

- a) Hány dolgozónak nincs egy nyelvvizsgálója sem?
 b) Hány dolgozónak van csak orosz nyelvvizsgálója?
 c) Hány dolgozónak van csak német és orosz nyelvvizsgálója?

1.39. Valaki azt állította, hogy a 100 főből álló évfolyam fele leány, a kollégisták száma 30, az igazolt sportolók száma 23. A sportoló leányok száma 20, a sportoló kollégistáké 10, a kollégista leányoké 8, végül a sportoló kollégista leányok száma 5. Mutassa meg, hogy a közölt adatok között ellentmondás van!

1.40. Mutassa meg, hogy bármely félkör kerületén ugyanannyi pont van, mint az tmérőjén!

Vektorok lineáris kombinációja

2.1. A kocka egy csúcsából kiinduló három élvektor \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} . Fejezze ki ezek segítségével az ebbe a csúcsba érkező lapátlóvektorokat és az ebbe a csúcsba érkező testátlóvektort!

2.2. Legyen adott az $ABCD$ paralelogramma és O egy tetszőleges pont. Bizonyítsa be, hogy

$$\vec{OA} + \vec{OC} = \vec{OB} + \vec{OD}!$$

2.3. Az $ABCD$ paralelogramma csúcsainak a helyvektorai rendre \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} , \mathbf{d} . Fejezze ki \mathbf{d} -t az \mathbf{a} , \mathbf{b} és \mathbf{c} segítségével!

2.4. Egy paralelepipedon egyik csúcsából kiinduló lapátlóvektorok \mathbf{x} , \mathbf{y} , \mathbf{z} . Írja fel ezek segítségével a velük azonos csúcsból induló \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} élvektorokat!

2.5. Egy szabályos hatszög alapú hasáb alaplapjainak középpontjából az alap két szomszédos csúcsához az \mathbf{x} és \mathbf{y} , a fedőlap középpontjához pedig a \mathbf{z} vezet. Írja fel a hasáb többi csúcsának a helyvektorait \mathbf{x} , \mathbf{y} és \mathbf{z} segítségével!

2.6. Legyen $\mathbf{v}_1 = 3\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$, $\mathbf{v}_2 = -\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$, $\mathbf{v}_3 = 2\mathbf{a} - 4\mathbf{b}$. Fejezze ki \mathbf{a} -val és \mathbf{b} -vel a $\mathbf{w}_1 = 3\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3$ és a $\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - 2\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_3$ vektorokat!

2.7. Legyen $\mathbf{v} = 2\mathbf{a} + \mathbf{b}$ és $\mathbf{w} = \mathbf{a} + 2\mathbf{b}$. Fejezze ki a következő vektorokat a \mathbf{v} és \mathbf{w} vektorokkal:

a) $3\mathbf{a} - 4\mathbf{b}$;

b) $5\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$;

c) $-\mathbf{a} + \frac{1}{10}\mathbf{b}$.

2.8. Az ABC háromszög súlyvonalai az AA_1 , BB_1 és CC_1 egyenesek, súlypontja az S pont, és a tér egy tetszőleges pontja P . Fejezze ki a

a) \vec{PS} ;

c) $\vec{PA_1}$;

b) \vec{PC} ;

d) \vec{PS} vektorokat a $\vec{PA} = \mathbf{a}$, $\vec{PB}_1 = \mathbf{b}$, $\vec{PC}_1 = \mathbf{c}$ vektorokkal!

2.10. Legyenek A, B, C a tér tetszőleges pontjai. A bárhol választott P pontot tükrözze A -ra, a tükröképet B -re, az így kapott pontot C -re, az így nyert pontot ismét A -ra, majd hasonlóan folytatva az eljárást tükrözzön B -re és C -re! Bizonyítsa be, hogy a hatodik tükrökép azonos P -vel!

2.11. Az A pont helyvektora \mathbf{a} , a B ponté \mathbf{b} . Határozza meg az AB szakasz negyedelő pontjainak helyvektorait!

2.12. A 2 egységnyi élhosszúságú kockát úgy helyezzük el a koordináta-rendszerben, hogy az origó a kocka egyik csúcsára illeszkedik, a tengelyek pozitív fele pedig egy-egy élt tartalmaz. Adja meg a kocka csúcsainak a koordinátáit!

2.13. Az ABC háromszög két csúcspontja $A(2; -2; 1)$, $B(6; -3; 1)$, súlypontja $S(3; -2; 1)$. Határozza meg a C csúcspont koordinátáit!

2.14. Egy szabályos hatszög középpontja $K(4; 1; 4)$, két szomszédos csúcsa $A(3; 1; 5)$ és $B(3; 2; 4)$. Adja meg a többi négy csúc koordinátáit!

2.15. Az $ABCD$ paralelogramma csúcsai $A(3; -2; 5)$, $B(0; 1; 0)$, $C(-5; 2; 7)$. Számítsa ki a D csúcs koordinátáit!

2.16. Egy paralelepipedon egyik csúcsa az origó, az ebből kiinduló élek végpontjai az $A(3; 6; -4)$, $B(-4; 7; 0)$, $C(9; 1; -3)$ pontok. Számítsa ki a többi négy csúcs koordinátáit!

2.17. Legyen az $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ paralelepipedon $ABCD$ lapjának középpontja E , a $BC B_1 C_1$ lapjának középpontja F , a BD_1 testátlójának felezőpontja G és a D_1 -hez közelebb fekvő negyedelőpontja H , végül a $C_1 D_1$ élének felezőpontja K . Ha $\vec{AB} = \mathbf{a}(4; 2; -3)$, $\vec{AD} = \mathbf{b}(5; 6; -2)$ és $\vec{AA_1} = \mathbf{c}(1; 4; -3)$, fejezze ki a következő vektorokat \mathbf{a} , \mathbf{b} és \mathbf{c} segítségével és számítsa ki koordinátáikat is!

a) \vec{AC} ; b) $\vec{AC_1}$; c) \vec{AB} ; d) $\vec{AD_1}$;
e) \vec{AG} ; f) \vec{AF} ; g) \vec{AH} ; h) \vec{AK} ;
i) \vec{FG} ; j) \vec{FK} ; k) \vec{FH} ; l) \vec{HK} .

2.18. Döntse el, párhuzamosak-e a következő vektorpárok:

- a) $\mathbf{a}(-3; 4; 7)$, $\mathbf{b}(2; 5; 1)$;
b) $\mathbf{c}(12; 9; 15)$, $\mathbf{d}(8; 6; 10)$;
c) $\mathbf{e}(7; -4; 2)$, $\mathbf{f}(0; 0; 0)$.

2.19. Döntse el, hogy az alábbi pontthármasok egy egyenesen vannak-e:

2.20. Számítsa ki a $P(3; -4; 8)$ pontnak az $A(3; 7; -2)$ pontra vett tükröképe koordinátáit!

2.21. Adottak az $\mathbf{a}(3; -2; 5)$, $\mathbf{b}(-4; 2; 0)$, $\mathbf{c}(-2; 0; 5)$ vektorok. Írja fel a $\mathbf{v}_1 = \mathbf{a} + 2\mathbf{b} - \mathbf{c}$, $\mathbf{v}_2 = 3\mathbf{a} - \frac{1}{2}\mathbf{b} + 2\mathbf{c}$, $\mathbf{v}_3 = \pi\mathbf{a} + \sqrt{5}\mathbf{b} + \mathbf{c}$ vektorok koordinátáit!

2.22. Bontsa fel a $\mathbf{v}(13; 56)$ vektort az $\mathbf{a}(2; 7)$ és $\mathbf{b}(-3; 0)$ vektorokkal párhuzamos összetevőkre!

2.23. Bontsa fel a $\mathbf{d}(31; -37; 19)$ vektort az $\mathbf{a}(-8; 7; 1)$, $\mathbf{b}(0; 3; 2)$ és $\mathbf{c}(1; -1; 4)$ irányú összetevőkre!

2.24. Számítsa ki az alábbi vektorok hosszát:

$$\mathbf{a}(8; -14; -8), \quad \mathbf{b}\left(\frac{5}{31}; -\frac{30}{31}; \frac{6}{31}\right), \quad \mathbf{c}(4; -9; 10).$$

2.25. Adja meg az alábbi vektorok irányába mutató egységvektorokat:

$$\mathbf{a}(4; -12; 3), \quad \mathbf{b}(0; 0; -7), \quad \mathbf{c}(-1; 4; 8), \quad \mathbf{d}(1; 2; -3), \quad \mathbf{v}(-2; 2; 1).$$

Skaláris szorzat

2.26. Az ABC szabályos háromszög oldalhossza 2 egység. Számítsa ki az $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ szorzat értékét!

2.27. A szögek kiszámítása nélkül döntse el, hogy az alábbi vektorpárok hegyes-, derék- vagy tompaszöglet zárnak-e be:

- a) $(-3; 2; 0)$, $(4, 1, 5)$; b) $(1; 1; 9)$, $(2; 1; 3)$;
c) $(1; 1; 1)$, $(-10; 7; 3)$; d) $(5; -3; 4)$, $(1; -1; 2)$.

2.28. Adottak az $\mathbf{a}(3; -6; 1)$ és $\mathbf{b}(12; 4; z)$ vektorok. Határozza meg z értékét úgy, hogy \mathbf{a} és \mathbf{b} merőlegesek legyenek egymásra!

2.29. Hogyan kell megválasztani p értékét, hogy az $\mathbf{a} + p\mathbf{b}$ vektor merőleges legyen a \mathbf{b} vektorra?

2.30. Hogyan kell megválasztani az \mathbf{a} és \mathbf{b} vektorokat, hogy bármely p és q esetén a $p\mathbf{a} + q\mathbf{b}$ vektor merőleges legyen a $q\mathbf{a} - p\mathbf{b}$ vektorra?

2.31. Legyen \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} három tetszőleges vektor. Megválasztható-e p és q úgy, hogy az \mathbf{a} vektor merőleges legyen a $p\mathbf{b} - q\mathbf{c}$ vektorra?

kát feszítenek ki!

2.33. Mekkora szögeket zár be a $\mathbf{v}(4; -1; 8)$ vektor a koordinátatengelyek pozitív irányával?

2.34. Van-e olyan vektor, amely az x, y, z koordinátatengelyek pozitív irányával a következő szögeket zárja be?

- a) $45^\circ, 60^\circ, 120^\circ$; b) $45^\circ, 135^\circ, 60^\circ$.

2.35. Számítsa ki a következő vektorpárok szögét:

- a) $\mathbf{a}(7; -1; 6), \mathbf{b}(2; 20; 1)$;
b) $\mathbf{c}(3; 6; -2), \mathbf{d}(5; 4; -20)$;
c) $\mathbf{e}(-1; 4; 7), \mathbf{f}(5; -2; 0)$;
d) $\mathbf{g} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}, \mathbf{h} = 5\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$;
e) $\mathbf{v}_1 = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}, \mathbf{v}_2 = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

2.36. Mutassa meg, hogy az $\mathbf{A}(3; -8; -2), \mathbf{B}(1; 6; -2), \mathbf{C}(-5; -2; 8)$ csúspontú háromszög szabályos!

2.37. Az $\mathbf{A}_1(-6; 5; 5), \mathbf{B}_1(-3; -1; 3), \mathbf{C}_1(5; 4; 0); \mathbf{A}_2(6; -5; -2), \mathbf{B}_2(4; -2; 3), \mathbf{C}_2(6; 4; 0)$ és $\mathbf{A}_3(-2; 7; 4), \mathbf{B}_3(2; 4; -1), \mathbf{C}_3(3; 0; 2)$ csúspontú háromszögek közül melyik hegyes-, derék- vagy tompaszögű?

2.38. Határozza meg az $\mathbf{A}(1; 5; 6), \mathbf{B}(-2; -1; 0), \mathbf{C}(2; 2; 1)$ csúspontú háromszög belső szögeit!

2.39. Számítsa ki az $\mathbf{A}(1; 5; 6), \mathbf{B}(-2; -4; 0), \mathbf{C}(4; 2; 2)$ csúspontú háromszögben az \mathbf{A} csúspontból induló súlyvonalnak az \mathbf{AB} oldallal bezárt szögét!

2.40. Számítsa ki az $\mathbf{A}(19; -6; 3), \mathbf{B}(5; 4; -1), \mathbf{C}(3; 2; -5), \mathbf{D}(17; -8; -1)$ csúspontú paralelogramma átlóinak hajlásszögét és \mathbf{M} metszéspontjának koordinátáit!

2.41. Egy háromszög csúspontjainak a koordinátái: $\mathbf{A}(7; -2; 1), \mathbf{B}(-2; -5; -8), \mathbf{C}(4; 7; 10)$. Legyenek az \mathbf{A}_1 és \mathbf{A}_2 pontok a \mathbf{CB} oldal harmadoló pontjai, \mathbf{F} pedig a \mathbf{CB} oldal felezőpontja. Egyenlő szárú-e az $\mathbf{AA}_1\mathbf{A}_2$ háromszög? Mekkora az \mathbf{AFA}_2 szög?

2.42. Az \mathbf{ABC} háromszög csúcsainak koordinátái: $\mathbf{A}(-3; 4; 0), \mathbf{B}(-9; 11; 42), \mathbf{C}(1; 2; 4)$. Mekkora a háromszög kerülete? Mekkora a háromszög \mathbf{A} csúcsánál fekvő szöge?

$\mathbf{C}(-2; -4; 0)$. Legyen \mathbf{A}_1 a \mathbf{CD} oldal negyedpontja, a \mathbf{C} csúspont negyedpontja a \mathbf{CD} oldal negyedpontja. Határozza meg az $\mathbf{AA}_1\mathbf{B}$ háromszög tompaszögű-e az $\mathbf{AA}_1\mathbf{B}$ háromszög?

2.44. Határozza meg az $\mathbf{a}(2; -5; 1)$ vektornak a $\mathbf{b}(3; 0; 4)$ vektor egyenesére eső merőleges vetületének a hosszát!

2.45. Adott négy pont: $\mathbf{A}(1; -2; 3), \mathbf{B}(-4; 2; 1), \mathbf{C}(3; 2; 1), \mathbf{D}(-4; -2; 5)$. Határozza meg az $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ vektornak a $\overrightarrow{\mathbf{CD}}$ vektorra eső vetületi vektorát!

2.46. Az adott \mathbf{a} vektorhoz határozza meg mindazokat a \mathbf{b} vektorokat, amelyeknek az \mathbf{a} -ra vett merőleges vetülete ugyanakkora, mint az \mathbf{a} -nak a \mathbf{b} -re vett merőleges vetülete! ($\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$).

2.47. Bontsa fel az $\mathbf{a}(3; -6; 9)$ vektort a $\mathbf{b}(2; -2; 1)$ vektorral párhuzamos \mathbf{p} , és a \mathbf{b} -re merőleges \mathbf{m} összetevőre!

2.48. Számítsa ki az $\mathbf{A}(-1; 1; -3), \mathbf{B}(2; -2; 3), \mathbf{C}(4; 0; 0)$ csúspontú háromszög leghosszabb oldalához tartozó magassága \mathbf{T} talppontjának a koordinátáit!

2.49. Számítsa ki az $\mathbf{A}(4; 5; -12), \mathbf{B}(3; -4; 5), \mathbf{C}(-7; 14; 1)$ csúspontú háromszög \mathbf{A} csúcsából induló súlyvonal és a vele szemközti oldal \mathbf{F} metszéspontjának koordinátáit és a \mathbf{BCA} szöget!

2.50. Számítsa ki az $\mathbf{A}(2; -1; 1), \mathbf{B}(16; 1; 3), \mathbf{C}(6; -1; -2)$ csúspontú háromszög \mathbf{AC} oldalához tartozó magasság \mathbf{T} talppontjának a koordinátáit és a magasság hosszát!

2.51. Egy háromszög csúspontjainak a koordinátái: $\mathbf{A}(1; -3; 4), \mathbf{B}(5; 1; -2), \mathbf{C}(6; -4; 1)$. Számítsa ki a \mathbf{C} csúspontból induló magasság \mathbf{T} talppontjának az \mathbf{AB} oldal \mathbf{F} felezőpontjától mért távolságát!

2.52. Legyen az $\mathbf{A}(-1; 0; 2), \mathbf{B}(3; 7; -2), \mathbf{C}(1; -1; 0)$ csúspontú háromszög súlypontja \mathbf{S} , az \mathbf{AB} oldalhoz tartozó magasságának talppontja \mathbf{T} . Számítsa ki az \mathbf{ST} szakasz hosszát!

Vektoriális szorzat

2.53. Végezze el a kijelölt műveleteket a következő kifejezésekben:

- a) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} - 2\mathbf{b})$;
b) $(3\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times (\mathbf{b} + 3\mathbf{a})$;
c) $(\mathbf{a} + 2\mathbf{b}) \times (2\mathbf{a} + \mathbf{b}) + (\mathbf{a} - 2\mathbf{b}) \times (2\mathbf{a} - \mathbf{b})$.

2.54. Adottak az $\mathbf{a}(2; -3; 1), \mathbf{b}(4; 2; -1), \mathbf{c}(1; 0; -3)$ vektorok. Számítsa ki a $\mathbf{v} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ vektor koordinátáit!

segítségével a csúcsból kiinduló harmadik élvektort!

2.56. Egy kockát kifeszítő három vektor közül kettőt ismerünk: $\mathbf{a}(6; 2; -3)$, $\mathbf{b}(-3; 6; -2)$. Határozza meg a harmadik vektort!

2.57. Egy paralelepipedon egyik csúsa az origó, ebből kiinduló két élvektora $\mathbf{a}(-1; 0; 2)$, $\mathbf{b}(1; 1; 0)$, a harmadik él merőleges az \mathbf{a} és \mathbf{b} síkjára és hossza 9 egység. Számítsa ki a feltételeknek eleget tevő egyik paralelepipedon csúcsainak a koordinátáit!

2.58. Egy téglatest egyik csúsa az origó, az innen kiinduló testátíróvektora $\mathbf{d}(9; 5; 5)$, két élvektora $\mathbf{a}(4; -3; 1)$ és $\mathbf{b}(0; 2; 6)$. Adj meg a harmadik élvektort!

2.59. Adj meg olyan \mathbf{x} vektort, amely merőleges az $\mathbf{a}(2; -3; 1)$ és $\mathbf{b}(1; -2; 3)$ vektorra és a $\mathbf{c}(1; 2; -7)$ vektorral vett skaláris szorzata $\mathbf{cx} = 10$.

2.60. Mekkora szöget zárnak be egymással az $ABCD$ tetraéder ABC és ACD lapsíkjai, ha a csúcsok koordinátái: $A(2; 3; 1)$, $B(4; 1; -2)$, $C(6; 3; 7)$, $D(-5; -4; 8)$?

2.61. Számítsa ki annak a paralelogrammának a területét, amelyet az $\mathbf{a}(-9; 0; 9)$ és $\mathbf{b}(7; 2; -5)$ vektorok feszítenek ki!

2.62. Számítsa ki az ABC háromszög területét, ha

- a) $A(0; 0; 0)$, $B(-1; 4; 7)$, $C(5; 2; 1)$;
 b) $A(1; 0; 2)$, $B(4; 3; 8)$, $C(0; -4; 6)$;
 c) $A(4; -1; -3)$, $B(3; 1; -2)$, $C(1; 5; 0)$;
 d) $A(0; 2; 3)$, $B(1; 0; 2)$, $C(3; -1; 0)$.

2.63. Bizonyítsa be, hogy az $A(1; -1)$, $B(5; 1)$, $C(7; 7)$, $D(3; 5)$ csúcspontú négyszög paralelogramma, és számítsa ki a területét!

2.64. Ha az \mathbf{a} és \mathbf{b} vektorok által kifeszített paralelogramma területe t , akkor mekkora a $2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$ és a $4\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$ vektorok által kifeszített paralelogramma t_1 területe?

2.65. Számítsa ki az $A(1; -1; 2)$, $B(5; -6; 2)$, $C(1; 3; -1)$ csúcspontú háromszög B csúcsához tartozó magasságának a hosszát!

2.66. Az ABC háromszög három oldalfelező pontja: $A_1(2; 3; 1)$, $B_1(-2; -1; 2)$, $C_1(-1; 0; 3)$. Számítsa ki az ABC háromszög kerületét és területét!

2.67. Az $A(2; 1; -3)$, $B(1; 0; 2)$, $C(6; 2; -1)$ csúcspontú háromszöget vetítse

vetületi háromszög területét!

2.68. Bizonyítsa be, hogy tetszőleges \mathbf{a} és \mathbf{b} vektorra $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^2 + (\mathbf{ab})^2 = a^2 b^2$!

2.69. Bizonyítsa be, hogy ha $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = 0$, akkor $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{c} \times \mathbf{a}$!

Vegyvesszorzat

2.70. Döntse el, hogy az alábbi vektorhármások komplanárisak-e:

- a) $(2; 3; 1)$, $(1; -1; 3)$, $(1; 9; -11)$;
 b) $(3; -2; 1)$, $(2; 1; 2)$, $(3; -1; -2)$;
 c) $(2; -1; 2)$, $(1; 2; -3)$, $(3; -4; 7)$.

2.71. Állapítsa meg, hogy az $\mathbf{a} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -5\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = 6\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$ vektorok jobb- vagy balsodrású rendszert alkotnak-e.

2.72. Döntse el, hogy a következő pontnégyesek egy síkban vannak-e:

- a) $(1; 2; -1)$, $(0; 1; 5)$, $(-1; 2; 1)$, $(2; 1; 3)$;
 b) $(1; 2; 0)$, $(0; 1; 1)$, $(3; 5; -4)$, $(-4; -2; 6)$;
 c) $(1; 5; 4)$, $(-2; 1; -6)$, $(0; 2; -1)$, $(2; 3; 4)$!

2.73. Válassza meg z értékét úgy, hogy az $\mathbf{a}(4; -1; 2)$, $\mathbf{b}(1; 2; 3)$, $\mathbf{c}(3; 3; z)$ vektorok komplanárisak legyenek!

2.74. Van-e olyan, a $\mathbf{0}$ -tól különböző vektor, amely merőleges az $\mathbf{a}(4; 2; -1)$, $\mathbf{b}(1; 2; -2)$ és a $\mathbf{c}(5; -2; 4)$ vektorok mindegyikére? Ha van ilyen vektor, akkor egyet adjon is meg!

2.75. Egy síkon vannak-e az $A(-2; 2; -2)$, $B(-3; 2; 5)$, $C(2; -2; 2)$, $D(9; -6; -15)$ pontok? Számítsa ki az ABD háromszög területét!

2.76. Mekkora az $\mathbf{a}(2; 3; 4)$, $\mathbf{b}(2; 3; 1)$, $\mathbf{c}(1; 2; 3)$ vektorok által kifeszített paralelepipedon területe?

2.77. Mekkora az $ABCD$ tetraéder térfogata, ha csúcspontjai:

- a) $A(1; -2; 3)$, $B(-4; 2; 1)$, $C(3; 0; 2)$, $D(0; -2; 5)$;
 b) $A(3; -1; -1)$, $B(5; -2; 3)$, $C(4; 0; -2)$, $D(5; 0; 1)$.

2.78. Az $ABCD$ tetraéder térfogata 5 egység. Milyen D csúcs koordinátái, ha D az y tengelyen van és a többi csúcs koordinátái: $A(2; 1; -1)$, $B(3; 0; 1)$, $C(2; -1; 3)$?

$D(2; 8; 5)$. Számítsa ki a BCD lapoz tartozó testmagasság hosszát!

2.80. Egy tetraéder csúspontjai: $A(2; 3; 1)$, $B(4; 1; -2)$, $C(6; 3; 7)$, $D(-5; -4; 8)$. Számítsa ki a tetraéder D csúcsából húzható magasságának a hosszát!

2.81. Az \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} vektorok egy síkban vannak. Komplanárisak-e a $\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$, $\mathbf{v}_2 = 3\mathbf{b} - 4\mathbf{c}$, $\mathbf{v}_3 = 2\mathbf{a} + 5\mathbf{c}$ vektorok?

2.82. Az \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} vektorok nincsenek egy síkban. Egy síkban van-e a következő három vektor: $\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$, $\mathbf{v}_2 = 5\mathbf{b} - 4\mathbf{c}$, $\mathbf{v}_3 = \mathbf{c} - \mathbf{a}$?

2.83. Egy paralelepipedon egy csúcsából kiinduló lapátlói egy újabb paralelepipedont feszítenek ki. Hányszorosra ennek térfogata az eredeti paralelepipedon térfogatának?

2.84. A $\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{a} + 3\mathbf{b} + 4\mathbf{c}$, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c}$, $\mathbf{v}_3 = 2\mathbf{a} + 4\mathbf{b} - \mathbf{c}$ vektorok által kifeszített tetraéder V_1 térfogata hányszorosra az \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} vektorok által kifeszített tetraéder V térfogatának?

Az egyenes

2.85. Írja fel a P ponton áthaladó, \mathbf{v} irányvektorú egyenes egyenletrendszerét, ha

- $P(-1; 3; 7)$, $\mathbf{v}(-4; 2; 6)$;
- $P(0; -1; 2)$, $\mathbf{v}(1; 7; -9)$;
- $P(9; 8; -3)$, $\mathbf{v}(6; 0; 2)$;
- $P(1; -2; 5)$, $\mathbf{v}(4; 3; -2)$.

2.86. Írja fel a következő pontpárokat összekötő egyenesek egyenletrendszerét:

- $P(-2; 5; 6)$, $Q(7; -1; 3)$;
- $P(5; 1; 2)$, $Q(-5; 1; 3)$;
- $P(0; 0; 0)$, $Q(9; 11; -1)$;
- $P(1; 1; -2)$, $Q(3; -1; 0)$.

2.87. Egy egyenesre illeszkednek-e a következő pontok?

- $A(-2; 5; 3)$, $B(1; 2; 4)$, $C(3; -7; 7)$;
- $A(1; 2; 4)$, $B(-2; 5; 3)$, $C(10; -7; 7)$.

2.88. Írja fel annak az egyenesnek a vektoregyenletét, amely illeszkedik a $P(-3; 2; -1)$ pontra és párhuzamos az $x = 3 + 2t$, $y = 8 + t$, $z = 1 - 7t$ egyenessel!

2.89. Adja meg annak az egyenesnek az egyenletrendszerét, amely illeszkedik a $P(-1; 2; 0)$ pontra és merőleges az $x = -2 + 3t$, $y = 5 + t$, $z = 3$ és az $x = 8 + t$, $y = -t$, $z = 3t$ egyenesekre!

pontra, merőleges az $\frac{1-x}{2} = -\frac{y}{3} = z$ egyenesre és párhuzamos az $x + y = -z$ síkkal!

2.91. Határozza meg annak az egyenesnek az egyenletrendszerét, amely illeszkedik a $P(0; 5; 2)$ pontra és az $x = 1 - 3t$, $y = -2 + t$, $z = 2t$ egyenest merőlegesen metszi!

2.92. Írja fel annak az egyenesnek az egyenletrendszerét, amely illeszkedik a $P(3; 1; 1)$ pontra, az $x - 2y + 3z - 4 = 0$ síkra és merőleges az $x = 3 + 2t$, $y = 1 + t$, $z = -1$ egyenesre!

2.93. Mutassa meg, hogy a $3 - 3x = 6y = 4z + 8$ és az $x = t$, $y = 5 + t$, $z = 16 + 5t$ egyenesek metszik egymást! Határozza meg annak az egyenesnek az egyenletrendszerét, amelynek mind a két adott egyenessel van közös pontja és merőleges mind a két adott egyenesre!

2.94. Adja meg a p paraméter értékét úgy, hogy az alábbi két egyenes messe egymást:

$$\frac{x+2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-1}{4}, \quad \frac{x-3}{p} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-7}{2}.$$

2.95. Határozza meg annak az egyenesnek a vektoregyenletét, amely illeszkedik a $P(1; -1; 5)$ pontra, párhuzamos az $x + 3y - z = 4$ síkkal és merőleges a $\frac{2x-1}{4} =$

$$= 1 + y = \frac{z}{4} \text{ egyenesre!}$$

2.96. Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely illeszkedik a $2x - y + 5 = 0$ síkra, ennek $P(2; 9; 1)$ pontjára és merőleges az $x = 1 + t$, $y = 1 - t$, $z = 2 + 3t$ egyenesre!

2.97. Írja fel az

$$\frac{x+9}{-5} = \frac{y+2}{3} = z-4, \quad x-3 = \frac{y-2}{5} = \frac{z+4}{-3}$$

metsző egyenesek szögfelezőinek az egyenletrendszerét!

2.98. Határozza meg az alábbi síkpárok metszésvonalának az egyenletrendszerét:

- $2x + 5y - 3z + 8 = 0$, $x - 2y + z - 5 = 0$;
- $x - 2y + 3z - 4 = 0$, $3x + 2y - 5z - 4 = 0$;
- $2x - y + 3z - 6 = 0$, $x + y - 2z - 9 = 0$.

2.99. Írja fel a $P(1; 3; 2)$ pontra illeszkedő és a $-2x + y + 3z = 1$ és $x - y - z + 2 = 0$ síkok metszésvonalával párhuzamos egyenes vektoregyenletét!

2.100. Határozza meg annak az egyenesnek az egyenletrendszerét, amely párhuzamos a $2x - y + 6z = 7$ és $x + y - z - 4 = 0$ síkokkal és illeszkedik a $P(-2; 1; 2)$ pontra. Igaz-e, hogy ez az egyenes az első síkra illeszkedik?

2.101. Határozza meg a $2x - 3y - 6z = 32$ sík és a $2(x - 2) = -2y - 2 = z + 3$ egyenes közös pontjában a síkra merőlegesen állított egyenes vektoregyenletét!

2.102. Az S sík egyenlete $3x + 6y - z = 8$. Az S sík két pontja $A(1; 1; 1)$ és $B(4; -1; -2)$. Írja fel annak az egyenesnek az egyenletrendszerét, amely illeszkedik a S síkra, az A pontra és merőleges az AB szakaszra!

2.103. Írja fel az $x = -7 + 3t$, $y = 4 - 2t$, $z = 4 + 3t$ és az $x = 1 + t$, $y = -8 + 2t$, $z = -12 + t$ egyenesek normáltranszverzálisának az egyenletrendszerét! Számítsa ki a két kitérő egyenes távolságát!

2.104. Határozza meg annak az egyenesnek az egyenletrendszerét, amely párhuzamos az $x - y = 1$ síkkal, merőleges az $\frac{1 - 2x}{4} = y = \frac{z + 1}{3}$ egyenesre és illeszkedik a $P(2; 1; 1)$ pontra! Mekkora a kapott egyenes és a sík távolsága?

2.105. Adott három pont: $A(2; 3; -1)$, $B(-2; 1; -1)$, $C(4; -1; -3)$. Írja fel az A , B , C pontoktól egyenlő távolságra levő pontok halmazának az egyenletét!

A sík

2.106. Adott a sík n normálvektora és P pontja. Írja fel a sík egyenletét!

- a) $n(-3; 2; 11)$, $P(9; 1; 0)$; b) $n(9; 1; 0)$, $P(-3; 2; 11)$;
c) $n(1; 0; 1)$, $P(2; 7; 5)$; d) $n(3; 2; 1)$, $P(0; 0; 0)$;
e) $n(0; 1; 0)$, $P(5; 2; -3)$.

2.107. Írja fel annak a síknak az egyenletét, amely illeszkedik a $P(1; -2; 3)$ pontra és párhuzamos a $3x - 4y + 5z - 3 = 0$ síkkal!

2.108. Írja fel annak a síknak az egyenletét, amely illeszkedik az alábbi ponthármassokra:

- a) $A(2; 3; 1)$, $B(-1; 2; 5)$, $C(2; -1; 0)$;
b) $A(3; -1; 2)$, $B(4; -1; -1)$, $C(2; 0; 2)$;
c) $A(4; -6; 7)$, $B(-6; 4; -3)$, $C(-1; 8; 8)$;
d) $A(2; -6; -5)$, $B(5; 10; 2)$, $C(-7; 0; 10)$;
e) $A(1; 5; 4)$, $B(-2; 1; -6)$, $C(0; 2; -1)$.

2.109. Egy síkra illeszkedik-e a következő négy pont?
 $A(2; 3; 4)$, $B(0; 2; -1)$, $C(-2; 1; -6)$, $D(1; 5; 4)$.

2.110. Írja fel annak a síknak az egyenletét, amely illeszkedik a $P(-3; 2; 5)$ pontra és az x tengelyre!

2.111. Írja fel a $P(2; -1; 3)$ pontra illeszkedő és a $v_1(1; -2; 4)$, $v_2(4; -3; 0)$ vektorokkal párhuzamos sík egyenletét!

2.112. Írja fel annak a síknak az egyenletét, amely illeszkedik az $A(3; 4; -3)$ pontra és párhuzamos az $a(3; 1; -1)$ és $b(-1; 2; -1)$ vektorokkal!

2.113. Írja fel annak a síknak az egyenletét, amely illeszkedik az $x = 2 + 3y = -1 + 2t$, $z = 3 - 2t$ és az $x = 1 + 3t$, $y = 2 + 2t$, $z = -3 - 2t$ párhuzamos egyenesekre!

2.114. Írja fel annak a síknak az egyenletét, amely illeszkedik az $A(2; -3; 1)$ és $B(3; -1; 2)$ pontokra és párhuzamos az $x = 2 + t$, $y = -2 - 3t$, $2z = 5t$ egyenessel!

2.115. Határozza meg annak a síknak az egyenletét, amely illeszkedik a $P(3; -2; 5)$ pontra és párhuzamos az $x = 1 - 2t$, $y - 1 = -2z$ és az $x = t$, $y = 1 + z = 2 - t$ egyenessel!

2.116. Határozza meg a $P(5; 2; 4)$ pontra és az $x = t + 3$, $y = -2t - 2$, $z =$ egyenesre illeszkedő sík egyenletét!

2.117. Adott két pont: $A(0; -1; 3)$ és $B(1; 3; 5)$. Írja fel az A ponton áthaladó és az AB egyenesre merőleges sík egyenletét!

2.118. Az $Ax + 3y - 5z + 1 = 0$ sík egyenletében hogyan kell az A értékét megválasztani, hogy a sík párhuzamos legyen az $x = 4t + 1$, $y = 3t - 2$, $z = t$ egyenessel?

2.119. Illeszkedik-e az $x = 1 + 2t$, $y = -3 - t$, $z = -2 + 5t$ egyenes $4x + y - z + 3 = 0$ síkra?

2.120. Írja fel annak a síknak az egyenletét, amely illeszkedik az $x = 1 + 3y = t$, $z = 1 - t$ egyenesre és merőleges az $5x - y = 0$ síkra!

2.121. Írja fel annak a síknak az egyenletét, amely merőleges az $x - 2y + 3z - 2 = 0$ síkra és illeszkedik a $P_1(-1; 2; 0)$ és $P_2(3; -2; 2)$ pontokra!

2.122. Írja fel annak a síknak az egyenletét, amely illeszkedik a $P(1; 1; -1)$ és $Q(2; -3; 1)$ pontokra és merőleges a $3x + y - z - 1 = 0$ síkra!

$y = 3 + 2t$, $z = -2 - t$ egyenesre és párhuzamos a $2x - y + z - 3 = 0$ és $x + 2y - z - 5 = 0$ síkok metszésvonalával!

2.135. Írja fel annak a síknak az egyenletét, amely illeszkedik a $P(-2; 1; 3)$ pontra és az $x - y + 3z - 8 = 0$ és $2x + y - z + 2 = 0$ síkok metszésvonalára!

2.136. Állapítsa meg annak a síknak az egyenletét, amely illeszkedik az $\frac{x-3}{2} = y = \frac{z+1}{4}$ egyenesre és párhuzamos az $x + 3 = \frac{y}{5} = z - 1$ egyenessel!

2.137. Mutassa meg, hogy az $x - 3y + 4z - 5 = 0$ sík merőleges az $y - x + z = 1$ síkra! Írja fel annak a síknak az egyenletét, amely merőleges az adott síkokra és illeszkedik a $P(2; 0; -5)$ pontra!

2.138. Határozza meg a $4x - 2y + 3z + 13 = 0$, $4y - 5x + 2z - 12 = 0$, $6x - 4y - 5z + 11 = 0$ síkok közös pontjának koordinátáit!

2.139. Van-e a következő négy síknak közös pontja:

$$5x - z + 3 = 0, 2x - y - 4z + 5 = 0, 3y + 2z - 1 = 0, 3x + 4y + 5z - 3 = 0?$$

2.140. Írja fel a $2x - 3y + z = 28$ és $2x - 3y + z = 0$ síkokkal párhuzamos, tőlük egyenlő távolságra levő sík egyenletét!

2.141. Elválasztja-e a $2x + 2y - z - 2 = 0$ sík az $A(2; 1; 1)$ és a $B(2; 1; 3)$ pontokat?

2.142. Írja fel az AB szakasz felezőmerőleges síkjának az egyenletét, ha $A(3; 5; -4)$, $B(1; -3; 2)$!

2.143. Határozza meg annak a síknak az egyenletét, amely a $4x + 2y - z + 5 = 0$ és $4x + 2y - z - 1 = 0$ párhuzamos síkoktól egyenlő távolságra van!

2.144. Írja fel annak a síknak az egyenletét, amely illeszkedik az $A(6; 0; 0)$ és $B(0; 4; 0)$ pontokra, továbbá a koordinátságokkal együtt 8 egység térfogatú tetraédert határol!

Egyenes és sík

2.145. Mely pontokban metszi az $x = 4 - 2t$, $y = 3 + 3t$, $z = 1 - t$ egyenes a koordinátságokat?

2.146. Adja meg a $P(-6; 6; -5)$ és $Q(12; -6; 1)$ pontokat összekötő egyenesnek a koordinátságokkal való metszéspontját!

2.124. Írja fel a $P(-1; 2; 3)$ pontra illeszkedő és az $x + 2y - 3z + 1 = 0$, $x + 3y - z + 6 = 0$ síkokra merőleges sík egyenletét!

2.125. Határozza meg annak a síknak az egyenletét, amely illeszkedik a $P(1; 4; 7)$ pontra és merőleges a $2x - y + z = 3$ és $x + y - 3z - 1 = 0$ egyenletű síkokra!

2.126. Mutassa meg, hogy a $3x - 9 = y - 8 = 3t$, $z = 3 + 4t$ és a $4 - x = \frac{9 - y}{2} = \frac{9 - z}{5}$ egyenes ugyanarra a síkra illeszkedik! Írja fel e sík egyenletét!

2.127. Írja fel az

$$\frac{x-3}{5} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{4} \quad \text{és} \quad \frac{x-8}{3} = y-1 = \frac{6-z}{2}$$

egyenesekre illeszkedő sík egyenletét!

2.128. Írja fel az $\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{6} = \frac{z-2}{4}$ és az $x = 2 + 2t$, $y = -1 - 3t$, $z = 1 + t$, egyenesekre illeszkedő sík egyenletét!

2.129. Mutassa meg, hogy az $x - 3 = 3(1 - y) = -(z + 1)$; $4 - x = 3y + 6 = z$ egyenesek és a $P(5; -1; -2)$ pont ugyanarra a síkra illeszkednek! Írja fel a sík egyenletét!

2.130. Írja fel annak a síknak az egyenletét, amely illeszkedik az $x + 1 = 3 - y = 4 - 2z$ egyenesre és párhuzamos az $A(-6; 7; 5)$ és $B(1; -5; -6)$ pontokat összekötő szakasszal!

2.131. Határozza meg a $P(1; 3; 1)$ pontra illeszkedő és az $x = 2t$, $y = -1$, $z = 3 - t$ és $x - 3 = y - 2 = -z$ egyenesekkel párhuzamos sík egyenletét!

2.132. Döntse el, hogy egy síkban van-e a következő három egyenes: $x = -5 + 3t$, $y = 3 - t$, $z = -1 - t$; $x = -6 - 3t$, $y = 3 + t$, $z = 1 + t$; $x = 1 - 6t$, $y = 2t$, $z = 2 + 2t$.

2.133. Írja fel annak a síknak az egyenletét, amely illeszkedik az $A(-3; 2; 1)$ pontra, párhuzamos az $x = 3 + 2t$, $y = t$, $z = -1 + 4t$ egyenessel és merőleges az $x - 2y + 5z - 3 = 0$ síkra!

2.134. Írja fel annak a síknak az egyenletét, amely illeszkedik az $x = 1 + 3t$,

$2x+3y+z=0$ síkot?

2.148. Határozza meg a $P_1(2; 3; -3)$, $P_2(3; 2; -2)$, $P_3(4; 5; -6)$ pontokra illeszkedő sík és a $\frac{4-x}{3} = \frac{y+3}{4} = \frac{4z+6}{5}$ egyenes D dőféspontjának a koordinátáit!

2.149. Egy háromszög csúcspontjai: $A(-2; 0; -1)$, $B(-1; -1; -1)$, $C(1; -5; 3)$. Állítson a háromszög A csúcsában a háromszög síkjára merőleges egyenest! Melyik pontban dőfi ez az egyenes az $x-y+z=0$ síkot?

2.150. Határozza meg az origót a $P(8; -2; -6)$ ponttal összekötő egyenesnek és a $3x-2y+6z+4=0$ síknak az M metszéspontját!

2.151. A p paraméter mely értékére lesz az $x=-2+3t$, $y=-2+pt$, $z=3-2t$ egyenes párhuzamos az $x-3y+6z+7=0$ síkkal?

2.152. Mekkora területű háromszöget metszenek ki a koordinátasíkok a $6x-10y+5z=30$ síkból?

2.153. Mekkora térfogatú derékszögű tetraédert metsz ki a $3x-4y+6z-12=0$ sík a koordinátasíkokból?

2.154. Adottak az $A=(0; -6; -3)$, $B(-4; 9; -6)$, $C(5; 9; 12)$, $P(7; 0; -7)$, $Q(1; 12; -7)$ és $R(-5; 6; 11)$ pontok. Metsze az ABC háromszög síkja a PQR háromszög síkját? Ha igen, írja fel a metszésvonal egyenletrendszerét!

2.155. Tükrözze a $P(-2; 3; 3)$ pontot az $x=3+4t$, $y=12+5t$, $z=-2+3t$ egyenesre! Határozza meg a tükrkép koordinátáit!

2.156. Tükrözze a $P(-1; 2; 3)$ pontot az $x+1=3y=3z$ egyenesre! Határozza meg a tükrkép koordinátáit!

2.157. Határozza meg a $P(3; 2; 1)$ pont $2x+y-5z+12=0$ síkra vett tükrképének a koordinátáit!

2.158. Tükrözze a $P(-3; 4; 7)$ pontot az $A(3; 8; 0)$, $B(-1; -1; -2)$, $C(5; -1; 10)$ pontok síkjára! Írja fel a tükrkép koordinátáit!

2.159. Tükrözze az $x-y-z+8=0$ síkot a $P(5; 8; 2)$ pontra! Írja fel a tükrkép egyenletét!

2.160. Adott a $-4x=2(y-1)=1-2z$ egyenes, az $x+2y-z=12$ sík, valamint a $P(3; 1; 5)$ pont. Tükrözze a P pontot az adott síkra! Írja fel a tükrképpontra illeszkedő, az adott egyenessel párhuzamos és az adott síkra merőleges sík egyenletét!

$A(-5; -2; 5)$, $B(3; 5; 0)$ és $C(-2; 1; 3)$. Határozza meg a tükrkép egyenletrendszerét!

2.162. Tükrözze az $x=1+2t$, $y=1-2t$, $z=1-t$ egyenest a $3x+3y=1$ síkra! Mekkora szöget zár be az adott egyenes a tükrképével?

2.163. Tükrözze a $5x-8y+3z-6=0$ síkot az $5x-8y+3z+4=0$ síkra és írja fel a tükrkép egyenletét!

2.164. Adja meg az $A(5; 2; -1)$ pont merőleges vetületét a $2x-y+3z=23$ síkon!

2.165. Vetítse merőlegesen az $A(1; -2; -1)$, $B(1; 0; -2)$ és $C(-2; 6; -6)$ pontok síkjára az $x-3=y+3=-6z-48$ egyenest! Írja fel a vetület egyenletrendszerét!

2.166. Adott az $x=4+t$, $y=1-2t$, $-z=t$ egyenes és a $2x-2z=-23-3y$ sík. Írja fel annak az egyenesnek az egyenletrendszerét, amely párhuzamos az adott egyenesnek az adott síkra eső merőleges vetületével és illeszkedik a $P(7; 1; 2)$ pontra. Az így kapott egyenes illeszkedik-e a $4x+6y-4z-26=0$ síkra?

2.167. Adott az $e_1: x=-2+4t$, $y=2t$, $z=-2+t$ és az $e_2: x=2-t$, $y=1+t$, $z=-1+2t$ egyenes. Írja fel annak az S síknak az egyenletét, amely tartalmazza az e_1 egyenest és párhuzamos az e_2 egyenessel! Vetítse az e_2 egyenest merőlegesen az S síkra! Határozza meg a vetület egyenletrendszerét!

2.168. Számítsa ki az alábbi egyenesek hajlásszögét:

- $2x-6=-2(y+2)=\sqrt{2}z$ és $2x+4=2y-6=\sqrt{2}(z+5)$;
- $x=-2+3t$, $y=0$, $z=3-t$ és $x=-1+2t$, $y=0$, $z=-3+t$;
- $x=4+t$, $y=5t$, $z=3-t$ és $x=17+2t$, $y=3t$, $z=9+17t$;
- $x=1+3t$, $y=2,5t$; $z=-1-3t$ és $x=t$, $y=-3+2t$, $z=-5$.

2.169. Határozza meg a következő sík és egyenes hajlásszögét:

- $x-y-z=1$ és $2x=1-4t$, $y=3$, $z=-2t$;
- $x+9y+4z=-7$ és $x=-3+4t$, $y=6$, $z=9t$;
- $x+2y+2z=3$ és $x=5-3t$, $y=4+6t$, $z=-2$;
- $2x+y-z=3$ és $x=5-t$, $-y=2t$, $z=3-t$.

2.170. Határozza meg a következő két-két sík hajlásszögét:

- $7x-3y+z-19=0$, $x+2y-z+4=0$;
- $x-y-z-1=0$, $2x+y-z-5=0$;
- $x+2y+2z-3=0$, $16x+12y-15z-1=0$;
- $x-2y+2z-8=0$, $x+z-6=0$.

- 2.171. Adott a $P(2; -1; 1)$ pont, az $e_1: \frac{x-2}{-2} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-1}{3}$ és az $e_2: x = -1, y = -3-5t, z = 4+4t$ egyenes. A P pont és az e_1 egyenes síkot határoz meg. Az e_2 egyenes ezzel a síkkal vagy az e_1 egyenessel zár be nagyobb szöget?
- 2.172. Mekkora távolságra van a $P(2; 4; -6)$ pont a $3x-6 = 2(y+1) = 9z$ egyenestől?
- 2.173. Mekkora az $x = 2+3t, y=t, z = 1+3t$ és az $x = -2+3t, y = 1+t, z = -4+3t$ párhuzamos egyenesek távolsága?
- 2.174. Mekkora távolságra van az $A(4; -3; 2)$ pont a $6x-y+18z = 19$ síktól?
- 2.175. Határozza meg az $x+2y-3z = 1$ sík és az $x = 1-7t, y=2t, z = 1-t$ egyenes távolságát!
- 2.176. Mekkora távolságra van egymástól az alábbi két párhuzamos sík: $2x-3y+6z-14 = 0, 4x-6y+12z+21 = 0$?
- 2.177. Számítsa ki az $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-5}{4}$ és $x = 7+3t, y = 2+2t, z = 1-2t$ egyenesek metszéspontjainak a $2x-16y-13z+31 = 0$ síktól mért távolságát!
- 2.178. Hogyan kell megválasztani A és B értékét, hogy a $2x-y+3z-1 = 0, x+2y-z+B = 0, x+Ay-6z+10 = 0$ síkoknak a) egy közös pontja legyen; b) egy egyenesre illeszkedjenek; c) három párhuzamos egyenesben messék egymást?
- 2.179. Határozza meg az $x+y-2z-1 = 0$ és az $x+y-2z+3 = 0$ síkoktól egyenlő távolságra fekvő sík egyenletét!
- 2.180. Az $x = -5+3t, y=2t, z = 1+t$ egyenesnek mely pontja van egyenlő távolságra az $A(2; -4; 7)$ és $B(0; -6; 5)$ pontoktól?
- 2.181. Adj meg egy olyan egyenes egyenletrendszerét, amely az $x-8y+4z = 9$ síktól 4 egységre, a $4x+20y-5z = 42$ síktól pedig 3 egységre van!
- 2.182. Írja fel annak a síknak az egyenletét, amely az $x+y-z+1 = 0$ síktól kétszer olyan távolságra van, mint az $x+y-z-1 = 0$ síktól és nem helyezkedik el közöttük!
- 2.183. Határozza meg a z tengelyen azt a pontot, amely egyenlő távolságra van a $12x+9y-20z-19 = 0$ és a $16x-12y+15z-9 = 0$ síkoktól!

nalán azt a pontot, amely egyenlő távolságra van az $A(1; 2; 1)$ és $B(2; 1; 1)$ pontoktól!

2.185. Írja fel annak a síknak az egyenletét, amely felezi az $x+2y-z-1 = 0$ és az $x+2y+z+1 = 0$ síkok hajlásszögét és illeszkedik a $P(1; 1; -1)$ pontra!

2.186. Határozza meg az $x=y=z$ és $x-1 = 0, y-2 = 0$ egyenesek távolságát!

2.187. Számítsa ki az $\frac{x-3}{2} = -\frac{y}{2} = -\frac{z+2}{-3}$ és $y-2 = z-4$ egyenesek távolságát!

2.188. Határozza meg a következő síkpárok metszésvonalainak a távolságát: $x+y-z-1 = 0$ és $2x+y-z-2 = 0$, illetve $x+2y-z-2 = 0$ és $x+2y+2z+4 = 0$.

2.189. Határozza meg az $x = -4+2t, y = -2+t, z = 2+3t$ és az $x = 4+2t, y = 1-5t, z = 12-4t$ egyenesek normáltranszverzálisának egyenletrendszerét!

2.190. Adott az e_1 egyenes az $E_1(2; 4; 5)$ pontjával és $v_1(-1; 3; 1)$ irányvektorával és az e_2 egyenes az $E_2(8; 9; 7)$ pontjával és $v_2(1; 3; 3)$ irányvektorával. Írja fel a két egyenes normáltranszverzálisának egyenletrendszerét, a normáltranszverzális és a két egyenes metszéspontjainak a koordinátáit és a metszéspontok távolságát!

2.191. Határozza meg a $2x+5y-3z+8 = 0$ és az $x-2y+z-5 = 0$ síkok metszésvonalának vektoregyenletét! Írja fel annak az egyenesnek a vektoregyenletét, amely párhuzamos az előbbi metszésvonallal és illeszkedik a $P(2; 1; 6)$ pontra. Állapítsa meg a két párhuzamos egyenes távolságát!

2.192. Egy tetraéder csúcspontjai: $A(-2; 1; 3), B(0; -4; 6), C(-5; -3; 5), D(15; -3; 3)$. Írja fel annak a síknak az egyenletét, amely párhuzamos a tetraéder ABC lapjával és illeszkedik a D csúcspontra! Mekkora a tetraéder D csúcsából kiinduló magassága?

2.193. Egy háromszög csúcspontjai: $A(1; -2; 0), B(-2; 4; 6), C(2; 0; 2)$. A háromszög BC oldalának felezőpontja F , az AB oldalához tartozó magasság talppontja T . Számítsa ki az FT távolságot és írja fel az FT egyenes vektoregyenletét!

2.194. Határozza meg annak a tetraédernek a térfogatát, amelyet a $3x+y-2z = 17$ és az $x+2y = 9$ síkok egységnyi hosszúságú normálvektorai és a síkok metszésvonalának egységnyi hosszúságú irányvektora feszít ki!

2.195. Mutassa meg, hogy az $x = 1-t, y = -4-4t, z = -3+t$ és $r(t) = (t+2)\mathbf{i} + (2t-1)\mathbf{j} + (2t-1)\mathbf{k}$ egyenesek egy síkban vannak! Vetítse merőlegesen

Mekkora szöget zár be az egyenes a vetületével?

2.196. Az $x + 3y + 4z - 9 = 0$; $y - 2 = 0$; $x + 4y + 5z - 11 = 0$; $y + 2z - 4 = 0$ síkok egy tetraédert határoznak meg. Számítsa ki a tetraéder térfogatát és felszínét!

2.197. Az $A(1; 0; 2)$, $B(-1; 2; 1)$, $C(3; 2; 0)$, $D(-2; 2; 1)$ pontok egy tetraéder csúcspontjai. Írja fel a tetraéder lapjainak egyenletét! Mekkora a tetraéder A csúcsából kiinduló magassága?

2.198. Mekkora kell a p paramétert megválasztani, hogy az $r_1(t) = (1-t)i + (2-t)j - (1+3t)k$ és az $r_2 = (-1+pt)i + \left(3 - \frac{1}{4}t\right)j + k$ egyenesek egy síkot határozzanak meg? Írja fel a sík egyenletét! Mekkora távolságra van ez a sík az origótól?

2.199. Határozza meg az $r(t) = (3t+1)i + (5t+1)j - (2t+1)k$ egyenesen azt a P pontot, amely a $2x - 2y + z - 6 = 0$ és a $4x - 4y + 2z + 24 = 0$ síkoktól egyenlő távolságra van! Mekkora ez a távolság?

2.200. Határozza meg az $x + 4y - 2z = 0$ és az $5x - y + 6z = 9$ síkokkal párhuzamos, a $P(1; -2; 3)$ pontra illeszkedő egyenes egyenletrendszerét! Bizonyítsa be, hogy ez az egyenes és az $x = 3t + 6$, $y = 2t - 14$, $z = t - \frac{19}{2}$ egyenes egy síkot határoznak meg! Írja fel a sík egyenletét! Mekkora távolságra van a P pont az első adott síktól?

Determinánsok

3.1. Számítsa ki a következő determinánsok értékét!

$$a) \quad D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & -2 \end{vmatrix};$$

$$b) \quad D = \begin{vmatrix} 3-i & 1 & 2 \\ 3 & 1-i & 2 \\ 3 & 1 & 2-i \end{vmatrix}, \text{ ahol } i^2 = -1;$$

$$c) \quad D = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}, \text{ ahol } i, j, k \text{ tetszőleges valós számok};$$

$$d) \quad D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \end{vmatrix}; \quad e) \quad D = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \end{vmatrix};$$

$$f) \quad D = \begin{vmatrix} -4 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 5 & 3 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & -2 & -1 & -2 \end{vmatrix}.$$

3.2. Igazolja, hogy

$$\begin{vmatrix} x & x+d & x+2d \\ y & y+d & y+2d \\ z & z+d & z+2d \end{vmatrix} = 0.$$

tű síkok által határolt test súlypontjának a koordinátái!

- 13.94.** Határozza meg az $x^2 + y^2 + z^2 = 64$, $z \geq 0$ egyenletű homogén félgömb
a) súlypontjának a koordinátáit;
b) az x , y , z tengelyekre és a súlyponton áthaladó tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékait!

a) súlypontjának a koordinátáit;

- 13.96.** Számítsa ki a következő improprius integrálok:

$$b) \int_0^\infty \int_0^\infty xye^{-x^2-y^2} dx dy;$$

$$c) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|-|y|} dx dy$$

$$q) \quad \mathbf{r}(t) = t^5 \mathbf{i} + (\sinh 3t) \mathbf{j} + \ln(t+1) \mathbf{k};$$

$$b) \quad \mathbf{r}(t) = 2^3 \mathbf{i} - (\cos 4t) \mathbf{j} + \sqrt{1 - tk};$$

$$b) \mathbf{r}(t) = 2^3 \mathbf{i} - (\cos 4t) \mathbf{j} + \sqrt{1 - tk} \mathbf{k};$$

$$c) \mathbf{r}(t) = \frac{1}{1+t} \mathbf{i} - (\operatorname{Arctg} 2t) \mathbf{j} + (2t+3)^4 \mathbf{k}.$$

$$\mathbf{r}(t) = 3^5 \mathbf{i} + [\ln(1+3t)] \mathbf{j} - \sqrt{1+t} \mathbf{k}$$

függvény paraméter szerinti n -edik deriváltját!

$$\mathbf{r}(t) = \frac{1}{t+1} \mathbf{i} + \frac{t+1}{t} \mathbf{j} + t^2 \mathbf{k}$$

(görbe $t_0 = 1$ paraméterértékhez tartozó pontjában az érintő irányú egységvektor!

Ebben a fejezetben a függvények – ha csak nem mondunk mást – a legtagabb értelmezési tartományukban tekintendők.

14.1. Határozza meg a következő függvények paraméter szerinti deriváltfüggvényét:

$$\mathbf{r}(t) = (t^2 \sin t)\mathbf{i} + 3e^{2t}\mathbf{j} + \operatorname{Arctg} \sqrt{t}\mathbf{k};$$

$$b) \mathbf{r}(t) = \frac{1+t}{1-t} \mathbf{i} + (\operatorname{tg} 5t) \mathbf{j} + \ln \sqrt{1+t^2} \mathbf{k};$$

$$e) \mathbf{r}(t) = \sqrt{t+t^3} \mathbf{i} + (t \operatorname{Arccsin} t) \mathbf{j} - \operatorname{sh} \frac{1+t^2}{1+t} \mathbf{k}.$$

14.2. Határozza meg az alábbi függvények paraméter szerinti második deriváltfüggvényét:

$$q) \quad \mathbf{r}(t) = t^5 \mathbf{i} + (\sinh 3t) \mathbf{j} + \ln(t+1) \mathbf{k};$$

$$b) \quad \mathbf{r}(t) = 2^3 \mathbf{i} - (\cos 4t) \mathbf{j} + \sqrt{1 - tk};$$

$$c) \mathbf{r}(t) = \frac{1}{1+t} \mathbf{i} - (\operatorname{Arctg} 2t) \mathbf{j} + (2t+3)^4 \mathbf{k}.$$

$$\mathbf{r}(t) = 3^5 \mathbf{i} + [\ln(1+3t)] \mathbf{j} - \sqrt{1+t} \mathbf{k}$$

függvény paraméter szerinti n -edik deriváltját!

$$\mathbf{r}(t) = \frac{1}{t+1} \mathbf{i} + \frac{t+1}{t} \mathbf{j} + t^2 \mathbf{k}$$

(görbe $t_0 = 1$ paraméterértékhez tartozó pontjában az érintő irányú egységvektor!

14.5. Írja fel az

$$\mathbf{r}(t) = (t-3)\mathbf{i} + (t^2+1)\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$$

térgörbe érintőjének egyenletrendszerét a $t_0 = 2$ paraméterhez tartozó pontjában!

14.6. Határozza meg az

$$\mathbf{r}(t) = (t+1)^2\mathbf{i} + \frac{t}{t+1}\mathbf{j} + \frac{t+1}{t}\mathbf{k}$$

görbe $t_0 = 1$ paraméterű pontjában húzható érintőjének vektoregyenletét!

14.7. Keressen az

$$\mathbf{r}(t) = \frac{1}{1+t}\mathbf{i} + \frac{2}{2-t}\mathbf{j} + \frac{3}{3+t}\mathbf{k}$$

térgörbén olyan pontot, amelyben a görbe érintője párhuzamos a $\frac{2-x}{6}$

$$= \frac{y-5}{3} = \frac{1-z}{2} \text{ egyenessel!}$$

14.8. Keresse meg az

$$\mathbf{r}(t) = \frac{t^4}{4}\mathbf{i} + \frac{t^3}{3}\mathbf{j} + \frac{t^2}{2}\mathbf{k}$$

térgörbe azon pontjait, amelyekben a görbe érintője párhuzamos az $x+3y+2z-10=0$ síkkal!

14.9. Van-e olyan pont az

$$\mathbf{r}(t) = (t^2+2)\mathbf{j} + t^3\mathbf{j} + (1-t)\mathbf{k}$$

térgörbén, amelyben a görbe érintője párhuzamos az $x+y+z=1989$ síkkal?

14.10. Hány olyan pont van az

$$\mathbf{r}(t) = (\sin t - t \cos t)\mathbf{i} + (\cos t + t \sin t)\mathbf{j} + (t^2+1)\mathbf{k}$$

térgörbén, amelyben a görbéhez húzható érintő párhuzamos az (y, z) koordinátasíkkal?

14.11. Mekkora szöget zárnak be egymással az

$$\mathbf{r}(t) = (t^2+1)\mathbf{i} + (t+1)^2\mathbf{j} + (t-1)^3\mathbf{k}$$

térgörbe $t_1=0$ és $t_2=1$ paraméterértékhez tartozó érintői?

14.12. Írja fel az

$$\mathbf{r}(t) = (\sin t - t \cos t)\mathbf{i} + (\cos t + t \sin t)\mathbf{j} + (t+1)\mathbf{k}$$

térgörbe érintőjének az egyenletrendszerét az a) $t_1=0$ és b) $t_2=\frac{\pi}{2}$ paraméterű pontban! Mekkora szöget zár be ez a két érintő?

14.13. Határozza meg az

$$\mathbf{r}(t) = (\sin t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j} + \frac{1}{\cos t}\mathbf{k}$$

térgörbe $t_0=0$ paraméterű pontjában az érintő, a főnormális és a binormális irányú egységvektort!

14.14. Írja fel az

$$\mathbf{r}(t) = (t+3)\mathbf{i} + \frac{t^3}{3}\mathbf{j} + (t^2-5)\mathbf{k}$$

térgörbe érintőjének, főnormálisának és binormálisának egyenletrendszerét a $t_0=1$ paraméterű pontban!

14.15. Határozza meg az

$$\mathbf{r}(t) = (t^3-2t^2)\mathbf{i} + (3t+2)\mathbf{j} + (t^2-5)\mathbf{k}$$

térgörbe érintőjének, főnormálisának és binormálisának egyenletrendszerét a $t_0=1$ paraméterű pontban!

14.16. Írja fel az

$$\mathbf{r}(t) = (t+3)\mathbf{i} + \frac{t^3}{3}\mathbf{j} + (t^2-5)\mathbf{k}$$

térgörbe $t_0=1$ paraméterű pontjában a simuló-, a normál- és a rektifikáló síkjának az egyenletét!

14.17. Határozza meg az

$$\mathbf{r}(t) = (t^3-2t^2)\mathbf{j} + (3t+2)\mathbf{j} + (t^2-5)\mathbf{k}$$

térgörbe $t_0=1$ paraméterértékhez tartozó pontjában a) a simulósíkjának, b) a normálisíkjának, c) a rektifikáló síkjának egyenletét!

14.18. Számítsa ki az

$$\mathbf{r}(t) = 3t^2\mathbf{i} + (2t+3)\mathbf{j} + 3t^3\mathbf{k}$$

térgörbe normálvektorát és torzióit annak $t_0=-1$ paraméterű pontjában!

14.19. Számítsa ki az

$$\mathbf{r}(t) = (1 - 2t^2)\mathbf{i} + (t^2 - 2)\mathbf{j} + \frac{1}{t}\mathbf{k}$$

térgörbe görbületét és torzióját annak $t_0 = -1$ paraméterű pontjában!

14.20. Számítsa ki az

$$x = 4 \cos t, \quad y = 2 \sin t, \quad z = 2t$$

térgörbe görbületét és torzióját annak $t_0 = \frac{\pi}{3}$ paraméterű pontjában!

14.21. Számítsa ki az

$$\mathbf{r}(t) = (\cosh t)\mathbf{i} + (\sinh t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$$

térgörbe görbületét és torzióját annak $t_0 = 0$ paraméterű pontjában! Jobbsavarodású-e a görbe ebben a pontban?

14.22. Határozza meg az

$$\mathbf{r}(t) = (\cos^2 t)\mathbf{i} + (\sin^2 t)\mathbf{j} + (\sin 2t)\mathbf{k}$$

térgörbe görbületét és torzióját annak $t_0 = \frac{\pi}{6}$ paraméterű pontjában!

14.23. Mutassa meg, hogy az

$$\mathbf{r}(t) = (3 \sin t)\mathbf{i} + (3 \cos t)\mathbf{j} + 4t\mathbf{k}$$

csavarvonal görbülete is, torziója is állandó!

14.24. Mutassa meg, hogy az

$$\mathbf{r}(t) = \frac{1+t}{1-t}\mathbf{i} + \frac{1}{1-t^2}\mathbf{j} + \frac{t}{1+t}\mathbf{k}$$

görbe síkgörbe!

14.25. Mutassa meg, hogy az

$$\mathbf{r}(t) = (a_1 t^2 + b_1 t + c_1)\mathbf{i} + (a_2 t^2 + b_2 t + c_2)\mathbf{j} + (a_3 t^2 + b_3 t + c_3)\mathbf{k}$$

egyenletű görbék, ahol $a_i, b_i, c_i, i = 1, 2, 3$ tetszőleges valós számok, síkgörbék!

14.26. Határozza meg, hogy az

$$\mathbf{r}(t) = (a \cosh t)\mathbf{i} + (a \sinh t)\mathbf{j} + b t \mathbf{k}$$

görbe tetszőleges pontjában mely a és b értékekre lesz egyenlő a görbület a torzióval!

14.27. Számítsa ki az

$$\mathbf{r}(t) = (e^t \cos t)\mathbf{i} + (e^t \sin t)\mathbf{j} + e^t \mathbf{k}$$

egyenlettel megadott térgörbe görbületét és torzióját, továbbá írja fel az érintője és a normálisja egyenletét a $t_0 = 0$ pontban!

14.28. Határozza meg az

$$\mathbf{r}(t) = (3t^2 - 2t)\mathbf{i} + t^3\mathbf{j} + (1 - t)\mathbf{k}$$

egyenletű térgörbe $t_0 = 2$ paraméterű pontjában a) az érintője vektoregyenletét; b) a normálisja egyenletét; c) a görbületét; d) a torzióját!

14.29. Határozza meg az

$$\mathbf{r}(t) = (t^2 - 1)\mathbf{i} + (t + 2)\mathbf{j} + (t^3 - 1)\mathbf{k}$$

egyenletű térgörbe $t_0 = 1$ paraméterű pontjában az érintő, a normális, a binormális egyenletrendszerét, a simulósík, a normális, a rektifikáló sík egyenletét, a görbületét és a torziót!

14.30. Vizsgálja meg az

$$\mathbf{r}(t) = e^t \mathbf{i} + e^{-t} \mathbf{j} + t \mathbf{k}$$

térgörbét annak $t_0 = 0$ paraméterű pontjában! (Írja fel az érintő, a főnormális, a binormális vektoregyenletét, a simuló-, a normál- és a rektifikáló sík egyenletét, számítsa ki görbületét és torzióját!)

14.31. Számítsa ki az

$$x = t + 3, \quad y = \frac{t^2}{2}, \quad z = \frac{2\sqrt{2}t^3}{3}$$

térgörbe ívhosszát, ha $2 \leq t \leq 4$.

14.32. Számítsa ki az

$$\mathbf{r}(t) = t^2 \mathbf{i} + 2t^6 \mathbf{j} + \sqrt{3}t^4 \mathbf{k}$$

térgörbe ívhosszát, ha $-1 \leq t \leq 2$.

14.33. Számítsa ki az

$$\mathbf{r}(t) = (2 \cos t)\mathbf{i} + (2 \sin t)\mathbf{j} + 4t\mathbf{k}$$

csavarvonal ívhosszát, ha $0 \leq t \leq 2\pi$.

14.34. Számítsa ki az

$$\mathbf{r}(t) = (e^t \cos t)\mathbf{i} + (e^t \sin t)\mathbf{j} + e^t \mathbf{k}$$

térgörbe ívhosszát, ha $0 \leq t \leq 3$.

14.35. Számítsa ki az

$$\mathbf{r}(t) = [t \cos(3 \ln t)]\mathbf{i} + [t \sin(3 \ln t)]\mathbf{j} + \sqrt{6} \mathbf{k}$$

térgörbe ívhosszát, ha $0 \leq t \leq 2\pi$.

14.36. Számítsa ki az

$$\mathbf{r}(t) = (t \cos t)\mathbf{i} + (t \sin t)\mathbf{j} + t \mathbf{k}$$

térgörbe ívhosszát, ha $1 \leq t \leq 9$.

14.37. Számítsa ki az

$$\mathbf{r}(t) = \frac{\cos t}{\cosh t} \mathbf{i} + \frac{\sin t}{\cosh t} \mathbf{j} + (1 - \tanh t) \mathbf{k}$$

térgörbe ívhosszát, ha $a) 0 \leq t \leq 100$; $b) 0 \leq t \leq c$, ahol c pozitív valós szám!

14.38. Írja fel annak a síknak kétparaméteres vektoregyenletét, amely illeszkedik az $A(2; 3; 5)$, $B(4; 5; -6)$, $C(1; 2; 3)$ pontokra!

14.39. Írja fel annak a hengerfelületnek a vektoregyenletét, amelynek vezérgörbéje az (x, y) síkban az $x^2 + y^2 = 4$ egyenletű kör, alkotói pedig párhuzamosak a z tengellyel!

14.40. Írja fel annak a hengerfelületnek a vektoregyenletét, amelynek vezérgörbéje az (x, y) síkban az $x^2 - y^2 = 4$ hiperbola, alkotói pedig az $\mathbf{a}(4; 2; 5)$ vektorral párhuzamosak!

14.41. Írja fel annak a kúpfelületnek a vektoregyenletét, amelynek csúcsa a $P(2; -1; 3)$ pont, vezérgörbéje az (x, y) síkban az $y^2 = 4x$ egyenletű parabola!

14.42. Írja fel annak a gyűrűfelületnek (tórusznak) a vektoregyenletét, amely az (x, z) síkban fekvő $(x-a)^2 + z^2 = b^2$ körnek (a, b pozitív állandók és $a > b$) a z tengely körüli forgatásával keletkezik!

14.43. Határozza meg annak a görbének az egyenletét, amely illeszkedik az

$$\mathbf{r}(u, v) = (u + 2v)\mathbf{i} - v\mathbf{j} + (u^2 + 3v)\mathbf{k}$$

felületre és eleget tesz az $u^2 = v$ feltételnek!

14.44. Tekintse az

$$\mathbf{r}(u, v) = (4 \cos u \cos v)\mathbf{i} + 4 \cos u \sin v \mathbf{j} + (4 \sin u)\mathbf{k}$$

gömbfelület $u = 2t$, $v = 3t$ egyenletrendszerrel adott felületi görbét! Határozza meg a felületi görbe $t_0 = \frac{\pi}{3}$ paraméterű pontjához tartozó érintőjének egyenletét!

14.45. Határozza meg az

$$\mathbf{r}(u, v) = (u^3 - 2v^2)\mathbf{i} + (uv^2)\mathbf{j} + (u^2v - u)\mathbf{k}$$

felület érintősíkjának egyenletét annak $u_0 = 2$, $v_0 = -1$ paraméterű pontjában!

14.46. Írja fel az

$$\mathbf{r}(u, v) = u^4 \mathbf{i} + 3uv^2 \mathbf{j} + v^3 \mathbf{k}$$

felület érintősíkjának egyenletét annak $u_0 = 2$, $v_0 = 1$ paraméterű pontjában!

14.47. Írja fel az

$$\mathbf{r}(u, v) = (u \cos v)\mathbf{i} + (u \sin v)\mathbf{j} + 3v \mathbf{k}$$

csavarfelület érintősíkjának egyenletét annak $P(1; \sqrt{3}; \pi)$ pontjában!

14.48. Határozza meg az

$$\mathbf{r}(u, v) = (u + v)\mathbf{i} + (u^2 + v^2)\mathbf{j} + (u^3 + v^3)\mathbf{k}$$

felület érintősíkjának egyenletét annak $P(2; 2; 2)$ pontjában!

14.49. Számítsa ki az

$$u = x^3 + y^3 - 3xy$$

skalármező gradiensvektorát a $P(2; -1)$ pontban!

14.50. Határozza meg a következő skalármezők gradiensterét:

a) $u = 3x^2y^3 - 2yz$;

b) $u = e^{2x}z \cos y + \frac{\sinh x}{2y + z}$;

c) $u = \frac{x^2 + y^2}{y^2 + z^2} - \frac{y^2 + z^2}{x^2 + y^2}$.

14.51. Határozza meg az alábbi skalármezők gradiensvektorát a P pontban:

a) $u = \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4}$, $P(8; 3; 4)$

$$b) u = 2\sqrt{xy^3} + \ln \frac{x}{z}, \quad P\left(\frac{1}{2}; 2; 1\right)$$

$$c) u = e^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad P(2; 2; 1).$$

14.52. Határozza meg az alábbi skalármezők gradiensvektorát a P pontban:

$$a) u = xy + yz + xz, \quad P(2; -3; 1);$$

$$b) u = xy \sin z + xz \ln y + e^x y, \quad P(1; 1; \pi);$$

$$c) u = |r|, \quad P(3; -4; 1).$$

14.53. Határozza meg az alábbi skalármezők gradiensterét:

$$a) u(r) = |r|; \quad b) u(r) = |r|^3;$$

$$c) u(r) = \ln |r|; \quad d) u(r) = |r|^2 + \frac{1}{|r|^2}.$$

14.54. Számítsa ki az

$$u = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy + 3x - 2y - 6z$$

skalármező gradiensvektorának hosszát az $O(0; 0; 0)$ és a $P(2; 0; 1)$ pontban! Melyik pontban nullvektor a gradiensvektor?

14.55. Számítsa ki, hogy mekkora szöget zárnak be az

$$u_1 = x^2 + y^2 + z^2 \quad \text{és} \quad u_2 = \arcsin \frac{x}{x+y+z}$$

skalármezők gradiensvektorai a $P(1; 1; 0)$ pontban!

14.56. Határozza meg az alábbi vektormezők divergenciáját:

$$a) v = (x + y^2 + z^3)i + (x^3 + y + z^2)j + (x^2 + y^3 + z)k;$$

$$b) v = 3xi + (x - 2y)j + (z - x)k;$$

$$c) v = e^{xy}i + e^{yz}j + e^{zx}k.$$

14.57. Határozza meg az alábbi vektormezők divergenciáját az adott P pontban:

$$a) v = (x^2 - y^2)i + (y^2 - z^2)j + (z^2 - x^2)k; \quad P(2; 1; 0);$$

$$b) v = \frac{x}{y}i + \frac{y}{z}j + \frac{z}{x}k, \quad P(1; 2; 3);$$

$$c) v = (x^2 + y^3)i + 3(4xy^2 - x)j + xyz^2k, \quad P(1; -1; 2).$$

14.58. Határozza meg az alábbi vektormezők divergenciáját:

$$a) v = \frac{r}{|r|}; \quad b) v = |r|r; \quad c) v = |r|^3 r.$$

14.59. Forrásmentes-e a

$$v = (y^2 + z^2)i + (z^2 + x^2)j + (x^2 + y^2)k$$

vektormező?

14.60. Forrásmentes-e a

$$v = (x + y^2 - z^2)i + (-x^2 + y + z^2)j + (x^2 - y^2 + z)k$$

vektormező?

14.61. Számítsa ki az alábbi vektormezők rotációját:

$$a) v = (x + y^2 + z^3)i + (x^3 + y + z^2)j + (x^2 + y^3 + z)k;$$

$$b) v = 3xi + (x - 2y)j + (z - x)k;$$

$$c) v = e^{xy}i + e^{yz}j + e^{zx}k.$$

14.62. Számítsa ki a következők vektormező rotációját az adott P pontban:

$$a) v = (x^2 - y^2)i + (y^2 - z^2)j + (z^2 - x^2)k, \quad P(2; 1; 0);$$

$$b) v = -\frac{x}{y}i + \frac{y}{z}j + \frac{z}{x}k, \quad P(1; 2; 3);$$

$$c) v = (x^2 + y^3)i + 3(4xy^2 - x)j + xyz^2k, \quad P(1; -1; 2).$$

14.63. Számítsa ki a következő vektormező rotációját:

$$a) v = \frac{r}{|r|}; \quad b) v = |r|r; \quad c) v = |r|^3 r.$$

14.64. Örvénymentes-e a

$$v = \sqrt{x}i + 2yzj + (y^2 + 1)k$$

vektormező?

14.65. Örvénymentes-e a

$$v = yzi + xzj + (xy + 2z)k$$

vektormező?

14.66. Számítsa ki a

$$v = (3x + 2y)i - (5x + z^2)j + (x^2 - y^2)k$$

vektormező divergenciáját és rotációját!

14.67. Számítsa ki a

$$v = x^2 yzi + xy^2 zj + xyz^2 k$$

14.68. Számítsa ki a

$$\mathbf{v} = \left(\ln \frac{yz}{x} \right) \mathbf{i} + \left(\ln \frac{xz}{y} \right) \mathbf{j} + \left(\ln \frac{xy}{z} \right) \mathbf{k}$$

vektormező divergenciáját és rotációját!

14.69. Számítsa ki a

$$\mathbf{v} = (\sin x^2 yz) \mathbf{i} + (\sin xy^2 z) \mathbf{j} + (\sin xyz^2) \mathbf{k}$$

vektormező divergenciáját és rotációját!

14.70. Számítsa ki a

$$\mathbf{v} = (\sinh^2 x) \mathbf{i} + (\cosh xy) \mathbf{j} + (\ln yz) \mathbf{k}$$

vektormező divergenciáját és rotációját annak $\mathbf{r}_0 = 2\mathbf{j} - \frac{1}{2}\mathbf{k}$ helyvektorú pontjában!

14.71. Számítsa ki a $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^2}$ vektormező divergenciáját és rotációját az

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$$
 helyvektorú pontjában!

14.72. Számítsa ki a

$$\mathbf{v} = \frac{y}{\operatorname{Arctg} x} \mathbf{i} - 2xy^2 \mathbf{j} + xyz \mathbf{k}$$

vektormező divergenciáját és rotációját annak $\mathbf{r}_0 = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ helyvektorú pontjában!

14.73. Határozza meg a rot $\operatorname{rot} \mathbf{v}$ vektort, ha

$$\mathbf{v} = e^{yz} \mathbf{i} + e^{xz} \mathbf{j} + e^{xy} \mathbf{k}.$$

14.74. Számítsa ki a rot \mathbf{v} és rot $\operatorname{rot} \mathbf{v}$ vektorokat, valamint $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{v}$ értékét a $P(1; 1; 1)$ pontban, ha

$$\mathbf{v} = (x - 2y) \mathbf{i} + xyz \mathbf{j} + xz^2 \mathbf{k}.$$

14.75. Számítsa ki $\operatorname{div} \operatorname{grad} u$ értékét az $\mathbf{r}_0 = 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ helyvektorú pontban, ha $u = ye^x + xe^y + yz^3$.

14.76. Számítsa ki $\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v}$ értékét a $P(1; -1; 1)$ pontban, ha

$$\mathbf{v} = (x^3 - 2yz^2) \mathbf{i} + (xy^2 - z^3) \mathbf{j} + (z^2 - xyz) \mathbf{k}.$$

14.77. Határozza meg $\operatorname{div} \operatorname{grad} \mathbf{r}^2$ értékét és a rot $\operatorname{grad} \mathbf{r}^2$ vektort!

14.78. Számítsa ki a

$$\mathbf{v} = (3x^2 + y^2) \mathbf{i} + (x^2 - y^2) \mathbf{j}$$

vektormező vonalmenti integrálját az $y = 2 - 3x$ egyenes mentén, ha $0 \leq x \leq 1$.

14.79. Tekintse a

$$\mathbf{v} = \frac{x}{x^2 + y^2} \mathbf{i} + \frac{y}{x^2 + y^2} \mathbf{j}$$

vektorfüggvényt és az $A(-1; 0)$, $B(0; 1)$, $C(1; 0)$, $D(1; 1)$ pontokat. Számítsa ki a $\oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$ vonalmenti integrálját, ha az integrálás útja az

- AB egyenesszakasz;
- BC egyenesszakasz;
- CD egyenesszakasz;
- DA egyenesszakasz;

14.80. Számítsa ki a

$$\mathbf{v} = yz \mathbf{i} + xz \mathbf{j} + xy \mathbf{k}$$

vektorfüggvény vonalmenti integrálját az

$$\mathbf{r}(t) = (2t - 1) \mathbf{i} + (t + 2) \mathbf{j} + 3t \mathbf{k}$$

egyenletű görbe mentén, ha $t \in [0; 1]$.

14.81. Számítsa ki a

$$\mathbf{v} = (y^2 - x^2) \mathbf{i} + 4yz \mathbf{j} - x^2 \mathbf{k}$$

vektorfüggvény vonalmenti integrálját az

$$\mathbf{r}(t) = t \mathbf{i} + t^2 \mathbf{j} + t^3 \mathbf{k}$$

térgörbe mentén, ha $0 \leq t \leq 1$.

14.82. Számítsa ki a

$$\mathbf{v} = (2xz + y^2) \mathbf{i} + (2xy + z^2) \mathbf{j} + (x^2 + 2yz) \mathbf{k}$$

vektorfüggvény vonalmenti integrálját a $P(0; 0; 0)$ pontból a $Q(3; -1; 2)$ pontba vezető egyenesszakasz mentén!

14.83. Számítsa ki a

$$\mathbf{v} = (x + yz) \mathbf{i} + (x^2 - z^2) \mathbf{j} + (xy + z) \mathbf{k}$$

vektorfüggvény vonalmenti integrálját a $P_1(1; 1; 1)$ és $P_2(0; 3; 5)$ pontokat összekötő egyenesszakasz mentén, P_1 -től P_2 felé haladva!

14.84. Számítsa ki a

$$\mathbf{v} = (-x^2 + y + z)\mathbf{i} + (x - y^2 + z)\mathbf{j} + (x + y - z^2)\mathbf{k}$$

vektorfüggvény vonalmenti integrálját a $P(2; 0; 0)$, $Q(0; 2; 0)$, $R(0; 0; 2)$ pontok által meghatározott háromszög kerülete mentén, ebben az irányban haladva!

14.85. Számítsa ki a

$$\mathbf{v} = 2x\mathbf{i} - \frac{y}{z}\mathbf{j} + (x - z)\mathbf{k}$$

vektormező vonalmenti integrálját az

$$\mathbf{r}(t) = (1 - t)\mathbf{i} + (t^2 - 1)\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$$

egyenletű görbe mentén, ha $1 \leq t \leq 2$.

14.86. Számítsa ki a

$$\mathbf{v} = x^2\mathbf{i} - y\mathbf{j} + \frac{1}{z}\mathbf{k}$$

vektormező vonalmenti integrálját, ha az integrációs út az

$$\mathbf{r}(t) = \frac{1}{1+t}\mathbf{i} + \frac{1}{1+2t}\mathbf{j} + \frac{1}{1+3t}\mathbf{k}$$

görbe és $0 \leq t \leq 1$.

14.87. Számítsa ki a

$$\mathbf{v} = (x - y)\mathbf{i} + (x + y)\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$$

vektorfüggvény vonalmenti integrálját az

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$$

egyenletű görbe mentén, ha $0 \leq t \leq 2\pi$.

14.88. Számítsa ki a

$$\mathbf{v} = \frac{1}{1+x}\mathbf{i} + 2yz\mathbf{j} + (y^2 + 1)\mathbf{k}$$

vektormező vonalmenti integrálját az

$$\mathbf{r}(t) = \frac{1}{t}\mathbf{i} + \sqrt{t+1}\mathbf{j} + t\mathbf{k}$$

egyenletű görbe mentén, ha $1 \leq t \leq 3$.

14.89. Számítsa ki a

$$\mathbf{v} = \left(2xye^{x^2} - \frac{2}{x}\right)\mathbf{i} + e^{x^2}\mathbf{j} - \frac{2}{z}\mathbf{k}$$

vektormező vonalmenti integrálját az

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$$

görbe mentén, ha $1 \leq t \leq 4$.

14.90. Számítsa ki a

$$\mathbf{v} = (y + z)\mathbf{i} + (x + z)\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k}$$

vektorfüggvény vonalmenti integrálját az

$$\mathbf{r}(t) = (\sin t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

egyenletű görbe mentén, ha $0 \leq t \leq 2\pi$.

14.91. Számítsa ki a

$$\mathbf{v} = (y + z)\mathbf{i} + (z + x)\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k}$$

vektormező vonalmenti integrálját az

$$\mathbf{r}(t) = (\sin^2 t)\mathbf{i} + (\sin 2t)\mathbf{j} + (\cos^2 t)\mathbf{k}$$

egyenletű görbe mentén, ha $0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$.

14.92. Számítsa ki a

$$\mathbf{v} = \sqrt{\frac{yz}{x}}\mathbf{i} + \sqrt{\frac{xz}{y}}\mathbf{j} + \sqrt{\frac{xy}{z}}\mathbf{k}$$

vektormező vonalmenti integrálját az

$$\mathbf{r}(t) = (\sin^2 t)\mathbf{i} + (\cos^2 t)\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$$

görbe mentén, ha $\frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{\pi}{3}$.

14.93. Számítsa ki a

$$\mathbf{v} = \left(\sqrt{\frac{y}{x}} - 2xy + \frac{1}{x}\right)\mathbf{i} + \left(\sqrt{\frac{x}{y}} - x^2 + \frac{z}{y^2}\right)\mathbf{j} - \frac{1}{y}\mathbf{k}$$

vektormező vonalmenti integrálját, az

$$u(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + \arctg \frac{y}{x}$$

egyenletű görbe mentén, ha $\frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{\pi}{3}$.

14.94. Egy konzervatív elektromos erőter potenciálfüggvénye:

$$u(x, y) = y^x + \operatorname{Arctg} \frac{y}{x}.$$

Adja meg az erőteret! Mekkora munkát végzünk, ha az egységnyi töltést a $P(1; 1)$ pontból a $Q(2; 2)$ pontba visszük?

14.95. Egy konzervatív vektormező potenciálfüggvénye

$$u(x, y, z) = x(y+z)^2 - \ln \frac{xy}{z}.$$

Adja meg a vektormezőt! Mekkora a vonalmenti integrál értéke, ha az útvonal a $P(1; 1; 1)$ pontból a $Q(1; 2; 2)$ pontba vezető egyenesszakasz?

14.96. Egy konzervatív vektormező potenciálfüggvénye:

$$u = \sqrt{xy^3 z^5}.$$

Határozza meg a vektormezőt! Mennyi a vonalmenti integrál értéke, ha az útvonal a $P_1(1; 0; 1)$ pontból a $P_2(1; 1; 1)$ pontba, majd a P_2 pontból a $P_3(1; 1; 0)$ pontba vezető szakasz?

14.97. Egy konzervatív vektormező potenciálfüggvénye:

$$u = \sin yz + \cos xy + \operatorname{tg} xz.$$

Adja meg a vektormezőt! Mennyi a vonalmenti integrál értéke, ha az integrálás úja az az origó középpontú, egységsugarú körvonal, amely az x, z koordinátáson fekszik?

14.98. Van-e az alábbi vektormezőknek potenciálfüggvénye? Ha van, határozza meg!

$$a) \mathbf{v} = (2xy - z^2 - yz)\mathbf{i} + (x^2 + z^2 - xz)\mathbf{j} + (2yz - 2xz - xy)\mathbf{k};$$

$$b) \mathbf{v} = \frac{z}{x\sqrt{x^2 y^2 - z^2}} \mathbf{i} + \frac{z}{y\sqrt{x^2 y^2 - z^2}} \mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{x^2 y^2 - z^2}} \mathbf{k}.$$

14.99. Konzervatívak-e az alábbi vektormezők? Ha igen, határozza meg a potenciálfüggvényüket!

$$a) \mathbf{v} = (2xy \ln z + ye^{xy})\mathbf{i} + (x^2 \ln z + xe^{xy})\mathbf{j} + \left(\frac{x^2 y}{z} + 3z^2 \right) \mathbf{k};$$

$$b) \mathbf{v} = \left(\frac{y}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x+\sqrt{z}} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{x}{2\sqrt{y}} + \sqrt{x+\sqrt{z}} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\sqrt{z}}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{z}}{2\sqrt{y}} \right) \mathbf{k};$$

$$c) \mathbf{v} = (y + \sqrt{z})\mathbf{i} + (\sqrt{x} + \sqrt{z})\mathbf{j} + (y + \sqrt{z})\mathbf{k}.$$

14.100. Hogyan kell megválasztani a p paraméter értékét, hogy a vektormező konzervatív legyen? Írja fel a potenciálfüggvényt is!

$$\mathbf{v} = (6xyz + 4y^3 z^2)\mathbf{i} + (3x^2 z + 12xy^2 z^2)\mathbf{j} + (3x^2 y + pxy^3 z)\mathbf{k}$$

1.26. Az $\{1; 2\}$ halmaz eleme a $P(A \cup B)$ halmaznak, de nem eleme a $P(A) \cup P(B)$ halmaznak.

1.27. A bizonyításokat Venn-diagramok vagy az $A \otimes B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ egyenlőség felhasználásával végezhetjük el.

1.28. $1 = \{0\}$; $2 = \{0, \{0\}\} = \{0, 1\}$; $3 = \{0, \{0\}, \{0, \{0\}\}\} = \{0, 1, 2\}$; $4 = \{0, \{0\}, \{0, \{0\}\}, \{0, \{0, \{0\}\}\}\} = \{0, 1, 2, 3\}$.

1.29. Csak a c) állítás hamis, mert $1 \cap 2 = 1$; a többi állítás igaz.

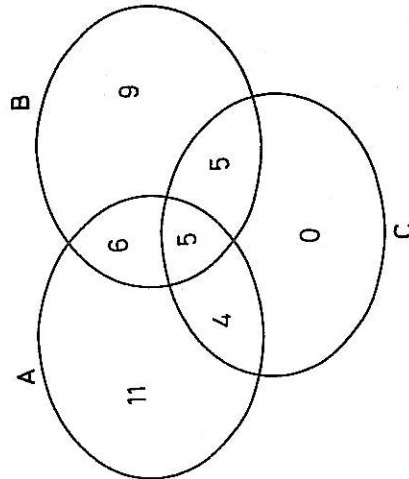
1.30. a) 3; b) 2; c) 4; d) 2; e) 4; f) 3.

1.31. a) 0; b) $\{(0, 0)\}$; c) $\{(0, 0); (0, 1)\}$; d) $\{(0, 0), (1, 0)\}$; e) $\{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$; f) $\{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 2)\}$; g) $\{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1), (2, 0), (2, 1)\}$; h) $\{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 1), (2, 2)\}$.

1.32. $A = \{1, 2, 3, 7, 11, 14, 22, 77\}$.

1.33. $A = \{15, 30, 39, 65, 78, 130, 195, 390\}$.

1.34. A reklámfőnök nem mondott igazat, mert a felsorolásban valójában csak 40 ember van. Ugyanis $ABC = 5$, ezért $AB \setminus C = 11 - 5 = 6$, $AC \setminus B = 9 - 5 = 4$, $BC \setminus A = 10 - 5 = 5$. Ebből következik, hogy $A \setminus AC \cup AB = 26 - (4 + 5 + 6) = 11$, $B \setminus AB \cup BC = 25 - (6 + 5 + 5) = 9$, $C \setminus AC \cup BC = 14 - (4 + 5 + 5) = 0$ (l. az ábrát).



1.35. 110.

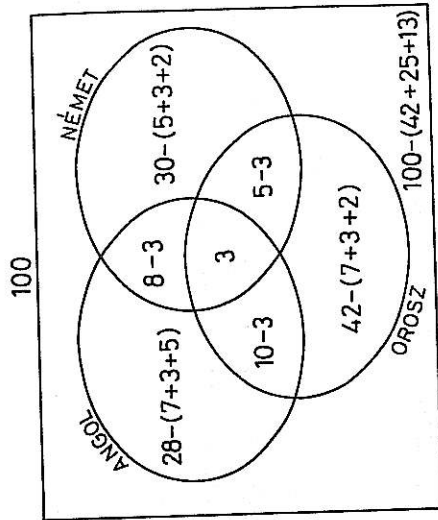
úasoknak a halmaza, akkor a $\bar{T} \cap S \cap N$ halmaz elemeinek a számát kell megállapítani; ez 90 fő.

1.37. Nem. Ha x jelöli azoknak a vevőknek a számát, akik mind a három árucikk-ből vásároltak ($x \geq 0$), akkor a vevők száma

$$15 + 12 + 10 - 6 - 1 - 3 + x = 27 + x,$$

ez pedig nem lehet egyenlő az eladó által megadott 25-tel.

1.38. a) 20; b) 30; c) 2.



1.39. Az ellentmondás például így mutatható ki: Mivel a sportoló kollégist leányok száma 5, ezért a sportoló kollégista fiúk $10 - 5 = 5$, a sportoló nem kollégista leányoké pedig $20 - 5 = 15$. A sportoló nem kollégista fiúk száma ig $23 - (15 + 5 + 5) = -2$ volna, de ez lehetetlen.

1.40. Útmutatás: Vetítse az átmérőre a félkör pontjait, az átmérőre merőleges

2. fejezet

2.1. $-(a+b)$; $-(b+c)$; $-(a+c)$; $-(a+b+c)$.

2.2. Az $\vec{OA} - \vec{OB}$ és $\vec{OD} - \vec{OC}$ a paralelogramma két szemközti élvektora, ezek ezek egyenlőek. Ebből az egyenlőségből átrendezéssel következik a bizonyítandó egyenlőség.

2.3. $d = b + c - a$.

2.4. $a = \frac{x+y-z}{2}$; $b = \frac{x-y+z}{2}$; $c = \frac{-x+y+z}{2}$.

2.5. Az átlaplap csúcsainak helyvektorai: $x, y, y-x, -x, -y, x-y$; a tetőlap csúcsaié $x+z, y+z, y-x+z, -x+z, -y+z, x-y+z$.

2.6. $w_1 = 14a - 5b$; $w_2 = -(a + 13b)$.

2.7. a) $3a - 4b = \frac{1}{3}(10v - 11w)$; b) $5a + 2b = \frac{1}{3}(8v - w)$; c) $-a + \frac{1}{10}b = \frac{1}{30}(-21v + 12w)$.

2.8. a) $\overrightarrow{PB} = 2c - a$; b) $\overrightarrow{PC} = 2b - a$; c) $\overrightarrow{PA_1} = b + c - a$; d) $\overrightarrow{PS} = \frac{2b + 2c - a}{3}$.

2.9. $a' = 2b - a$.

2.10. Ha a szóban forgó pontok helyvektorai a, b, c, p , akkor a tükörképek helyvektorai rendre $2a - p$; $2b - 2a + p$; $2c - 2b + 2a - p$; $-2c + 2b + p$; $2c - p$; p .

2.11. $\frac{a+3b}{4}$; $\frac{a+b}{2}$; $\frac{3a+b}{4}$.

2.12. $(0; 0; 0)$; $(2; 0; 0)$; $(0; 2; 0)$; $(0; 0; 2)$; $(2; 2; 0)$; $(0; 2; 2)$; $(2; 0; 2)$; $(2; 2; 2)$.

2.13. $C(1; -1; 1)$.

2.14. $C(4; 2; 3)$; $D(5; 1; 3)$; $E(5; 0; 4)$; $F(4; 0; 5)$.

2.15. $D(-2; -1; 12)$.

2.16. $(-1; 13; -4)$; $(5; 8; -3)$; $(12; 7; -7)$; $(8; 14; -7)$.

2.17. a) $\overrightarrow{AC} = a + b = (9; 8; -5)$; b) $\overrightarrow{AC_1} = a + b + c = (10; 12; -8)$;

c) $\overrightarrow{AB_1} = a + c = (5; 6; -6)$; d) $\overrightarrow{AD_1} = b + c = (6; 10; -5)$;

e) $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}(a + b + c) = (5; 6; -4)$; f) $\overrightarrow{AF} = a + \frac{1}{2}(b + c) = (7; 7; -\frac{11}{2})$;

g) $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{4}a - \frac{3}{4}(b + c) = (\frac{11}{2}; 8; -\frac{9}{2})$; h) $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}a + b + c = (8; 11; -\frac{13}{2})$;

i) $\overrightarrow{FG} = -\frac{1}{2}a = (-2; -1; \frac{3}{2})$; j) $\overrightarrow{FK} = \frac{1}{2}(-a + b + c) = (1; 4; -1)$;

k) $\overrightarrow{FH} = \frac{1}{4}(-3a + b + c) = (-\frac{3}{2}; 1; 1)$; l) $\overrightarrow{HK} = \frac{1}{4}(a + b + c) = (\frac{5}{2}; 3; -2)$.

2.10. a) nem, b) igen, c) nem.

2.19. a) igen; b) nem.

2.20. $P'(3; 18; -12)$.

2.21. $v_1(-3; 2; 0)$; $v_2(7; -7; 25)$; $v_3(3\pi - 2 - 4\sqrt{5}; 2(\sqrt{5} - \pi); 5(\pi + 1))$.

2.22. $v = 8a + b$; $v_1 = 8a(16; 56)$, $v_2 = b(-3; 0)$.

2.23. $d = -3a - 3b + 7c$; $d_1 = -3a(24; -21; -3)$, $d_2 = -3b(0; -9; -6)$, $d_3 = 7c(7; -7; 28)$.

2.24. $|a| = 18$; $|b| = 1$; $|c| = \sqrt{197} = 14,036$.

2.25. $e_a(\frac{4}{13}; -\frac{12}{13}; \frac{3}{13})$; $e_b(0; 0; -1)$; $e_c(-\frac{1}{9}; \frac{4}{9}; \frac{8}{9})$;
 $e(\frac{1}{\sqrt{14}}; \frac{2}{\sqrt{14}}; \frac{3}{\sqrt{14}}) = (0,2673; 0,5345; -0,8018)$; $e_1(-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3})$.

2.26. 2.

2.27. Az adott két-két vektor hajlásszöge: a) tompaszög; b) hegyesszög; c) derékszög; d) hegyesszög.

2.28. $z = -12$.

2.29. $p = -\frac{ab}{b^2}$, ha $b \neq 0$. Ha b zérusvektor, akkor p tetszőleges.

2.30. Az a és b vektorokat úgy kell megválasztani, hogy $a \perp b$ és $|a| = |b|$ egyszerre teljesüljön.

2.31. Igen, mégpedig ha $p : q = ac : ab$.

2.32. Az a, b, c vektorok kockát feszítenek ki, mert $ab = bc = ca = |a| = |b| = |c| = 7$.

2.33. Az x, y, z tengellyel bezárt szög rendre $63,64^\circ$; $96,38^\circ$; $27,27^\circ$.

2.34. a) van; b) nincs.

2.35. a) 90° ; b) $57,49^\circ$; c) $107,29^\circ$; d) $106,78^\circ$; e) $148,7^\circ$.

2.36. $AB=BC=CA=10\sqrt{2}$.

2.37. Az $A_1B_1C_1$ háromszög derékszögű; az $A_2B_2C_2$ háromszög hegyesszögű; az $A_3B_3C_3$ háromszög tompaszögű.

2.38. $\alpha = 32,31^\circ$; $\beta = 38,33^\circ$; $\gamma = 109,36^\circ$.

2.39. $16,6^\circ$.

2.40. 30° ; $M(11; -2; -1)$.

2.41. Az AA_1A_2 háromszög egyenlő szárú; az $AF A_2$ szög derékszög.

2.42. $k = 49 + \sqrt{1625} = 89,31$; $59,74^\circ$.

2.43. Az AA_1B háromszög tompaszögű.

2.44. 2 egység.

2.45. $v \left(-\frac{77}{81}; -\frac{44}{81}; \frac{44}{81} \right)$.

2.46. A feladat feltételeit kielégítik mindazok a \mathbf{b} vektorok, amelyek vagy merőlegesek \mathbf{a} -ra (akkor a merőleges vetületek hossza 0), vagy amelyekre $|\mathbf{b}| = |\mathbf{a}|$.

2.47. $\mathbf{p}(6; -6; 3)$; $\mathbf{m}(-3; 0; 6)$.

2.48. $T(1; -1; 1)$.

2.49. $F(-2; 5; 3)$; BCA szög $= 33^\circ$.

2.50. $T(10; -1; -5)$; $m = 2\sqrt{26} = 10,198$ egység.

2.51. $TF=0$.

2.52. $ST = \frac{\sqrt{513}}{9} = 2,52$ egység.

2.53. a) $-3(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$; b) $6(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$; c) $\mathbf{0}$.

2.54. $\mathbf{v}(18; 19; 6)$.

2.55. $\mathbf{c} = \pm \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|}$.

2.56. $\mathbf{c}(2; 3; 6)$ vagy $-\mathbf{c}(-2; -3; -6)$.

2.57. Az alaplap csúcsai: $(0; 0; 0)$, $(-1; 0; 2)$, $(1; 1; 0)$, $(0; 1; 2)$, a fedőlap csúcsai: $(-6; 6; -3)$, $(-7; 6; 1)$, $(-5; 7; -3)$, $(-6; 7; -1)$.

2.58. $\mathbf{c}(5; 6; -2)$.

2.59. $\mathbf{x}(7; 5; 1)$.

2.60. $\varphi = 55,68^\circ$.

2.61. $t = 18\sqrt{3} = 31,18$ területegység.

2.62. a) $t = \frac{1}{2}\sqrt{1880} = 21,68$ területegység; b) $t = \frac{1}{2}\sqrt{1701} = 20,62$ területegység; c) $t = 0$ területegység; d) $t = \frac{1}{2}\sqrt{18} = 2,12$ területegység.

2.63. $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$; $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$; $t = 20$ területegység.

2.64. $t_1 = 16|\mathbf{b} \times \mathbf{a}| = 16t$.

2.65. $m = 5$ egység.

2.66. $k = 2(\sqrt{33} + \sqrt{22} + \sqrt{3}) = 24,33$ egység; $t = 10\sqrt{2} = 14,1$ területegység.

2.67. $t = \frac{171\sqrt{77}}{144} = 10,42$ területegység.

2.68. $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^2 + (\mathbf{ab})^2 = \mathbf{a}^2\mathbf{b}^2 \sin^2(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + \mathbf{a}^2\mathbf{b}^2 \cos^2(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{a}^2\mathbf{b}^2$.

2.69. $\mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{b} \times (-\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{b} \times (-\mathbf{a}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$;
 $\mathbf{c} \times \mathbf{a} = (-\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times \mathbf{a} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

2.70. a) igen; b) nem; c) igen.

2.71. Balsodrású rendszert alkotnak.

2.72. a) igen; b) nem; c) igen.

$$2.73. z = \frac{17}{3}.$$

2.74. Mivel $\mathbf{abc} = 0$, ezért például az $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (-2; 7; 6)$ vektor merőleges a három adott vektor mindegyikére.

2.75. A pontok nincsenek egy síkban. $t = 42,7$ területegység.

2.76. $V = 3$ térfogategység.

2.77. a) $V = 6$ térfogategység; b) $V = 1$ térfogategység.

2.78. $D_1(0; 8; 0)$.

$$2.79. m = \frac{\sqrt[7]{3}}{3} = 4,04 \text{ egység.}$$

2.80. $m = 11$ egység.

2.81. Igen.

2.82. $\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_3 = 22\mathbf{abc} \neq 0$, és ezért nincsenek egy síkban.

2.83. A kapott paralelepipedon térfogata az eredeti paralelepipedon térfogatának a kétszerese.

2.84. Mivel $\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_3 = 27\mathbf{abc}$, ezért $V_1 = 27V$.

$$2.85. a) x = -1 - 4t, y = 3 + 2t, z = 7 + 6t \quad \text{vagy} \quad \frac{x+1}{-4} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-7}{6};$$

$$b) x = t, y = -1 + 7t, z = 2 - 9t;$$

$$c) x = 6t + 9, y = 8, z = 2t - 3; \quad d) x = 1 + 4t, y = -2 + 3t, z = 5 - 2t.$$

$$2.86. a) x = -2 + 3t, y = 5 - 2t, z = 6 - t; \quad b) x = 5 - 10t, y = 1, z = 2 + t;$$

$$c) x = 9t, y = 11t, z = -t; \quad d) x = 3 + t, y = -1 - t, z = t.$$

2.87. a) Nem illeszkednek egy egyenesre. b) Egy egyenesre illeszkednek.

$$2.88. \mathbf{r}(t) = (-3 + 2t)\mathbf{i} + (2 + t)\mathbf{j} + (-1 - 7t)\mathbf{k}.$$

$$2.89. x = -1 + 3t, y = 2 - 9t, z = -4t.$$

$$2.90. \mathbf{r}(t) = (2 - 4t)\mathbf{i} + (1 + 3t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}.$$

$$2.91. x = -2t, y = 5 - 6t, z = 2.$$

$$2.92. x = 3 - 3t, y = 1 + 6t, z = 1 + 5t.$$

2.93. A metszéspont: $M(-3; 2; 1)$. Az egyenes egyenletrendszere: $x = -3 + 7t$, $y = 2 + 23t$, $z = 1 - 6t$.

$$2.94. p = 3.$$

$$2.95. \mathbf{r}(t) = (1 + 13t)\mathbf{i} - (1 + 6t)\mathbf{j} + (5 - 7t)\mathbf{k}.$$

$$2.96. x = 2 + 3t, y = 9 + 6t, z = 1 + t.$$

$$2.97. \frac{x-1}{2} = \frac{y-8}{-4} = \frac{z-2}{3} \quad \text{és} \quad \frac{x-1}{3} = \frac{y+8}{2} = \frac{2-z}{2}.$$

2.98. a) $x = -t$; $y = -7 - 5t$; $z = -9 - 9t$; b) $x = 2 + 2t$, $y = -1 + 7t$, $z = 4t$; c) $x = 5 - t$, $y = 4 + 7t$, $z = 3t$.

$$2.99. \mathbf{r}(t) = (1 + 2t)\mathbf{i} + (3 + t)\mathbf{j} + (2 + t)\mathbf{k}.$$

2.100. $x = -2 - 5t$, $y = 1 + 8t$, $z = 2 + 3t$. Igaz, illeszkedik.

$$2.101. \mathbf{r}(t) = (1 + 2t)\mathbf{i} - 3t\mathbf{j} - (5 + 6t)\mathbf{k}.$$

$$2.102. x = 1 + 10t, y = 1 - 3t, z = 1 + 12t.$$

$$2.103. x = -7 - 2t, y = 4 + 3t, z = 4 + 4t; \quad d = 4\sqrt{29} = 21,54 \text{ egység.}$$

$$2.104. x = 2 + 3t, y = 1 + 3t, z = 1 + t. \quad d = 0.$$

2.105. A pontthalmaz a $10x - 14 = -(5y + 4) = 2z$ egyenletrendszerű egyenes.

$$2.106. a) -3x + 2y + 11z + 25 = 0; \quad b) 9x + y + 25 = 0; \quad c) x + z - 7 = 0;$$

$$d) 3x + 2y + z = 0; \quad e) y - 2 = 0.$$

$$2.107. 3x - 4y + 5z - 26 = 0.$$

$$2.108. a) 17x - 3y + 12z = 37; \quad b) 3x + 3y + z = 8; \quad c) 5x + 2y - 3z + 13 = 0;$$

$$d) 11x - 6y + 9z - 13 = 0; \quad e) 2x + y - z = 3.$$

2.110. $5y - 2z = 0$.

2.111. $12x + 16y + 5z - 23 = 0$.

2.112. $x + 4y + 7z + 16 = 0$.

2.113. $6x - 20y - 11z + 1 = 0$.

2.114. $16x - 3y - 10z - 31 = 0$.

2.115. $x + 5y + 6z - 23 = 0$.

2.116. $2x + y + 4z - 28 = 0$.

2.117. $x + 4y + 2z - 2 = 0$.

2.118. $A = -1$.

2.119. Nem illeszkedik, mert pl. $\mathbf{nv} = 2 \neq 0$.

2.120. $2x + 10y + 11z - 13 = 0$.

2.121. $4x + 5y + 2z - 6 = 0$.

2.122. $2x + 7y + 13z + 4 = 0$.

2.123. $2x + 3y - z - 3 = 0$.

2.124. $7x - 2y + z + 8 = 0$.

2.125. $2x + 7y + 3z - 51 = 0$.

2.126. $-7x + y + z + 10 = 0$.

2.127. $8x - 22y + z - 48 = 0$.

2.128. $3x + y - 3z = 2$.

2.129. $5x + 3y + 4z = 14$.

2.130. $2x + 3y - 2z = 0$.

2.131. $x + y + 2z - 0 = 0$.

2.132. A három egyenes egy síkban van.

2.133. $13x - 6y - 5z + 56 = 0$.

2.134. $13x - 14y + 11z + 51 = 0$.

2.135. $3y - 7z + 18 = 0$.

2.136. $19x - 2y - 9z - 66 = 0$.

2.137. $7x + 5y + 2z - 4 = 0$.

2.138. $K(-2; 1; -1)$.

2.139. Van. A közös pont: $P\left(-\frac{4}{11}; -\frac{5}{11}; \frac{13}{11}\right)$.

2.140. $2x - 3y + z - 14 = 0$.

2.141. A megadott sík az A és B pontokat nem választja el.

2.142. $x + 4y - 3z - 9 = 0$.

2.143. $3x + 2y - z + 2 = 0$.

2.144. A feltételeknek két sík felel meg, egyenletük: $2x + 3y - 6z - 12 = 0$, illetve $2x + 3y + 6z - 12 = 0$.

2.145. $M_{xy}(2; 6; 0)$, $M_{xz}(6; 0; 2)$, $M_{yz}(0; 9; -1)$.

2.146. $M_{xy}(9; -4; 0)$, $M_{yz}(0; 2; -3)$, $M_{xz}(3; 0; -2)$.

2.147. $D\left(\frac{12}{14}; -\frac{3}{14}; -\frac{15}{14}\right)$.

2.148. $D\left(1; 1; -\frac{1}{4}\right)$.

2.149. $D(4; 6; 2)$.

2.150. $M(4; -1; -3)$.

2.151. $p = -3$.

2.152. $t = \frac{1}{2}\sqrt{1449} = 19,03$ területegység.

2.153. $V = 4$ térfogategység.

2.154. Metszi; a metszészvonal egyenletrendszere: $x = 1 + t$, $y = 3 - 3t$, $z = 2 + t$.

2.155. $P'(0; 11; -13)$.

2.156. $P' \left(\frac{19}{11}; -\frac{12}{11}; -\frac{23}{11} \right)$.

2.157. $P'(1; 1; 6)$

2.158. $P'(9; 0; 1)$.

2.159. $x - y - z + 2 = 0$.

2.160. $2x - 3y - 4z + 17 = 0$.

2.161. $x = -1$, $y = 5 - 3t$, $z = 5 + t$.

2.162. 0° .

2.163. $5x - 8y + 3z + 14 = 0$.

2.164. $A' \left(\frac{53}{7}; \frac{5}{7}; \frac{20}{7} \right)$.

2.165. $x = 1 + 2t$, $y = 2t$, $z = -2 - \frac{1}{3}t$.

2.166. $x = 7 + 3t$, $y = 1 - 4t$, $z = 2 - 3t$; igen.

2.167. S: $x - 3y + 2z + 6 = 0$. e'_2 : $14x = 25 - 14t$, $14y = 23 + 14t$, $14z = -20 + 28t$.

2.168. a) 60° ; b) 45° ; c) 90° ; d) $43,4^\circ$.

2.169. a) 0° ; b) $24,22^\circ$; c) $26,56^\circ$; d) 30° .

2.170. a) 90° ; b) $61,87^\circ$; c) $82,34^\circ$; d) 45° .

2.171. Az e_2 egyenes az e_1 egyenessel zár be nagyobb szöget.

2.172. $d = \frac{\sqrt{5220}}{11} = 6,568$ egység.

2.173. $d = \sqrt{\frac{122}{19}} = 2,53$ egység.

2.174. $d = \frac{44}{19} = 2,32$ egység.

2.175. $d = \frac{3}{\sqrt{14}} = 0,8$ egység.

2.176. $d = 24,5$ egység.

2.177. $d = 0$.

2.178. a) $A \neq 7$; b) $A = 7$, $B = 3$; c) $A = 7$, $B \neq 3$.

2.179. $x + y - 2z + 1 = 0$.

2.180. Az AB szakasz felezőmerőleges-síkjának és az adott egyenesnek a dőfés-pontja a keresett pont: $P(-2; 2; 2)$.

2.181. Egy keresett egyenes az $\frac{x - 8y + 4z}{9} = 5$ és a $\frac{4x + 20y - 5z}{21} = 5$ síkok met-

szészvonala: $x = \frac{215}{7} - 40t$; $y = 21t$, $z = \frac{25}{7} + 52t$.

2.182. $x + y - z - 3 = 0$.

2.183. A feladat feltételének két pont felel meg, a $P_1(0; 0; -\frac{2}{7})$ és a $P_2(0; 0; -\frac{28}{5})$ pont.

2.184. A keresett P pont az $x = 3 - 3t$, $y = -1 + 2t$, $z = t$ egyenletű metszészvonal és az $x + 2y + z - 1 = 0$ egyenletű, az adott síkok távolságát felező sík dőféspontja: $P(-1; 3; 0)$.

2.185. Két szögfelező sík van, ezek egyenlete $z+1=0$, illetve $x+2y=0$. A P pontra az első sík illeszkedik.

2.186. $d = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,707$ egység.

2.187. $d = \sqrt{18} = 4,24$ egység.

2.188. Az első síkpár metszésvonala: $x=1, y=t, z=t$; a második síkpár metszésvonala: $x=2t, y=-t, z=-2$. A távolság $d=1$ egység.

2.189. $x = 6-3t, y = -4+2t, z = 8-4t$.

2.190. A t_n normáltranszverzális egyenletrendszere: $x = 3+3t, y = 1+2t, z = 4-3t$. A t_n és e_1 metszéspontja: $M_1(3; 1; 4)$, a t_n és e_2 metszéspontja: $M_2(6; 3; 1)$. $M_1M_2 = \sqrt{22} = 4,69$ egység.

2.191. A metszésvonal vektoregyenlete: $\mathbf{r}(t) = -t\mathbf{i} - (7+5t)\mathbf{j} - 9(1+t)\mathbf{k}$; az egyenes vektoregyenlete: $\mathbf{r}(t) = (2-t)\mathbf{i} + (1-5t)\mathbf{j} + (6-9t)\mathbf{k}$; $d = \sqrt{\frac{22}{107}} = 0,453$ egység.

2.192. $2x-13y+7z-90=0$; $m = \frac{86}{\sqrt{222}} = 5,77$ egység.

2.193. $F(0; 2; 4)$; $T\left(-\frac{7}{9}; \frac{14}{9}; \frac{14}{9}\right)$; $FT = 2\sqrt{3} = 3,46$ egység;
 $\mathbf{r}(t) = -t\mathbf{i} + (2+11t)\mathbf{j} + (4+11t)\mathbf{k}$.

2.194. $\mathbf{n}_1(3; 1; -2)$; $\mathbf{n}_2(1; 2; 0)$; $\mathbf{m}(4; -2; 5)$; $V = \frac{15}{2\sqrt{3150}} = 0,134$ térfogategység. A vektorok irányításától függően nyolc különböző helyzetű, de azonos térfogatú tetraéder van.

2.195. A két egyenes síkja: $2x+y-2z=4$. A vetületi egyenes egyenletrendszere:
 $x = \frac{17}{3} + t, y = -\frac{2}{3} - 2t, z = \frac{10}{3}$, a két egyenes párhuzamos.

2.196. A tetraéder csúcspontjai: $A(1; 0; 2)$, $B(-1; 2; 1)$, $C(3; 2; 0)$, $D(-2; 2; 1)$.
A térfogat: $V = \frac{1}{3}$ térfogategység; a felszín: $F = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{104} + \sqrt{168} + \sqrt{5}) = 13,2$ területegység.

2.197. A lapok síkjának egyenlete: $x+3y+4z=9$; $y=z$; $x+4y+3z=11$; $y+2z=4$; az A csúcsból húzható magasság hossza: $m=1$ egység.

2.198. A $\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2\overrightarrow{P_1P_2}=0$ egyenletből $p=2$. A sík egyenlete $x+8y-3z-20=0$.
 $d = -\frac{20}{\sqrt{74}} = 2,32$ egység.

2.199. $P(1; 1; -1)$; $d=3$ egység.

2.200. Az egyenes egyenletrendszere: $x = 1+22t, y = -2-16t, z = 3-21t$. A két egyenes metszi egymást, a metszéspont $M(12; -10; -7,5)$. A sík egyenlete: $26x-107y+92z-692=0$. A távolság $d = \frac{13\sqrt{21}}{21} = 2,84$ egység.

3. fejezet

- 3.1.** a) $D=0$; b) $D=-6+i$;
c) $D=-2i+18j+3k$; d) $D=40$;
e) $D=28$; f) $D=-48$.

3.2. Az első oszlopot a másodikból és a harmadikból levonva, az állítás igazolható.

- 3.3.** a) $x_1=2, x_2=3$; b) $x_1=x_2=1, x_3=-2$;
c) $x=9$; d) $x_1=0$ és $x_2=-2$.

3.4. $-\sin^2 2x - \cos^2 2x + \sin^2 x + \cos^2 x = 0$.

3.5. $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 4 & -1 \\ 9 & 9 \end{bmatrix}$.

3.6. c) és d) igaz.

3.7. $\begin{bmatrix} -13i & 2-3i \\ -7 & -3+8i \end{bmatrix}$.

3.8. Nem, mivel \mathbf{A} és \mathbf{B} nem szorozhatók össze.

3.9. $\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 1 & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & 1 \end{bmatrix}$.

14. fejezet

13.82. $\frac{1}{144}$.

13.83. a) $\frac{1}{48}$; b) $\frac{1}{4}$.

13.84. $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} e^4 - e^2 + e - \frac{1}{4} \right)$.

13.85. 4.

13.86. 0.

13.87. $\frac{2\pi}{3} - \frac{8}{9}$.

13.88. 8.

13.89. 8π .

13.90. $\frac{7}{12}$.

13.91. $\left(0; 0; \frac{4}{3} \right)$.

13.92. $\left(\frac{10}{21}; \frac{5\sqrt{2}}{6}; \frac{10}{21} \right)$.

13.93. a) $(2; 2; 2)$; b) $Q_x = Q_y = Q_z = \frac{2^{14}}{15}$ m.

13.94. a) $(0; 0; 3)$; b) $Q_x = Q_y = Q_z = \frac{64}{5}$ m; $Q_s = \frac{64}{5}$ m.

13.95. a) $\left(1; 1; \frac{1}{2} \right)$; b) $Q_x = Q_y = \frac{32}{3}$ m; $Q_z = \frac{256}{15}$ m; $Q_s = \frac{512}{45}$ m.

14.1. a) $\dot{\mathbf{r}}(t) = (2t \sin t + t^2 \cos t) \mathbf{j} + 6e^{2t} \mathbf{j} + \frac{1}{2\sqrt{t(1+t)}} \mathbf{k}$;

b) $\dot{\mathbf{r}}(t) = \frac{2}{(1-t)^2} \mathbf{i} + \frac{5}{\cos^2 5t} \mathbf{j} + \frac{t}{1+t^2} \mathbf{k}$;

c) $\dot{\mathbf{r}}(t) = \frac{1+3t^2}{2\sqrt{t+t^3}} \mathbf{i} + \left(\operatorname{Arcsin} t + \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \right) \mathbf{j} - \left[\left(\operatorname{ch} \frac{1+t^2}{1+t} \right) \frac{t^2+2t-1}{(1+t)^2} \right] \mathbf{k}$.

14.2. a) $\ddot{\mathbf{r}}(t) = 20t^3 \mathbf{i} + (9 \operatorname{sh} 3t) \mathbf{j} - \frac{1}{(t+1)^2} \mathbf{k}$;

b) $\ddot{\mathbf{r}}(t) = 9(\ln^2 2) 2^{3t} \mathbf{i} + (16 \cos 4t) \mathbf{j} - \frac{1}{4\sqrt{(1-t)^3}} \mathbf{k}$;

c) $\ddot{\mathbf{r}}(t) = \frac{2}{(1+t)^3} \mathbf{i} + \frac{16t}{(1+4t^2)^2} \mathbf{j} + 48(2t+3)^2 \mathbf{k}$.

14.3.

$$\mathbf{r}^{(n)}(t) = (5 \ln 3)^n 3^{5t} \mathbf{i} + (-1)^{n-1} \frac{(n-1)! 3^n}{(1+3t)^n} \mathbf{j} + (-1)^n \frac{(2n-3)!}{2^n} (1+t)^{-\frac{2n-1}{2}} \mathbf{k}.$$

14.4. $\mathbf{t} = -\frac{1}{9} \mathbf{i} - \frac{4}{9} \mathbf{j} + \frac{8}{9} \mathbf{k}$.

14.5. $\frac{x+1}{1} = \frac{y-5}{4} = \frac{z-4}{4}$.

14.6. $\mathbf{r}(t^*) = 4(1+t^*) \mathbf{i} + \frac{1}{4}(2+t^*) \mathbf{j} + (2+t^*) \mathbf{k}$.

14.7. Egy ilyen pont van, a $t_0=0$ paraméterértékhez tartozó $P(1; 1; 1)$ pont.

14.8. $P_1(0; 0; 0)$; $P_2\left(\frac{1}{4}; -\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$; $P_3\left(4; -\frac{8}{3}; 2\right)$.

14.9. Két ilyen pont van, a $P_1(3; -1; 2)$ és a $P_2\left(\frac{19}{2}; \frac{1}{27}; \frac{2}{3}\right)$ pont.

14.34. $s = (e^3 - 1) \sqrt[3]{3}$ ($= 33,06$) egység.

14.35. $s = 8\pi$ ($= 25,13$) egység.

14.36. $s = \frac{1}{4} \ln 9 + 48$ ($= 48,55$) egység.

14.37. a) $s = 100$ egység; b) $s = c$ egység.

14.38. $r(u, v) = (2 + 2u - v)\mathbf{i} + (3 + 2u)\mathbf{j} + (5 - 11u - 3v)\mathbf{k}$.

14.39. $r(u, v) = (2 \cos u)\mathbf{i} + (2 \sin u)\mathbf{j} + v\mathbf{k}$.

14.40. $r(u, v) = (2 \operatorname{ch} u + 4v)\mathbf{i} + (2 \operatorname{sh} u + 2v)\mathbf{j} + 5v\mathbf{k}$.

14.41. $r(u, v) = (uv - 2v + 2)\mathbf{i} + (2v\sqrt{u} + v + 1)\mathbf{j} + (3 - 3v)\mathbf{k}$.

14.42. $r(u, v) = [(a + b \cos u) \cos v]\mathbf{i} + [(a + b \cos u) \sin v]\mathbf{j} + (b \sin u)\mathbf{k}$.

14.43. Ha u -t választjuk paraméternek, akkor $r(u) = (u + 2u^2)\mathbf{i} - u^2\mathbf{j} + 4u^2\mathbf{k}$, ha v -t, akkor $r(v) = (\sqrt{v} + 2v)\mathbf{i} - v\mathbf{j} + 4v\mathbf{k}$.

14.44. $r(t) = (2 + 2\sqrt[3]{3}t)\mathbf{i} + 3t\mathbf{j} + (2\sqrt[3]{3} - 2t)\mathbf{k}$.

14.45. $4x + 17y + 13z + 20 = 0$.

14.46. $3x - 32y + 128z + 16 = 0$.

14.47. $3\sqrt[3]{3}x - 3y + 4z - 4\pi = 0$.

14.48. Érintő sík e pontban nincs.

14.49. $\operatorname{grad} u = 15\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$.

14.50. a) $\operatorname{grad} u = 6xy^3\mathbf{i} + (9x^2y^2 - 2z^2)\mathbf{j} - 4yz\mathbf{k}$.
b) $\operatorname{grad} u = \left(2e^{2x} \cos y + \frac{\operatorname{ch} x}{2y+z} \right) \mathbf{i} - \left(e^{2x} \sin y - \frac{2 \operatorname{sh} x}{(2y+z)^2} \right) \mathbf{j} + \left(e^{2x} \cos y + \frac{\operatorname{sh} x}{(2y+z)^2} \right) \mathbf{k}$;

14.51. a) $\operatorname{grad} u = \mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$; b) $\operatorname{grad} u = 6\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$;

c) $\operatorname{grad} u = \frac{e^3}{3}(2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k})$.

14.52. a) $\operatorname{grad} u = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$; b) $\operatorname{grad} u = e\mathbf{i} + (\pi + 1)\mathbf{j} - \mathbf{k}$ ($= 2,72\mathbf{i} + 4,14\mathbf{j} - \mathbf{k}$);

c) $\operatorname{grad} u = \frac{\sqrt{26}}{26}(3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + \mathbf{k})$.

14.53. a) $\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$ ($= \mathbf{r}_0$); b) $3|\mathbf{r}|\mathbf{r}$; c) $\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^2}$; d) $2\left(1 - \frac{1}{|\mathbf{r}|^4}\right)\mathbf{r}$.

14.54. $\operatorname{grad} u(0) = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$; $|\operatorname{grad} u(0)| = 7$;
 $\operatorname{grad} u(P) = 7\mathbf{i}$; $|\operatorname{grad} u(P)| = 7$; $\operatorname{grad} u = \mathbf{0}$ az $A(-2; 1; 1)$ pontban.

14.55. Derékszöget.

14.56. a) $\operatorname{div} \mathbf{v} = 3$; b) $\operatorname{div} \mathbf{v} = 2$; c) $\operatorname{div} \mathbf{v} = ye^{xy} + ze^{yz} + xe^{xz}$.

14.57. a) $\operatorname{div} \mathbf{v} = 6$; b) $\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{11}{6}$; c) $\operatorname{div} \mathbf{v} = -26$.

14.58. a) $\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{2}{|\mathbf{r}|}$; b) $\operatorname{div} \mathbf{v} = 4|\mathbf{r}|$; c) $\operatorname{div} \mathbf{v} = 6|\mathbf{r}|^3$.

14.59. Igen, mert $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$.

14.60. Nem, mert $\operatorname{div} \mathbf{v} = 3 \neq 0$.

14.61. a) $\operatorname{rot} \mathbf{v} = 2(y-x)\mathbf{i} + 2(z-x)\mathbf{j} + 2(x-y)\mathbf{k}$;
b) $\operatorname{rot} \mathbf{v} = \mathbf{j} + \mathbf{k}$; c) $\operatorname{rot} \mathbf{v} = -(ye^{yz}\mathbf{i} + ze^{xz}\mathbf{j} + xe^{xy}\mathbf{k})$.

14.62. a) $\operatorname{rot} \mathbf{v} = 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$; b) $\operatorname{rot} \mathbf{v} = \frac{2}{9}\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \frac{1}{4}\mathbf{k}$; c) $\operatorname{rot} \mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$.

14.63. a) $\operatorname{rot} \mathbf{v} = \mathbf{0}$; b) $\operatorname{rot} \mathbf{v} = \mathbf{0}$; c) $\operatorname{rot} \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

14.64. Igen, mert $\operatorname{rot} \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

$$14.66. \operatorname{div} \mathbf{v} = 3; \operatorname{rot} \mathbf{v} = 2(z-y)\mathbf{i} - 2x\mathbf{j} - 7\mathbf{k}.$$

$$14.67. \operatorname{div} \mathbf{v} = 6xyz; \operatorname{rot} \mathbf{v} = x(z^2 - y^2)\mathbf{i} + y(x^2 - z^2)\mathbf{j} + z(y^2 - x^2)\mathbf{k}.$$

$$14.68. \operatorname{div} \mathbf{v} = -\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right); \operatorname{rot} \mathbf{v} = \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)\mathbf{k}.$$

$$14.69. \operatorname{div} \mathbf{v} = 2xyz(\cos x^2yz + \cos xy^2z + \cos xyz^2), \\ \operatorname{rot} \mathbf{v} = x(z^2 \cos xyz^2 - y^2 \cos xy^2z)\mathbf{i} + y(x^2 \cos x^2yz - z^2 \cos xyz^2)\mathbf{j} + \\ + z(y^2 \cos xy^2z - x^2 \cos x^2yz)\mathbf{k}.$$

$$14.70. \operatorname{div} \mathbf{v} = 2; \operatorname{rot} \mathbf{v} = \frac{1}{2}\mathbf{i}.$$

$$14.71. \operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{1}{14}; \operatorname{rot} \mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

$$14.72. \operatorname{div} \mathbf{v} = -\left(\frac{16}{\pi^2} + 6\right) (= -7,62); \\ \operatorname{rot} \mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - \left(8 + \frac{4}{\pi}\right)\mathbf{k} (= 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 9,27\mathbf{k}).$$

$$14.73. \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{v} = -(y^2 + z^2)e^{xy}\mathbf{i} - (x^2 + z^2)e^{xz}\mathbf{j} - (x^2 + y^2)e^{xy}\mathbf{k}.$$

$$14.74. \operatorname{rot} \mathbf{v} = -\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}; \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{v} = 3\mathbf{i} + \mathbf{k}; \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{v} = 0.$$

$$14.75. \operatorname{div} \operatorname{grad} u = 14.$$

$$14.76. \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} = 5\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}.$$

$$14.77. \operatorname{div} \operatorname{grad} \mathbf{r}^2 = 6; \operatorname{rot} \operatorname{grad} \mathbf{r}^2 = \mathbf{0}.$$

$$14.78. 4.$$

$$14.79. a) 0; b) 0; c) 0; d) 0; e) \frac{1}{2} \ln 2; f) -\frac{1}{2} \ln 2; g) 0.$$

$$14.80. 9.$$

$$14.81. \frac{43}{105} (= 0,4095).$$

$$14.83. -\frac{71}{6} (= 11,83).$$

14.84. Mivel a vektorfüggvénynek van potenciálfüggvénye, ezért a zárt görbénél szűkített integrál értéke 0.

$$14.85. -\frac{143}{4} (= -35,75).$$

$$14.86. \frac{5}{18} - \ln 4 (= -1,11).$$

$$14.87. 2\pi.$$

$$14.88. 12 + \ln 2 - \ln 3 (= 11,6).$$

$$14.89. 16(e^{16} - \ln 2) - e (= 1,4218 \cdot 10^8).$$

$$14.90. I = \left[xy + xz + yz \right]_{P(0; 1; 1)}^{Q(0; -1; 1)} = 0.$$

$$14.91. \frac{5}{4}.$$

$$14.92. \frac{\pi}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2} \right) (= 0,12).$$

$$14.93. 2(\sqrt{3} - \sqrt{2}) - \frac{5}{4} + \ln \frac{3}{2} + \frac{(3+2\sqrt{3})\pi}{48} (= -0,2392).$$

$$14.94. \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \left(y^x \ln y - \frac{y}{x^2 + y^2} \right) \mathbf{i} + \left(xy^{x-1} + \frac{x}{x^2 + y^2} \right) \mathbf{j}; \quad 3 \text{ egység.}$$

$$14.95. \mathbf{v} = \left((y+z)^2 - \frac{1}{x} \right) \mathbf{i} + \left(2x(y+z) - \frac{1}{y} \right) \mathbf{j} + \left(2x(y+z) + \frac{1}{z} \right) \mathbf{k}; \quad I = 12.$$

$$14.96. \mathbf{v} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{z^5}} \mathbf{i} + \frac{3}{2} \sqrt{xyz^5} \mathbf{j} + \frac{5}{2} \sqrt{xy^3 z^3} \mathbf{k}; \quad I = 0.$$

$$14.97. \mathbf{v} = \left(-y \sin xy + \frac{z}{\cos^2 xz} \right) \mathbf{i} + (z \cos yz - x \sin xy) \mathbf{j} + \left(y \cos yz + \frac{x}{\cos^2 xz} \right) \mathbf{k}; \quad I=0.$$

14.98. a) Van. $u = x^2y - xz^2 + yz^2 - xyz + K.$

b) Van. $u = \operatorname{Arccos} \frac{z}{xy} + K.$

14.99. a) Igen, $u = x^2y \ln z + e^{xy} + z^3 + K;$ b) igen,

$u = y\sqrt{x+x\sqrt{y}} + (x+y)\sqrt{z} + K;$ c) nem.

14.100. $p=8;$ $u = 3x^2yz + 4xy^3z^2 + K.$