbi tétel.

6. Tétel. (Intervallum szerinti additivitás.) Legyen $a < b < c$ és $f : [a, c] \rightarrow \mathbb{R}$ egy korlátos függvény. Az f függvény akkor és csak akkor integrálható, $[a, c]$ -n ha f -nek az $f_1 := f|_{[a, b]}$, $f_2 := f|_{[b, c]}$ leszűkítései integrálhatók és

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f.$$

A tétel bizonyítását lásd [1]-ben.

Lásd a 2.6 ábrát.

A továbbiakban az $[a, c]$ intervallumon integrálható függvények halmazát jelöljük $R[a, c]$ -vel, az $f \in R[a, c]$ függvény valamely $[\alpha, \beta] \subset [a, c]$ intervallumra vonatkozó $f|_{[\alpha, \beta]}$ leszűkítésének integrálja legyen az $\int_\alpha^\beta f$.

Az $\int_a^b f$ jelölés használatánál eddig feltettük, hogy $a < b$. Az $\int_a^b f$ szimbolumnak $a = b$ és $a > b$ esetén is célszerű értelmet tulajdonítani. Erre vonatkozik az alábbi

8. Definíció.

Legyen $\int_a^a f := 0$ és, ha $f \in R[b, a]$ $\int_a^b f := -\int_b^a f$, $a > b$.

7. Tétel. Legyen $a < b$ és $f, g \in R[a, b]$. Ha $f(x) \leq g(x), x \in [a, b]$, akkor

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

BIZONYÍTÁS. Legyen $\tau := \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \in \mathcal{F}[a, b]$. Az $f \leq g$ feltételből következik, hogy $\inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} \leq \inf\{g(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$, $i = 1, \dots, n$ ezért nyilván $s(f, \tau) \leq s(g, \tau)$. Innen azt kapjuk, hogy

$$I(f) = \sup\{s(f, \tau) : \tau \in \mathcal{F}[a, b]\} \leq \sup\{s(g, \tau) : \tau \in \mathcal{F}[a, b]\} = I(g),$$

s ezzel az állítást bebizonyítottuk. ■

Mivel tetszőleges $f \in R[a, b]$ függvényre $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$, ezért a most bizonyított egyenlőtlenség alapján kapjuk, hogy

$$-\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx,$$

ha $a < b$. Innen adódik az alábbi

Következmény. Tetszőleges $f \in R[a, b]$ függvényre ($a < b$ esetén)

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

Az előző tétel egy másik következménye az alábbi állítás, melyet gyakran az **integrálszámítás első középérték-tételének** is neveznek.

8. Tétel (Első középérték tétel.) Legyen $f, g \in R[a, b]$ és tegyük fel, hogy $g \geq 0$. Ekkor az $m := \inf\{f(x) : x \in [a, b]\}$, $M := \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$ jelölésekkel fennáll a

$$m \int_a^b g \leq \int_a^b fg \leq M \int_a^b g.$$

Ha ezenkívül $f \in C[a, b]$ (folytonos az $[a, b]$ intervallumon), akkor

$$\exists \xi \in [a, b] \quad \text{úgy, hogy} \quad \int_a^b fg = f(\xi) \int_a^b g.$$

BIZONYÍTÁS. Mivel $m \leq f(x) \leq M$ és $g(x) \geq 0$, ha $x \in [a, b]$, ezért $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$. Innen az előző tétel alapján az első állítás egyszerűen következik.

Ha $f \in C[a, b]$, akkor $F := (\int_a^b g)f \in C[a, b]$, s mivel $\int_a^b fg$ az F függvény minimuma és maximuma közé esik, ezért a Bolzano-tétel alapján

$$\exists \xi \in [a, b] \quad \text{úgy, hogy} \quad \int_a^b fg = F(\xi) = f(\xi) \left(\int_a^b g \right).$$

A most igazolt tételt $g = 1$ esetben alkalmazva az alábbi egyenlőtlenséget kapjuk: ■

1. Következmény. Tetszőleges $f \in R(I)$ függvényre és minden $a, b \in I, a \neq b$ számpárra

$$\inf\{f(x) : x \in [a, b]\} \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f \leq \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}.$$

Ha f folytonos az $[a, b]$ -n a későbbiekben igazolni fogjuk, hogy integrálható $[a, b]$ -n. Ebben az esetben az $\inf\{f(x) : x \in [a, b]\} = m$ az f $[a, b]$ -n felvett minimumával, a $\sup\{f(x) : x \in [a, b]\} = M$ az f $[a, b]$ -n felvett maximumával lesz egyenlő. Ebben az esetben az előző következmény alapján a következőt kapjuk:

2. Következmény Legyen $f \in C[a, b]$ és $m = \min\{f(x) : x \in [a, b]\}$, $M = \max\{f(x) : x \in [a, b]\}$ és $a < b$, akkor

a) $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq (b-a)M,$

b) valamint létezik olyan $\xi \in [a, b]$ úgy, hogy

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi) \cdot (b-a)$$

Lásd a 2.7 ábrát.

2.4. Integrálható függvények

Ebben a paragrafusban megmutatjuk, hogy a folytonos függvények, a monoton függvények, a szakaszonként folytonos függvények és a szakaszonként monoton függvények integrálhatók.

9. Tétel Ha $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény, akkor integrálható.

BIZONYÍTÁS. Az állítás igazolásához a 2. Tétel alapján elég megmutatni, hogy bármely $f \in C[a, b]$ függvényre a következő teljesül:

(4) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \tau \in \mathcal{F}[a, b] \quad \text{úgy, hogy} \quad \Omega(f, \tau) < \varepsilon.$

Mivel $f \in C[a, b]$, ezért f egyenletesen folytonos az $[a, b]$ intervallumon, következésképpen

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ úgy, hogy ha } x', x'' \in [a, b], |x' - x''| < \delta, \text{ akkor}$$

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Legyen $\tau := \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \in \mathcal{F}(I)$ olyan felosztás, amelyre $\max\{x_i - x_{i-1} : i = 1, \dots, n\} < \delta$ teljesül.

Mivel f folytonos az $[a, b]$ intervallumon ezért felveszi infimumát és szuprémumát az $[x_{i-1}, x_i]$ -n legyenek ezek $m_i = \min\{f(x) : x_{i-1} \leq x \leq x_i\} = f(x'_i)$, $M_i = \max\{f(x) : x_{i-1} \leq x \leq x_i\} = f(x''_i)$. Mivel $x'_i, x''_i \in [x_{i-1}, x_i]$ és $\max\{x_i - x_{i-1} : i = 1, \dots, n\} < \delta$, ezért az egyenletes folytonosság alapján $M_i - m_i = f(x''_i) - f(x'_i) < \varepsilon$ $|x'_i - x''_i| < \delta$ és így az $\Omega(f, \tau)$ oszcillációs összegre.

$$\Omega(f, \tau) = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = \varepsilon$$

bizonyítandó egyenlőtlenség adódik. Innen következik, hogy az f integrálható. ■

A monoton függvények integrálhatóságára vonatkozik a következő

10. Tétel. *Ha $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ monoton, akkor integrálható.*

BIZONYÍTÁS. Az előző tétel bizonyításához hasonlóan most is elegendő belátni, hogy a (4) állítás teljesül. Ha $f(a) = f(b)$, akkor f állandó, s ezért ebben az esetben az állítás nyilvánvaló.

Tegyünk fel, hogy f monoton növekedő, $f(a) < f(b)$, és tekintsünk egy olyan $\tau = \{x_0, \dots, x_n\} \in \mathcal{F}([a, b])$ felosztást, amelyre $\max\{x_i - x_{i-1} : i = 1, 2, \dots, n\} < \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$ teljesül. Ekkor f monotonitása miatt

$$\sup\{f(x) : x_{i-1} \leq x \leq x_i\} = f(x_i), \quad \inf\{f(x) : x_{i-1} \leq x \leq x_i\} = f(x_{i-1})$$

s így az $\Omega(f, \tau)$ összegre az

$$\begin{aligned} \Omega(f, \tau) &= \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1}))(x_i - x_{i-1}) \leq \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) = \\ &= \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} [(f(x_1) - f(x_0)) + (f(x_2) - f(x_1)) + \dots + (f(x_n) - f(x_{n-1}))] = \\ &= \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} (f(x_n) - f(x_0)) = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \cdot (f(b) - f(a)) = \varepsilon \end{aligned}$$

becslés adódik. Ezzel a tételt igazoltuk. ■

A továbbiakban többször használjuk az integrál következő tulajdonságát, amelyet bizonyítás nélkül jelentünk ki.

11. Tétel *Ha az f integrálható függvényértékeit véges sok helyen megváltoztatjuk, akkor a kapott függvény is integrálható, és integrálja az f integráljával egyenlő.*

Az előző tétel alapján nyilvánvaló az alábbi;

Következmény. *Ha $f \in C(a, b)$ és léteznek az $f(a+0), f(b-0)$ véges határértékek, akkor $f \in R[a, b]$.*

A folytonos függvények mellett leggyakrabban előforduló függvények az ún. szakaszonként folytonos függvények. Ezekre vonatkozik az alábbi:

9. Definíció.

Akkor mondjuk, hogy az $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény **szakaszonként folytonos**, ha létezik az $[a, b]$ intervallumnak egy olyan $\tau := \{x_0, \dots, x_n\}$ felosztása, amelyre a következők teljesülnek:

- a) $f|_{(x_{i-1}, x_i)} \in C(x_{i-1}, x_i) \quad i = 1, 2, \dots, n,$
- b) léteznek az $f(x_{i-1} + 0), f(x_i - 0) (i = 1, 2, \dots, n)$ véges egyoldali határértékek.

A következő ábrán egy szakaszonként folytonos függvény grafikus képét szemléltetjük. Lásd a 2.8 ábrát.

Az előző tételt felhasználva adódik:

Következmény. Legyen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ egy szakaszonként folytonos függvény és $\tau := \{x_0, \dots, x_n\}$ az előző definícióban szereplő halmaz. Ekkor f integrálható és

$$\int_a^b f = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f.$$

Hasonló állítás érvényes ú.n. szakaszonként monoton függvényekre.

10. Definíció

Akkor mondjuk, hogy az $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény **szakaszonként monoton**, ha létezik olyan $\tau := \{x_0, \dots, x_n\} \in \mathcal{F}(I)$ felosztás, hogy $f|_{(x_{i-1}, x_i)} (i = 1, 2, \dots, n)$ monoton és léteznek az $f(x_{i-1} + 0), f(x_i - 0) (i = 1, 2, \dots, n)$ véges egyoldali határértékek.

2.5. Newton-Leibniz-formula

Az előző paragrafusban bemutatott két példa jól mutatja, hogy közvetlenül a definíció alapján az integrál kiszámítása a legegyszerűbb függvények esetén is hosszadalmas és bonyolult feladat. Az alábbi tétel alapján, ismerve az integrálható függvény egy primitív függvényét, az integrál egyszerűen meghatározható.

Tétel 12. (Newton-Leibniz-formula): Ha az $f[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény integrálható és f -nek létezik F primitív függvénye, akkor

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

BIZONYÍTÁS. Legyen $\tau = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ az $[a, b]$ intervallum egy felosztása. A Lagrange-féle közéértéktétel szerint van olyan $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ pont, hogy

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Innen - figyelembe véve az $F' = f$ egyenlőséget - az $F(b) - F(a)$ számra a következőt kapjuk:

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n (F(x_i) - F(x_{i-1})) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Mivel $\inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} \leq f(\xi_i) \leq \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$, ezért

$$s(f, \tau) \leq F(b) - F(a) \leq S(f, \tau).$$

Felhasználva ez utóbbi egyenlőtlenséget, és azt a tényt, hogy f integrálható $[a, b]$ -n

$$I(f) = \sup\{s(f, \tau) : \tau \in \mathcal{F}[a, b]\} \leq F(b) - F(a) \leq \inf\{S(f, \tau) : \tau \in \mathcal{F}[a, b]\} = I(f)$$

azaz valóban $\int_a^b f = F(b) - F(a)$. Ezzel az állításunkat igazoltuk. ■

A Newton-Leibniz-tétel feltételei közül egyik sem hagyható el. Belátható, hogy a tételben szereplő feltételek egymástól függetlenek, azaz egyikből sem következik a másik. Létezik olyan integrálható függvény, amelynek nincs primitív függvénye és megadható olyan függvény amelynek van primitív függvénye és nem integrálható.

1. Egy egyszerű példa olyan függvényre, amely integrálható, de nincs primitív függvénye

$$a \text{ sign} : [-1, 1] \rightarrow \{-1; 0, 1\}, \text{ sign } x = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in (0, 1] \\ 0, & \text{ha } x = 0 \\ -1, & \text{ha } x \in [-1, 0) \end{cases} \text{ függvény.}$$

Mivel a sgn függvénynek az $x = 0$ elsőfajú szakadási pontja, ezért nem Darboux-tulajdonságú tehát nincs primitív függvénye. Azonban az sgn függvény integrálható mivel,

$$a \text{ } (0, 1]\text{-on } \text{sgn } x = 1 \Rightarrow \int_0^1 \text{sgn } x dx = 1$$

$$a \text{ } [-1, 0)\text{-án } \text{sgn } x = -1 \Rightarrow \int_{-1}^0 \text{sgn } x dx = -1, \text{ tehát}$$

$$\int_{-1}^1 \text{sgn } x dx = \int_{-1}^0 \text{sgn } x dx + \int_0^1 \text{sgn } x dx = -1 + 1 = 0.$$

Tehát a $\text{sgn } x$ **integrálható a $[-1, 1]$ -en, de nincs primitív függvénye a $[-1, 1]$ -en.**

2. Tekintsük az $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}, & x \in [-1, 1] \setminus \{0\} \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ függvényt. Könnyű belátni, hogy a

$$F : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2}, & x \in [-1, 1] \setminus \{0\} \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

függvény az f -nek primitív függvénye, azaz $F'(x) = f(x), \forall x \in [-1, 1]$. F folytonos $\forall x_0 \neq 0$ pontban. Mivel

$$\left| x^2 \sin \frac{1}{x^2} \right| \leq x^2 \text{ ezért } \lim_{x \rightarrow 0} F(x) = 0 = F(0),$$

tehát F folytonos a 0-ban, következésképpen F folytonos az $\mathbb{R}$ -en. Vizsgáljuk az F deriválhatóságát a 0-ban:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

Tehát F deriválható 0-ban, és $F'(0) = 0$.

Az $x_0 \neq 0$ pontban F szintén deriválható. sszefoglalva: F deriválható $\mathbb{R}$ -en és

$$\begin{aligned} F'(x) &= \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x^2} + x^2 \left(\cos \frac{1}{x^2} \right) \cdot \left(\frac{-2}{x^3} \right) & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases} = \\ &= \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Azonban f nem korlátos a 0 környezetében, mivel létezik például az $x_n = 1/\sqrt{2n\pi}$, $n \in \mathbb{N}^*$ sorozat úgy, hogy $\lim x_n = 0$ és $\lim f(x_n) = \lim \left(\frac{2}{\sqrt{2n\pi}} \sin 2n\pi - 2\sqrt{2n\pi} \cos 2n\pi \right) = -\infty$. Mivel az integrálhatóság definícióját az $[a, b]$ -n korlátos függvény halmazán vezettük be, ezért f nem integrálható. **Az f függvénynek az F primitív függvénye például a $[-1, 1]$ intervallumon, de f a $[-1, 1]$ -en nem korlátos, ezért nem integrálható a $[-1, 1]$ -en.**

Jóval nehezebb ugyan, de lehet olyan f függvényt is konstruálni, amelynek egy $[a, b]$ intervallumon van primitív függvénye, korlátos, de mégsem integrálható.

11. Definíció

Legyen $f \in R[a, b]$, és $x_0 \in [a, b]$ tetszőleges rögzített szám. Az

$$x \mapsto F(x) := \int_{x_0}^x f \quad \forall x \in [a, b],$$

utasítással értelmezett F függvényt az f függvény x_0 pontban eltűnő integrálfüggvénynek nevezzük.

Az integrálfüggvény tulajdonságaira vonatkozik az alábbi

13. Tétel Legyen $f \in R[a, b]$ és F a f valamely $x_0 \in [a, b]$ pontban eltűnő integrálfüggvénye. Ekkor

- a) F folytonos az $[a, b]$ intervallumon.
- b) Ha f folytonos valamely $x \in [a, b]$ pontban, akkor F differenciálható az x pontban és $F'(x) = f(x)$.

BIZONYÍTÁS.

- a) Mivel f integrálható $[a, b]$ -n, ezért korlátos. Legyen M az $|f|$ függvény egy felső korlátja. Ekkor tetszőleges $x_1, x_2 \in [a, b]$, $x_1 < x_2$ pontpárra

$$|F(x_2) - F(x_1)| = \left| \int_{x_0}^{x_2} f - \int_{x_0}^{x_1} f \right| = \left| \int_{x_1}^{x_2} f \right| \leq M(x_2 - x_1)$$

teljesül. Innen - pl. az átviteli elv alapján- F folytonossága egyszerűen következik. Valóban, ha x az $[a, b]$ intervallum tetszőleges pontja és $\forall x_n \in [a, b]$ egy olyan sorozat, amelynek határértéke x , az előbbi egyenlőtlenség alapján

$$|F(x_n) - F(x)| \leq M|x_n - x|,$$

ahonnan következik, hogy $\lim F(x_n) = F(x)$, ha $\lim x_n = x$. Azaz $F(x)$ folytonos a tetszőlegesen választott $x \in [a, b]$ pontban, vagyis F folytonos $[a, b]$ -n.

b) Az f függvény x (belső) pontbeli folytonossága azt jelenti, hogy

$$(5) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{úgy, hogy ha } t \in (x - \delta, x + \delta)$$

$$f(x) - \varepsilon < f(t) < f(x) + \varepsilon.$$

Innen a középérték tétel alapján következik, hogy tetszőleges $0 < |h| < \delta$ számra

$$f(x) - \varepsilon \leq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f \leq f(x) + \varepsilon,$$

azaz

$$\left| f(x) - \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f \right| \leq \varepsilon.$$

Ezzel $\int_x^{x+h} f = F(x+h) - F(x)$ figyelembevételével azt kapjuk, hogy

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{úgy, hogy } \forall 0 < |h| < \delta$$

$$\left| f(x) - (F(x+h) - F(x))/h \right| \leq \varepsilon.$$

Ez pontosan azt jelenti, hogy F differenciálható az x pontban és $F'(x) = f(x)$. Az intervallum végpontjaira - a megfelelő egyoldali környezeteket figyelembe véve - hasonlóan igazolható. ■

A most igazolt tétel alapján nyilvánvaló az alábbi

1. Következmény: Ha $f \in C[a, b]$, akkor az $x \mapsto F(x) = \int_{x_0}^x f, x \in [a, b], x_0 \in [a, b]$ az f x_0 -ban eltűnő primitív függvénye.

Az előbbi állítás azt mondja ki, hogy az $[a, b]$ intervallumon folytonos függvényeknek van primitív függvényük.

A továbbiakban többször használni fogjuk a

$$[F(x)]_a^b := F(b) - F(a)$$

jelölést. A Newton-Leibniz-féle formulából egyszerűen következik a határozott integrálra vonatkozó ún. parciális integrálási szabály.

2. Következmény:(Parciális integrálás) Ha az $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvények differenciálhatók és $f', g' \in R[a, b]$, akkor

$$(6) \quad \int_a^b f g' = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f' g.$$

BIZONYÍTÁS. Mivel $(fg)' = f'g + fg'$ és a feltételek alapján $f'g + fg' \in R[a, b]$, ezért az fg függvényre alkalmazható a Newton-Leibniz-féle formula, következésképpen

$$f(b)g(b) - f(a)g(a) = \int_a^b (fg)' = \int_a^b (f'g + fg') = \int_a^b f'g + \int_a^b fg'.$$

Innen azonnal adódik a (6) egyenlőség. ■

Az előző tétel alapján egyszerűen adódik a határozott integrálra vonatkozó ún. **helyettesítési tétel**:

14. Tétel. (Helyettesítési tétel) Legyen $f \in C[a, b]$ és $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ egy folytonosan differenciálható függvény. Ekkor

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f = \int_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi) \varphi'.$$

BIZONYÍTÁS. Mivel $f, (f \circ \varphi) \varphi'$ folytonos függvények, a 13. Tétel alapján az

$$F(x) := \int_{\varphi(\alpha)}^x f(y) dy, \quad x \in (a, b) \quad G(t) := \int_{\alpha}^t ((f \circ \varphi)(y)) \varphi'(y) dy \quad t \in [\alpha, \beta]$$

utasítással értelmezett függvények differenciálhatók és

$$(7) \quad F' = f, \quad G' = (f \circ \varphi) \varphi'.$$

Megmutatjuk, hogy $F(\varphi(t)) = G(t) \forall t \in [\alpha, \beta]$, ahonnan $t = \beta$ esetén a bizonyítandó állítást kapjuk.

A közvetett függvény differenciálási szabályát felhasználva a (7) alapján nyilvánvaló, hogy

$$(F \circ \varphi)' = (F' \circ \varphi) \varphi' = (f \circ \varphi) \varphi' = G'$$

Következésképpen $F \circ \varphi - G$ állandó. Mivel az F és G értelmezése szerint

$$F(\varphi(\alpha)) = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\alpha)} f = 0 = \int_{\alpha}^{\alpha} (f \circ \varphi) \varphi' = G(\alpha),$$

ezért valóban $F \circ \varphi - G = 0$. ■

A helyettesítési tételből következik a következő két állítás.

1. Következmény: Legyen $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ páros, integrálható függvény az $[-a, a]$ intervallumon. Ekkor

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

Lásd a 2.9 ábrát.

BIZONYÍTÁS. Az $\int_{-a}^0 f(x) dx$ integrált az $x = \varphi(t) = -t, t \in [-a, 0]$ változócserevel alakítjuk át. Figyelembe véve, hogy $f(-t) = f(t)$, majd az integrálási határok felcserélésével kapjuk, hogy

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = \int_a^0 f(-t)(-1) dt = \int_0^a f(t) dt = \int_0^a f(x) dx.$$

Felhasználva az integrál intervallum szerinti additivitását

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

■

2. Következmény: Legyen $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ páratlan integrálható függvény az $[-a, a]$ intervallumon, akkor

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

Lásd a 2.10 ábrát.

BIZONYÍTÁS. Az $\int_{-a}^0 f(x) dx$ integrált az $x = \varphi(t) = -t, t \in [-a, 0]$ változócserevel alakítjuk át, figyelembe véve, hogy $f(-t) = -f(t)$, majd az integrálási határok felcserélésével kapjuk, hogy

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = \int_a^0 f(-t)(-1) dt = - \int_0^a f(t) dt = - \int_0^a f(x) dx.$$

Felhasználva az integrál intervallum szerinti additivitását

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = - \int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = 0.$$

■

A páratlan függvények grafikus képe szimmetrikus a $(0, 0)$ pontra nézve. Ennek a tulajdonságnak ismeretes egy általánosabb alakja, amelyet a geometriai szemlélet alapján a következőképpen fogalmazhatunk meg.

Ha az $f : [x_0 - a, x_0 + a] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény grafikus képe szimmetrikus az $(x_0, f(x_0))$ pontra nézve, akkor az ábra (2.11)-nek megfelelően a szubgrafikon területe egyenlő az $ABCD$ téglalap területével.

Lásd a 2.11 ábrát.

A geometriai szemlélet alapján kapott tulajdonság matematikai definíciója a következő:

Definíció. Az $f : [x_0 - a, x_0 + a] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény grafikus képe szimmetrikus az $(x_0, f(x_0))$ pontra nézve, ha $\forall x \in [0, a]$ esetén

$$f(x_0 - x) + f(x_0 + x) = 2f(x_0).$$

Tétel. Ha az $f : [x_0 - a, x_0 + a] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény grafikus képe szimmetrikus az $(x_0, f(x_0))$ pontra nézve, akkor

$$\int_{x_0-a}^{x_0+a} f(x) dx = 2af(x_0).$$

BIZONYÍTÁS.

$$\int_{x_0-a}^{x_0+a} f(x) dx = \int_{x_0-a}^{x_0} f(x) dx + \int_{x_0}^{x_0+a} f(x) dx.$$

Az első integrálban végezzük el az $x = x_0 - a + y$, $dx = dy$; a második integrálban pedig az $x = x_0 + a - y$, $dx = -dy$ változócsere. Így

$$\begin{aligned}\int_{x_0-a}^{x_0+a} f(x)dx &= \int_0^a f(x_0 - a + y)dy + \int_0^a f(x_0 + a - y)dy = \\ &= \int_0^a (f(x_0 - a + y) + f(x_0 + a - y))dy.\end{aligned}$$

Mivel $y \in [0, a]$ ezért $a - y \in [0, a]$. Figyelembe véve a grafikus kép szimmetria tulajdonságát az

$$f(x_0 - (a - y)) + f(x_0 + (a - y)) = 2f(x_0),$$

következésképpen

$$\int_{x_0-a}^{x_0+a} f(x)dx = \int_0^a 2f(x_0)dy = 2af(x_0).$$

■

Megjegyzések

1. Ha a függvény páratlan a $[-a, a]$ intervallumon, akkor a grafikus képe szimmetrikus a $(0; 0)$ pontra nézve, $f(0) = 0$, így innen is megkapjuk a 2. Következmenyt.
2. A szimmetriafeltételt az $[a, b]$ intervallumon az

$$f(x) + f(a + b - x) = 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) \quad \forall x \in [a, b]$$

egyenlőséggel fejezzük ki.

A következőkben a határozott integrálok kiszámítását mutatjuk be néhány megoldott feladaton keresztül. A feladatok nehézségi foka fokozatosan nő. Először a Newton-Leibniz formula azonnali alkalmazásával kiszámítható határozott integrálokra adunk példákat. Majd később a parciális integrálás és a helyettesítési szabályok alkalmazását mutatjuk be határozott integrálok kiszámításánál.

2.6. Megoldott felelatok

2.6.1. Egyszerű feladatok a Newton–Leibniz formula alkalmazására

Számítsuk ki a következő határozott integrálokat:

1.

$$\int_1^5 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^5 = \frac{5^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{124}{3}$$

2.

$$\int_8^{27} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = \int_8^{27} x^{-\frac{1}{3}} dx = \left[\frac{2}{3} x^{\frac{2}{3}} \right]_8^{27} = \frac{2}{3} [9 - 4] = \frac{10}{3}.$$

3.

$$\int_0^1 \frac{1}{x-3} dx = [\ln |x-3|]_0^1 = \ln 2 - \ln 3 = \ln \frac{2}{3}.$$

4.

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} t g x dx &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{-(\cos x)'}{\cos x} dx = -[\ln |\cos x|]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \\ &= \ln \frac{\sqrt{2}}{2} - \ln \frac{1}{2} = \ln \sqrt{2}.\end{aligned}$$

2.6.2. Parciális integrálással kiszámítható határozott integrálok

Ha $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálhatók és $f', g' \in R[a, b]$ akkor

$$\int_a^b f g' = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f' g.$$

1.

$$\int_0^2 x e^x dx = \int_0^2 x (e^x)' dx = [x e^x]_0^2 - \int_0^2 e^x dx = 2e^2 - [e^x]_0^2 = 2e^2 - e^2 + 1 = e^2 - 1$$

2.

$$\begin{aligned}\int_1^e x^3 \ln x dx &= \int_1^e \left(\frac{x^4}{4}\right)' \ln x dx = \left[\frac{x^4}{4} \ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^4}{4} \frac{1}{x} dx = \frac{e^4}{4} - \left[\frac{x^4}{16}\right]_1^e = \\ &= \frac{e^4}{4} - \frac{e^4}{16} + \frac{1}{16} = \frac{3e^4}{16} + \frac{1}{16}\end{aligned}$$

3.

$$\int_{-1}^1 |\arctan x| dx$$

Mivel az integráljel alatt abszolútérték van, ezért először felbontjuk az abszolút értéket. Felhasználva az integrál intervallum szerinti additivitását a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 |\arctan x| dx &= \int_{-1}^0 |\arctan x| dx + \int_0^1 |\arctan x| dx = \\ &= -\int_{-1}^0 (x)' \arctan x dx + \int_0^1 (x)' \arctan x dx = \\ &= -[x \arctan x]_{-1}^0 + \int_{-1}^0 x \frac{1}{1+x^2} dx + [x \arctan x]_0^1 - \int_0^1 x \frac{1}{1+x^2} dx = \\ &= -\arctan(-1) + \frac{1}{2} \int_{-1}^0 \frac{(1+x^2)'}{1+x^2} dx + \arctan 1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(1+x^2)'}{1+x^2} dx = \\ &= \frac{\pi}{2} + \left[\frac{1}{2} \ln(1+x^2)\right]_{-1}^0 - \left[\frac{1}{2} \ln(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{\pi}{2} - \ln 2\end{aligned}$$

4.

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos x dx$$

Mivel az integrandus páros függvény és a $[-\pi, \pi]$ -n integrálunk, ezért

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos x dx &= 2 \int_0^{\pi} x^2 \cos x dx = 2 \int_0^{\pi} x^2 (\sin x)' dx = \\ &= 2[x^2 \sin x]_0^{\pi} - 4 \int_0^{\pi} x \sin x dx = 4 \int_0^{\pi} x (\cos x)' dx = \\ &= 4[x \cos x]_0^{\pi} - 4 \int_0^{\pi} \cos x = -4\pi - 4[\sin x]_0^{\pi} = -4\pi \end{aligned}$$

5.

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^4 \sin x dx$$

Mivel az integrandus páratlan függvény és a $[-\pi, \pi]$ -n integrálunk, ezért anélkül, hogy a parciális integrálást egymásután négyszer alkamoznánk, a 2. következmény alapján következik, hogy az integrál értéke 0.

6.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x t g^2 x dx$$

Végezzük el a következő átalakítást:

$$t g^2 x = (t g^2 x + 1) - 1 = (t g x)' - 1,$$

tehát

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} x t g^2 x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} x (t g x)' dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} x dx = [x t g x]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} t g x dx - \left[\frac{1}{2} x^2\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \\ &= \frac{\pi}{4} + [\ln \cos x]_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{\pi^2}{32} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{32} + \ln \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

7. Bizonyítsuk be, hogy $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ integrál teljesíti az $n I_n = (n-1) I_{n-2}$, $n \geq 2$ rekurziót.

A rekurziós összefüggést a parciális integrálás segítségével igazoljuk. Ennek érdekében az I_n -et a következőképpen írjuk fel:

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cdot \sin^{n-2} x dx = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 x) \sin^{n-2} x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^{n-2} x dx = \\ &= I_{n-2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\cos x}_f \cdot \underbrace{(\cos x \cdot \sin^{n-2} x)}_{g'} dx = I_{n-2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \left(\frac{\sin^{n-1} x}{n-1} \right)' dx = \\ &= I_{n-2} - \left[\frac{1}{n-1} \sin^{n-1} x \cdot \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{n-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx. \end{aligned}$$

Innen a következő összefüggést kapjuk:

$$I_n = I_{n-2} - \frac{1}{n-1} I_n, \text{ ahonnan } n I_n = (n-1) I_{n-2}.$$

9. Az előbbi rekurziót felhasználva igazoljuk, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \text{ ahol}$$

$$(2n)!! = 2n(2n-2) \dots 2, \quad (2n-1)!! = (2n-1)(2n-3) \dots 1.$$

Ezt az összefüggést WALLIS-KPLET néven ismerjük.

BIZONYÍTÁS. Az előbbi rekurzió alapján meg tudjuk határozni az I_n sorozat általános tagját.

$$\begin{aligned} I_{2n} &= \frac{2n-1}{2n} I_{2n-2} = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} I_{2n-4} = \dots = \frac{(2n-1)(2n-3) \dots 1}{2n(2n-2) \dots 2} I_0 = \\ &= \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} I_0 = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{2n+1} &= \frac{2n}{2n+1} \cdot I_{2n-1} = \frac{2n(2n-2)}{(2n+1)(2n-1)} I_{2n-3} = \dots = \\ &= \frac{2n(2n-2) \dots 2}{(2n+1)(2n-1) \dots 1} I_1 = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}, \end{aligned}$$

(mivel $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^0 x dx = \frac{\pi}{2}$ és $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1$)

Tehát

$$\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2n+1)!!}{(2n)!!} = \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \sqrt{2n+1} \right]^2 \frac{\pi}{2}.$$

Mivel $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ esetén $\sin x \in [0, 1]$, ezért

$0 \leq \sin^{n+1} x \leq \sin^n x$, ahonnan az következik, hogy $0 \leq I_{n+1} \leq I_n$, azaz a sorozat monoton csökkenő.

Innen azt kapjuk, hogy

$$I_{2n+1} \leq I_{2n} \leq I_{2n-1} = \frac{2n+1}{2n} I_{2n+1}, \text{ azaz}$$

$$1 \leq \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \leq \frac{2n+1}{2n}, \text{ tehát a rendőrelv alapján}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \sqrt{2n+1} \right]^2 \cdot \frac{\pi}{2} = 1,$$

ezért

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

■

10. Legyen $P_n(x) = \frac{d^n(x^n(x-1)^n)}{dx^n} = [x^n(x-1)^n]^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$. Igazoljuk, hogy

$$\langle P_n, P_m \rangle = \int_0^1 P_n(x) P_m(x) dx = \begin{cases} 0 & , \text{ ha } m \neq n \\ \frac{[n!]^2}{2n+1} & , \text{ ha } m = n. \end{cases}$$

BIZONYÍTÁS. Tekintsük az $f(x) = x^n(x-1)^n$ $2n$ -ed fokú polinomot. Mivel az $x = 0$ és $x = 1$ n -szeres gyökei a polinomnak, ezért $f^{(k)}(0) = f^{(k)}(1) = 0$, ha $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ és $f^{(n)}(0) \neq 0$, $f^{(n)}(1) \neq 0$.

Ha $m = n$, akkor felhasználva a fenti tulajdonságokat azt kapjuk:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 P_n(x)P_n(x)dx &= \int_0^1 f^{(n)}(x)(f^{(n-1)}(x))'dx = \\
&= [f^{(n)}(x)f^{(n-1)}(x)]_0^1 - \int_0^1 f^{(n+1)}(x)(f^{(n-1)}(x))dx = \\
&= - \int_0^1 f^{(n+1)}(x)(f^{(n-2)}(x))'dx = \\
&= [-f^{(n+1)}(x) \cdot f^{(n-2)}(x)]_0^1 + \int_0^1 f^{(n+2)}(x) \cdot f^{(n-2)}(x)dx = \dots = \\
&= (-1)^{n-1} \int_0^1 f^{(2n-1)}(x) \cdot f'(x)dx = \\
&= (-1)^{n-1} [[f^{(2n-1)}(x)f(x)]_0^1 - \int_0^1 f^{(2n)}(x) \cdot f(x)dx] = \\
&= (-1)^n \int_0^1 f^{(2n)}(x) \cdot f(x)dx = (-1)^n \int_0^1 [x^n(x-1)^n]^{(2n)} x^n(x-1)^n dx.
\end{aligned}$$

Mivel az $f(x) = x^n(x-1)^n$ egy $2n$ -ed fokú polinom, ezért $f^{(2n)}(x) = (2n)!$.

Ismét n -szeri parciális integrálás után azt kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned}
(-1)^n \int_0^1 f^{(2n)}(x)f(x)dx &= (-1)^n (2n)! \int_0^1 x^n(x-1)^n dx = \\
(-1)^n (2n)! \left[\left[(x-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 - \frac{n}{n+1} \int_0^1 x^{n+1}(x-1)^{n-1} dx \right] &= \\
= (-1)^n (2n)! \left(-\frac{n}{n+1} \right) \int_0^1 x^{n+1}(x-1)^{n-1} dx &= \\
= (-1)^{n+1} (2n)! \frac{n}{n+1} \cdot \frac{-(n-1)}{n+2} \int_0^1 x^{n+2}(x-1)^{n-2} dx &= \\
= \dots = (-1)^{n+n} (2n)! \frac{n!}{(n+1)(n+2)\dots(n+n)} \int_0^1 x^{2n} dx &= \frac{[n!]^2}{2n+1}.
\end{aligned}$$

Ha $m \neq n$, tegyük fel, hogy $n > m$. Legyen $g(x) = x^m(x^m-1)$, ekkor $P_m(x) = g^{(m)}(x)$, $g^{(k)}(0) = g^{(k)}(1) = 0$ $k \in \{0, 1, \dots, m-1\}$, és így

$$\begin{aligned}
\int_0^1 P_m(x)P_n(x)dx &= \int_0^1 g^{(m)}(x)f^{(n)}(x)dx = \int_0^1 g^{(m)}(x) \cdot (f^{(n-1)}(x))'dx = \\
&= [g^{(m)}(x) \cdot f^{(n-1)}(x)]_0^1 - \int_0^1 g^{(m+1)}(x)f^{(n-1)}(x)dx = \\
&= - \int_0^1 g^{(m+1)}(x)(f^{(n-2)}(x))'dx = \\
&= -[g^{(m+1)}(x)f^{(n-2)}(x)]_0^1 + \int_0^1 g^{(m+2)}(x)f^{(n-2)}(x)dx = \dots = \\
&= (-1)^n \int_0^1 g^{(m+n)}(x)f(x)dx = 0,
\end{aligned}$$

mivel $n > m \Rightarrow m + n > 2n$, így a $g(x) = x^m(x^m + 1)$ $2m$ -ed fokú polinom $(m + n)$ -dik deriváltja 0. ■

2.6.3. Határozott integrál kiszámítása helyettesítéssel

Amikor a határozatlan integrálban nem az alapintegrálok valamelyike szerepel az egyik leghatékonyabb módszer az integrál kiszámítására az integrálás helyettesítéssel. Gyakran a bonyolult integrandust

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

alakban lehet felírni. Ha az f és φ eleget tesz a Tétel 14 feltételeinek, akkor a fenti integrál:

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx.$$

Formálisan: jelöljük $x = \varphi(t)$ -vel, $dx = \varphi'(t)dt$, az új határok pedig $\varphi(\alpha)$ és $\varphi(\beta)$ lesznek. Megtehetjük azt is, hogy a határok figyelembevétele nélkül helyettesítéssel kiszámítjuk az integrandus határozatlan integrálját, majd az eredményt visszaalakítjuk az eredeti változó függvényévé és az eredeti határokat helyettesítjük be. Azonban ez utóbbi eljárás hosszadalmasabb.

Példák:

1. Számítsuk ki az $\int_e^{e^2} \frac{1}{t \ln t} dt$ integrált.

Tekintsük a $\varphi(t) = \ln t$, $\varphi : [e, e^2] \rightarrow [1, 2]$, folytonosan differenciálható függvényt. Kiszámítva a deriváltját $\varphi'(t) = \frac{1}{t}$. szre vesszük, hogy az integráljel alatti kifejezés $\varphi'(t) \cdot \frac{1}{\varphi(t)}$ alakba írható.

Ha tekintjük az $f : [1, 2] \rightarrow \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, $f(x) = \frac{1}{x}$ akkor, az integráljel alatti kifejezés az

$$f'(t) \cdot \frac{1}{\varphi(t)} = \varphi'(t)f(\varphi(t)) \text{ alakra hozható.}$$

Mivel az f folytonos, φ folytonosan differenciálható, tehát, ezért

$$\begin{aligned} \int_e^{e^2} \frac{1}{t \ln t} dt &= \int_e^{e^2} \varphi'(t)f(\varphi(t))dt = \int_{\varphi(e)}^{\varphi(e^2)} f(x)dx = \\ &= \int_1^2 \frac{1}{x} dx = [\ln x]_1^2 = \ln 2. \end{aligned}$$

2. Számítsuk ki $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2t}{1 + \sin^2 t} dt$.

Tekintsük a $\varphi(t) = 1 + \sin^2 t$, $\varphi : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [1, 2]$, $\varphi'(t) = 2 \sin t \cos t = \sin 2t$. Így az integráljel alatti kifejezést a következő alakban írhatjuk

$$\frac{\sin 2t}{1 + \sin^2 t} = \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} = \varphi'(t) \cdot \frac{\varphi}{\varphi(t)}.$$

Legyen $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in [1, 2]$.

Mivel a φ és f függvények eleget tesznek a 14-s Tétel követelményeinek, ezért

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2t}{1 + \sin^2 t} dt &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi'(t) \frac{1}{\varphi(t)} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi'(t) f(\varphi(t)) dt = \\ &= \int_{f(0)}^{\varphi(\frac{\pi}{2})} f(x) dx = \int_1^2 \frac{1}{x} dx = [\ln x]_1^2 = \ln 2. \end{aligned}$$

3. Számítsuk ki az $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \operatorname{tg} x) dx$ integrált. Tekintsük az $f : \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1 + \operatorname{tg} x)$ függvényt. Vegyük észre, hogy az f a $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ intervallumon teljesíti a szimmetria feltételt, azaz:

$$\begin{aligned} f(x) + f\left(\frac{\pi}{4} - x\right) &= \ln(1 + \operatorname{tg} x) + \ln\left(1 + \operatorname{tg} x \left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right) = \\ &= \ln(1 + \operatorname{tg} x) + \ln\left(1 + \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x}\right) = \\ &= \ln(1 + \operatorname{tg} x) + \ln \frac{2}{1 + \operatorname{tg} x} = \ln(1 + \operatorname{tg} x) + \ln 2 - \ln(1 + \operatorname{tg} x) = \\ &= \ln 2 \quad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]. \end{aligned}$$

Innen az $x = \frac{\pi}{4} - y$, $dx = -dy$ változócserével a következőt kapjuk.

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \operatorname{tg} x) dx &= \int_{+\frac{\pi}{4}} \ln\left(1 + \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - y\right)\right) (-dy) = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1 + \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - y\right)\right) dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\ln 2 - \ln(1 + \operatorname{tg} y)) dy = \\ &= \frac{\pi}{4} \ln 2 - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \operatorname{tg} x) dx, \end{aligned}$$

ahonnan

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \operatorname{tg} x) dx = \frac{\pi}{8} \ln 2.$$

4. Számítsuk ki az $\int_{-1}^1 \frac{t^2 + 1}{t^4 + 1} dt$ integrált.
Az integrál jel alatti kifejezést a

$$\frac{t^2 + 1}{t^4 + 1} = \frac{t^2 \left(1 + \frac{1}{t^2}\right)}{t^2 \left(t^2 + \frac{1}{t^2}\right)} = \frac{1 + \frac{1}{t^2}}{t^2 + \frac{1}{t^2}} = \frac{\left(t - \frac{1}{t}\right)'}{\left(t - \frac{1}{t}\right)^2 + 2}$$

alakba tudjuk írni. ppen ezért a $\varphi(t) = t - \frac{1}{t}$ változócseré lenne alkalmas a $[-1, 1]$ intervallumon. Azonban a $\varphi(t)$ nem értelmezett a $t = 0$ -ban, ezért φ nem folytonos a $[-1, 1]$ -n, következésképpen nem tesz eleget 14-s Tétel követelményeinek. A problémát

úgy tudjuk kiküszöbölni, hogy meghatározzuk a $h(t) = \frac{t^2+1}{t^4+1}$ függvény $H(t)$ primitív függvényét. Mivel $h(t)$ folytonos a $[-1, 1]$ -n ezért van primitív függvénye és integrálható, tehát a Newton-Leibniz formula alapján

$$\int_{-1}^1 h(t)dt = H(1) - H(-1).$$

Az $\int \frac{t^2+1}{t^4+1} dt$ határozatlan integrál kiszámításához $t < 0$ és $t > 0$ esetben alkalmazzuk az $u = t - \frac{1}{t}$ változócsereét. Az $\int \frac{du}{u^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctg \frac{u}{\sqrt{2}} + c$ egyenlőség alapján a $h(t)$ primitív függvénye

$$H(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \arctg \frac{1}{\sqrt{2}} \left(t - \frac{1}{t}\right) + c_1 & , \text{ ha } t < 0 \\ c_2 & , \text{ ha } t = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \arctg \frac{1}{\sqrt{2}} \left(t - \frac{1}{t}\right) + c_3 & , \text{ ha } t > 0 \end{cases}$$

alakú lesz. A c_1, c_2, c_3 konstansokat úgy határozzuk meg, hogy $H(t)$ folytonos és deriválható legyen $\mathbb{R}$ -en. Tehát

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0-} H(t) &= \frac{\pi}{2\sqrt{2}} + c_1 = \lim_{t \rightarrow 0-} H(t) = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}} + c_3 = c_2 \\ \Rightarrow c_3 &= \frac{2\pi}{2\sqrt{2}} + c_1 = \frac{\pi}{\sqrt{2}} + c_1 \text{ és könnyen lehet ellenőrizni, hogy a} \\ H(t) &= \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \arctg \frac{1}{\sqrt{2}} \left(t - \frac{1}{t}\right) + c_1 & , \text{ ha } t < 0 \\ \frac{\pi}{2\sqrt{2}} + c_1 & , \text{ ha } t = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \arctg \frac{1}{\sqrt{2}} \left(t - \frac{1}{t}\right) + \frac{\pi}{\sqrt{2}} + c_1 & , \text{ ha } t > 0 \end{cases} \quad c_1 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

függvényre $H' = h(t)$, $\forall t \in [-1, 1]$, azaz H a h primitív függvénye. Így $\int_{-1}^1 h(t)dt = H(1) - H(-1) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

A primitív függvény kiszámítását a következő leírással küszöbölhetjük ki:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{-1} \frac{t^2+1}{t^4+1} dt &= \int_{-1}^0 \frac{t^2+1}{t^4+1} dt + \int_0^1 \frac{t^2+1}{t^4+1} dt = \\ &= \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon < 0}} \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{\left(t - \frac{1}{t}\right)'}{\left(t - \frac{1}{t}\right)^2 + 2} dt + \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{\varepsilon}^1 \frac{\left(t - \frac{1}{t}\right)'}{\left(t - \frac{1}{t}\right)^2 + 2} dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon < 0}} \left[\arctg \frac{1}{\sqrt{2}} \left(t - \frac{1}{t}\right) \right]_{-1}^{-\varepsilon} + \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon < 0}} \left[\arctg \frac{1}{\sqrt{2}} \left(t - \frac{1}{t}\right) \right]_{\varepsilon}^1 = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon < 0}} \arctg \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon}\right) - \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon < 0}} \arctg \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon}\right) \right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) \right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

5. Számítsuk ki $\int_1^4 \sqrt{1+\sqrt{x}} dx$.

Legyen $f(x) = \sqrt{1+\sqrt{x}}$, $x \in [1, 4]$ és tekintsük a $\varphi_1 : [1, 2] \rightarrow [1, 4]$, $\varphi_1(t) = t^2$, folytonosan differenciálható függvényt.

Ekkor

$$\begin{aligned} \int_1^4 \sqrt{1+\sqrt{x}} dx &= \int_{\varphi_1(1)}^{\varphi_1(2)} f(x) dx = \int_1^2 f(\varphi_1(t)) \varphi_1'(t) dt = \\ &= \int_1^2 \sqrt{1+t} \cdot 2t dt. \end{aligned}$$

Ez utóbbi integrál kiszámítása egyszerűbb, ha az $1+t = u$, $\varphi_2 : [2, 3] \rightarrow [1, 2]$, $\varphi_2(u) = u-1 = t$, $\varphi_2'(u) = 1$ helyettesítést alkalmazzuk

$$\begin{aligned} \int_1^2 \sqrt{1+t} \cdot 2t dt &= \int_{\varphi_2(2)}^{\varphi_2(3)} \sqrt{1+t} \cdot 2t dt = \int_2^3 \sqrt{u} \cdot 2(u-1) du = \\ &= 2 \left[\frac{2}{5} u^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \right]_2^3 = \frac{8}{15} (6\sqrt{3} - \sqrt{2}). \end{aligned}$$

Nagyon sok esetben csak formálisan írjuk le a változócsere lépéseit, például az előző integrál esetében ez így nézne ki:

- Jelöljük $\sqrt{x} = t$, ha $x \in [1, 4]$ akkor $t \in [1, 2]$, $x = t^2$, akkor $dx = 2t \cdot dt$, így

$$\int_1^4 \sqrt{1+\sqrt{x}} dx = \int_1^2 \sqrt{1+t} \cdot 2t dt.$$

- Jelöljük $1+t = u$, ha $t \in [1, 2]$ akkor $u \in [2, 3]$, $t = u-1$, $dt = du$

$$\int_1^2 \sqrt{1+t} \cdot 2t dt = \int_2^3 \sqrt{u} \cdot 2(u-1) du.$$

A két egymásutáni változó cserét egy lépésben is elvégezhetjük volna az $y = \sqrt{1+\sqrt{x}}$ helyettesítéssel. Ennek elvégzését az olvasóra bízunk.

A formális változó csere téves eredményhez is vezethet, ha az integrálási intervallum valamely pontjában az f vagy a φ nem teljesíti a változócsere tétel követelményeit. A következő példa segítségével ezt szeretnénk megvilágítani.

6. Számítsuk ki az $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{4-3\cos x}$ integrált.

A formális változócsere eredményeként a következőt kapnánk: jelöljük a $tg \frac{x}{2} = t$ -vel,

$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $x = 2 \arctg t$, $dx = \frac{2}{1+t^2} dt$. Az új integrálási határok ha $x_1 = 0$ akkor $t_1 = tg 0 = 0$, ha $x_2 = 2\pi$ akkor $t_2 = tg \pi = 0$ így azt kapnánk, hogy a fenti integrál az

$$\int_0^0 \frac{1}{4 - \frac{3(1-t^2)}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = 0.$$

Ez az eredmény azonban téves, mivel az integrál jel alatti kifejezés az $\frac{1}{4-3\cos x}$ pozitív, ezért az integrál sem lehet 0. A hiba abból adódik, hogy a $tg \frac{x}{2}$ nem értelmezett

a $\pi \in [0, 2\pi]$ pontban. Ezt úgy küszöbölhetjük ki, hogy az integrált a következőképpen írjuk fel:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi \frac{1}{4 - \cos x} dx + \int_\pi^{2\pi} \frac{1}{4 - \cos x} dx = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \int_0^{\pi-\varepsilon} \frac{1}{4 - \cos x} dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \int_{\pi+\varepsilon}^{2\pi} \frac{1}{4 - \cos x} dx. \end{aligned}$$

A $[0, \pi - \varepsilon]$ és $[\pi + \varepsilon, 2\pi]$ intervallumokon alkalmazható a $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ azaz $\varphi(t) = 2 \operatorname{arctg} t = x$ helyettesítés. Így a következő eredményre jutunk

$$\begin{aligned} I &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \int_{\operatorname{tg} 0}^{\operatorname{tg}(\frac{\pi-\varepsilon}{2})} \frac{1}{4 - 3\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \int_{\operatorname{tg}(\frac{\pi+\varepsilon}{2})}^{\operatorname{tg} \pi} \frac{1}{4 - 3\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \int_0^{\operatorname{tg}(\frac{\pi-\varepsilon}{2})} \frac{2}{7t^2 + 1} dt + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \int_{\operatorname{tg}(\frac{\pi+\varepsilon}{2})}^{\operatorname{tg} \pi} \frac{2}{7t^2 + 1} dt = \\ &= \frac{2}{7} \left[\lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \left[\operatorname{arctg} \sqrt{7} t \right]_0^{\operatorname{tg}(\frac{\pi-\varepsilon}{2})} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \left[\operatorname{arctg} \sqrt{7} t \right]_{\operatorname{tg}(\frac{\pi+\varepsilon}{2})}^0 \right] = \\ &= \frac{2}{\sqrt{7}} \left[\lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \operatorname{arctg} \sqrt{7} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi-\varepsilon}{2} \right) - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \operatorname{arctg} \sqrt{7} \left(\frac{\pi+\varepsilon}{2} \right) \right] = \\ &= \frac{2}{\sqrt{7}} \left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right] = \frac{2}{\sqrt{7}} \cdot \pi. \end{aligned}$$

7. Bizonyítsuk be, hogy, ha $f : [a, b] \rightarrow [c, d]$ folytonos és monoton növekvő függvény és $f(a) = c$, $f(b) = d$, akkor

$$\int_a^b f(x) dx + \int_c^d f^{-1}(y) dy = bd - ac.$$

A fenti összefüggést ($a, b, c, d > 0$) értékeire a következőképpen lehet geometriailag interpretálni: mivel f folytonos és monoton növekvő, $f(a) = c$, $f(b) = d$ ezért bijektív, tehát van inverze.

Az $\int_a^b f(x) dx = T_1$ a szubgrafikon területét adja meg. Az $\int_c^d f^{-1}(y) dy$ pedig a grafikus kép az Oy tengely $y = c$ és $y = d$ által határolt síkrész T_2 területével egyenlő.

Lásd a 2.12 ábrát.

$$\int_a^b f(x) dx + \int_c^d f^{-1}(y) dy = T_1 + T_2 = bd - ac.$$

A bizonyításhoz a második integrálban végezzük el az $y = f(x)$ változócsere, $dy = f'(x) dx$, ha $y = c$ akkor $x = a$; $y = d$ akkor $x = b$, majd integráljunk parciálisan

$$\begin{aligned} \int_c^d f^{-1}(y) dy &= \int_a^b f^{-1}(f(x)) f'(x) dx = \int_a^b x f'(x) dx = \\ &= [f(x)x]_a^b - \int_a^b f(x) dx = bd - ac - \int_a^b f(x) dx. \end{aligned}$$

Innen átrendezéssel azt kapjuk, hogy

$$\int_a^b f(x) dx + \int_c^d f^{-1}(y) dy = bd - ac.$$

8. Igazojuk, hogy

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x dx + \int_0^1 \operatorname{arctg} x dx = \frac{\pi}{4}.$$

a bizonyítást úgy is el lehetne végezni, hogy külön-külön kiszámítjuk az integrálok értékeit, majd összeadjuk az eredményeket. Azonban vegyük észre, hogy alkalmazni lehet az előző feladatot az $f : \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \rightarrow [0, 1]$, $f(x) = \operatorname{tg} x$ függvény esetén. Ennek alapján

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x dx + \int_0^1 \operatorname{arctg} x dx = 1 \cdot \frac{\pi}{4} - 0 \cdot 0 = \frac{\pi}{4}.$$

9. Bizonyítsuk be, hogy

$$0 \leq \int_0^1 \ln \frac{e^x + 1}{2} dx \leq \ln \frac{e + 1}{2}.$$

Az egyenlőtlenségben szereplő integrál elemien nem integrálható, ezért az integrál becsléséhez a 8. Tétel 2. Következményét használjuk. Tekintsük az $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln \frac{e^x + 1}{2}$ függvényt. Mivel

$$f'(x) = \frac{2}{e^x + 1} \cdot \frac{e^x}{2} = \frac{e^x}{e^x + 1} > 0 \quad \forall x \in [0, 1]$$

ezért a függvény a $[0, 1]$ intervallumon monoton növekvő, így

$$f(0) \leq f(x) \leq f(1) \quad \forall x \in [0, 1].$$

Innen

$$\int_0^1 f(0) dx \leq \int_0^1 f(x) dx \leq \int_0^1 f(1) dx,$$

tehát

$$0 \leq \int_0^1 \ln \frac{e^x + 1}{2} dx \leq \ln \frac{e + 1}{2}.$$

10. Bizonyítsuk be, hogy ha $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrálható függvények, akkor

$$\left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(x) dx \right) \left(\int_a^b g^2(x) dx \right).$$

Mivel f és g integrálhatók az $[a, b]$ -n, ezért a 5. Tétel alapján az $f \cdot g$, f^2 , g^2 is integrálhatók az $[a, b]$ -n. Legyen $\lambda \in \mathbb{R}$ egy tetszőleges valós szám. Akkor az $(\lambda f + g)^2$ is integrálható az $[a, b]$ -n. Mivel $(\lambda f(x) + g(x))^2 \geq 0$ ezért

$$\int_a^b (\lambda f(x) + g(x))^2 dx \geq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ez egyenértékű a következővel:

$$\lambda^2 \int_a^b f^2(x) dx + 2\lambda \int_a^b f(x)g(x) dx + \int_a^b g^2(x) dx \geq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ha a bal oldalt úgy tekintjük mint λ -nak egy másodfokú kifejezése, mivel $\int_0^b f^2(x)dx > 0$, akkor a fenti kifejezés pontosan akkor nem negatív, ha diszkriminánsa $\Delta \leq 0$, azaz

$$\Delta = 4 \left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 - 4 \left(\int_a^b f^2(x)dx \right) \left(\int_a^b g^2(x)dx \right) \leq 0,$$

ahonnan

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(x)dx \right) \left(\int_a^b g^2(x)dx \right).$$

3. Az integrálszámítás alkalmazásai

3.1. Határérték kiszámítása integrál segítségével

Az előző fejezet 3. Tétel alapján láttuk, hogy az f függvény $[a, b]$ -n vett határozott integrálja a Riemann közelítő összegek határértékével egyenlő. azonban, azt is szemléltettük, hogy még nagyon egyszerű függvények esetében sem biztos, hogy a határértékszámítás ismert módszereivel meg tudjuk határozni a Riemann közelítő összeg határértékét. Megmutattuk, hogy a határozott integrál kiszámításának legfontosabb eszköze a Newton-Leibniz formula, amely lehetőséget ad egy nagyon széles függvényosztály határozott integráljának kiszámítására.

Ez ad lehetőséget arra, hogy azon sorozatoknak a határértékét, amelyek általános tagja egy adott függvény egy Riemann közelítő összegével egyenlő, határozott integrál segítségével számítsuk ki.

A következőkben ennek az eljárásnak a mozzanatait szemléltetjük.

Tekintsük az $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvényt és az $[a, b]$ intervallumot osszuk fel n egyenlő részre. Így a felosztás osztópontjai $x_i = a + i \frac{b-a}{n}$ alakúak lesznek, $x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n}$ és

$$\tau = \left\{ a, a + \frac{b-a}{n}, a + 2\frac{b-a}{n}, \dots, a + i\frac{b-a}{n}, \dots, a + n\frac{b-a}{n} = b \right\}.$$

Ha a $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ pontrendszernek az elemi intervallumok bal illetve jobboldali végpontjait vesszük ($\xi_i = x_{i+1}$ vagy $x_i = x_{i+1}$), akkor a következő integrál közelítő összegekhez jutunk

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) f(\xi_i) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right) = \\ &= \frac{b-a}{n} \left[f(a) + f\left(a + \frac{b-a}{n}\right) + \dots + f\left(a + (n-1)\frac{b-a}{n}\right) \right] \end{aligned}$$

illetve

$$\begin{aligned} S'_n &= \sum_{i=1}^n (x_{i+1} - x_i) f(\xi_i) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right) = \\ &= \frac{b-a}{n} \left[f\left(a + \frac{b-a}{n}\right) + f\left(a + 2\frac{b-a}{n}\right) + \dots + f\left(a + n\frac{b-a}{n}\right) \right]. \end{aligned}$$

Mivel az f függvény folytonos az $[a, b]$ -n, integrálható $[a, b]$ -n, ezért a fenti integrálközelítő összeg határértéke egyenlő a függvény integráljával az $[a, b]$ -n, következésképpen

$$\lim S_n = \lim S'_n = \int_a^b f.$$

Ha egy sorozat általános tagja az S_n vagy S'_n alakban írható, akkor a sorozat határértéke $\int_a^b f$.

Ha az $[a, b] = [0, 1]$ és f folytonos a $[0, 1]$ intervallumon, akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx.$$

Példák:

1. Számítsuk ki a következő határértéket:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \right].$$

A sorozat általános tagját a következő ekvivalens alakban írjuk fel:

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n} \left[\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} + \frac{1}{1 + \frac{2}{n}} + \cdots + \frac{1}{1 + \frac{n}{n}} \right].$$

szerezzük, hogy ez az összeg az $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1+x}$ függvény a

$\tau = \left\{ 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n}{n} \right\}$ felosztáshoz, a $\xi = \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n}{n} \right)$ közbeeső pontrendszeréhez tartozó integrálközelítő összege, azaz

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \frac{i}{n}} \left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n} \right) = \\ &= \frac{1}{n} \left[\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} + \cdots + \frac{1}{1 + \frac{n}{n}} \right], \end{aligned}$$

éppen a tekintett sorozat általános tagjával egyenlő.

Tehát

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln 2.$$

2. Számítsuk ki az $(a_n, n \in \mathbb{N})$ sorozat határértékét, ha

$$a_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2}.$$

Az általános tagot a következőképpen alakítjuk át:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{n} \left[\frac{n^2}{n^2+1} + \frac{n^2}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n^2}{n^2+n^2} \right] = \\ &= \frac{1}{n} \left[\frac{1}{1 + \left(\frac{1}{n}\right)^2} + \frac{1}{1 + \left(\frac{2}{n}\right)^2} + \cdots + \frac{1}{1 + \left(\frac{n}{n}\right)^2} \right]. \end{aligned}$$

szereveszük, hogy ez az összeg az $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ függvény $\tau = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n}{n}\right\}$ felosztáshoz, a $\xi = \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n}{n}\right)$ közbeeső pontrendszerhez tartozó integrálközelítő összege, azaz

$$a_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \left[\frac{1}{1 + \left(\frac{1}{n}\right)^2} + \cdots + \frac{1}{1 + \left(\frac{n}{n}\right)^2} \right].$$

Tehát

$$\lim a_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = [\arctg x]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

Feladatok:

Az előzőekben bemutatott módszerrel számítsuk ki a következő általános tagú sorozatok határértékét:

1. $a_n = \frac{3}{n} \left[1 + \sqrt{\frac{n}{n+3}} + \sqrt{\frac{n}{n+6}} + \cdots + \sqrt{\frac{n}{n+3(n-1)}} \right]$
2. $a_n = \frac{1}{n} \left[\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 + \frac{2}{n}} + \cdots + \sqrt{1 + \frac{n}{n}} \right]$
3. $a_n = \frac{\pi}{n} \left[\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n} \right]$
4. $a_n = \frac{1}{\sqrt{4n^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}$
5. $a_n = n \left[\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2} \right]$

3.2. Síkidomok területe

Az integrál definíciójában szereplő fogalmak bevezetése során kitértünk ezek geometriai jelentésére. Az $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ **integrálható függvény** „grafikonja alatti tartománya” (szubgrafikonja), a

$$H := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\} \subset \mathbb{R}^2$$

halmaz, amelynek a területét a

$$T(H) := \int_a^b f$$

integrállal értelmeztük.

Lásd a 3.1 ábrát.

Megjegyzések

1. Ha az $f(x)$ nem pozitív az $[a, b]$ -intervallumon bármely pontjában, akkor a grafikus kép az $x = a$, $x = b$ és az Ox által határolt síkrész területe (lásd az ábra)

$$T(H) := \int_a^b |f(x)| dx.$$

Lásd a 3.2 ábrát.

2. Ha $f, g \in R[a, b]$ két olyan függvény, amelyek teljesítik az $f(x) \leq g(x), \forall x \in [a, b]$ feltételt, akkor az

$$U := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

halmaz (az f és g közötti síkrész) területét az alábbi utasítással értelmezzük

$$T(U) := \int_a^b (g - f) = \int_a^b g - \int_a^b f.$$

Lásd a 3.3 ábrát.

A következőben bemutatjuk a fenti formulák alkalmazását a területszámításban.

Példák:

1. Határozzuk meg az $f : [0; \pi] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin x$ függvény szubgrafikonjának a területét. Mivel a függvény a $[0, \pi]$ -n nemnegatív, ezért

$$T = \int_0^\pi \sin x dx = [-\cos x]_0^\pi = -\cos \pi + \cos 0 = 1 + 1 = 2.$$

Lásd a 3.4 ábrát.

2. Határozzuk meg az $f : \left[\frac{1}{e}; e\right] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln x$ függvény szubgrafikonjának a területét.

Mivel a függvény az $\left[\frac{1}{e}, e\right]$ -n előjelet vált ezért

$$T = \int_{1/e}^e |\ln x| dx = -\int_{1/e}^1 \ln x dx + \int_1^e \ln x dx.$$

A parciális integrálás módszerét alkalmazva:

$$\begin{aligned} T_2 &= \int_1^e \underbrace{\ln x}_f \cdot \underbrace{(x)'}_{g'} dx = \left[\underbrace{\ln x}_f \cdot \underbrace{x}_g \right]_1^e - \int_1^e \underbrace{\frac{1}{x}}_{f'} \cdot \underbrace{x}_g dx = \\ &= [x \cdot \ln x]_1^e - [x]_1^e = e \ln e - 1 \ln 1 - e + 1 = 1. \end{aligned}$$

$$T_1 = -[x \ln x]_{1/e}^1 + [x]_{1/e}^1 = -\frac{1}{e} + 1 - \frac{1}{e} = 1 - \frac{2}{e}.$$

Tehát $T = 2 - \frac{2}{e}$.

Lásd a 3.5 ábrát.

3. Számítsuk ki az $y^2 = x$ és $y = x^2$ egyenletű parabolák által határolt síkidom területét!

Először meghatározzuk a görbék metszéspontjait.

Ennek érdekében megoldjuk az $\begin{cases} y^2 = x \\ y = x^2 \end{cases}$ egyenletrendszert és megkapjuk a metszéspontok

koordinátáit, amelyek a következők: $x_1 = y_1 = 0$ és $x_2 = y_2 = 1$. A síklapot határoló függvények: $f, g : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2$. A síkidom területe tehát

$$T = \int_0^1 [f(x) - g(x)] dx = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Lásd a 3.6 ábrát.

4. Számítsuk ki az $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4$, $g(x) = x - 2$ egyenletű parabola illetve egyenes által határolt síkidom területét!

Az $\begin{cases} f(x) = x^2 - 4 \\ g(x) = x - 2 \end{cases}$ egyenletrendszer megoldásai: $x_1 = -1, y_1 = -3$ és $x_2 = 2, y_2 = 0$,

így a metszéspontok: $A(-1; -3)$ és $B(2; 0)$. Tehát a síkidom területe

$$T = \int_{-1}^2 [g(x) - f(x)] dx = \int_{-1}^2 (2 + x - x^2) dx = \left[2x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^2 = \frac{9}{2} = 4,5.$$

Lásd a 3.7 ábrát.

5. Határozzuk meg az R sugarú kör területét.

A szóban forgó síkrész

$$K_R = \{(x, y) : -R \leq x \leq R, -\sqrt{R^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2}\}$$

halmazzal egyenlő, s így a definíció alapján

$$T(K_R) = \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} dx - \int_{-R}^R (-\sqrt{R^2 - x^2}) dx = 2 \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} dx.$$

Az $x = R \sin t$ helyettesítéssel, $dx/dt = R \cos t$, $\cos^2 t = \frac{1}{2}(\cos 2t + 1)$ figyelembe vételével azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} T(K_R) &= 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} R \cos t \sqrt{R^2 - R^2 \sin^2 t} dt = 2R^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t dt = \\ &= R^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos 2t + 1) dt = R^2 \left[\frac{\sin 2t}{2} + t \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = R^2 \pi. \end{aligned}$$

Lásd a 3.8 ábrát.

6. Határozzuk meg az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ egyenletű ellipszis által határolt síkidom területét.

Az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ egyenletből: $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$. Legyen $f : [0; a] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$. A negyed-ellipszis területe: $T_1 = \int_0^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx$.

Legyen $x = a \sin t$ az új változó, így $\frac{dx}{dt} = a \cos t$ és $dx = a \cos t dt$, ekkor

$$T_1 = \frac{b}{a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} a \cos t dt = ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t dt = ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt.$$

A $\cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}$ fokszámcsökkentő képletet használva:

$$T_1 = \frac{ab}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt = \frac{ab}{2} \left[t + \frac{\sin 2t}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{ab}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi ab}{4}.$$

A teljes ellipszis területe: $T = 4T_1 = \pi ab$.

Lásd a 3.9 ábrát.

7. Határozzuk meg az ábrán szemléltetett körcikk területét ($0 \leq \alpha < \beta \leq \pi/2$).

Az ábrán látható U tartomány az alábbi f és g függvények "grafikonjai közötti síkrésszel" egyenlő:

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{tg} \beta & 0 \leq x \leq R \cos \beta, \\ \sqrt{R^2 - x^2} & R \cos \beta \leq x \leq R \cos \alpha, \end{cases} \quad g(x) = x \operatorname{tg} \alpha, \quad (0 \leq x \leq R \cos \alpha)$$

$$U := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x) \leq y \leq f(x)\}.$$

Egyszerű számolással kapjuk, hogy

$$\int_0^{R \cos \alpha} g = \int_0^{R \cos \alpha} x \operatorname{tg} \alpha dx = \operatorname{tg} \alpha \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{R \cos \alpha} = \frac{1}{2} R^2 \sin \alpha \cos \alpha,$$

és hasonlóan

$$\int_0^{R \cos \beta} x \operatorname{tg} \beta dx = \frac{1}{2} R^2 \sin \beta \cos \beta.$$

Végül az $x = R \cos t$, ($\alpha \leq t \leq \beta$) helyettesítéssel, $dx/dt = -\sin t$, $\sin^2 t = (1 - \cos 2t)/2$ alapján

$$\int_{R \cos \beta}^{R \cos \alpha} \sqrt{R^2 - x^2} dx = - \int_{\beta}^{\alpha} R^2 \sin t dt = \frac{R^2}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (1 - \cos 2t) dt =$$

$$\frac{R^2}{2} \left[t - \frac{\sin 2t}{2} \right]_{\alpha}^{\beta} = \frac{R^2}{2} (\beta - \alpha) - \frac{R^2}{2} \sin \beta \cos \beta + \frac{R^2}{2} \sin \alpha \cos \alpha$$

adódik. A kapott eredményeket egybevetve az U körcikk területére az ismert

$$T(U) = \int_0^{R \cos \alpha} (f - g) = \frac{R^2}{2} (\beta - \alpha)$$

képletet kapjuk. Megjegyezzük, hogy ez az összefüggés tetszőleges $0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi$ esetén is érvényes és hasonlóan igazolható. Ha $\alpha = 0$ és $\beta = 2\pi$ akkor visszkapjuk a kör területét.

Lásd a 3.10 ábrát.

3.3. Polárkoordináták segítségével megadott síkidomok területe.

Az eddigiekben a függvény által határolt síkidomot a koordináta rendszerben az $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ -el ún. Descartes koordináták segítségével definiáltuk. Ismeretes, hogy a síkban egy P pont helyzete egyértelműen meghatározott akkor is, ha ismert az OP szakasz hossza, az OX pozitív féltengely és a PO egyenes által közrezárt szög, jelöljük ezeket

$$r = OP, \quad \varphi = XOP \angle, \varphi \in [0, 2\pi).$$

Lásd a 3.11 ábrát.

1. Definíció.

Az $(r, \varphi) \in [0, +\infty) \times [0, 2\pi)$ számpárt a P pont **polárkoordinátáinak** nevezzük. A polárkoordináták és a Descartes-koordináták közötti kapcsolat

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi. \end{cases}$$

2. Definíció

Adott $\varrho : [\alpha, \beta] \rightarrow [0, +\infty)$ $0 < \alpha, \beta < 2\pi$ folytonos függvény segítségével értelmezett

$$U := \{P \in \mathbb{R}^2 : \alpha \leq \varphi \leq \beta, 0 \leq r \leq \varrho(\varphi)\}$$

típusú halmazokat **szektorszerű idomoknak** nevezzük.

Lásd a 3.12 ábrát.

Kérdés: Hogyan határozzuk meg egy polárkoordináták segítségével definiált szektorszerű síkidom területét?

Legyen $\tau := \{t_0, t_1, \dots, t_n\} \in \mathcal{F}[\alpha, \beta]$ egy tetszőleges felosztás és vezessük be az

$$M_i := \max\{\varrho(t) : t_{i-1} \leq t \leq t_i\}, \quad m_i := \min\{\varrho(t) : t_{i-1} \leq t \leq t_i\}$$

jelöléseket.

Jelöljük (r_P, φ_P) -vel a $P \in \mathbb{R}^2$ pont polárkoordinátáit és legyen

$$K_i := \{P \in \mathbb{R}^2 : t_{i-1} \leq \varphi_P \leq t_i, 0 \leq r_P \leq M_i\}$$

$$k_i := \{P \in \mathbb{R}^2 : t_{i-1} \leq \varphi_P \leq t_i, 0 \leq r_P \leq m_i\}.$$

Lásd a 3.13 ábrát.

Ekkor a K_i és k_i körcikkek egyesítéseként adódó halmazokra nyilván

$$\bigcup_{i=1}^n K_i \supset U \supset \bigcup_{i=1}^n k_i$$

teljesül és a tekintett körcikkek területeinek összege pedig a $\frac{\rho^2}{2}$ függvény τ felosztáshoz tartozó alsó illetve felső közelítő összegei, azaz:

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) M_i^2 = S\left(\frac{\rho^2}{2}, \tau\right)$$

illetve

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) m_i^2 = s\left(\frac{\rho^2}{2}, \tau\right).$$

Mivel $\varrho \in C[\alpha, \beta]$ ezért $\varrho^2 \in R[\alpha, \beta]$ és $1/2 \int_{\alpha}^{\beta} \varrho^2$ az egyetlen olyan szám, amelyre minden $\tau \in \mathcal{F}[\alpha, \beta]$ felosztás esetén $S(\frac{\varrho^2}{2}, \tau)$ és $s(\frac{\varrho^2}{2}, \tau)$ közé esik, ezért kézenfekvő az U területét ezzel az integrállal értelmezni.

3. Definíció

Adott $\varrho : [\alpha, \beta] \rightarrow [0, +\infty)$ folytonos függvény segítségével értelmezett

$$U := \{P \in \mathbb{R}^2 : \alpha \leq \varphi \leq \beta, 0 \leq r \leq \varrho(\varphi)\}$$

típusú **szektorszerű** idomok területe definíció szerint

$$T(U) := \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \varrho^2.$$

Példa:

- Legyen $\varrho(\varphi) = e^{\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq \pi/2$. Határozzuk meg a $U := \{P \in \mathbb{R}^2 : \alpha \leq \varphi \leq \beta, 0 \leq r \leq \varrho(\varphi)\}$ halmaz területét.

$$T(U) = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} e^{2\varphi} d\varphi = \frac{1}{4} [e^{2\varphi}]_0^{\pi/2} = \frac{1}{4} (e^{\pi} - 1).$$

4. Definíció

Legyenek $\varrho_1, \varrho_2 : [\alpha, \beta] \rightarrow [0, +\infty)$ folytonos függvények, és tegyük fel, hogy $0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi$ és $\varrho_1(\varphi) \leq \varrho_2(\varphi)$, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$. Ekkor a

$$V := \{P \in \mathbb{R}^2 : \alpha \leq \varphi \leq \beta, \varrho_1(\varphi) \leq r \leq \varrho_2(\varphi)\}$$

halmaz területét a

$$T(V) := \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (\varrho_2^2 - \varrho_1^2)$$

utasítással értelmezzük.

E definíció alapján az ábrán látható körgyűrű-cikk területe $\frac{1}{2}(R^2 - r^2)(\beta - \alpha)$.

Paraméteres alakban megadott síkidomok területe

Ha a síkrészt egy egyszerű sima zárt görbe határolja (3.14 ábra) és a határoló görbe egyenlete paraméteres alakban:

$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t \in [t_1, t_2]$ akkor $\frac{dx}{dt} = x'(t)$ és $dx = x'(t)dt$. A síkrészt területe:

$$T = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt$$

Lásd a 3.14 ábrát.

Példa:

1. Határozzuk meg az

$$\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases};$$

$t \in [0; 2\pi[$ paraméteres alakban adott ASZTROID vagy CSILLAGGÖRBE területét.

Lásd a 3.15 ábrát.

A szimmetria miatt elegendő az első negyedben lévő területet meghatározni.

Ha x a 0-tól az a -ig változik, akkor t a $\frac{\pi}{2}$ -től a 0-ig fog változni, ezért:

$$\begin{aligned} \frac{T}{4} &= \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt = -3a^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^4 t \cos^2 t dt = 3a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cos^2 t dt = \\ &= 3a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 - \cos 2t}{2} \right)^2 \cdot \frac{1 + \cos 2t}{2} dt, \end{aligned}$$

alkalmazva a $\sin^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2}$ és $\cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}$ fokszámcsökkentő képleteket.

$$\begin{aligned} T &= \frac{12a^2}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 2t)(1 - \cos 2t)dt = \frac{3a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t(1 - \cos 2t)dt = \\ &= \frac{3a^2}{2} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t \cos 2t dt \right] = \\ &= \frac{3a^2}{2} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 4t}{2} dt - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t (\sin 2t)' dt \right] = \\ &= \frac{3a^2}{2} \left[\frac{1}{2}t - \frac{1}{8} \sin 4t - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin^3 2t}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3a^2}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3a^2\pi}{8}. \end{aligned}$$

3.4. Görbe ívhossza.

A térgörbék ívhosszának értelmezéséhez felhasználjuk az $\mathbb{R}^2$ -beli távolság fogalmát. Tetszőleges $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ pontok távolsága

$$\|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$

Legyen $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$, egy sima görbe, és $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^2$ a Γ egy folytonosan differenciálható paraméterezése: $\varphi \in C^1([\alpha, \beta], \mathbb{R}^2)$. Ez azt jelenti, hogy a $\varphi_1, \varphi_2 : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvények. Tekintsük az $[\alpha, \beta]$ intervallum egy $\tau = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ felosztását. Ekkor $\varphi(t_i) \in \Gamma$ ($i = 1, \dots, n$) és a $\varphi(t_{i-1}), \varphi(t_i)$ pontokat összekötő szakasz hossza a $\|\varphi(t_{i-1}) - \varphi(t_i)\|$. Jelöljük $\ell(\varphi, \tau)$ -val a szóbanforgó szakaszok hosszának összegét:

$$\ell(\varphi, \tau) := \sum_{i=1}^n \|\varphi(t_{i-1}) - \varphi(t_i)\|.$$

Lásd a 3.16 ábrát.

Az $\ell(\varphi, \tau)$ számot a $\varphi(t_{i-1}), \varphi(t_i)$ ($i = 1, \dots, n$) pontokat összekötő szakaszok egyesítéseként adódó halmaz a $\varphi(t_i)$ ($i = 1, \dots, n$) csúcspontokkal rendelkező Γ -ba írt törött vonal hosszának is szokás nevezni.

Ha $\tau' = \tau \cup \{t'\}$ $t' \in [\alpha, \beta]$ akkor a háromszög egyenlőtlenség alapján $\ell(\varphi, \tau) \leq \ell(\varphi, \tau')$. Innen következik, hogy tetszőleges $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{F}[\alpha, \beta]$, $\tau_1 \subset \tau_2$ felosztásokra

$$\ell(\varphi, \tau_1) \leq \ell(\varphi, \tau_2),$$

azaz a felosztás finomításával a beírt töröttvonalak hosszúsága nem csökken. A most bevezetett jelöléseket felhasználva értelmezzük a Γ ívhosszát:

5. Definíció

Akkor mondjuk, hogy a $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ sima görbének van ívhossza (vagy más szóval rektifikálható), ha

$$\{\ell(\varphi, \tau) : \tau \in \mathcal{F}[\alpha, \beta]\}$$

korlátos számhalmaz. Az

$$\ell(\varphi) := \sup\{\ell(\varphi, \tau) : \tau \in \mathcal{F}[\alpha, \beta]\}$$

számot a Γ görbe ívhosszának nevezzük.

A rektifikálható görbék ívhosszát tehát a görbébe írt törött vonalak hosszának felső határával (szuprérumával) értelmezzük, feltéve, ha ez véges.

Megjegyzés

A Γ ívhossza látszólag függ a Γ paraméteres előállításától. Megmutatható azonban, hogy ha ψ a γ egy másik paraméteres előállítása, akkor

$$\sup\{\ell(\varphi, \tau) : \tau \in \mathcal{F}[\alpha, \beta]\} = \sup\{\ell(\psi, \tau) : \tau \in \mathcal{F}[\alpha, \beta]\}.$$

Innen nyilvánvaló, hogy $\ell(\varphi) = \ell(\psi)$, azaz a Γ ívhossza nem függ a paraméterezéstől. A továbbiakban ezért $\ell(\varphi)$ helyett gyakran az $\ell(\Gamma)$ jelölést használjuk.

Az ívhossz és az integrál kapcsolatára vonatkozik az alábbi tétel.

1. **Tétel.** Legyen $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ egy sima görbe és $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in C^1([\alpha, \beta], \mathbb{R}^2)$ a Γ egy paraméterezése. Akkor Γ rektifikálható és Γ ívhossza

$$\ell(\Gamma) = \int_{\alpha}^{\beta} \|\varphi'\| = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\varphi_1'(t))^2 + (\varphi_2'(t))^2} dt.$$

Következmény. Legyen Γ egy $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény grafikonja. Ekkor $\varphi(t) = (t, f(t)), t \in [\alpha, \beta]$ a Γ egy paraméteres előállítása. Mivel $\varphi'(t) = (1, f'(t))$, ezért ebben a speciális esetben a Γ grafikuskép ívhossza:

$$\ell(\Gamma) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt$$

A bizonyítást ebben a speciális esetben végezzük el, azzal a megjegyzéssel, hogy hasonlóan járunk el az általános esetben is.

BIZONYÍTÁS. A feltevésből következik, hogy a

$$t \mapsto \sqrt{1 + (f'(t))^2} \quad (t \in [\alpha, \beta])$$

függvény zárt intervallumon folytonos, tehát korlátos, azaz létezik olyan $M \geq 0$, amelyre

$$\sqrt{1 + (f'(t))^2} \leq M \quad \forall t \in [\alpha, \beta].$$

Legyen $\tau = \{x_0, \dots, x_n\} \in \mathcal{F}[\alpha, \beta]$ tetszőleges felosztás. Alkalmazzuk az f függvényre minden $[x_{i-1}, x_i], i \in \{1, \dots, n\}$ intervallumon a Lagrange tételét. Így van olyan $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ amelyre

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Ekkor az

$$\begin{aligned} \ell(f, \tau) &= \sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2} = \\ &= \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} (x_i - x_{i-1}) \leq M \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = M(\beta - \alpha) \end{aligned}$$

az $[\alpha, \beta]$ intervallum bármely felosztása esetén. Következésképpen az f grafikus képének van ívhossza. Másfelől vegyük észre, hogy az $\ell(f, \tau)$ a $\sqrt{1 + (f')^2}$ függvény τ felosztásához és a $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ közbeeső pontrendszerhez tartozó Riemann közelítő összege, azaz:

$$\ell(f, \tau) = \sigma(\sqrt{1 + (f')^2}, \xi, \tau).$$

Mivel a $\sqrt{1 + (f')^2}$ függvény folytonos, ezért integrálható, így

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \|\tau\| \rightarrow 0}} \sigma(\sqrt{1 + (f')^2}, \xi, \tau) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt.$$

Következésképpen

$$\ell(\Gamma) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt.$$

■

Példák:

1. Számítsuk ki az r sugarú kör kerületét (ív hosszát)!

Az r sugarú, origó középpontú kör egyenlete: $x^2 + y^2 = r^2$, innen $y = f(x) = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$, $x \in [0; r]$ az első negyedben lévő negyed kör, melynek ívhossza: $\frac{\ell}{4} = \int_0^r \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$, ahol $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$, így

$$\begin{aligned} \ell &= 4 \int_0^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx = 4 \int_0^r \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}} dx = 4r \int_0^r \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \\ &= 4r \left[\arcsin \frac{x}{r} \right]_0^r = 4r [\arcsin 1 - \arcsin 0] = 4r \cdot \frac{\pi}{2} = 2\pi r. \end{aligned}$$

Tehát az r sugarú kör kerületének hossza $\ell = 2\pi r$.

2. Határozzuk meg a ciklois ívhosszát, ha a görbe paraméteres egyenletrendszere:

$$\begin{cases} x = r(t - \sin t) \\ y = r(1 - \cos t). \end{cases} \quad t \in [0; 2\pi]$$

A paraméteres egyenletrendszer alapján

$$\begin{cases} x'(t) = r(1 - \cos t) \\ y'(t) = r \sin t. \end{cases}$$

A görbe ívhossza:

$$\begin{aligned} \ell &= \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2(1 - \cos t)^2 + r^2 \sin^2 t} dt = r \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t} dt = \\ &= r \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 - \cos t)} dt. \end{aligned}$$

Mivel $1 - \cos t = 2 \sin^2 \frac{t}{2}$, így figyelembe véve azt, hogy $\sin \frac{t}{2} \geq 0$, ha $t \in [0; 2\pi]$

$$\begin{aligned} \ell &= r \int_0^{2\pi} \sqrt{4 \sin^2 \frac{t}{2}} dt = 2r \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = 2r \left[-2 \cos \frac{t}{2} \right]_0^{2\pi} = \\ &= 2r [-2 \cos \pi + 2 \cos 0] = 8r. \end{aligned}$$

3.5. Polárkoordinátákkal megadott görbe ívhossza.

Legyen $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ és tegyük fel, hogy $(x, y) \neq (0, 0)$. Ekkor (x, y) felírható a polárkoordináták segítségével

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \end{cases} \quad (0 \leq \varphi < 2\pi, \ 0 < r < +\infty).$$

Bizonyos $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ görbékét gyakran ún. polárkoordinátás alakban adunk meg. Ez azt jelenti, hogy kiindulva egy $r : [\alpha, \beta] \rightarrow [0, +\infty)$ folytonosan deriválható ($\varphi \in C'[\alpha, \beta]$) függvényből a Γ görbe egy Φ paraméterezését a

$$\Phi(\varphi) := (r(\varphi) \cos \varphi, r(\varphi) \sin \varphi) \quad \varphi \in [\alpha, \beta]$$

alakban adjuk meg. Tehát $\varphi_1(\varphi) = r(\varphi) \cdot \cos \varphi$, $\varphi_2(\varphi) = r(\varphi) \cdot \sin \varphi$. Az r geometriai jelentését a (3.17) ábra szemlélteti. Ha $r(\varphi)$ folytonosan differenciálható, akkor Φ is folytonosan differenciálható, és

$$\Phi'(\varphi) = (r'(\varphi) \cos \varphi - r(\varphi) \sin \varphi, r'(\varphi) \sin \varphi + r(\varphi) \cos \varphi).$$

Egyszerű számolással adódik, hogy

$$\|\Phi'(\varphi)\| = \sqrt{[\varphi_1'(\varphi)]^2 + [\varphi_2'(\varphi)]^2} = \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2},$$

ahonnan a **a polárkoordinátás alakban adott Γ sima görbe ívhosszára** az

$$\ell(\Gamma) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2} d\varphi$$

képlet adódik.

Alkalmazás. Ha Γ az r sugarú kör, akkor $r(\varphi) = r = \text{konstans}$. Így a kör kerülete $\ell[\Gamma] = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + 0} d\varphi = 2\pi r$ képletből is adódik.

3.6. Forgástest térfogata.

Legyen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ **folytonos függvény** és tegyük fel, hogy $f(x) \geq 0, x \in [a, b]$. Az f grafikonja Ox tengely körüli forgatásával adódó

$$H := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b, y^2 + z^2 \leq f^2(x)\}$$

forgástest (lásd a 3.18 ábrát) térfogatának definíciójához tekintsük az $[a, b]$ egy $\tau := \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ felosztását és vezessük be az

$$M_i := \max\{f(x) : x_{i-1} \leq x \leq x_i\} \quad m_i := \min\{f(x) : x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$$

$$H_i = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x_{i-1} \leq x \leq x_i, y^2 + z^2 \leq M_i^2\}$$

$$h_i = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x_{i-1} \leq x \leq x_i, y^2 + z^2 \leq m_i^2\}$$

jelöléseket.

Ekkor a H_i és h_i hengerek egyesítéséből adódó halmazokra fennáll

$$\bigcup_{i=1}^n H_i \supset H \supset \bigcup_{i=1}^n h_i,$$

és a szóban forgó hengerek térfogatának összege a πf^2 függvény τ felosztáshoz tartozó felső illetve alsó közelítő összege, azaz:

$$\sum_{i=1}^n \pi M_i^2(x_i - x_{i-1}) = S(\pi f^2, \tau), \quad \sum_{i=1}^n \pi m_i^2(x_i - x_{i-1}) = s(\pi f^2, \tau).$$

Mivel $\pi f^2 \in C[a, b]$ ezért az $\int_a^b \pi f^2$ az egyetlen olyan szám, amely minden $\tau \in \mathcal{F}[a, b]$ esetén a $s(\pi f^2, \tau)$ és $S(\pi f^2, \tau)$ közé esik. Ezek alapján kézenfekvő a következő definíció

6. Definíció

Legyen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény és tegyük fel, hogy $f(x) \geq 0, x \in [a, b]$. Az f grafikonja Ox tengely körüli forgatásával adódó

$$H := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b, y^2 + z^2 \leq f^2(x)\}$$

forgástest térfogata definíció szerint

$$V(H) := \pi \int_a^b f^2.$$

A képlet érvényes akkor is, amikor f az $[a, b]$ -n negatív értékeket is vesz.

Példák:

1. Határozzuk meg az R sugarú gömb térfogatát.

Lásd a 3.19 ábrát.

Az $f(x) := \sqrt{R^2 - x^2} (-R \leq x \leq R)$ függvény grafikonjának Ox tengely körüli forgatásával megkapjuk a $(0, 0, 0)$ középpontú R sugarú gömböt.

E gömb térfogata:

$$\pi \int_{-R}^R (R^2 - x^2) dx = \pi [R^2 x - x^3/3]_{-R}^R = \frac{4R^3\pi}{3}.$$

2. Határozzuk meg az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ egyenletű ellipszis x tengely körüli forgatásából származó forgástest (FORGÁS-ELLIPSZOID) térfogatát.

Lásd a 3.20 ábrát.

$$V = \pi \int_{-a}^a f^2(x) dx, \text{ ahol } f(x) = y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-a}^a \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2) dx = \frac{\pi b^2}{a^2} \left[a^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-a}^a = \\ &= \frac{\pi b^2}{a^2} \left(a^3 - \frac{a^3}{3} + a^3 - \frac{a^3}{3} \right) = \frac{4\pi}{3} ab^2. \end{aligned}$$

Paraméteres alakban adott görbe megforgatásával származtatott test térfogata.

Ha a függvény $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ paraméteres alakban adott, akkor a t_1 és t_2 paraméterértékek által határolt görbeív x tengely körüli forgatásakor keletkező test térfogata:

$$V = \pi \int_{t_1}^{t_2} y^2(t) x'(t) dt.$$

Lásd a 3.14 ábrát.

3. Számítsuk ki a forgási asztroid térfogatát!

Az asztroid paraméteres egyenletei: $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, $t \in [0, 2\pi]$

$$V = \pi \int_{t_1}^{t_2} y^2(t) x'(t) dt, \quad x' = -3a \cos^2 t \sin t.$$

Szimmetria okokból elég az $x \in [0; a]$ intervallumon meghatározott fél-térfogatot számolni, így $t \in \left[\frac{\pi}{2}; 0\right]$. Az $x_1 = 0$ pontnak a $t_1 = \frac{\pi}{2}$ az $x = a$ -nak a $t_2 = 0$ szögek felelnek meg. Ezért a féltérfogat

$$\frac{V}{2} = \pi \int_{\frac{\pi}{2}}^0 -3a^3 \sin^6 t \cos^2 t \sin t dt = 3\pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 t)^3 \cos^2 t \sin t dt.$$

Legyen $z = \cos t$ így $\frac{dz}{dt} = -\sin t$ és $\sin t dt = -dz$.

$$\begin{aligned} V &= 6\pi a^3 \int_1^0 (1 - z^2)^3 z^2 (-dz) = 6\pi a^3 \int_0^1 (z^2 - 3z^4 + 3z^6 - z^8) dz = \\ &= 6\pi a^3 \left[\frac{z^3}{3} - \frac{3z^5}{5} + \frac{3z^7}{7} - \frac{z^9}{9} \right]_0^1 = 6\pi a^3 \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{5} + \frac{3}{7} - \frac{1}{9} \right) = \frac{32\pi a^3}{105}. \end{aligned}$$

Ha az $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ folytonos bijektív függvény grafikus képét az y tengely körül forgatjuk, akkor az így keletkező forgástest y_1 és y_2 ordinátájú pontjai által határolt térfogata:

$$V_y = \pi \int_{y_1}^{y_2} g^2(y) dy,$$

ahol $x = g(y)$ az $y = f(x)$ függvény inverze.

4. Határozzuk meg az $f(x) = \ln x$, $x \in [1; e^2]$ függvény y tengely körüli forgatásakor keletkező test térfogatát!

Az $f(x) = \ln x$, $f: [1, e^2] \rightarrow [0, 2]$ bijektív függvény inverze, a $g: [0, 2] \rightarrow [1, e^2]$, $g(y) = e^y$, ezért a keletkezett forgástest térfogata:

$$V_y = \pi \int_0^2 g^2(y) dy = \pi \int_0^2 e^{2y} dy = \frac{\pi}{2} \int_0^2 e^{2y} (2y)' dy.$$

Alkalmazva az $\int e^{f(y)} \cdot f'(y) dy = e^{f(y)} + c$ képlettel megkapjuk a V_y értékét:

$$V_y = \frac{\pi}{2} [e^{2y} + c]_0^2 = \frac{\pi}{2} [e^4 + c - e^0 - c] = \frac{\pi}{2} [e^4 - 1].$$

3.7. Forgásfelület felszíne

Legyen $f : [a, b] \rightarrow [0, +\infty)$ egy **folytonosan differenciálható függvény**, és jelöljük H -val az f grafikonjának x -tengely körüli forgatásával adódó forgásfelületet:

$$H := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \in [a, b], y^2 + z^2 = f^2(x)\}.$$

Lásd a 3.21 ábrát.

Tekintsük az $[a, b]$ egy $\tau = \{x_0, \dots, x_n\}$ felosztását és a τ által meghatározott f grafikonjába írt töröttvonalat. E töröttvonalat az x -tengely körül megforgatva egy csonkakúp-alakútestből összerakott forgásfelületet kapunk. Az ábrán feltüntetett $P_{i-1}P_i$ szakasz forgatásából adódó csonkakúpot síkba terítve egy körgyűrűcikket kapunk, amelyet az 3.22 ábrán szemléltetünk. Ennek területe

$$\frac{1}{2}h_i(2\pi f(x_i) + 2\pi f(x_{i-1})),$$

ahol

$$h_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2} = (x_i - x_{i-1})\sqrt{1 + \left(\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}\right)^2}$$

a $P_{i-1}P_i$ szakasz hossza.

A Lagrange-féle középérték tétel alapján van olyan $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ pont, amellyel a h_i a következő alakban írható fel:

$$h_i = (x_i - x_{i-1})\sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2}.$$

Mivel f folytonos az $[a, b]$ -n a Bolzano-tétel alapján bármely két függvényérték közötti értéket is felvesz az $[x_{i-1}, x_i]$ -n. Következésképpen van olyan $\eta_i \in [x_{i-1}, x_i]$ pont, amelyre $f(\eta_i) = \frac{1}{2}(f(x_i) + f(x_{i-1}))$ teljesül. Ezeket felhasználva az említett csonkakúp-alakútestek felszíneinek összegét felírhatjuk a

$$2\pi \sum_{i=1}^n f(\eta_i) \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} (x_i - x_{i-1}) = \sigma(2\pi f \sqrt{1 + (f')^2}, \tau, \xi) + r_\tau$$

alakban, ahol

$$\sigma(2\pi f \sqrt{1 + (f')^2}, \tau, \xi) := 2\pi \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} (x_i - x_{i-1}), \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$$

a $2\pi f \sqrt{1 + (f')^2} \in C[a, b]$ függvény egy Riemann-féle közelítő összege, és

$$r_\tau := 2\pi \sum_{i=1}^n (-f(\xi_i) + f(\eta_i)) \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} (x_i - x_{i-1}).$$

Legyen $\|\tau\| := \max\{x_i - x_{i-1} : i = 1, \dots, n\}$ $\omega_\tau := \sup\{|f(u) - f(v)| : |u - v| \leq \|\tau\|, u, v \in [a, b]\}$, és jelöljük ℓ -el az f grafikonjának hosszát. Ekkor

$$|r_\tau| \leq 2\pi\omega_\tau \sum_{i=1}^n h_i = 2\pi\omega_\tau \ell.$$

Innen f -nek az $[a, b]$ -n való egyenletes folytonossága alapján következik, hogy $r_\tau \rightarrow 0$, ha $|\tau| \rightarrow 0$. Mivel $\sigma(2\pi f \sqrt{1 + (f')^2}, \tau, \xi) \rightarrow 2\pi \int_a^b f \sqrt{1 + (f')^2}$ ha $|\tau| \rightarrow 0$, ezért kézenfekvő az alábbi definíció

7. Definíció

Az $f \in C^1[a, b]$ (az $[a, b]$ -n **folytonosan differenciálható**) függvény grafikonjának az x -tengely körüli forgatásával kapott H forgásfelület $\mathcal{F}(H)$ -val jelölt felszínét az

$$\mathcal{F}(H) := 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

integrállal értelmezzük.

Példák:

1. Határozzuk meg a $G_R := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$ R sugarú gömb felszínét. Mivel a gömb az $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$, $-R \leq x \leq R$ függvény grafikus képének Ox tengely körüli forgatásával származtatható, ezért alkalmazva az előbbi képletet, az $(f'(x))^2 = x^2/(R^2 - x^2)$ figyelembevételével

$$\mathcal{F}(G_R) = 2\pi \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}} dx = 2\pi R \int_{-R}^R dx = 4R^2\pi$$

adódik.

2. Határozzuk meg az $f(x) = x^3$, $x \in [0; 1]$ függvény által meghatározott forgástest felszínét!

$$\begin{aligned} F &= 2\pi \int_0^1 x^3 \sqrt{1 + 9x^4} dx = 2\pi \int_0^1 (1 + 9x^4)^{\frac{1}{2}} (1 + 9x^4)' \cdot \frac{1}{36} dx = \\ &= \frac{\pi}{18} \left[\frac{(1 + 9x^4)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{\pi}{27} (10^{\frac{3}{2}} - 1) = \frac{\pi}{27} (10\sqrt{10} - 1). \end{aligned}$$

3. Határozzuk meg az $f(x) = \cos x$, $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$ függvény által meghatározott forgástest felszínét!

Mivel $f : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható $[0, \frac{\pi}{2}]$ -n és $f'(x) = -\sin x$;

$$F = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sqrt{1 + \sin^2 x} dx.$$

Legyen $t = \sin x$, így $\frac{dt}{dx} = \cos x$ és $dt = \cos x dx$.

$$F = 2\pi \int_0^1 \sqrt{1 + t^2} dt.$$

Bővítsük az integrál alatti gyökmennyiséget önmagával: $\sqrt{1+t^2} = \frac{1+t^2}{\sqrt{1+t^2}}$, így a felszín kiszámítását a következő két integrál kiszámítására vezetjük vissza

$$F = 2\pi \int_0^1 \frac{1+t^2}{\sqrt{1+t^2}} dt = 2\pi \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt + 2\pi \int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}} dt.$$

Az első integrálra az $\int \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt = \ln(t + \sqrt{1+t^2}) + c$ képletet, a másodikra a parciális integrálás módszerét alkalmazzuk:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt = [\ln(t + \sqrt{1+t^2})]_0^1 = \ln(1 + \sqrt{2}) - \ln 1 = \ln(1 + \sqrt{2}).$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}} dt &= \int_0^1 t \frac{2t}{2\sqrt{1+t^2}} dt = \int_0^1 \underbrace{t}_f \underbrace{(\sqrt{1+t^2})'}_{g'} dt = \\ &= [t\sqrt{1+t^2}]_0^1 - \int_0^1 \sqrt{1+t^2} dt = \sqrt{2} - \int_0^1 \sqrt{1+t^2} dt. \end{aligned}$$

Igy a felszín a következő egyenlet megoldása:

$$F = 2\pi \ln(1 + \sqrt{2}) + 2\pi\sqrt{2} - \underbrace{2\pi \int_0^1 \sqrt{1+t^2} dt}_F.$$

Tehát $2F = 2\pi[\ln(1 + \sqrt{2}) + \sqrt{2}]$, ahonnan

$$F = \pi[\ln(1 + \sqrt{2}) + \sqrt{2}].$$

Paraméteres alakban adott görbe forgatásával származtatott forgástest felszíne.

Ha a függvény paraméteres egyenlete $\begin{cases} x = x(t) & t \in [t_1; t_2] \\ y = y(t) \end{cases}$, ahol $x(t), y(t) \in C^1[t_1, t_2]$, akkor az Ox tengely körüli forgatással származtatott forgástest felszíne:

$$F = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$$

4. Határozzuk meg az $\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}$ asztroid felszínét!

Szimmetria miatt elég a felszín felét meghatározni. Mivel $x' = -3a \cos^2 t \sin t$, $y' =$

$3a \sin^2 t \cos t$, ezért

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}F &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \sin^3 t \sqrt{9a^2(\sin^2 t \cos^2 t + \sin^4 t \cos^2 t)} dt = \\
 &= 6\pi a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \sqrt{\sin^2 t \cos^2 t (\sin^2 t + \cos^2 t)} dt = \\
 &= 6\pi a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \sin t \cos t dt = 6\pi a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cos t dt = \\
 &= 6\pi a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t (\sin t)' dt = 6\pi a^2 \left[\frac{\sin^5 t}{5} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \\
 &= 6\pi a^2 \cdot \frac{1}{5} = \frac{6\pi a^2}{5}.
 \end{aligned}$$

Tehát az asztroida forgatásával származtatott test felszíne $F = \frac{12\pi a^2}{5}$.

3.8.Összefoglaló feladatok

I. Számítsuk ki a következő határozott integrálokat:

$$1. \int_0^{\pi} \sin^3 x dx$$

$$2. \int_{-\pi}^{\pi} \sin^5 x dx$$

$$3. \int_{-\pi}^{\pi} \cos^4 x dx$$

$$4. \int_0^{\pi} x \sin^2 x dx$$

$$5. \int_{-\pi}^{\pi} x^3 \cos x dx$$

$$6. \int_0^1 \sqrt{4-x^2} dx$$

$$7. \int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

$$8. \int_0^3 x \sqrt{x^2+3} dx$$

$$9. \int_{-1}^1 \frac{1}{e^x + e^{-1}} dx$$

$$10. \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{5+4x-x^2}} dx$$

$$11. \int_2^3 \frac{x+1}{9x^2+6x+2} dx$$

$$12. \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$$

$$13. \int_0^e x^2 \ln(1+x) dx$$

$$14. \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \ln(1 + \operatorname{ctg} x) dx$$

$$15. \int_0^1 \frac{3x+1}{\sqrt{x^2+1}} dx$$

$$16. \int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt{4-x^2}} dx$$

$$17. \int_0^2 e^x \max\{1, x^2\} dx$$

$$18. \int_0^2 \min\left(x, \frac{2}{1+x^2}\right) dx$$

$$19. \int_{-1}^1 f(x) dx, \text{ ahol } f(x) = \begin{cases} x + xe^x & , \text{ ha } x \leq 0 \\ \sqrt{x^2+4} & , \text{ ha } x > 0 \end{cases}$$

II. Számítsuk ki a következő sorozatok határértékét:

$$1. x_n = \sum_{k=1}^n \frac{n^2}{(n+k)^3}$$

$$2. x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{9n^2 - k^2}}$$

$$3. x_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n^2}\right) e^{\left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

$$4. x_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \operatorname{tg} \frac{k\pi}{n}$$

III. Bizonyítsuk be a következő egyenlőtlenségeket:

$$1. \quad 3 < \int_0^1 \sqrt{9+x^2} dx < \sqrt{10}$$

$$2. \quad \int_{-1}^1 (2 - e^{-x^2}) dx \geq 2$$

$$3. \quad \int_0^1 x \operatorname{arctg} x dx > \int_0^1 \ln(1+x^2) dx$$

IV. Vezessünk le rekurziós összefüggést a következő integrálokra, és ha lehet számítsuk ki az értéküket:

$$1. \quad I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$$

$$2. \quad I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$$

$$3. \quad I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx$$

$$4. \quad I_n = \int_0^1 x^{2n} \sqrt{1-x^2} dx$$

$$5. \quad I_n = \int_0^1 \ln(1+x^n) dx$$

$$6. \quad I_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$$

V. Tanulmányozzuk a következő függvények integrálhatóságát:

$$1. \quad f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} 2 & , \text{ha } x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \\ 0 & , \text{ha } x \in [0, 1] \setminus \left\{ \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\} \end{cases}$$

$$2. \quad f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} 2 & , \text{ha } x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \\ -2 & , \text{ha } x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

$$3. \quad f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} x & , \text{ha } x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \\ -x & , \text{ha } x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

VI. Számítsuk ki a következő függvények grafikus képei által határolt síkrész területét.

$$1. \quad f(x) = \sqrt{x+1}, \quad g(x) = \sqrt{1-x}, \quad x \in [-1, 1].$$

$$2. \quad f(x) = \ln x, \quad g(x) = \ln^2 x, \quad x \in [1, e]$$

$$3. \quad f(x) = 3 - 2x, \quad g(x) = x^2$$

$$4. \quad f(x) = x^2, \quad g(x) = 3 - 2x^2$$

$$5. \quad f(x) = \frac{2}{1+x^2}, \quad g(x) = \frac{x^2}{2}$$

6. Az $x^2 + y^2 = 16$ kör területét az $x^2 = 6y$ parabola ketté osztja. Határozzuk meg mindkét terület nagyságát.

7. Számítsuk ki az $y = x^2$, $y = 2^x$ és $y = \frac{5x+6}{6}$ egyenletű görbék által határolt első negyedbeli síkidom területét.

8. Az $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ egyenletű ellipszis belsejét az $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ egyenletű hiperbola három részre osztja. Számítsuk ki mindegyik területét.

9. Számítsuk ki az

$$y^2 = 8(2 - x) \quad \text{és} \quad y^2 = 24(2 + x)$$

egyenletű parabolák közti síkrész területét.

10. Határozzuk meg az

$$\begin{aligned} x &= t(1 - t) \\ y &= t^2(1 - t)^3 \end{aligned} \quad t \in [0, 1]$$

paraméteres egyenletrendszerrel megadott zárt görbe által határolt síkidom területét.

11. Határozzuk meg az

$$\begin{aligned} x &= t(5 - 2t) \\ y &= t + \frac{1}{t} \end{aligned} \quad t \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$$

paraméteres egyenletrendszerrel megadott zárt görbe által határolt síkidom területét.

VII. Számítsuk ki az alábbi szektorszerű idomok területét:

- $\left\{P(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : \varphi \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right], 0 \leq r \leq a \cos 2\varphi\right\} \quad (a > 0).$
- $\{p(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : \varphi \in [0, 2\pi], 0 \leq r \leq 1 + \cos \varphi\}$
(kardoida által határolt síkrész)
- $\{P(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : \varphi \in [0, \pi], 0 \leq r \leq 4\sqrt{\cos 2\varphi}\}$
(lemnizkóta által határolt síkrész)

VIII. Határozzuk meg a következő görbék ívhosszát:

- $f(x) = e^x, \quad x \in [0, 1]$
- $f(x) = \ln x, \quad x \in [0, \ln 2]$
- $f(x) = \ln x, \quad x \in [1, e]$
- $f(x) = \ln \cos x, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$
- $\begin{cases} x(t) = t - \sin t, & t \in [0, 2\pi] \text{ (cikloisz)} \\ y(t) = 1 - \cos t \end{cases}$
- $\begin{cases} x(t) = 2 \cos t - \cos 2t & t \in [0, 2\pi] \text{ (epicikloisz)} \\ y(t) = 2 \sin t - \sin 2t \end{cases}$

$$7. \quad \begin{cases} x(t) = \frac{2}{3} \cos t + \frac{1}{3} \cos 2t \\ y(t) = \frac{2}{3} \sin t - \frac{1}{3} \sin 2t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi] \text{ (hipocikloisz)}$$

$$8. \quad r = e^{-\varphi}, \varphi \in [0, 2\pi] \text{ (logaritmus spirál)}$$

$$9. \quad r = \varphi, \varphi \in [0, \pi] \text{ (Archimédész-féle spirál)}$$

$$10. \quad r = \frac{1}{\varphi}, \varphi \in [\pi, 2\pi] \text{ (hiperbolikus spirál)}$$

$$11. \quad r = 1 + \cos \varphi, \varphi \in [0, 2\pi] \text{ (kardoida)}$$

IX. Határozzuk meg az $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ grafikájának x -tengely körüli forgatásával adódó forgástest térfogatát és felszínét.

$$1. \quad f : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = 3 + \sqrt{9 - x^2}$$

$$2. \quad f : [1, e] \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \ln x$$

$$3. \quad f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \operatorname{ch} x$$

$$4. \quad f : \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \operatorname{tg} x$$

$$5. \quad f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \sin^2 x$$

$$6. \quad f : \left[0, \frac{1}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \arcsin x$$

$$7. \quad f : [1, e] \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = x \ln x$$

X. Határozzuk meg az $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ grafikus képének az y -tengely körüli forgatásával keletkezett test térfogatát és felszínét.

$$1. \quad f : [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \sqrt{x+1}$$

$$2. \quad f : [1, e] \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \ln x$$

$$3. \quad f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \operatorname{sh} x$$

XI. Határozzuk meg a következő paraméteres alakban megadott görbék x -tengely körüli forgatásával keletkezett testek térfogatát és felszínét.

1.
$$\begin{cases} x(t) = t - \sin t, & t \in [0, 2\pi] \\ y(t) = 1 - \cos t \end{cases}$$
2.
$$\begin{cases} x(t) = 2 \cos t - \cos 2t, & t \in [0, \pi] \\ y(t) = 2 \sin t - \sin 2t \end{cases}$$
3.
$$\begin{cases} x(t) = t + \frac{1}{t}, & t \in [1, 3] \\ y(t) = t - \frac{1}{t} \end{cases}$$
5.
$$\begin{cases} x = 4 \cos t, & t \in [0, \pi] \\ y = 3 \sin t \end{cases}$$

4. Impropius integrál

4.1. Impropius integrálok konvergenciája

Az integrálhatóság kérdését eddig csak **véges intervallumon** értelmezett **korlátos** függvényekkel kapcsolatban vetettük fel. A gyakorlati alkalmazásokban azonban előfordul, hogy olyan függvények integráljára van szükség, amelyek a szóban forgó intervallumon nem korlátosak, vagy az integrálási intervallum hossza végtelen (pl. az elektromos potenciál értelmezésénél). Ez indokolja az **impropius integrálok** bevezetését.

A határozott integrál kiterjesztése végtelen hosszúságú intervallumokra.

1. Definíció

Az impropius integrálok első típusának definíciója. Legyen $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ olyan függvény, amely integrálható bármely $[a, x], x > a$ intervallumon. Azt mondjuk, hogy az

$$\int_a^{+\infty} f(t) dt$$

impropius integrál konvergens, ha az $F(x) := \int_a^x f(t) dt$ függvénynek $a + \infty$ -ben véges határértéke van, azaz létezik az $L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dt$ határérték és véges. Ebben az esetben definíció szerint

$$\int_a^{+\infty} f(t) dt := \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dr = L.$$

2. Definíció.

Ha az $f : (-\infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$ olyan függvény, amely integrálható bármely $[x, b]$, $x < b$ intervallumon. Azt mondjuk, hogy az

$$\int_{-\infty}^b f(t) dt$$

improprius integrál konvergens, ha a $G(x) := \int_x^b f(t) dt$ függvénynek létezik a $-\infty$ -ben véges határértéke, azaz létezik az $L = \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^b f(t) dt$ határérték és véges. Ebben az esetben definíció szerint

$$\int_{-\infty}^b f(t) dt := \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^b f(t) dt = L.$$

3. Definíció.

Ha az f függvény minden véges $[x, y]$ intervallumon integrálható és létezik az

$$L = \lim_{x \rightarrow -\infty, y \rightarrow +\infty} \int_x^y f(t) dt$$

és véges, akkor

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt := \lim_{x \rightarrow -\infty, y \rightarrow +\infty} \int_x^y f(t) dt = L.$$

A határozott integrál kiterjesztése véges hosszúságú intervallumon értelmezett nemkorlátos függvényekre.

4. Definíció

Az improprius integrál második típusának definíciója. Legyen az $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ nem korlátos függvény az a pont környezetében. Tegyük fel, hogy bármely $x \in (a, b]$ esetén f integrálható a $[x, b]$ intervallumon. Azt mondjuk, hogy az

$$\int_a^b f(t) dt$$

improprius integrál konvergens, ha az $G(x) := \int_x^b f(t) dt$ függvénynek a a pontban van véges jobboldali határértéke, azaz létezik az $L = \lim_{x \rightarrow a+} \int_x^b f(t) dt$ határérték és véges. Ekkor definíció szerint

$$\int_a^b f(x) := \lim_{x \rightarrow a+} \int_x^b f(t) dt = L.$$

5. Definíció

Ha az $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ olyan függvény, amely nem korlátos a b pont környezetében, de integrálható bármely $[a, x]$, $x \in [a, b)$ intervallumon, és a $F(x) := \int_a^x f(t)dt$ függvénynek a b pontban van véges baloldali határértéke azaz létezik az $L = \lim_{x \rightarrow b-} \int_a^x f(t)dt$ határérték és véges, akkor az

$$\int_a^b f(t)dt$$

impropius integrál konvergens, és

$$\int_a^b f(t)dt := \lim_{x \rightarrow b-} \int_a^x f(t)dt = L.$$

Ha az előző definíciókban L **nem létezik, vagy végtelen**, akkor az impropius integrál **divergens**.

6. Definíció

Ha az f függvény az (a, b) intervallum egyik végpontjának környezetében sem korlátos, de minden olyan $[x, y]$ intervallumon integrálható, amelyre $a < x < y < b$, továbbá létezik a

$$\lim_{x \rightarrow a, y \rightarrow b} \int_x^y f(t)dt$$

határérték, akkor

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x \rightarrow a, y \rightarrow b} \int_x^y f(t)dt.$$

Ha az f függvény az $[a, b]$ intervallum belsejébe eső c pontban nem értelmezett és a c pont környezetében nem korlátos, akkor az integrál additív tulajdonságának érvényben tartásával az $[a, b]$ intervallumon vett impropius integrál értelmezése visszavezethető az $[a, c]$ és $(c, b]$ intervallumokon vett impropius integrálokra. Ha az $\int_a^c f(t)dt$ és $\int_c^b f(t)dt$ impropius integrálok egyidőben konvergensek, akkor $\int_a^b f(t)dt$ is konvergens és

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$

Példák:

Számítsuk ki a következő impropius integrálokat:

1.

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} \sin t dt.$$

Az $f(t) = e^{-t} \sin t$ függvény primitív függvénye az $F(t) = -\frac{\sin t + \cos t}{2} e^{-t}$.

A definíció alapján

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-t} \sin t dt &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x e^{-t} \sin t dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} [F(x) - F(0)] = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\frac{\sin x + \cos x}{2} e^{-x} + \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

mivel a $\frac{\sin x + \cos x}{2}$ korlátos és $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$.

2.

$$\begin{aligned} \int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \frac{1}{t^2} \sin \frac{1}{t} dt &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{\frac{2}{\pi}}^x -\left(\frac{1}{t}\right)' \sin \frac{1}{t} dt = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\cos \frac{1}{t} \right]_{\frac{2}{\pi}}^x = \left[\cos \frac{1}{x} - \cos \frac{\pi}{2} \right] = 1. \end{aligned}$$

3.

$$\int_0^{\infty} \sin t dt = \lim_{x \rightarrow \infty} [-\cos x]_0^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} [-\cos x + 1].$$

Mivel a $\cos x$ függvénynek a $+\infty$ -ben nincs határértéke, ezért az impropius integrál divergens.

4.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} &= \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \int_x^0 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} [\arcsin t]_x^0 = \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} [-\arcsin x + \arcsin 0] = +\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} &= \int_{-1}^0 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} + \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \int_x^0 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} + \lim_{\substack{y \rightarrow 1 \\ y < 1}} \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} [\arcsin t]_{+x}^0 + \lim_{\substack{y \rightarrow 1 \\ y < 1}} [\arcsin t]_0^y = \pi. \end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt[3]{t}} &= \int_{-1}^0 \frac{dt}{\sqrt[3]{t}} + \int_0^{\infty} \frac{dt}{\sqrt[3]{t}} = \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \int_{-1}^x t^{-\frac{1}{3}} dt + \lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ y > 0}} \int_y^{\infty} t^{-\frac{1}{3}} dt = \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \left[\frac{3}{2} t^{\frac{2}{3}} \right]_{-1}^x + \lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ z \rightarrow \infty}} \left[\frac{3}{2} t^{\frac{2}{3}} \right]_y^z = -\frac{3}{2} + \infty = \infty. \end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\arcsin t}{\sqrt{1-t^2}} dt &= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \int_0^x (\arcsin t)' \arcsin t dt = \\
&= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \left[\frac{1}{2} (\arcsin t)^2 \right]_0^x = \\
&= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \left[\frac{1}{2} (\arcsin x)^2 - \frac{1}{2} (\arcsin 0)^2 \right] = \frac{\pi^2}{8}.
\end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \ln t dt &= \lim_{x \rightarrow 0+} \int_x^1 (t)' \ln t dt = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0+} \left[t \ln t \Big|_x^1 - \int_x^1 1 dt \right] = \lim_{x \rightarrow 0+} [-x \ln x - 1 + x].
\end{aligned}$$

A $\lim_{x \rightarrow 0+} x \ln x$ kiszámítására a L'Hospital szabályt alkalmazzuk:

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0+} (-x) = 0.$$

Tehát a fenti impropius integrál értéke -1 .

9. Milyen $\alpha \in \mathbb{R}$ számra konvergens az

$$\int_1^{+\infty} t^\alpha dt$$

impropius integrál?

Mivel

$$\int_1^x t^\alpha dt = \begin{cases} \frac{x^{\alpha+1}-1}{\alpha+1} & \alpha \neq -1 \\ \ln x & \alpha = -1, \end{cases}$$

ezért innen nyilvánvaló, hogy $\alpha < -1$ esetén létezik az

$$L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x t^\alpha dt = -\frac{1}{\alpha+1}$$

határérték és véges.

Ha $\alpha \geq -1$, akkor $L = +\infty$, tehát $\int_1^{+\infty} x^\alpha dx$ divergens.

10. Legyen $a < b < +\infty$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$ és vizsgáljuk az

$$\int_a^b \frac{dt}{(b-t)^\alpha}$$

impropius integrál konvergenciáját.

Ha $\alpha > 0$, akkor az $t \rightarrow \frac{1}{(b-t)^\alpha}$ függvény nem korlátos. Mivel

$$\int_a^x \frac{dt}{(b-t)^\alpha} = \begin{cases} \frac{-1}{1-\alpha} ((b-x)^{-\alpha+1} - (b-a)^{-\alpha+1}) & \alpha \neq 1 \\ -\ln(b-x) + \ln(b-a) & \alpha = 1, \end{cases}$$

ezért innen azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x \rightarrow b-0} \int_a^x \frac{dt}{(b-t)^\alpha} = \begin{cases} \frac{(b-a)^{-\alpha+1}}{1-\alpha} & 0 < \alpha < 1, \\ +\infty & \alpha \geq 1. \end{cases}$$

Ezzel beláttuk, hogy a tekintett improprius integrál a $0 < \alpha < 1$ esetben konvergens, $\alpha > 1$ esetben pedig divergens.

11. Vizsgáljuk az $\int_0^{+\infty} e^{\alpha t} dt$ improprius integrál konvergenciáját.

Mivel

$$\int_0^x e^{\alpha t} dt = \frac{e^{\alpha x} - 1}{\alpha}$$

és

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\alpha x} - 1}{\alpha} = \begin{cases} -\frac{1}{\alpha} & \alpha < 0, \\ +\infty & \alpha \geq 0, \end{cases}$$

ezért a tekintett improprius integrál az $\alpha < 0$ esetben konvergens és $\alpha \geq 0$ esetben divergens.

12. Vizsgáljuk az

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2 + 1} dt$$

improprius integrál konvergenciáját.

A definíció alapján

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2 + 1} dt &= \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} [\arctgt]_a^b = \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} [\arctgb - \arctga] = \\ &= \pi/2 - (-\pi/2) = \pi. \end{aligned}$$

Az 1. és 2. definíciókban előforduló F és G függvényekre az a, b (véges illetve végtelen) pontokban alkalmazva a bal illetve a jobb oldali határértékre vonatkozó Cauchy-féle kritériumot, az improprius integrálok konvergenciájára a következő szükséges és elégséges feltételt kapjuk:

1. Tétel

1. Legyen $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. Az $\int_a^b f(t) dt$ improprius integrál akkor és csak akkor konvergens, ha

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in [a, b) \quad \text{úgy, hogy} \quad \forall x_1, x_2 \in (k, b)$$

$$|F(x_1) - F(x_2)| = \left| \int_{x_1}^{x_2} f(t) dt \right| < \varepsilon.$$

2. Legyen $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Az $\int_a^b f(t) dt$ improprius integrál akkor és csak akkor konvergens, ha

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K \in (a, b] \quad \text{úgy, hogy} \quad \forall x_1, x_2 \in (a, K)$$

$$|G(x_1) - G(x_2)| = \left| \int_{x_1}^{x_2} f(t) dt \right| < \varepsilon.$$

Az improprius integrálok konvergenciájával kapcsolatos a következő fogalom:

7. Definíció

Akkor mondjuk, hogy az

$$\int_a^b f(t) dt$$

improprius integrál **abszolút konvergens**, ha

$$\int_a^b |f(t)| dt$$

konvergens.

Mivel tetszőleges $x_1, x_2 \in (a, b)$ esetén

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} f(t) dt \right| \leq \left| \int_{x_1}^{x_2} |f(t)| dt \right|$$

azért az 1. Tétel alapján nyilvánvaló az alábbi

1. Következmény Ha az $\int_a^b f(t) dt$ improprius integrál abszolút konvergens, akkor egyben konvergens is.

2. Következmény (majoráns kritérium) Ha $|f(x)| \leq g(x), x \in [a, b]$ vagy $x \in (a, b]$ és az $\int_a^b g$ improprius integrál konvergens, akkor $\int_a^b f$ abszolút konvergens.

Valóban, ha $|f(x)| \leq g(x), x \in [a, b]$ vagy $x \in (a, b]$ feltételből következik, hogy $\left| \int_{x_1}^{x_2} |f(t)| dt \right| \leq \left| \int_{x_1}^{x_2} g(t) dt \right|, x_1, x_2 \in [a, b]$, s így az 1. Tétel alapján $\int_a^b |f|$ konvergens. Az 1. Következmény fordított állítása nem igaz, azaz létezik olyan improprius integrál, amely konvergens de nem abszolút konvergens. A következőkben két példát fogunk adni ilyen improprius integrálokra.

Példa konvergens, de nem abszolút konvergens improprius integrálra.

1. Tekintsük az $f(x) = (-1)^n/n$ ha $[x] = n$ függvényt. Ekkor

$$\int_1^{+\infty} f(t) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_n^{n+1} f(t) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n/n.$$

Mivel ez utóbbi sor konvergens, következik, hogy az improprius integrál is konvergens. Azonban

$$\int_1^{+\infty} |f(t)| dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_n^{n+1} |f(t)| dt = \sum_{n=1}^{+\infty} 1/n.$$

Mivel a $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n$ divergens, ezért az improprius integrál nem abszolút konvergens. Lásd a 4.1 ábrát.

2. Legyen $f(t) = \sin \frac{t}{t}$ ha $x \in [1, +\infty)$. Alkalmazva a parciális integrálást

$$\int_1^x \frac{\sin t}{t} dt = \cos 1 - \frac{\cos x}{x} - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2} dt.$$

Mivel $\left| \frac{\cos t}{t^2} \right| \leq \frac{1}{t^2}$ és $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ konvergens, ezért a majorálási kritérium alapján $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$ konvergens, tehát létezik $\lim_{1 \rightarrow +\infty} \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$ és véges. Így a

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \frac{\sin t}{t} dt &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\cos 1 - \frac{\cos x}{x} - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2} dt \right] = \\ &= \cos 1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \frac{\cos t}{t^2} dt \end{aligned}$$

határérték létezik és véges, tehát az $\int_1^x \frac{\sin t}{t} dt$ konvergens.

Másfelől $\int_1^{+\infty} |f(t)| dt$ divergens, mert

$$\begin{aligned} \int_\pi^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt &= \sum_{k=1}^n \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt \geq \\ &\geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t| dt = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)\pi} \int_0^\pi |\sin t| dt = \sum_{k=1}^n \frac{2}{(k+1)\pi}, \end{aligned}$$

ez utóbbi összeg tart $+\infty$ -hez ha $n \rightarrow +\infty$.

A következőkben megfogalmazzuk a pozitív függvények improprius integráljának konvergenciájára vonatkozóan egy szükséges és elégséges feltételét.

Ha $f(t) \geq 0, t \in [a, b][f(t) \geq 0, t \in (a, b)]$, akkor

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt,$$

monoton növekvő, a

$$G(x) = \int_x^b f(t) dt$$

pedig monoton fogyó, s ezért nyilvánvaló az alábbi állítás:

3. Következmény Ha $f(t) \geq 0, t \in [a, b][f(t) \geq 0, t \in (a, b)]$ akkor az $\int_a^b f$ improprius integrál akkor és csak akkor konvergens, ha F [ill. G] korlátos.

Az improprius integrál definíciójából közvetlenül adódik az alábbi állítás:

2. Tétel Tegyük fel, hogy az $\int_a^b f, \int_a^b g$ improprius integrálok konvergensek és legyen $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Ekkor az $\int_a^b (\lambda_1 f + \lambda_2 g)$ improprius integrál is konvergens és

$$\int_a^b (\lambda_1 f + \lambda_2 g) = \lambda_1 \int_a^b f + \lambda_2 \int_a^b g.$$

BIZONYÍTÁS. Legyen $a \leq x < b$. Ekkor a Riemann-integrál ismert tulajdonsága alapján

$$\int_a^x (\lambda_1 f + \lambda_2 g) = \lambda_1 \int_a^x f + \lambda_2 \int_a^x g.$$

Innen $x \rightarrow b - 0$ határátmenettel adódik az állítás.

A konvergencia, de nem abszolút konvergencia integrálra adott második példában alkalmazott eljárást a következő általános alakban fogalmazhatjuk meg:

3. Tétel Legyen $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény és $g \in C^1[[a, +\infty)]$, jelöljük $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ $x \geq a$. Ha

- (a) $\int_a^{+\infty} |g'(t)|dt < \infty$;
- (b) F korlátos;
- (c) $g(x) \rightarrow 0$, ha $x \rightarrow \infty$,

akkor $\int_a^\infty f(t)g(t)dt$ konvergens.

BIZONYÍTÁS. Alkalmazva a parciális integrálást, azt kapjuk, hogy:

$$\int_a^x f(t)g(t)dt = F(x)g(x) - F(a)g(a) - \int_a^x F(t)g'(t)dt;$$

mivel F korlátos és $\int_a^{+\infty} |g'(t)|dt < \infty$, ezért $\int_a^\infty F(t)g'(t)dt$ a majorálási kritérium alapján konvergens, tehát létezik és véges a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x F(t)g'(t)dt$. Mivel F korlátos és $g(x) \rightarrow 0$ ha $x \rightarrow \infty$ ezért

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_a^x f(t)g(t)dt = -F(a)g(a) - \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x F(t)g'(t)dt$$

létezik és véges. ■

4.2. Improprius integrálok és végtelen sorok kapcsolata.

Tétel Ha $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$ monoton fogyó függvény, akkor a

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \quad \text{és} \quad \int_1^{\infty} f(t)dt$$

ekvikonvergens (vagy mindkettő konvergens vagy mindkettő divergens).

BIZONYÍTÁS. Tekintsük az $[1, \infty)$ intervallum $\tau = \{1, 2, \dots, n, n+1, \dots\}$ felosztását és ezen felosztáshoz tartozó beírt illetve körülírt téglalapokat. Figyelembe véve, hogy f monoton fogyó, ezért az $[n, n+1]$ intervallumhoz tartozó beírt téglalap területe $t_n = 1 \cdot f(n+1) = f(n+1)$ a körülírt téglalap területe pedig $T_n = 1 \cdot f(n) = f(n)$. Így azt kapjuk, hogy

$$t_1 + t_2 + \dots + t_n \leq \int_1^n f(t)dt \leq T_1 + T_2 + \dots + T_n,$$

vagyis

$$f(2) + f(3) + \dots + f(n+1) \leq \int_1^n f(t) dt \leq f(1) + f(2) + \dots + f(n).$$

Ez utóbbi egyenlőtlenségből adódik, hogy ha az integrál konvergens akkor a sor is konvergens és fordítva, ha a sor konvergens akkor az integrál is konvergens.

Példák

1. Tanulmányozzuk a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ sor konvergenciáját.

Legyen $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$. Mivel f monoton fogyó függvény és

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx \quad \begin{cases} \text{konvergens, ha} & \alpha > 1 \\ \text{divergens, ha} & 0 < \alpha \leq 1 \end{cases}$$

ezért

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \quad \begin{cases} \text{konvergens, ha} & \alpha > 1 \\ \text{divergens, ha} & 0 < \alpha \leq 1. \end{cases}$$

2. Igazoljuk, hogy a $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ divergens, és $\forall \epsilon > 0$ esetén $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{1+\epsilon}}$ konvergens.

Tekintsük az $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ monoton fogyó függvényt a $[2, +\infty)$ intervallumon.

Jelöljük $\varphi(t) = \ln t$, ekkor $\varphi'(t) = 1/t$, és

$$\int_2^x \frac{1}{t \ln t} dt = \int_2^x \varphi'(t) \frac{1}{\varphi(t)} dt = [\ln \varphi(t)]_2^x = \ln \ln x - \ln \ln 2 \rightarrow \infty \quad x \rightarrow \infty.$$

Tehát $\int_2^x \frac{1}{t \ln t} dt$ divergens és így a $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ is divergens.

Ha most tekintjük az $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^{1+\epsilon}}$ függvényt, akkor

$$\begin{aligned} \int_2^x \frac{1}{t(\ln t)^{1+\epsilon}} dt &= \int_2^x \varphi'(t) \varphi(t)^{-1+\epsilon} dt = \left[\frac{\varphi^{-\epsilon}(t)}{\epsilon} \right]_1^x = \\ &= \frac{(\ln x)^{-\epsilon}}{\epsilon} - \frac{(\ln 2)^{-\epsilon}}{\epsilon} \rightarrow 0, \quad x \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

tehát az $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{1+\epsilon}}$ sor is konvergens, ha $\epsilon > 0$.

Megjegyzés

Könnyű belátni, hogy

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{n \ln n} > \frac{1}{n(\ln n)^{1+\epsilon}} > \frac{1}{n^{1+\epsilon}}, \quad \epsilon > 0, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

A fenti példák alapján $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ és $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ sorok divergensek, a $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{1+\epsilon}}$ és $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\epsilon}}$, $\epsilon > 0$ konvergens. Az előző egyenlőség alapján a $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ lassabban divergál mint a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, a $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{1+\epsilon}}$ gyorsabban konvergál mint a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\epsilon}}$, $\epsilon > 0$. Igazolni lehet, hogy

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{n \ln n} > \frac{1}{n \ln n \ln(\ln n)} > \dots > \frac{1}{n \ln n (\ln(\ln n))^\epsilon} > \frac{1}{n(\ln n)^\epsilon} > \frac{1}{n^{1+\epsilon}}$$

és $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \ln(\ln n)}$ divergens, míg a $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n (\ln(\ln n))^{1+\varepsilon}}$, $\varepsilon > 0$ konvergens. Innen az következik, hogy nincsen leglassabban divergáló sor és leggyorsabban konvergáló sor.

Tegyük fel, hogy az f függvény az $[a, b] \setminus \{c\}$ halmazon értelmezett és a c pont ennek környezetében nem korlátos, és bármely $[a, b]$ -hez tartozó c -t nem tartalmazó zárt intervallumon integrálható.

Akkor az a -tól b -ig vett improprius integrál definíció szerint

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) dt &= \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt = \lim_{\eta \rightarrow 0_+} \int_a^{c-\eta} f(t) dt + \\ &+ \lim_{\substack{\eta' \rightarrow 0_+ \\ c+\eta'}} \int_{c+\eta'}^b f(t) dt = \lim_{\substack{\eta \rightarrow 0_+ \\ \eta' \rightarrow 0_+}} \left(\int_a^{c-\eta} f(t) dt + \int_{c+\eta'}^b f(t) dt \right). \end{aligned}$$

Az improprius integrál akkor konvergens, ha η, η' megválasztásától függetlenül mindkét határérték létezik és véges. Amikor a fenti improprius integrál divergens akkor szokás vizsgálni a fenti határértéket abban a speciális esetben, amikor $\eta = \eta' \rightarrow 0_+$.

8. Definíció

Ha létezik a

$$\lim_{\eta \rightarrow 0_+} \left(\int_a^{c-\eta} f(t) dt + \int_{c+\eta}^b f(t) dt \right)$$

határérték és véges, akkor ezt az improprius integrál **főértékének** („principal value”) nevezzük és a

$$V.p. \int_a^b f(x) dx := \lim_{\eta \rightarrow 0_+} \left(\int_a^{c-\eta} f(t) dt + \int_{c+\eta}^b f(t) dt \right)$$

szimbólummal jelöljük.

Ekkor azt mondjuk, hogy az $\int_a^b f(x) dx$ improprius integrál a főérték (Cauchy) értelmében konvergens.

Ha az $\int_a^b f(x) dx$ konvergens nyilván a főérték értelmében is konvergens. Az állítás fordítottja azonban nem igaz. Van olyan divergens improprius integrál, amely főérték értelemben konvergens. Tekintsük például a következő improprius integrált

1.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx &= \lim_{\eta \rightarrow 0_+} \int_{-1}^{0-\eta} \frac{1}{x} dx + \lim_{\eta' \rightarrow 0_+} \int_{0+\eta'}^1 \frac{1}{x} dx = \\ &= \lim_{\eta \rightarrow 0_+} [\ln \eta - \ln 1] + \lim_{\eta' \rightarrow 0_+} [\ln 1 - \ln \eta'] = \lim_{\substack{\eta \rightarrow 0_+ \\ \eta' \rightarrow 0_+}} \ln \frac{\eta}{\eta'}. \end{aligned}$$

a fenti határérték nem létezik ha az η és η' egymástól függetlenül tart 0_+ -hoz. (Pl. ha $\eta = 2\eta'$ akkor a határérték értéke $\ln 2$, ha pedig $\eta = 3\eta' \rightarrow 0_+$ akkor a határérték értéke $\ln 3$.)

Azonban ha $\eta = \eta' \rightarrow 0_+$ akkor

$$V.p. \int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{\eta = \eta' \rightarrow 0_+} \ln \frac{\eta}{\eta'} = \ln 1 = 0.$$

2. Tanulmányozzuk az $\int_a^b \frac{dt}{(t-c)^n}$, $(a < c < b)$, $n > 2, n \in \mathbb{N}$ improprius integrál konvergenciáját és Cauchy értelemben vett konvergenciáját.

A definíció alapján

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{dt}{(t-c)^n} &= \int_a^c \frac{dt}{(t-c)^n} + \int_c^b \frac{dt}{(t-c)^n} = \\ \lim_{\substack{\eta \rightarrow 0+ \\ \eta' \rightarrow 0+}} \left[\int_a^{c-\eta} \frac{dt}{(t-c)^n} + \int_{c+\eta'}^b \frac{dt}{(t-c)^n} \right] &= \\ = \frac{1}{n-1} \lim_{\substack{\eta \rightarrow 0+ \\ \eta' \rightarrow 0-}} \left[\frac{1}{(a-c)^{n-1}} - \frac{1}{(-\eta)^{n-1}} + \frac{1}{(\eta')^{n-1}} - \frac{1}{(b-c)^{n-1}} \right]. \end{aligned}$$

Ha η és η' egymástól függetlenül tartanak 0_+ -hoz akkor a fenti határérték nem létezik, tehát az improprius integrál divergens.

Ha $\eta = \eta' \rightarrow 0_+$ akkor páratlan n -re: $n = 2k + 1$ -re $\frac{1}{(-\eta)^{n-1}} = \frac{1}{(\eta)^{n-1}}$ tehát

$$V.p. \int_a^b \frac{dt}{(t-c)^n} = \frac{1}{n-1} \left[\frac{1}{(a-c)^{n-1}} - \frac{1}{(b-c)^{n-1}} \right].$$

Ha az $n = 2k$, páros akkor a fenti határérték ∞ , tehát a főérték értelmében sem konvergens az improprius integrál.

Hasonló fogalmat lehet bevezetni az

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt$$

alakú integrálok esetében is, ahol az f integrálható bármely $[A', A]$ alakú intervallumon.

Amint tudjuk, definíció szerint a fenti integrál akkor konvergens, ha A és A' megválasztásától függetlenül létezik és véges a

$$\lim_{\substack{A \rightarrow +\infty \\ A' \rightarrow -\infty}} \int_{A'}^A f(t) dt,$$

határérték. Előfordul azonban, hogy a fenti határérték nem létezik, de az $A' = -A$ megválasztás mellett a határérték létezik és véges.

9. Definíció

Ha létezik és véges a

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A f(t) dt$$

határérték, akkor ezt az $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt$ improprius főértékének nevezzük és a következő szimbólummal jelöljük

$$V.p. \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt := \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A f(t) dt.$$

Ha az $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$ improprius integrál konvergens, akkor a főértéke is létezik és megegyezik az $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$ értékével. Fordítva az állítás nem igaz.

Ha az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény páros ($f(-x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$), akkor

$$\int_{-A}^A f(x)dx = 2 \int_0^A f(x)dx.$$

Következésképpen a főérték akkor és csakis akkor létezik, ha $\lim_{x \rightarrow A} \int_0^A f(x)dx$ határérték létezik és véges, azaz az $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ konvergens és ekkor

$$V.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2 \int_0^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx.$$

Ha az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ páratlan függvény ($f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}$), akkor

$$\int_{-A}^A f(x)dx = 0,$$

következésképpen

$$V.p. \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 0.$$

Tekintsük az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt és tegyük fel, hogy f integrálható bármely véges $[A', A]$ intervallumon. Tudjuk, hogy bármely függvény felírható egy páros és egy páratlan függvény összegeként. Legyen

$$\varphi(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \text{ akkor } \varphi(-x) = \varphi(x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

és

$$\psi(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}, \quad \psi(-x) = -\psi(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

A fenti módon definiált φ páros függvény a ψ páratlan függvény és

$$f(x) = \varphi(x) + \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

A φ és ψ függvények szintén integrálhatók bármely $[A', A]$ alakú intervallumon.

Felhasználva a páros és a páratlan függvények improprius integráljának főértékére vonatkozó tulajdosságait, azt kapjuk, hogy

$$V.p. \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = V.p. \left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)dt + \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)dt \right) = V.p. \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)dt.$$

Példa:

Számítsuk ki az $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+x}{1+x^2} dx$ főértékét. Jelöljük $f(x)$ -el az $\frac{1+x}{1+x^2}$ -t, akkor

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{f(x) + f(-x)}{2} = \frac{1}{1+x^2} \text{ és} \\ \psi(x) &= \frac{f(x) - f(-x)}{2} = \frac{x}{1+x^2}. \end{aligned}$$

Igy

$$V.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+x}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi.$$

4.3. A gamma függvény.

Határozzuk meg az α azon paraméter értékeit amelyekre a következő impropius integrál konvergens:

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx.$$

Mivel az impropius integrálnak két szinguláris pontja van (0 és $+\infty$) ezért két részre bontjuk például így:

$$\int_0^1 x^{\alpha-1} e^{-x} dx \quad \text{és} \quad \int_1^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx.$$

Mivel $1/ex^{\alpha-1} \leq x^{\alpha-1}e^{-x} \leq x^{\alpha-1}$ a $(0, 1)$ intervallumon ezért az első integrál akkor és csak akkor konvergens, ha $\int_0^1 \frac{dx}{x^{-\alpha+1}}$ integrál konvergens. Ez utóbbi pedig csak akkor konvergens, ha $1 - \alpha < 1$, azaz $\alpha > 0$.

A második integrál minden α -ra konvergens. Ezt a következő képpen látjuk be: a L'Hospital szabály alkalmazásával igazolható, hogy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\alpha+1} e^{-x} = 0.$$

Ez azt jelenti hogy van olyan $K \geq 0$ szám amelyre

$$x^{\alpha+1} e^{-x} \leq K,$$

innen következik, hogy

$$x^{\alpha-1} e^{-x} \leq \frac{K}{x^2}.$$

Mivel $\int_1^{\infty} 1/x^2 dx$ konvergens, ezért $\int_1^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ is konvergens.

Összefoglalva, az adott integrál akkor és csak akkor konvergens, ha $\alpha > 0$.

10. Definíció.

A $\Gamma : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

függvényt Euler-féle gamma függvénynek nevezzük.

Az Euler-féle gamma függvény a faktoriális függvény meghosszabbítása a pozitív számok halmazára.

Ennek igazolása érdekében alkalmazzuk a parciális integrálást és azt kapjuk, hogy

$$\Gamma(\alpha) = [-x^{\alpha-1} e^{-x}]_0^{+\infty} + (\alpha - 1) \int_0^{+\infty} x^{\alpha-2} e^{-x} dx$$

ha $\alpha > 1$ (mivel a jobboldalon levő integrál csak akkor konvergens, ha $\alpha > 1$). Innen az következik, hogy

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)\Gamma(\alpha - 1), \quad \alpha > 1.$$

Az eljárást megismételve n -szer ($n \geq 2$ természetes szám) kapjuk:

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)(\alpha - 2) \dots (\alpha - n)\Gamma(\alpha - n), \quad \alpha > n.$$

Ha $\alpha = n + 1$, akkor

$$\Gamma(n + 1) = n(n - 1)(n - 2) \dots (n + 1 - n)\Gamma(1)$$

egyenlőséghez jutunk. Mivel

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty x^0 e^{-x} dx = [e^{-x}]_0^\infty = 1,$$

ezért

$$\Gamma(n + 1) = n(n - 1)(n - 2) \dots 1 = n!.$$

Tehát a "gamma" függvény a természetes számok halmazán értelmezett faktoriális függvény meghosszabítása a pozitív számok halmazára. Még megjegyezzük, hogy $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$.

4.4. A béta függvény

Igazoljuk, hogy ha $a, b > 0$ akkor az

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx$$

improprius integrál konvergens.

Ha az $a \geq 1$ és $b \geq 1$ akkor az $f(x) = x^{a-1}(1-x)^{b-1}$ integrálható a $[0, 1]$ intervallumon, tehát az integrál értéke létezik és véges.

Ha $0 < a < 1$ akkor az $x = 0$, ha $0 < b < 1$ akkor az $x = 1$ az improprius integrál szinguláris pontja, ezért felbontjuk az integrált két integrál összegére:

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx.$$

Mivel az $f(x) = (1-x)^{b-1}$ a $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ intervallumon folytonos ezért $\exists c_1, c_2$ úgy hogy

$$c_1 x^{a-1} \leq x^{a-1}(1-x)^{b-1} \leq c_2 x^{a-1}, \quad x \in \left[0, \frac{1}{2}\right].$$

Innen az következik, hogy az első integrál akkor és csak akkor konvergens, ha $\int_0^{\frac{1}{2}} x^{a-1} dx$ konvergens.

Tanulmányozzuk ez utóbbi integrál konvergenciáját.

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x^{a-1} dx = \lim_{t \rightarrow 0+} \begin{cases} \frac{1}{a} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^a - t^a \right] & \text{ha } a \neq 0 \\ \left[\ln \frac{1}{2} - \ln \frac{1}{t} \right] & \text{ha } a = 0, \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{a} \left(\frac{1}{2}\right)^a & 0 < a < 1 \\ \infty & a \leq 0, \end{cases}$$

tehát az $\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$ az $a \in (0, 1)$ esetén konvergens.

Hasonló módon igazolható, hogy az $\int_{\frac{1}{2}}^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$, $b \in (0, 1)$ konvergens.

11. Definíció

Ha $a > 0$ és $b > 0$ akkor

$$B(a, b) := \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$$

függvényt az **Euler-féle béta** függvénynek nevezzük.

Tulajdonságai

1. Ha az integrálban az $x = 1 - t$ változó cserét elvégezzük, akkor

$$\begin{aligned} B(a, b) &= \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx = \int_1^0 (1-t)^{a-1}t^{b-1}(-1)dt = \\ &= \int_0^1 (1-t)^{a-1}t^{b-1}dt = B(b, a), \end{aligned}$$

vagyis

$$\boxed{B(a, b) = B(b, a), \quad \forall a, b > 0.}$$

2. Ha $b > 1$, akkor parciális integrálással a következőt kapjuk

$$\begin{aligned} B(a, b) &= \int_0^1 (1-x)^{b-1} \left(\frac{x^a}{a} \right)' dx = \\ &= \left[\frac{x^a(1-x)^{b-1}}{a} \right]_0^1 + \frac{b-1}{a} \int_0^1 x^a(1-x)^{b-2}dx = \\ &= \frac{b-1}{a} \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-2}dx - \frac{b-1}{a} \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx = \\ &= \frac{b-1}{a} B(a, b-1) - \frac{b-1}{a} B(a, b), \end{aligned}$$

ahonnan

$$\boxed{B(a, b) = \frac{b-1}{a+b-1} B(a, b-1).}$$

Ezt az összefüggést felhasználva az integráljel alatt csökkenteni tudjuk az $(1-x)$ hatványát mindaddig, amíg az $(1-x)$ kitevője pozitív marad.

Ha $b = n \in \mathbb{N}^*$ akkor

$$B(a, n) = \frac{n-1}{a+n-1} \cdot \frac{n-2}{a+n-2} \cdots \frac{1}{a+1} B(a, 1).$$

Mivel

$$B(a, 1) = \int_0^1 x^{a-1}dx = \frac{1}{a},$$

ezért

$$B(a, n) = B(n, a) = \frac{1 \cdot 2 \cdot (n-1)}{a(a+1) \dots (a+n-1)}.$$

Ha az $a = m \in \mathbb{N}^*$, akkor

$$B(m, n) = \frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!}.$$

3. Igazolni lehet, hogy

$$B(a, 1-a) = \int_0^1 \frac{y^{a-1}}{1+y} dy = \frac{\pi}{\sin a\pi}, \text{ ha } a \in (0, 1).$$

Innen $a = 1-a = \frac{1}{2}$ esetén

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \pi.$$

4.

$$B(a, b) = \int_0^1 \frac{y^{a-1}}{(1+y)^{a+b}} dy.$$

Valóban ha a béta függvény definíciójában elvégezzük az $x = \frac{y}{1+y}$ változócserét, akkor $dx = \frac{1}{(1+y)^2}$, ha $x_1 = 0$ akkor $y_1 = 0$, ha $x_2 \rightarrow 1$ akkor $y_2 \rightarrow +\infty$ és

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx = \int_0^{+\infty} \left(\frac{y}{1+y}\right)^{b-1} \frac{1}{(1+y)^2} dy = \int_0^1 \frac{y^{a-1}}{(1+y)^{a+b}} dy.$$

5. **A gamma függvény és a béta függvény közötti kapcsolat.**

A gamma függvény definíciójában megadott integrálban végezzük el az $x = ty$, $t > 0$ változócserét. Ekkor $dx = t dy$ és az integrálási határok változatlanok maradnak, így

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-x} dx = \int_0^{\infty} (ty)^{a-1} e^{-ty} t dy = t^a \int_0^{\infty} y^{a-1} \cdot e^{-ty} dy$$

összefüggéshez jutunk. Innen

$$(1) \quad \frac{\Gamma(a)}{t^a} = \int_0^{\infty} y^{a-1} e^{-ty} dy.$$

Ez utóbbi összefüggésben, ha a helyett $(a+b)$ -t írunk, akkor

$$(2) \quad \frac{\Gamma(a+b)}{(1+t)^{a+b}} = \int_0^{+\infty} y^{a+b-1} \cdot e^{-(1+t)y} dy,$$

összefüggéshez jutunk.

Ha mindkét oldalt megszorozzuk t^{a-1} -el és integrálunk t szerint 0-tól $+\infty$ akkor a következőt kapjuk:

$$(3) \quad \begin{aligned} \Gamma(a+b) \int_0^{+\infty} \frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}} dt &= \int_0^{\infty} t^{a-1} \left(\int_0^{+\infty} y^{a+b-1} \cdot e^{-(1+t)y} dy \right) dt = \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^{+\infty} t^{a-1} y^{a+b-1} \cdot e^{-(1+t)y} dy dt. \end{aligned}$$

A baloldalon szereplő integrál a 4. tulajdonság alapján épp $B(a, b)$.

A jobb oldalon szereplő integrál egy kettős integrál, amelynek kiszámítása a Fubini tétel értelmében úgy is történhet, hogy felcseréljük az integrálás sorrendjét azaz előbb t szerint integrálunk, majd utána y szerint. Az (1) összefüggést figyelembe véve:

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} t^{a-1} \left(\int_0^{+\infty} y^{a+b-1} \cdot e^{-(1+t)y} dy \right) dt = \\ &= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} t^{a-1} y^{a+b-1} \cdot e^{-(1+t)y} dt \right) dy = \\ &= \int_0^{+\infty} \left(y^{a+b-1} \cdot e^{-y} \int_0^{+\infty} t^{a-1} \cdot e^{-ty} dt \right) dy = \\ &= \int_0^{+\infty} y^{a+b-1} \cdot e^{-y} \cdot \frac{\Gamma(a)}{y^a} dy = \Gamma(a) \int_0^{+\infty} y^{b-1} \cdot e^{-y} dy = \Gamma(a)\Gamma(b). \end{aligned}$$

Tehát a (3) összefüggés egyenértékű a

$$\Gamma(a+b)B(a, b) = \Gamma(a)\Gamma(b)$$

összefüggéssel.

Innen

$$B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \quad a, b > 0.$$

6. Ha $b = 1 - a = \frac{1}{2}$ akkor felhasználva a 3-as tulajdonságot innen kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \Gamma(1), \text{ azaz} \\ \left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 &= \pi, \text{ ahonnan} \\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

Figyelembe véve a Γ definícióját ez azt jelenti, hogy

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-y}}{\sqrt{y}} dy = \sqrt{\pi}.$$

A fenti integrálban végezzük el az $y = x^2$ változócsere

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-y}}{\sqrt{y}} dy = \int_0^{+\infty} \frac{-x^2}{x} \cdot 2x dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

Következésképpen

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

4.5. Összefoglaló feladatok

Számítsuk ki a következő improprius integrálokat:

I.

$$1. \int_{-\infty}^0 \frac{1}{t^2 + 4} dt$$

$$2. \int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \frac{1}{t^2} \cos \frac{1}{t} dt$$

$$3. \int_0^{+\infty} \cos 2t dt$$

$$4. \int_{-\infty}^0 e^t \cos t dt$$

$$5. \int_0^{+\infty} \frac{t}{t^2 + 1} dt$$

$$6. \int_{-\infty}^0 \frac{t^2}{(t^3 + 1)^2} dt$$

$$7. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4t^2 + 4t + 1} dt$$

$$8. \int_{-\infty}^{\infty} t e^{-t^2} dt$$

$$9. \int_2^{+\infty} \frac{dt}{t \ln^2 t}$$

$$10. \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} t}{t^2 + 1} dt$$

$$11. \int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^3 + 1}$$

$$12. \int_2^{+\infty} \frac{dt}{(t^2 - 1)^2}$$

$$13. \int_0^{\infty} \frac{t}{\sqrt{t^5 + 1}} dt$$

$$14. \int_{-1}^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + \sqrt[3]{t^4 + 1}}$$

II.

$$1. \int_{-2}^0 \frac{dt}{\sqrt{4 - t^2}}$$

$$2. \int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt[5]{t}}$$

$$3. \int_{-2}^0 \frac{dt}{\sqrt{t + 2}}$$

$$4. \int_{-1}^0 \frac{\arccos t}{\sqrt{1 - t^2}} dt$$

$$5. \int_1^2 \frac{1}{t \ln t} dt$$

$$6. \int_0^{\frac{\pi}{2}} t g t dt$$

$$7. \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{t \ln^2 t}$$

$$8. \int_0^1 \frac{dt}{t \ln^2 t}$$

$$9. \int_0^3 \frac{dt}{(t - 1)^2}$$

$$10. \int_0^1 \frac{dt}{t^3 - 5t^2}$$

Bibliográfia

1. Andás Szilárd, Csapó Hajnalka, Lukács Andor, Matematika a XII. osztály számára Status Kiadó, Csíkszereda, 2002.
2. Andrew Browder, Mathematical analysis, Springer, 1996.
3. Balázs Márton, Matematikai analízis Erdélyi Tankönyvtanács, Kolozsvár, 2000.
4. Balázs Márton, Kolumbán József, Matematikai analízis Dacia Könyvkiadó, 1978.
5. Bárczy Barnabás, Integrál számítás Bolyai-Könyvek Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 2000.
6. Császár Ákos, Valós Analízis I., II. Tankönyvkiadó, Budapest, 1983.
7. Denkinger Géza, Analízis Tankönyvkiadó, Budapest, 1987.
8. Leindler L., Schipp Ferenc, Analízis I. Tankönyvkiadó, Budapest, 1978.
9. Nicu Boboc, Ion Colojoara, Matematika tankönyv a XII. osztály számára Ed. Did. Ped., R.A., Bucuresti, 1978.
10. Schipp Ferenc, Analízis I., Analízis II. JPTE, Pécs, 1994.
11. Szász Pál, A differenciál és integrálszámítás elemei Közoktatási Kiadó, Budapest, 1951.

Függelék a csatolt fájlokban található.