Az informatika logikai alapjai

Mihálydeák Tamás
mihalydeak@inf.unideb.hu
www.inf.unideb.hu/szamtud/tagok/?mihalydeak

2007. április 12.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés **2**
1.1. A logika feladata . . . 2
1.2. A helyes következtetés . . . 2

2. A klasszikus nulladrendű logika szabatos felépítése **3**
2.1. A klasszikus nulladrendű logika nyelve . . . 3
2.2. A klasszikus nulladrendű logika szemantikája . . . 4
2.2.1. Az interpretáció fogalma . . . 4
2.2.2. Szemantikai szabályok . . . 5
2.3. Centrális logikai (szemantikai) fogalmak . . . 5
2.3.1. Interpretáció, modell . . . 5
2.3.2. Centrális logikai (szemantikai) fogalmak . . . 6
2.3.3. A centrális logikai fogalmak tulajdonságai . . . 6
2.4. Az igazságfunktorok tulajdonságai . . . 7
2.4.1. Az negáció tulajdonságai . . . 7
2.4.2. A konjunkció tulajdonságai . . . 8
2.4.3. Az diszjunkció tulajdonságai . . . 8
2.4.4. A konjunkció és az diszjunkció kapcsolata . . . 9
2.4.5. Az implikáció tulajdonságai . . . 10
2.4.6. Az ekvivalencia tulajdonságai . . . 10
2.4.7. Az igazságfunktorok egymással való kifejezhetősége . . . 11
2.4.8. Az igazságfunktorok elmélete . . . 11
2.5. Formulák különböző átalakításai . . . 12
2.5.1. Zárójelelhagyási konvenciók . . . 12

3. Logikai kalkulusok: a klasszikus állításkalkulus **14**
3.1. Klasszikus állításkalkulus Frege-Hilbert stílusú felépítése . . . 14
3.1.1. Következményreláció I. (strukturális induktív definíció) . . . 14
3.1.2. Következményreláció II. . . . 15

4. A természetes levezetés rendszere **16**
4.1. A természetes levezetés technikájának strukturális szabályai . . . 17
4.2. A természetes levezetés technikájának logikai szabályai . . . 17
4.3. Példák . . . 18

5. A klasszikus elsőrendű logika szabatos felépítése **28**
5.1. A klasszikus elsőrendű logika nyelve 28
5.2. A klasszikus elsőrendű logika szemantikája 29
5.2.1. Az interpretáció fogalma 29
5.2.2. Az értékelés fogalma 30
5.2.3. Szemantikai szabályok 30
5.3. Centrális logikai (szemantikai) fogalmak 32
5.3.1. Interpretáció, értékelés, modell 32
5.3.2. Centrális logikai (szemantikai) fogalmak 32
5.3.3. A változók előfordulásai 33
5.3.4. Metatételek 33
5.3.5. A kvantifikáció törvényei 34
5.3.6. Változók behelyettesíthetősége 35

6. Példák klasszikus elsőrendű nyelvekre **36**
6.1. A Subset (Részh) nyelv 36
6.2. Az elemi aritmetika nyelve (Ar) 37

7. Klasszikus elsőrendű kalkulus **39**
7.1. A kalkulus és a logika kapcsolata 40

8. A természetes levezetés az elsőrendű logikában **41**

1. Bevezetés

1.1. A logika feladata

- A helyes következtetés törvényszerűségeinek a feltárása
- Az információközlésben kulcsszerepet játszó kifejezések jelentésének a megadása

1.2. A helyes következtetés

1. Következtetés: viszony (a premisszák és a konklúzió között)
2. Helyes következtetés: a premisszák igazsága maga után vonja a konklúzió igazságát (a premisszák valamely tulajdonsága öröklődik a konklúzióra)
3. Logikailag helyes következtetés: ha az örökítés szükségszerű

Notes:

1. A bizonyító érvelés
2. Az ellentmondás elve: "A legbiztosabb alapelv ... ez: lehetetlen, hogy egy és ugyanaz a valami ugyanakkor, ugyanabban a tekintetben ... vonatkozzék is valamire, meg nem is." (1005b19-23)
3. A kizárt harmadik elve: "Az ellentmondás két tagja között nem állhat fenn semmi közbeeső, hanem mindenről mindent vagy állítani vagy tagadni kell."(1011b 23-24)

Notes:

2. A klasszikus nulladrendű logika szabatos felépítése

2.1. A klasszikus nulladrendű logika nyelve

Definíció:
Klasszikus nulladrendű nyelven az

$$L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$$

rendezett hármast értjük, ahol

1. $LC = \{\neg, \supset, \wedge, \vee, \equiv, (,)\}$ (a nyelv logikai konstansainak halmaza).
2. $Con \neq \emptyset$ a nyelv nemlogikai konstansainak (állításvagy kijelentés-paramétereinek) legfeljebb megszámlálhatóan végtelen halmaza.
3. Az $LC \cap Con = \emptyset$

Notes:

4. A nyelv formuláinak a halmazát, azaz a $Form$ halmazt az alábbi induktív definíció adja meg:
   (a) $Con \subseteq Form$
   (b) Ha $A \in Form$, akkor $\neg A \in Form$.
   (c) Ha $A, B \in Form$, akkor
   $(A \supset B) \in Form$,
   $(A \wedge B) \in Form$,
   $(A \vee B) \in Form$,
   $(A \equiv B) \in Form$.

Megjegyzés: A Con halmaz elemeit atomi formuláknak vagy prímformuláknak nevezzük.

Notes:

A részformula induktív definíciója:

1. Egy formula közvetlen részformulájának értelmezése:
   - Ha A atomi formula, akkor nincs közvetlen részformulája;
   - $\neg A$ egyetlen közvetlen részfomulája A;
   - Az $(A \supset B), (A \wedge B), (A \vee B), (A \equiv B)$ formulák közvetlen részformulái az A és a B formulák;
2. Egy A formula részformuláinak halmaza az a legszűkebb halmaz, amelynek
   - eleme az A formula;
   - ha egy A' formula eleme, akkor A' összes közvetlen részformulája is eleme.

Notes:

Az A formula szerkezeti fáján egy olyan véges rendezett fát értünk, amelynek csúcsai formulák,

1. gyökere az A formula,
2. $\neg B$ alakú csúcsának egyetlen gyermeke a B formula,
3. $(B \supset C), (B \wedge C), (B \vee C), (B \equiv C)$ alakú csúcsainak két gyermekét a B, illetve a C formulák alkotják,
4. levelei prímformulák.

Notes:

2.2. A klasszikus nulladrendű logika szemantikája

2.2.1. Az interpretáció fogalma

A ϱ függvényt az $L^{(0)}$ nyelv egy *interpretáció*jának nevezzük, ha

- $Dom(\varrho) = Con$
- Ha $p \in Con$, akkor $\varrho(p) \in \{0, 1\}$.

Notes:

2.2.2. Szemantikai szabályok

Legyen adott egy ϱ interpretáció.

- Ha $p \in Con$, akkor $|p|_\varrho = \varrho(p)$
- Ha $A \in Form$, akkor $|\neg A|_\varrho = 1 - |A|_\varrho$.
- Ha $A, B \in Form$, akkor

$$|(A \supset B)|_\varrho = \begin{cases} 0 & \text{ha } |A|_\varrho = 1, \text{ és } |B|_\varrho = 0; \\ 1, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

$$|(A \wedge B)|_\varrho = \begin{cases} 1 & \text{ha } |A|_\varrho = 1, \text{ és } |B|_\varrho = 1; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

$$|(A \vee B)|_\varrho = \begin{cases} 0 & \text{ha } |A|_\varrho = 0, \text{ és } |B|_\varrho = 0; \\ 1, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

$$|(A \equiv B)|_\varrho = \begin{cases} 1 & \text{ha } |A|_\varrho = |B|_\varrho; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Notes:

2.3. Centrális logikai (szemantikai) fogalmak

2.3.1. Interpretáció, modell

- Ha A formula, akkor $|A|_\varrho$ az A formula szemantikai értéke a ϱ interpretációban.
- A nulladrendű nyelv egy adott formulahalmazának modellje: modellen egy olyan interpretációt értünk, amelyben a tekintett formulahalmaz minden eleme igaz.
- $\Gamma \subseteq Form$: formulahalmaz; a ϱ interpretáció modellje a Γ formulahalmaznak, ha minden $A \in \Gamma$ esetén $|A|_\varrho = 1$
- $\varrho \vDash A$ (vagy $\vDash_\varrho A$), ha $|A|_\varrho = 1$

Notes:

2.3.2. Centrális logikai (szemantikai) fogalmak

- Kielégíthetőség: Egy fomulahalmaz kielégíthető, ha van modellje.(Van olyan interpretáció, amelyben a formulahalmaz minden eleme igaz.)
- Kielégíthetetlenség: Egy formulahalmaz kielégíthetetlen, ha nem kielégíthető.
  - Kielégíthető: nem tartalmaz logikai ellentmondást.
  - Kielégíthetetlen: logikai ellentmondást tartalmaz.
- A Γ formulahalmaznak logikai következménye az A formula ($\Gamma \vDash A$), ha a $\Gamma \cup \{\neg A\}$ formulahalmaz kielégíthetetlen.
- Az A formula érvényes ($\vDash A$), ha $\emptyset \vDash A$.
- Az A és a B formula logikailag ekvivalens, ha $\{A\} \vDash B$ és $\{B\} \vDash A$. Jelölés: $A \Leftrightarrow B$
- $A \vDash B$, ha $\{A\} \vDash B$.

Notes:

2.3.3. A centrális logikai fogalmak tulajdonságai

- Egy kielégíthető formulahalmaz minden részhalmaza kielégíthető. (A logikai ellentmondástalanság szűkítéssel nem rontható el.)
- Egy kielégíthetetlen formulahalmaz minden bővítése kielégíthetetlen. (A logikai ellentmondás bővítéssel nem szüntethető meg.)
- Ha A érvényes formula ($\vDash A$), akkor minden Γ formulahalmaz esetén $\Gamma \vDash A$. (Egy érvényes formula minden formulahalmaznak következménye.)
- Ha a Γ formulahalmaz kielégíthetetlen, akkor minden A formula esetén $\Gamma \vDash A$. (Egy kielégíthetetlen formulahalmaznak minden formula következménye.)

Notes:

- Dedukció tétel:
  Ha $\Gamma \cup \{A\} \vDash B$, akkor $\Gamma \vDash (A \supset B)$.
  - Bizonyítás: indirekt.
- A dedukció tétel megfordítása:
  Ha $\Gamma \vDash (A \supset B)$, akkor $\Gamma \cup \{A\} \vDash B$.
  - Bizonyítás: indirekt.
- Következmény:
  $A \vDash B$ akkor és csak akkor, ha $\vDash (A \supset B)$
  - Bizonyítás: Az előző két tételben legyen $\Gamma = \emptyset$.
- Metszet tétel:
  Ha $\Gamma \cup \{A\} \vDash B$ és $\Delta \vDash A$, akkor $\Gamma \cup \Delta \vDash B$.
  - Bizonyítás: indirekt.

Notes:

2.4. Az igazságfunktorok tulajdonságai

2.4.1. Az negáció tulajdonságai

- Az negáció igazságtáblázata:

$\neg$	$\neg p$
0	1
1	0

- A kettős negáció törvénye: $\neg\neg A \Leftrightarrow A$

Notes:

2.4.2. A konjunkció tulajdonságai

- A konjunkció igazságtáblázata:

$\wedge$	0	1	(q)
0	0	0	
1	0	1	
(p)			

- A konjunkció tulajdonságai:
  - Felcserélhető (kommutatív): $(A \wedge B) \Leftrightarrow (B \wedge A)$ bármely $A, B \in Form$ esetén.
  - Csoportosítható (asszociatív): $(A \wedge (B \wedge C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \wedge C)$ bármely $A, B, C \in Form$ esetén.
  - Idempotens: $(A \wedge A) \Leftrightarrow A$ bármely $A \in Form$ esetén.
  - $(A \wedge B) \vDash A$, $(A \wedge B) \vDash B$
  - Az ellentmondás törvénye: $\vDash \neg(A \wedge \neg A)$

Notes:

2.4.3. Az diszjunkció tulajdonságai

- Az diszjunkció igazságtáblázata:

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

- Az diszjunkció tulajdonságai:
  - Felcserélhető (kommutatív): $(A \vee B) \Leftrightarrow (B \vee A)$ bármely $A, B \in Form$ esetén.
  - Csoportosítható (asszociatív): $(A \vee (B \vee C)) \Leftrightarrow ((A \vee B) \vee C)$ bármely $A, B, C \in Form$ esetén.
  - Idempotens: $(A \vee A) \Leftrightarrow A$ bármely $A \in Form$ esetén.
  - $A \vDash (A \vee B)$ bármely $A, B \in Form$ esetén.
  - $\{(A \vee B), \neg A\} \vDash B$
  - A kizárt harmadik törvénye. $\vDash (A \vee \neg A)$

Notes:

2.4.4. A konjunkció és az diszjunkció kapcsolata

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

	1	0
1	1	1
0	1	0

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

A fenti tulajdonság azt jelenti, hogy a konjunkció és az diszjunkció egymás duálisai.
Kétoldali disztributivitás:

- $(A \vee (B \wedge C)) \Leftrightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$
- $(A \wedge (B \vee C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$

Elnyelési tulajdonság

- $(A \wedge (B \vee A)) \Leftrightarrow A$
- $(A \vee (B \wedge A)) \Leftrightarrow A$

Notes:

- A negáció, a konjunkció és az diszjunkció kapcsolata, a De Morgan törvények:
- Mit állítunk akkor, amikor egy konjunkciót tagadunk?
- Mit állítunk akkor amikor egy diszjunkció tagadunk?
  - $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$
  - $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$
  - A De Morgan törvények bizonyítása.

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg A \wedge \neg B)$	$(A \vee B)$	$\neg(A \vee B)$
0	0	1	1	1	0	1
0	1	1	0	0	1	0
1	0	0	1	0	1	0
1	1	0	0	0	1	0

Notes:

2.4.5. Az implikáció tulajdonságai

- Az implikáció igazságtáblázata:

$\supset$	0	1
0	1	1
1	0	1

- $\models A \supset A$
- Modus ponens (leválasztási szabály): $\{(A \supset B), A\} \models B$
- Modus tollens (indirekt cáfolás sémája): $\{(A \supset B), \neg B\} \models \neg A$
- Láncszabály: $\{(A \supset B), (B \supset C)\} \models (A \supset C)$
- Redukció ad abszurdum: $\{(A \supset B), (A \supset \neg B)\} \models \neg A$
- $\neg A \models (A \supset B)$
- $B \models (A \supset B)$
- Áthelyezési törvény: $((A \wedge B) \supset C) \Leftrightarrow (A \supset (B \supset C))$
- Kontrapozíció: $(A \supset B) \Leftrightarrow (\neg B \supset \neg A)$

Notes:

- $(A \supset \neg A) \models \neg A$
- $(\neg A \supset A) \models A$
- $(A \supset (B \supset C)) \Leftrightarrow ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
- $\models (A \supset (\neg A \supset B))$
- $((A \vee B) \supset C) \Leftrightarrow ((A \supset C) \wedge (B \supset C))$

2.4.6. Az ekvivalencia tulajdonságai

- Az ekvivalencia igazságtáblázata:

$\equiv$	0	1
0	1	0
1	0	1

- $\models (A \equiv A)$
- $\models \neg(A \equiv \neg A)$

Notes:

2.4.7. Az igazságfunktorok egymással való kifejezhetősége

- $(A \supset B) \Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$
- $(A \supset B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$
- $(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg(A \supset \neg B)$
- $(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \supset B)$
- $(A \vee B) \Leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$
- $(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$
- $(A \equiv B) \Leftrightarrow ((A \supset B) \wedge (B \supset A))$

Notes:

2.4.8. Az igazságfunktorok elmélete

- A bázis fogalma: Igazságfunktorok egy olyan halmazát értjük bázison, amelynek elemeivel minden igazságfunktor kifejezhető.
  - Például: $\{\neg, \supset\}$,$\{\neg, \wedge\}$,$\{\neg, \vee\}$
  - $\{\neg, \supset\}$:
    1. $(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg(p \supset \neg q)$
    2. $(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \supset q)$
  - Sheffer művelet: $(p|q) \Leftrightarrow_{def} \neg(p \wedge q)$
  - Sem–sem művelet: $(p \parallel q) \Leftrightarrow_{def} (\neg p \wedge \neg q)$
  - Megjegyzés: Mind a Sheffer, mind a sem–sem művelet önmagában bázist alkot.

Notes:

2.5. Formulák különböző átalakításai

Legyen $L^0 = \langle LC, Con, Form \rangle$ állításlogika nyelve:

- Ha $p \in Con$, akkor a $p, \neg p$ formulákat literálnak nevezzük (p a literál alapja).
- Ha az A formula literál vagy különböző alapú literálok konjunkciója, akkor A-t elemi konjunkciónak nevezzük.
- Ha az A formula literál vagy különböző alapú literálok diszjunkciója, akkor A-t elemi diszjunkciónak (vagy klóznak) nevezzük.
- Elemi konjunkciók diszjunkcióját diszjunktív normálformának, elemi diszjunkciók konjunkcióját konjunktív normálformának nevezzük.
- Ha f egy n-argumentumú igazságfunktor, akkor az $f(p_1, \ldots, p_n)$ formula kitüntetett diszjunktív normálformájának minden tagja $p_1, \ldots, p_n$ alapú literálok konjunkciója, kitüntetett konjunktív normálformájának minden tényezője $p_1, \ldots, p_n$ alapú literálok diszjunkciója.

Állítás: Az állításlogika minden formulájához létezik vele logikailag ekvivalens diszjunktív, illetve konjunktív normálforma.
Feladat: Milyen formulákhoz létezik velük ekvivalens kitüntetett diszjunktív, illetve konjunktív normálforma?

Notes:

2.5.1. Zárójelelhagyási konvenciók

A konvenciók célja az egyértelmű olvashatóság fenntartása mellett a formulákban előforduló zárójelek számának a csökkentése.

- A létrejött jelsorozatok betű szerint nem formulák, de egyértelműen előállítható belőlük egy formula.
- A továbbiakban az egyszerűség kedvéért az így létrejött jelsorozatokat is formuláknak nevezzük, s használatukkor mindig a belőlük egyértelműen előállítható formulákra gondolunk.
- A legkülső zárójelpár mindig elhagyható.

Notes:

Elsőbbségi (precedencia vagy prioritás) szabályok:

1. A kétargumentumú logikai konstansok elsőbbségi sorrendje:
$$\wedge, \vee, \supset, \equiv$$
2. A negáció erősebb bármely kétargumentumú logikai konstansnál.
3. Az azonos kétargumentumú logikai konstansok egymás közötti elsőbbségét a balról jobbra szabály rendezi: először mindig a bal oldali formulát tekintjük külön műveleti komponensnek.

Megjegyzés:

- A 3. szabálynak csak az implikációnál és a materiális ekvivalenciánál van jelentősége:
  - az $A \supset B \supset C$ „formula" egyértelműen zárójelezett alakja:
  $$(A \supset (B \supset C));$$
  - az $A \equiv B \equiv C$ „formula" egyértelműen zárójelezett alakja:
  $$(A \equiv (B \equiv C));$$
- A konjunkció és a diszjunkció esetében a műveltek asszociativitása miatt a szabályt nem követő zárójelezések is logikailag ekvivalens formulát eredményeznek. Pl.: az $A \wedge B \wedge C$ „formula" egyértelműen zárójelezett alakja: $(A \wedge (B \wedge C))[\Leftrightarrow ((A \wedge B) \wedge C)]$.

Notes:

3. Logikai kalkulusok: a klasszikus állításkalkulus

3.1. Klasszikus állításkalkulus Frege-Hilbert stílusú felépítése

Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ a klasszikus állításlogika nyelve. A klasszikus állításkalkulus alapsémái (axiómasémái):

- (A1): $A \supset (B \supset A)$
- (A2): $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
- (A3): $(\neg A \supset \neg B) \supset (B \supset A)$

1. Az alapsémák (axómasémák) szabályos behelyettesítésén olyan formulákat értünk, amelyek valamely alapsémából a benne szereplő betűk tetszőleges formulával való helyettesítése útján jönnek létre.
2. A klasszikus állításkalkulus alapformulái (axiómái) az alapsémák (axiómasémák) szabályos behelyettesítései.

Notes:

3.1.1. Következményreláció I. (strukturális induktív definíció)

Legyen $\Gamma \subseteq Form, A \in Form$. A Γ formulahalmaznak szintaktikai következménye az A formula ($\Gamma \vdash A$), ha az alábbiak valamelyike teljesül:

1. ha $A \in \Gamma$, akkor $\Gamma \vdash A$;
2. ha A alapformula (axióma), akkor $\Gamma \vdash A$;
3. ha $\Gamma \vdash B$, és $\Gamma \vdash B \supset A$, akkor $\Gamma \vdash A$.

Notes:

3.1.2. Következményreláció II.

Az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ($A_1, A_2, \ldots, A_n \in Form$) formulasorozatot a Γ ($\subseteq Form$) formulahalmazból való levezetésnek nevezzük, ha a sorozat A_i $(i = 1, 2, \ldots n)$ elemére az alábbiak valamelyike teljesül

1. $A_i \in \Gamma$;
2. A_i alapformula (axióma);
3. ha van olyan j, k index $j, k < i$, hogy $A_k =$ '$A_j \supset A_i$'.

A Γ formulahalmaznak szintaktikai következménye az A formula $(\Gamma \vdash A)$, ha van olyan Γ-ból való levezetés, amelynek utolsó tagja A.

Notes:

Tétel
A következményreláció két definíciója ekivalens, azaz $\Gamma \vdash_1 A$ akkor és csak akkor, ha $\Gamma \vdash_2 A$.
Bizonyítás:
Ha $\Gamma \vdash_1 A$ akkor $\Gamma \vdash_2 A$:

- Ha $A \in \Gamma$, akkor az A formula egy Γ-ból való levezetése maga az A formula, így $\Gamma \vdash_2 A$.
- Ha A alapformula, akkor az A formula egy Γ-ból való levezetése maga az A formula, így $\Gamma \vdash_2 A$.
- Indukciós lépés:
  - Ha $\Gamma \vdash_1 B$, akkor van Γ-ból való levezetése: $B_1, B_2, \ldots, B_k$, ahol $B_k = B$.
  - Ha $\Gamma \vdash_1 B \supset A$, akkor olyan Γ-ból való levezetése: $C_1, C_2, \ldots, C_l$, ahol $C_l = B \supset A$.
  - Ekkor a $B_1, B_2, \ldots, B_k, C_1, C_2, \ldots, C_l, A$ levezetés az A formulának egy Γ-ból való levezetése.

Notes:

Ha $\Gamma \vdash_2 A$ akkor $\Gamma \vdash_1 A$:

- A feltétel szerint A-nak van Γ-ból való levezetése, legyen ez $A_1, A_2, \ldots, A_n$, ahol $A_n = A$.
- A levezetés tagjai szerinti indukció:
  - Ha A_i alapformula, akkor $\Gamma \vdash_1 A_i$.
  - Ha $A_i \in \Gamma$, akkor $\Gamma \vdash_1 A_i$.
  - Ha van olyan j, k index $j, k < i$, hogy $A_k = A_j \supset A_i$, akkor $\Gamma \vdash_1 A_j$ és $\Gamma \vdash_1 A_j \supset A_i$ miatt $\Gamma \vdash_1 A_i$.

Notes:

4. A természetes levezetés rendszere

A szekvencia fogalma:
Legyen $\Gamma \subset Form, A \in Form.$ Ha az A formula szintaktikai következménye a Γ formulahalmaznak, akkor a '$\Gamma \vdash A$' jelsorozatot szekvenciának nevezzük.

Az alábbi szabályok rendszerét nevezik a *természetes levezetés technikájának*:

A természetes levezetés technikájának alapvető szabálya a dedukciótételen alapul:

Dedukciótétel: Ha $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$, akkor $\Gamma \vdash A \supset B$.

Másként felírva:

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \supset B}$$

Bizonyítás: gyakorlaton

Notes:

4.1. A természetes levezetés technikájának strukturális szabályai

Legyen a továbbiakban $\Gamma, \Delta \subseteq Form, A, B, C, \in Form$.

Az azonosság törvénye: $\dfrac{\emptyset}{\Gamma, A \vdash A}$

A bővítés szabálya: $\dfrac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, B \vdash A}$

A szűkítés szabálya: $\dfrac{\Gamma, B, B, \Delta \vdash A}{\Gamma, B, \Delta \vdash A}$

A felcserélés (permutálás) szabálya: $\dfrac{\Gamma, B, C, \Delta \vdash A}{\Gamma, C, B, \Delta \vdash A}$

A metszet szabály (vágás szabálya): $\dfrac{\Gamma \vdash A \qquad \Delta, A \vdash B}{\Gamma, \Delta \vdash B}$

Notes:

4.2. A természetes levezetés technikájának logikai szabályai

Az implikáció (bevezető, illetve alkalmazó) szabályai:

$(\supset 1.)$ $\dfrac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \supset B}$ $(\supset 2.)$ $\dfrac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash A \supset B}{\Gamma \vdash B}$

A konjunkció szabályai:

$(\wedge 1.)$ $\dfrac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}$ $(\wedge 2.)$ $\dfrac{\Gamma, A, B \vdash C}{\Gamma, A \wedge B \vdash C}$

A diszjunkció szabályai:

$(\vee 1.)$ $\dfrac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}$ $(\vee 2.)$ $\dfrac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}$

$(\vee 3.)$ $\dfrac{\Gamma, A \vdash C \qquad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \vee B \vdash C}$

A negáció szabályai:

$(\neg 1.)$ $\dfrac{\Gamma, A \vdash B \qquad \Gamma, A \vdash \neg B}{\Gamma \vdash \neg A}$ $(\neg 2.)$ $\dfrac{\Gamma \vdash \neg\neg A}{\Gamma \vdash A}$

Notes:

A (materiális) ekvivalencia szabályai:

Bevezető szabály: $$\frac{\Gamma, A \vdash B \qquad \Gamma, B \vdash A}{\Gamma \vdash A \equiv B}$$

Alkalmazó szabály (1): $$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash A \equiv B}{\Gamma \vdash B}$$

Alkalmazó szabály (2): $$\frac{\Gamma \vdash B \qquad \Gamma \vdash A \equiv B}{\Gamma \vdash A}$$

Notes:

4.3. Példák

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma, \neg B \vdash \neg A} \tag{1}$$

Bizonyítás:

$$\frac{\dfrac{\dfrac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma, A, \neg B \vdash B}\,(\text{Bővítés})}{\Gamma, \neg B, A \vdash B}\,(\text{Felcserélés}) \qquad \dfrac{\dfrac{\emptyset}{\Gamma, A, \neg B \vdash \neg B}\,(\text{Azonosság})}{\Gamma, \neg B, A \vdash \neg B}\,(\text{Felcserélés})}{\Gamma, \neg B \vdash \neg A}\,(\neg\ 1.)$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \neg B}{\Gamma, B \vdash \neg A} \tag{2}$$

Bizonyítás:

$$\frac{\dfrac{\dfrac{\emptyset}{\Gamma, A, B \vdash B}\,(\text{Azonosság})}{\Gamma, B, A \vdash B}\,(\text{Felcserélés}) \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma, A \vdash \neg B}{\Gamma, A, B \vdash \neg B}\,(\text{Bővítés})}{\Gamma, B, A \vdash \neg B}\,(\text{Felcserélés})}{\Gamma, B \vdash \neg A}\,(\neg\ 1.)$$

Notes:

$$\frac{\Gamma, \neg A \vdash B}{\Gamma, \neg B \vdash A} \tag{3}$$

Bizonyítás:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\Gamma, \neg A \vdash B}{\Gamma, \neg A, \neg B \vdash B}\,(\text{Bővítés})}{\Gamma, \neg B, \neg A \vdash B}\,(\text{Felcserélés}) \qquad \cfrac{\cfrac{\emptyset}{\Gamma, \neg A, \neg B \vdash \neg B}\,(\text{Azonosság})}{\Gamma, \neg B, \neg A \vdash \neg B}\,(\text{Felcserélés})}{\cfrac{\Gamma, \neg B \vdash \neg\neg A}{\Gamma, \neg B \vdash A}\,(\neg\ 2.)}\,(\neg\ 1.)$$

$$\frac{\Gamma, \neg A \vdash \neg B}{\Gamma, B \vdash A} \tag{4}$$

Bizonyítás:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\emptyset}{\Gamma, \neg A, B \vdash B}\,(\text{Azonosság})}{\Gamma, B, \neg A \vdash B}\,(\text{Felcserélés}) \qquad \cfrac{\cfrac{\Gamma, \neg A \vdash \neg B}{\Gamma, \neg A, B \vdash \neg B}\,(\text{Bővítés})}{\Gamma, B, \neg A \vdash \neg B}\,(\text{Felcserélés})}{\cfrac{\Gamma, B \vdash \neg\neg A}{\Gamma, B \vdash A}\,(\neg\ 2.)}\,(\neg\ 1.)$$

Notes:

$$\vdash A \supset A \tag{5}$$

Bizonyítás:

$$\cfrac{\cfrac{\emptyset}{A \vdash A}\,(\text{Azonosság})}{\vdash A \supset A}\,(\supset 1.)$$

$$A, A \supset B \vdash B \tag{6}$$

Bizonyítás:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\emptyset}{A \supset B, A \vdash A}}{A,\ A \supset B \vdash A} \qquad \cfrac{\emptyset}{A, A \supset B \vdash A \supset B}}{A, A \supset B \vdash B}$$

Notes:

$$A \vdash B \supset A \tag{7}$$

Bizonyítás:

$$\begin{array}{rc} & \emptyset \\ \cline{2-2} \text{(Azonoság)} & B, A \vdash A \\ \cline{2-2} \text{(Felcserélés)} & A, B \vdash A \\ \cline{2-2} (\supset 1.) & A \vdash B \supset A \end{array}$$

$$A, \neg A \vdash B \tag{8}$$

$$\neg A \vdash A \supset B \tag{9}$$

Bizonyítás (8), (9):

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\emptyset}{A, \neg B, \neg A \vdash \neg A}}{A, \neg A, \neg B \vdash \neg A} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\emptyset}{\neg A, \neg B, A \vdash A}}{\neg A, A, \neg B \vdash A}}{A, \neg A, \neg B \vdash A}}{A, \neg A \vdash \neg\neg B}}{A, \neg A \vdash B}}{\dfrac{\neg A, A \vdash B}{\neg A \vdash A \supset B}}$$

Notes:

$$B \vdash A \supset B \tag{10}$$

Bizonyítás:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\emptyset}{B \vdash B}}{B, A \vdash B}}{B \vdash A \supset B}$$

Notes:

$$\vdash A \supset B \equiv \neg A \vee B \tag{11}$$

Bizonyítás: Először lássuk be, hogy

$$A \supset B \vdash \neg A \vee B \tag{12}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\emptyset}{A \supset B \vdash A \supset B}}{A \supset B, \neg(\neg A \vee B) \vdash A \supset B} \qquad \dfrac{(3)\ \dfrac{\dfrac{\dfrac{\emptyset}{\neg A \vdash \neg A}}{\neg A \vdash \neg A \vee B}}{\neg(\neg A \vee B) \vdash A}}{A \supset B, \neg(\neg A \vee B) \vdash A}}{A \supset B, \neg(\neg A \vee B) \vdash B}$$

$$\dfrac{(1)\ \dfrac{\dfrac{\dfrac{\emptyset}{B \vdash B}}{B \vdash \neg A \vee B}}{\neg(\neg A \vee B) \vdash \neg B}}{A \supset B, \neg(\neg A \vee B) \vdash \neg B}$$

$$\dfrac{\dfrac{A \supset B, \neg(\neg A \vee B) \vdash B \qquad A \supset B, \neg(\neg A \vee B) \vdash \neg B}{A \supset B \vdash \neg\neg(\neg A \vee B)}}{A \supset B \vdash \neg A \vee B}$$

Notes:

(11) bizonyításához lássuk be, hogy

$$\neg A \vee B \vdash A \supset B \tag{13}$$

$$\dfrac{\dfrac{(9)}{\neg A \vdash A \supset B} \qquad \dfrac{(10)}{B \vdash A \supset B}}{\neg A \vee B \vdash A \supset B}$$

Notes:

$$A \supset B, \neg B \vdash \neg A \tag{14}$$

$$A \supset B \vdash \neg B \supset \neg A \tag{15}$$

Bizonyítás (14), (15):

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\emptyset}{A \supset B, A, \neg B \vdash \neg B}}{A \supset B, \neg B, A \vdash \neg B} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\emptyset}{A, A \supset B \vdash B}}{A \supset B, A \vdash B}}{A \supset B, A, \neg B \vdash B}}{A \supset B, \neg B, A \vdash B}}{\dfrac{A \supset B, \neg B \vdash \neg A}{A \supset B \vdash \neg B \supset \neg A}}$$

Notes:

$$\neg B \supset \neg A \vdash A \supset B \tag{16}$$

Bizonyítás:

$$\dfrac{\dfrac{\emptyset}{\neg B \supset \neg A, \neg B, A \vdash A} \qquad \dfrac{\dfrac{\emptyset}{\neg B \supset \neg A, \neg B \vdash \neg A}}{\neg B \supset \neg A, \neg B, A \vdash \neg A}}{\dfrac{\neg B \supset \neg A, A \vdash \neg\neg B}{\dfrac{\neg B \supset \neg A, A \vdash B}{\neg B \supset \neg A \vdash A \supset B}}}$$

(15), (16) alapján:

$$\vdash A \supset B \equiv \neg B \supset \neg A \tag{17}$$

Bizonyítás:

$$\dfrac{A \supset B \vdash \neg B \supset \neg A \qquad \neg B \supset \neg A \vdash A \supset B}{\vdash A \supset B \equiv \neg B \supset \neg A}$$

Notes:

$$\vdash (A \vee \neg A) \tag{18}$$

Bizonyítás:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\emptyset}{A, \neg(A \vee \neg A) \vdash \neg(A \vee \neg A)}}{\neg(A \vee \neg A), A \vdash \neg(A \vee \neg A)} \qquad \dfrac{\dfrac{\emptyset}{\neg(A \vee \neg A), A \vdash A}}{\neg(A \vee \neg A), A \vdash A \vee \neg A}}{\neg(A \vee \neg A) \vdash \neg A}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\emptyset}{\neg A, \neg(A \vee \neg A) \vdash \neg(A \vee \neg A)}}{\neg(A \vee \neg A), \neg A \vdash \neg(A \vee \neg A)} \qquad \dfrac{\dfrac{\emptyset}{\neg(A \vee \neg A), \neg A \vdash \neg A}}{\neg(A \vee \neg A), \neg A \vdash A \vee \neg A}}{\neg(A \vee \neg A) \vdash \neg\neg A}}{\neg(A \vee \neg A) \vdash A}$$

$$\dfrac{\dfrac{\neg(A \vee \neg A) \vdash \neg A \qquad \neg(A \vee \neg A) \vdash A}{\vdash \neg\neg(A \vee \neg A)}}{\vdash (A \vee \neg A)}$$

Notes:

$$A \wedge B \vdash B \wedge A \tag{19}$$

Bizonyítás:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\emptyset}{A, B \vdash B} \qquad \dfrac{\dfrac{\emptyset}{B, A \vdash A}}{A, B \vdash A}}{A, B \vdash B \wedge A}}{A \wedge B \vdash B \wedge A}$$

Notes:

$$A \wedge (B \vee C) \vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \tag{20}$$

Bizonyítás:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\emptyset}{B, A \vdash A}}{A, B \vdash A} \quad \dfrac{\emptyset}{A, B \vdash B}}{A, B \vdash A \wedge B}}{A, B \vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C)} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\emptyset}{C, A \vdash A}}{A, C \vdash A} \quad \dfrac{\emptyset}{A, C \vdash C}}{A, C \vdash A \wedge C}}{A, C \vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C)}}{\dfrac{A, B \vee C \vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C)}{A \wedge (B \vee C) \vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C)}}$$

Notes:

$$(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \vdash A \wedge (B \vee C) \tag{21}$$

Bizonyítás:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\emptyset}{B, A \vdash A}}{A, B \vdash A}}{A \wedge B \vdash A} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\emptyset}{C, A \vdash A}}{A, C \vdash A}}{A \wedge C \vdash A}}{(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \vdash A} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\emptyset}{A, B \vdash B}}{A \wedge B \vdash B}}{A \wedge B \vdash B \vee C} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\emptyset}{A, C \vdash C}}{A \wedge C \vdash C}}{A \wedge C \vdash B \vee C}}{(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \vdash B \vee C}}{(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \vdash A \wedge (B \vee C)}$$

(20) és (21) alapján:

$$\vdash A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \tag{22}$$

Notes:

$$\vdash A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C) \tag{23}$$

Bizonyítás: Először lássuk be, hogy

$$A \vee (B \wedge C) \vdash (A \vee B) \wedge (A \vee C) \tag{24}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\emptyset}{A \vdash A}}{A \vdash A \vee B} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\emptyset}{B \vdash B}}{B, C \vdash B}}{B, C \vdash A \vee B}}{B \wedge C \vdash A \vee B}}{A \vee (B \wedge C) \vdash A \vee B} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\emptyset}{A \vdash A}}{A \vdash A \vee C} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\emptyset}{C \vdash C}}{C \vdash A \vee C}}{B, C \vdash A \vee C}}{B \wedge C \vdash A \vee C}}{A \vee (B \wedge C) \vdash A \vee C}}{A \vee (B \wedge C) \vdash (A \vee B) \wedge (A \vee C)}$$

Notes:

Most lássuk be, hogy

$$(A \vee B) \wedge (A \vee C) \vdash A \vee (B \wedge C) \tag{25}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\emptyset}{A \vdash A}}{A \vdash A \vee (B \wedge C)}}{A \vee B, A \vdash A \vee (B \wedge C)} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\emptyset}{A \vdash A}}{A \vdash A \vee (B \wedge C)}}{A, C \vdash A \vee (B \wedge C)} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\emptyset}{B \vdash B}}{B, C \vdash B} \quad \dfrac{\dfrac{\emptyset}{C \vdash C}}{B, C \vdash C}}{B, C \vdash B \wedge C}}{B, C \vdash A \vee (B \wedge C)}}{A \vee B, C \vdash A \vee (B \wedge C)}}{A \vee B, A \vee C \vdash A \vee (B \wedge C)}}{(A \vee B) \wedge (A \vee C) \vdash A \vee (B \wedge C)}$$

Notes:

$$\vdash (A \supset B) \supset (B \supset C) \supset (A \supset C) \tag{26}$$

Bizonyítás: Használjuk fel már bizonyított (6) szekvenciát.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \supset B, A \vdash B \qquad B, B \supset C \vdash C}{A \supset B, A, B \supset C \vdash C}}{A \supset B, B \supset C, A \vdash C}}{A \supset B, B \supset C \vdash A \supset C}}{A \supset B \vdash (B \supset C) \supset (A \supset C)}}{\vdash (A \supset B) \supset (B \supset C) \supset (A \supset C)}$$

Notes:

$$\vdash (A \supset B) \supset (A \supset (B \supset C)) \supset (A \supset C) \tag{27}$$

Bizonyítás: Használjuk fel már bizonyított (6) szekvenciát.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A, A \supset B \vdash B}{A, A \supset B, A \supset (B \supset C) \vdash B} \qquad \dfrac{A, A \supset (B \supset C) \vdash B \supset C}{A, A \supset B, A \supset (B \supset C) \vdash B \supset C}}{A, A \supset B, A \supset (B \supset C) \vdash C}}{A \supset B, A \supset (B \supset C) \vdash A \supset C}}{A \supset B \vdash (A \supset (B \supset C)) \supset (A \supset C)}}{\vdash (A \supset B) \supset (A \supset (B \supset C)) \supset (A \supset C)}}{}$$

Notes:

A De Morgan azonosságok:

$$\vdash \neg(A \wedge B) \equiv (\neg A \vee \neg B) \tag{28}$$

$$\vdash \neg(A \vee B) \equiv (\neg A \wedge \neg B) \tag{29}$$

A (28) bizonyításához először lássuk be, hogy

$$\neg(A \wedge B) \vdash (\neg A \vee \neg B) \tag{30}$$

$$(3)\,\dfrac{\dfrac{(3)\,\dfrac{\dfrac{\dfrac{\emptyset}{\neg A \vdash \neg A}}{\neg A \vdash \neg A \vee \neg B}}{\neg(\neg A \vee \neg B) \vdash A} \qquad (3)\,\dfrac{\dfrac{\dfrac{\emptyset}{\neg B \vdash \neg B}}{\neg B \vdash \neg A \vee \neg B}}{\neg(\neg A \vee \neg B) \vdash B}}{\neg(\neg A \vee \neg B) \vdash A \wedge B}}{\neg(A \wedge B) \vdash \neg A \vee \neg B}$$

Notes:

A (28) bizonyításához most lássuk be, hogy

$$\neg A \vee \neg B \vdash \neg(A \wedge B) \tag{31}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\emptyset}{A \vdash A}}{A, B \vdash A}}{A \wedge B \vdash A}}{\neg A \vee \neg B, A \wedge B \vdash A} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\emptyset}{\neg A \vdash \neg A}}{B, \neg A \vdash \neg A} \qquad \dfrac{(8)}{B, \neg B \vdash \neg A}}{B, \neg A \vee \neg B \vdash \neg A}}{\neg A \vee \neg B, B \vdash \neg A}}{\neg A \vee \neg B, A, B \vdash \neg A}}{\neg A \vee \neg B, A \wedge B \vdash \neg A}}{\neg A \vee \neg B \vdash \neg(A \wedge B)}$$

Notes:

A (29) bizonyításához először lássuk be, hogy

$$\neg(A \vee B) \vdash \neg A \wedge \neg B \tag{32}$$

$$\dfrac{(1)\,\dfrac{\dfrac{\dfrac{\emptyset}{A \vdash A}}{A \vdash A \vee B}}{\neg(A \vee B) \vdash \neg A} \qquad (1)\,\dfrac{\dfrac{\dfrac{\emptyset}{B \vdash B}}{B \vdash A \vee B}}{\neg(A \vee B) \vdash \neg B}}{\neg(A \vee B) \vdash \neg A \wedge \neg B}$$

A (29) bizonyításához most lássuk be, hogy

$$\neg A \wedge \neg B \vdash \neg(A \vee B) \tag{33}$$

$$(2)\,\dfrac{\dfrac{(2)\,\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\emptyset}{\neg A \vdash \neg A}}{\neg A, \neg B \vdash \neg A}}{\neg A \wedge \neg B \vdash \neg A}}{A \vdash \neg(\neg A \wedge \neg B)} \qquad (2)\,\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\emptyset}{\neg B \vdash \neg B}}{\neg A, \neg B \vdash \neg B}}{\neg A \wedge \neg B \vdash \neg B}}{B \vdash \neg(\neg A \wedge \neg B)}}{A \vee B \vdash \neg(\neg A \wedge \neg B)}}{\neg A \wedge \neg B \vdash \neg(A \vee B)}$$

Notes:

5. A klasszikus elsőrendű logika szabatos felépítése

5.1. A klasszikus elsőrendű logika nyelve

Definíció:
Klasszikus elsőrendű nyelven az

$$L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$$

rendezett ötöst értjük, ahol

1. $LC = \{\neg, \supset, \wedge, \vee, \equiv, =, \forall, \exists, (,)\}$ (a nyelv logikai konstansainak halmaza).
2. Var $(= \{x_n : n = 0, 1, 2, \ldots\})$ a nyelv változóinak megszámlálhatóan végtelen halmaza.
3. $Con = \bigcup_{n=0}^{\infty}(\mathcal{F}(n) \cup \mathcal{P}(n))$ a nyelv nemlogikai konstansainak legfeljebb megszámlálhatóan végtelen halmaza. ($\mathcal{F}(0)$ a névkonstansok, $\mathcal{F}(n)$ az n argumentumú függvényjelek, $\mathcal{P}(0)$ az állításkonstansok, $\mathcal{P}(n)$ az n argumentumú predikátumkonstansok halmaza.)

Notes:

4. Az LC, Var, $\mathcal{F}(n)$, $\mathcal{P}(n)$ halmazok $(n = 0, 1, 2, \dots)$ páronként diszjunktak.
5. A nyelv terminusainak a halmazát, azaz a $Term$ halmazt az alábbi induktív definíció adja meg:
   (a) $Var \cup \mathcal{F}(0) \subseteq Term$
   (b) Ha $f \in \mathcal{F}(n)$, $(n = 1, 2, \dots)$, és $t_1, t_2, \dots, t_n \in Term$, akkor $f(t_1)(t_2)\dots(t_n) \in Term$ (vagy $f(t_1, t_2, \dots, t_n) \in Term$).
6. A nyelv formuláinak a halmazát, azaz a $Form$ halmazt az alábbi induktív definíció adja meg:
   (a) $\mathcal{P}(0) \subseteq Form$
   (b) Ha $t_1, t_2 \in Term$, akkor $(t_1 = t_2) \in Form$
   (c) Ha $P \in \mathcal{P}(n)$, $(n = 1, 2, \dots)$, és $t_1, t_2, \dots, t_n \in Term$, akkor $P(t_1)(t_2)\dots(t_n) \in Form$ (vagy $P(t_1, t_2, \dots, t_n) \in Form$).
   (d) Ha $A \in Form$, akkor $\neg A \in Form$.
   (e) Ha $A, B \in Form$, akkor $(A \supset B)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \equiv B) \in Form$.
   (f) Ha $x \in Var$, $A \in Form$, akkor $\forall x A$, $\exists x A \in Form$.

Notes:

5.2. A klasszikus elsőrendű logika szemantikája

5.2.1. Az interpretáció fogalma

Az $\langle U, \varrho \rangle$ párt az $L^{(1)}$ nyelv egy *interpretáció*jának nevezzük, ha

- $U \neq \emptyset$ azaz U nemüres halmaz;
- $Dom(\varrho) = Con$
  - Ha $a \in \mathcal{F}(0)$, akkor $\varrho(a) \in U$;
  - Ha $f \in \mathcal{F}(n)$ $\quad (n \neq 0)$, akkor $\varrho(f) \in U^{U^{(n)}}$
  - Ha $p \in \mathcal{P}(0)$, akkor $\varrho(p) \in \{0, 1\}$;
  - Ha $P \in \mathcal{P}(n)$ $\quad (n \neq 0)$, akkor $\varrho(P) \subseteq U^{(n)}$ ($\varrho(P) \in \{0, 1\}^{U^{(n)}}$).

Notes:

5.2.2. Az értékelés fogalma

Az $\langle U, \varrho\rangle$ interpretációra támaszkodó v *értékelés*en egy olyan függvényt értünk, amely teljesíti a következőket:

- $Dom(v) = Var$;
- Ha $x \in Var$, akkor $v(x) \in U$.

A *módosított értékelés* fogalma: Legyen v egy tetszőleges $\langle U, \varrho\rangle$ interpretációra támaszkodó értékelés, $x \in Var$ egy változó és $u \in U$ egy objektum. Ekkor bármely $y \in Var$ esetén

$$v[x:u](y) = \begin{cases} u, & \text{ha } y = x; \\ v(y), & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Notes:

5.2.3. Szemantikai szabályok

Legyen adott egy $\langle U, \varrho\rangle$ interpretáció és egy rá támaszkodó v értékelés.

- Ha $a \in \mathcal{F}(0)$, akkor $|a|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = \varrho(a)$.
- Ha $x \in Var$, akkor $|x|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = v(x)$.
- Ha $f \in \mathcal{F}(n)$, $(n = 1, 2, \ldots)$, és $t_1, t_2, \ldots, t_n \in Term$, akkor $|f(t_1)(t_2)\ldots(t_n)|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = \varrho(f)(\langle |t_1|_v^{\langle U,\varrho\rangle}, |t_2|_v^{\langle U,\varrho\rangle}, \ldots, |t_n|_v^{\langle U,\varrho\rangle}\rangle)$
- Ha $p \in \mathcal{P}(0)$, akkor $|p|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = \varrho(p)$
- Ha $t_1, t_2 \in Term$, akkor

$$|(t_1 = t_2)|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = \begin{cases} 1, & \text{ha } |t_1|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = |t_2|_v^{\langle U,\varrho\rangle} \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

- Ha $P \in \mathcal{P}(n)$ $(n \neq 0)$, $t_1, \ldots, t_n \in Term$, akkor

$$|P(t_1)\ldots(t_n)|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = \begin{cases} 1, & \text{ha } \langle |t_1|_v^{\langle U,\varrho\rangle}, \ldots, |t_n|_v^{\langle U,\varrho\rangle}\rangle \in \varrho(P); \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Notes:

- Ha $A \in Form$, akkor $|\neg A|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = 1 - |A|_v^{\langle U,\varrho\rangle}$.
- Ha $A, B \in Form$, akkor

$$|(A \supset B)|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = \begin{cases} 0 & \text{ha } |A|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = 1, \text{ és } |B|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = 0; \\ 1, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

$$|(A \wedge B)|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = \begin{cases} 1 & \text{ha } |A|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = 1, \text{ és } |B|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = 1; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

$$|(A \vee B)|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = \begin{cases} 0 & \text{ha } |A|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = 0, \text{ és } |B|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = 0; \\ 1, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

$$|(A \equiv B)|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = \begin{cases} 1 & \text{ha } |A|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = |B|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = 0; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

- Ha $A \in Form, x \in Var$, akkor

$$|\forall x A|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = \begin{cases} 0, & \text{ha van olyan } u \in U, \text{ hogy } |A|_{v[x:u]}^{\langle U,\varrho\rangle} = 0; \\ 1, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

$$|\exists x A|_v^{\langle U,\varrho\rangle} = \begin{cases} 1, & \text{ha van olyan } u \in U, \text{ hogy } |A|_{v[x:u]}^{\langle U,\varrho\rangle} = 1; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Notes:

5.3. Centrális logikai (szemantikai) fogalmak

5.3.1. Interpretáció, értékelés, modell

- Interpretáció: értéket rendel a paraméterekhez, azaz a nyelv nemlogikai konstansaihoz. Jelölés: $\langle U, \varrho \rangle$
- Értékelés: (egy adott interpretációban) értéket rendel a változókhoz. Jelölés: v
- Egy adott formulahalmaz modelljének a fogalma: olyan interpretáció és (az interpretációra támaszkodó) értékelés együttese, amelyben a tekintett formulahalmaz minden eleme igaz.
- Γ: formulahalmaz; $M = \langle U, \varrho, v \rangle$, ahol $\langle U, \varrho \rangle$ egy interpretáció, v egy $\langle U, \varrho \rangle$–ra támaszkodó értékelés, és minden $A \in \Gamma$ esetén $|A|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = 1$
- $M \models A$, ha $|A|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = 1$

Notes:

5.3.2. Centrális logikai (szemantikai) fogalmak

- Kielégíthetőség: Egy fomulahalmaz kielégíthető, ha van modellje.(Van olyan interpretáció és (rá támaszkodó) értékelés, hogy a formulahalmaz minden eleme igaz az adott interpretáció és értékelés szerint.)
- Kielégíthetetlenség: Egy formulahalmaz kielégíthetetlen, ha nem kielégíthető.
  - Kielégíthető: nem tartalmaz logikai ellentmondást.
  - Kielégíthetetlen: logikai ellentmondást tartalmaz.
- A Γ formulahalmaznak logikai következménye az A formula ($\Gamma \vDash A$), ha a $\Gamma \cup \{\neg A\}$ formulahalmaz kielégíthetetlen.
- Az A formula érvényes ($\vDash A$), ha $\emptyset \vDash A$.

Notes:

5.3.3. A változók előfordulásai

Az A formula szabad változóinak a $V(A)$ halmazát az alábbi induktív definíció adja meg:

Definíció:

1. Ha A prímformula (atomi formula), akkor $V(A)$ az A formulában szereplő változók halmaza.
2. $V(\neg A) = V(A)$
3. $V((A \supset B)) = V((A \wedge B)) = V((A \vee B)) = V((A \equiv B)) = V(A) \cup V(B)$
4. $V(\forall x A) = V(\exists x A) = V(A) \setminus \{x\}$

Notes:

5.3.4. Metatételek

Állítás: Egy adott interpretáció és értékelés mellett minden kifejezés szemantikai értéke egyértelműen meghatározott.

Tétel:
Legyen adott egy $\langle U, \varrho \rangle$ interpretáció és két, az adott interpretációra támaszkodó, értékelés: v_1, v_2. Legyen továbbá $A \in Form$ egy tetszőleges formula.
Ekkor, ha minden $x \in V(A)$ esetén $v_1(x) = v_2(x)$, úgy

$$| A |_{v_1}^{\langle U, \varrho \rangle} = | A |_{v_2}^{\langle U, \varrho \rangle}$$

Bizonyítás: Strukturális indukcióval.

Következmény:
A zárt formulák értéke független az értékelés megválasztásától. (Zárt formulák értékét az interpretáció egyértelműen meghatározza.)

Notes:

5.3.5. A kvantifikáció törvényei

A kvantorok fiktív alkalmazása (tegyük föl, hogy az x változó nem fordul elő szabadon az A formulában):

- $\forall x A \Leftrightarrow A$
- $\exists x A \Leftrightarrow A$

Azonos kvantorok cseréje:

- $\forall x \forall y A \Leftrightarrow \forall y \forall x A$
- $\exists x \exists y A \Leftrightarrow \exists y \exists x A$

Kvantorok implikációban:

- $\models \forall x A \supset \exists x A$
- $\models \exists y \forall x A \supset \forall x \exists y A$

Notes:

A kvantifikáció De Morgan törvényei:

- $\neg \exists x A \Leftrightarrow \forall x \neg A$
- $\neg \forall x A \Leftrightarrow \exists x \neg A$

A kvantorok egymással való kifejezhetősége:

- $\exists x A \Leftrightarrow \neg \forall x \neg A$
- $\forall x A \Leftrightarrow \neg \exists x \neg A$

A kvantorok mozgatásának törvényszerűségei (tegyük fel, hogy az x változó nem fordul elő szabadon az A formulában):

- $A \wedge \forall x B \Leftrightarrow \forall x (A \wedge B)$
- $A \vee \forall x B \Leftrightarrow \forall x (A \vee B)$
- $A \wedge \exists x B \Leftrightarrow \exists x (A \wedge B)$
- $A \vee \forall x B \Leftrightarrow \forall x (A \vee B)$
- $A \supset \forall x B \Leftrightarrow \forall x (A \supset B)$
- $A \supset \exists x B \Leftrightarrow \exists x (A \supset B)$
- $\forall x B \supset A \Leftrightarrow \exists x (B \supset A)$
- $\exists x B \supset A \Leftrightarrow \forall x (B \supset A)$

Notes:

A kvantorok és az igazságfunktorok kapcsolatai:

- $\forall xA \wedge \forall xB \Leftrightarrow \forall x(A \wedge B)$
- $\exists xA \vee \exists xB \Leftrightarrow \exists x(A \vee B)$
- $\models \exists x(A \wedge B) \supset \exists xA \wedge \exists xB$
- $\models \forall xA \vee \forall xB \supset \forall x(A \vee B)$

Notes:

5.3.6. Változók behelyettesíthetősége

Definíció:

1. Ha $x \in Var$ és $A \in Form$, akkor x-nek egy rögzített előfordulását kötöttnek mondjuk, ha x ezen előfordulása A-nak egy QxB alakú részformulájába esik ($Q : \forall, \exists$).
2. Az x változó azon A-beli előfordulásait, amelyek nem kötöttek, szabad előfordulásoknak mondjuk.
3. A $t \in Term$ terminust nyitottnak mondjuk, ha szerepel benne változó, és zártnak nevezzük ellenkező esetben.
4. Egy formulát nyitottnak mondunk, ha valamely változónak van benne legalább egy szabad előfordulása ($V(A) \neq \emptyset$).
5. A nem nyitott formulákat zártnak nevezzük.

Notes:

Definíció:

1. Az A-*ban* x *behelyettesíthető* y-*nal*, ha $A \in Form, x, y \in Var$, és A-ban x egyetlen szabad előfordulása sem esik A valamely QyB alakú részformulájába ($Q : \forall, \exists$).
2. Az A formulában az x változó behelyettesíthető a t terminussal, ha x behelyettesíthető A-ban minden olyan változóval, amely t-ben előfordul.
3. Tegyük föl, hogy az A formulában az x változó behelyettesíthető a t terminussal. Ekkor az $[A]_x^t$ kifejezéssel jelöljük azt a formulát, amely úgy keletkezik az A formulából, hogy benne x minden *szabad* előfordulását t-vel helyettesítjük.
4. Más jelölés: $A^{t/x}, A(x\|t), A(^x_t)$
5. Tegyük fel, hogy $A \in Form$, $x, y \in Var$, x behelyettesíthető az y változóval A-ban, és $y \notin V(QxA)$. Ekkor a $Qy[A]_x^y$ formula a QxA formula szabályosan végrehajtott átnevezése.

Notes:

1. Két formulát kongruensnek nevezünk (egymás szintaktikai szinonimái), ha egymástól csak kötött változók szabályosan végrehajtott átnevezésében különböznek.
2. Egy A formulát változóiban tisztának nevezünk, ha
   (a) szabad és kötött változói diszjunkt halmazt alkotnak,
   (b) minden kötött változó pontosan egyszer fordul elő kvantort közvetlenül követő pozícióban (minden kötött változó pontosan egy kvantornak a változója).

Notes:

6. Példák klasszikus elsőrendű nyelvekre

6.1. A Subset (Részh) nyelv

- Szándékolt univerzum: Egy rögzített H halmaz részhalmazainak a halmaza, $(Pow(H))$.
- Egyetlen nemlogikai konstanst tartalmaz: $\subseteq$, ami logikai szempontból egy kétargumentumú predikátumparaméter, azaz $\subseteq \in \mathcal{P}(2)$.
- $\bigcup_{n=0}^{\infty}(\mathcal{F}(n) = \emptyset$

Miként lehet egy ilyen nyelvet jellemezni?

- Predikátumparaméter(ek) [reláció(k)] argumentumszámmal együtt történő felsorolása: $\subseteq$, 2
- A legalább egyargumentumú függvényjel(ek) argumentumszámmal együtt történő felsorolása: [itt nincs ilyen]
- Az névparaméterek ($\mathcal{F}(0)$ elemeinek a felsorolása): [itt nincs ilyen]

Notes:

Fontosabb relációk:

- Halmazok egyenlősége: $x = y =_{def} (x \subseteq y) \wedge (y \subseteq x)$
- Két halmaz nem egyenlő: $x \neq y =_{def} \neg(x = y)$
- Valódi rész: $x \subset y =_{def} (x \subseteq y) \wedge (x \neq y)$
- Az x halmaz az y és z halmazok metszete: $x = (y \cap z) =_{def} (x \subseteq y) \wedge (x \subseteq z) \wedge \forall v((v \subseteq y) \wedge (v \subseteq z) \supset (v \subseteq x))$
- Hf: definiáljuk az üres halmazt, valamint két halmaz unióját, és azt a halmazt, amely megegyezik a a H halmazzal.

A nyelv jellemzése:

- $\Omega = \langle St, Cnst, Fn, Pr \rangle$
- St: az individuumfajták (típusok) fajták nemüres halmaza.
- $Cnst = \mathcal{F}(0)$ (Az individuumkonstansok halmaza.)
- $Fn = \cup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}(n)$ (A függvényszimólumok halmaza.)
- $Pr = \cup_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}(n)$ (A predikátumparaméterek halmaza.)
- Szignatúra fogalma.

Notes:

6.2. Az elemi aritmetika nyelve (Ar)

- Szándékolt univerzum: A természetes számok $\mathbb{N}$ halmaza.
- Egyetlen nemlogikai konstanst tartalmaz: $=$, ami logikai szempontból egy kétargumentumú predikátumparaméter, azaz $= \in \mathcal{P}(2)$.
- Egyetlen névparaméter szerepel a nyelvben: $\bar{0} \in \mathcal{F}(0)$
- Függvényjelek:
  - A rákövetkezés művelete: $s \in \mathcal{F}(1)$
  - Összeadás: $+ \in \mathcal{F}(2)$
  - Szorzás: $\times \in \mathcal{F}(2)$
- Szignatúra:

$\mathcal{P}(n)$	$v_1(R)$	$\mathcal{F}(n)$	$v_2(m)$	$\mathcal{F}(0)$	v_3
$=$	(ι, ι)	s	(ι, ι)	$\bar{0}$	ι
		$+$	(ι, ι, ι)		
		$\times$	(ι, ι, ι)		

Notes:

- A terminusok halmaza: A konstansok és változók halmaza kibővül a következő terminusokkal: Ha $t_1, t_2 \in Term$, akkor $s(t_1), (t_1 + t_2), (t_1 \times t_2) \in Term$.
- Pl.: $(s(\bar{0}) + sssss(\bar{0})) \times sss(\bar{0})$
- Az atomi formulák halmaza: Ha $t_1, t_2 \in Term$, akkor $(t_1 = t_2) \in Form$.

Néhány aritmetikai tulajdonság kifejezése:

- $x \leq y =_{def} \exists z(x + z = y)$
- $x \neq y =_{def} \neg(x = y)$
- $x < y =_{def} (x \leq y) \wedge (x \neq y)$
- $x \mid y =_{def} (x \neq \bar{0}) \wedge \exists z(x \times z = y)$
- Hf.: x prímszám; a prímszámok száma végtelen; legkisebb közös többszörös; legnagyobb közös osztó.

Notes:

Mi biztosíthatja, hogy a szándékolt interpretáció legyen a tekintetbe vett interpretáció?

- Semmi!
- De: Körül lehet bástyázni a lehetséges interpretációkat a szakmai axiómák bevezetésével:
- Peano axiómák:
  1. $\forall x(s(x) \neq \bar{0}))$
  2. $\forall x \forall y((s(x) = s(y)) \supset (x = y))$
  3. $\forall x(x + \bar{0} = x)$
  4. $\forall x \forall y((x + s(y)) = s(x + y))$
  5. $\forall x((x \times \bar{0}) = \bar{0})$
  6. $\forall x \forall y((x \times s(y)) = ((x \times y) + x))$
  7. $(A^{\bar{0}/x} \wedge \forall x(A \supset A^{s(x)/x})) \supset \forall x A$
- A 7. axióma különleges: nem egyetlen formula, hanem végtelen sok formulát rejtő séma: Benne az A a nyelv tetszőleges formulájával helyettesíthető.
- A 7. axióma a teljes indukció axiómája.

Notes:

7. Klasszikus elsőrendű kalkulus

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ a klasszikus elsőrendű logika nyelve.
A klasszikus elsőrendű kalkulus alapsémái (axiómasémái) a klasszikus állításkalkulus alapsémái, továbbá:

- (A4): $(\forall x A \supset A^{t/x})$
- (A5): $(\forall x(A \supset B) \supset (\forall x A \supset \forall x B))$
- (A6): $(A \supset \forall x A)$, ha A-ban x-nek nincs szabad előfordulása.
- (A7): $x = x$
- (A8): $((x = y) \supset (A^{x/z} \supset A^{y/z}))$

Szabályos behelyettesítés:

- A, B, C: formulák, x, y, z: változók, t: terminus;
- (A4): A-ban x behelyettesíthető t-vel;
- (A8): A-ban z behelyettesíthető az x, y változókkal.

Notes:

Alapformulák (axiómák):

1. Az alapsémák szabályos behelyettesítésével nyert formulák alapformulák.
2. Ha A alapformula, akkor a '$\forall x A$' formula is alapformula (univerzális generalizálás).

A következményreláció definíciója megegyezik az állításkalkulusban megadott értelmezéssel.

Definíció

- Az A formulát levezethetőnek mondjuk, ha $\emptyset \vdash A$.
- Legyen $\Gamma \subseteq Form$ tetszőleges formulahalmaz. A Γ formulahalmazt *inkonzisztensnek* nevezzük, ha minden $A \in Form$ esetén teljesül, hogy $\Gamma \vdash A$.
- A Γ formulahalmaz konzisztens, ha nem inkonzisztens.

Notes:

7.1. A kalkulus és a logika kapcsolata

- A kalkulus helyes a logikai rendszerre nézve (a szemantikai felépítésre nézve), ha teljesül, hogy ha $\Gamma \vdash A$, akkor $\Gamma \vDash A$.
- A kalkulus teljes a logikai rendszerre nézve (a szemantikai felépítésre nézve), ha teljesül, hogy ha $\Gamma \vDash A$, akkor $\Gamma \vdash A$.
- A kalkulus adekvát a logikai rendszerre nézve (a szemantikai felépítésre nézve), ha helyes és teljes.

Tétel (Gödel): A klasszikus elsőrendű (nulladrendű) kalkulus adekvát a klasszikus elsőrendű (nulladrendű) szemantikára nézve.

Kalkulus	Logika
$\Gamma \vdash A$	$\Gamma \vDash A$
Inkonzisztens	Kielégíthetetlen
Konzisztens	Kielégíthető
A levezethető	A érvényes

Notes:

Az adekvátsági tétel bizonyításának vázlata:

1. Helyesség:
   - Az alapformulák (axiómák) érvényes formulák.
   - A levezetési szabály szemantikai értelemben helyes.
2. Teljesség:
   - Bizonyítandó, hogy ha $\Gamma \vDash A$, akkor $\Gamma \vdash A$, azaz ha $\Gamma \nvdash A$, akkor $\Gamma \nvDash A$.
   - Ha $\Gamma \nvdash A$, akkor $\Gamma \cup \{\neg A\}$ konzisztens.
   - Be lehet bizonyítani, hogy ha egy formulahalmaz konzisztens, akkor van modellje (telítettség, szaturáltság).
   - Így a $\Gamma \cup \{\neg A\}$ halmaznak van modellje, tehát kielégíthető. Következésképpen: $\Gamma \nvDash A$

Notes:

A kompaktság definíciója:

Egy $\models$ ($\vdash$) következményrelációt *kompaktnak* nevezünk, ha bármely Γ formulahalmaz és A formula esetén teljesül, hogy amennyiben $\Gamma \models A$, úgy van olyan Δ formulahalmaz, hogy Δ véges, $\Delta \subseteq \Gamma$ és $\Delta \models A$.

Kompaktsági tétel:

- A klasszikus nulladrendű kalkulus (logika) következményrelációja kompakt.
- A klasszikus elsőrendű kalkulus (logika) következményrelációja kompakt.
- Bizonyítás: Triviális

Notes:

8. A természetes levezetés az elsőrendű logikában

Az univerzális kvantor bevezető szabálya:
Ha az x változó nem fordul elő szabadon a Γ formulahalmaz egyetlen formulájában sem, akkor

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \forall x A}$$

Az univerzális kvantor alkalmazó szabálya:

$$\frac{\Gamma \vdash \forall x A}{\Gamma \vdash A^{t/x}}$$

Az egzisztenciális kvantor bevezető szabálya:

$$\frac{\Gamma \vdash A^{t/x}}{\Gamma \vdash \exists x A}$$

Az egzisztenciális kvantor alkalmazó szabálya:
Ha az x változó nem fordul elő szabadon sem a Γ formulahalmaz egyetlen formulájában sem a C formulában, akkor

$$\frac{\Gamma, A \vdash C}{\Gamma, \exists x A \vdash C}$$

Notes: