Debreceni Egyetem
Informatikai Kar

Logika
feladatgyűjtemény

2005. május 19.

Készítette:
Lengyel Zoltán
lengyelz@inf.unideb.hu

Tartalomjegyzék

1. Ítéletlogika

1.1. FELADAT. Formulái-e az ítéletlogika nyelvének az alábbi jelsorozatok?

a) $\neg X$
b) $(\neg X)$
c) $(\neg X \vee Y)$
d) $\neg(X \vee Y)$
e) $\neg(X \vee Y \vee Z)$
f) $\neg(X \vee Y \supset Z)$
g) $(X \wedge Y) \equiv (Y \wedge X)$
h) $(\neg X \neg Y)$
i) $X \supset Y \supset Z$

MEGOLDÁS: Az a), c), d) formulái az ítéletlogika nyelvének, míg a többi nem.

1.2. FELADAT. Mennyi az alábbi formulák logikai összetettsége?

a) $((\neg X \wedge Y) \supset \neg Z)$
b) $(\neg X \vee \neg\neg Y)$
c) $(\neg X \vee \neg\neg\neg Y)$
d) $\neg(X \vee Y)$
e) $\neg(X \vee \neg(Y \supset Z))$
f) $\neg(\neg X \vee (Y \vee \neg Z))$
g) $\neg((X \wedge Y) \equiv (Y \wedge X))$
h) $(\neg X \supset (Y \equiv Z))$
i) $(X \supset (Y \oplus Z))$ (ahol $\oplus$ a kizáró-vagyot jelöli)

MEGOLDÁS: a) 4, b) 4, c) 5, d) 2, e) 4, f) 5, g) 4, h) 3, i) 2.

1.3. FELADAT. Soroljuk fel az alábbi formulák összes részformuláit! Húzzuk alá a közvetlen részformulákat!

a) $(((X \supset Y) \wedge (Y \supset Z)) \supset (\neg X \vee Z))$
b) $((X \supset Y) \supset ((X \supset \neg Y) \supset \neg Y))$
c) $((\neg X \vee Y) \supset \neg Z)$

d) $\neg((X \vee Y) \wedge \neg X)$
e) $\neg((X \vee Y) \vee Z)$
f) $\neg((X \vee Y) \supset (X \wedge Y))$
g) $((X \wedge Y) \equiv (Y \wedge X))$

MEGOLDÁS:

a) $\{(((X \supset Y) \wedge (Y \supset Z)) \supset (\neg X \vee Z)),\ ((X \supset Y) \wedge (Y \supset Z)),\ (\neg X \vee Z),$
$(X \supset Y),\ (Y \supset Z),\ \neg X,\ Z,\ X,\ Y\}$
b) $\{((X \supset Y) \supset ((X \supset \neg Y) \supset \neg Y)),\ (X \supset Y),\ ((X \supset \neg Y) \supset \neg Y),$
$X,\ Y,\ (X \supset \neg Y),\ \neg Y\}$
c) $\{((\neg X \vee Y) \supset \neg Z),\ (\neg X \vee Y),\ \neg Z,\ \neg X,\ Y,\ Z,\ X\}$
d) $\{\neg((X \vee Y) \wedge \neg X),\ ((X \vee Y) \wedge \neg X),\ (X \vee Y),\ \neg X,\ X,\ Y\}$
e) $\{\neg((X \vee Y) \vee Z),\ ((X \vee Y) \vee Z),\ (X \vee Y),\ Z,\ X,\ Y\}$
f) $\{\neg((X \vee Y) \supset (X \wedge Y)),\ ((X \vee Y) \supset (X \wedge Y)),\ (X \vee Y),\ (X \wedge Y),\ X,\ Y\}$
g) $\{((X \wedge Y) \equiv (Y \wedge X)),\ (X \wedge Y),\ (Y \wedge X),\ X,\ Y\}$

1.4. FELADAT. Írjuk át a természetes nyelven megfogalmazott negációkat a $\neg$ jel felhasználásával a következő mondatokban! A negáció argumentumát jelöljük zárójelekkel.

a) Péter nem ment haza.
b) Éva nem szőke.
c) Nem igaz, hogy Péter nem ment haza.
d) Nem áll, hogy nem igaz, hogy Éva nem szőke.
e) Péter nem ment haza, vagy nem maradt otthon, de nem áll, hogy otthon van.
f) Nem igaz, hogy ha Éva nem szőke, akkor nem Juli volt az, akit nem értem utol.

(Forrás: Pólos L. – Ruzsa I. *A logika elemei*)

MEGOLDÁS:

a) ¬ (Péter hazament).
b) ¬ (Éva szőke).
c) ¬ (¬ (Péter hazament)).
d) ¬ (¬ (¬ (Éva szőke))).
e) ¬ (Péter hazament) vagy ¬ (Péter otthon maradt), de ¬ (Péter otthon van).
f) ¬ (ha ¬ (Éva szőke), akkor ¬ (Juli volt az, akit ¬ (utolértem))).

1.5. FELADAT. Írjuk ki a konjunkciókat és a negációkat logikai jelükkel az alábbi mondatokban.

a) Éva szőke, mindazonáltal nekem nem tetszik, annak ellenére, hogy a szőkéket kedvelem.
b) Tivadar hazament, de nem maradt otthon, bár mindenki ezt várta tőle.
c) Esik az eső, de nincsen hideg, és a szél sem fúj.
d) Ha hazajössz, és be is vásárolsz, nekem nem kell lemennem, és megfőzhetem az ebédet.

(Forrás: Pólos L. – Ruzsa I. *A logika elemei*)

MEGOLDÁS:

a) $\big($Éva szőke$\big)\wedge\neg\,\big($nekem tetszik Éva$\big)\wedge($a szőkéket kedvelem$)$.
b) (Tivadar hazament)$\wedge\neg$(Tivadar otthon maradt)$\wedge$(mindenki ezt várta tőle).
c) (esik az eső)$\wedge\neg$(hideg van)$\wedge\neg$(fúj a szél).
d) ha (hazajössz)$\wedge$(bevásárolsz), akkor $\neg$ (le kell mennem)$\wedge$(megfőzhetem az ebédet).

1.6. FELADAT. A következő mondatokban helyezzük el a negáció, a konjunkció és a diszjunkció jelét, ahol ezek köznyelvi formában szerepelnek!

a) Aladár vagy Béla otthon van, de nincs otthon mind a kettő.
b) Juli elmegy, és Éva itt marad, vagy mindketten elmennek, és Juli vissza sem jön, de Éva vagy visszajön, vagy nem.
c) Ha nem esik az eső, de süt a nap, vagy a szél nem fúj, akkor elindulunk, és szerencsésen meg is érkezünk; vagy megváltozik az idő, és tábort verünk, vagy visszafordulunk.

(Forrás: Pólos L. – Ruzsa I. *A logika elemei*)

MEGOLDÁS:

a) ((Aladár otthon van)$\vee$(Béla otthon van))$\wedge\neg$((Aladár otthon van)$\wedge$(Béla otthon van)).
b) ((Juli elmegy)$\wedge$(Éva itt marad))$\vee$((Juli elmegy)$\wedge$(Éva elmegy)$\wedge\neg$(Juli visszajön)$\wedge$((Éva visszajön)$\vee\neg$(Éva visszajön)))
c) (ha $\neg$(esik az eső)$\wedge$((süt a nap)$\vee\neg$(fúj a szél)), akkor (elindulunk)$\wedge$(szerencsésen megérkezünk))$\vee$((megváltozik az idő)$\wedge$((tábort verünk)$\vee$(visszafordulunk))).

1.7. FELADAT. A következő mondatokban helyezzük el a negáció, konjunkció, diszjunkció illetve implikáció jelét, ahol ezek köznyelvi formában szerepelnek!

a) Ha ismerem a szabályt, és tudom, hogyan kell alkalmazni, jó eredményt kapok, feltéve, hogy nem vétek hibát.
b) Ha Micimackónak és Malackának sikerül menyétet fogni, akkor ez a menyét nem ugyanaz, mint amelynek a lábnyomait követik.
c) Szivárvány csak akkor van, ha a nap is süt, és az eső is esik, és nincsen dél.

(Forrás: Pólos L. – Ruzsa I. *A logika elemei*)

Megoldás:

a) ((ismerem a szabályt)$\wedge$(tudom alkalmazni a szabályt))$\supset$($\neg$(hibát vétek)$\supset$(jó eredményt kapok)).
b) (Micimackónak és Malackának sikerül menyétet fogni)$\supset\neg$(ennek a menyétnek a lábnyomait követik).
c) (szivárvány van)$\supset$((süt a nap)$\wedge$(esik az eső)$\wedge\neg$(dél van)).

1.8. feladat. Formalizáljuk az ítéletlogika nyelvén az alábbi állításokat!

a) Némelyik emlős tud repülni.
b) Némelyik emlős nem tud repülni.
c) Minden prókátor hazudik.
d) Semelyik prókátor sem hazudik.

(Forrás: Pólos L. – Ruzsa I. *A logika elemei*)

Megoldás:

a) (némelyik emlős tud repülni)
b) (némelyik emlős nem tud repülni)
c) (minden prókátor hazudik)
d) (semelyik prókátor sem hazudik)

1.9. feladat. Formalizáljuk az ítéletlogika nyelvén az alábbi állításokat!

a) Minden emlős tud repülni.
b) Nem minden emlős tud repülni.
c) Semelyik emlős nem tud repülni.
d) Van olyan emlős, amelyik tud repülni.
e) Van olyan emlős, amelyik nem tud repülni.
f) Nincs olyan emlős, amelyik nem tud repülni.

Megoldás:

M: Minden emlős tud repülni.
S: Semelyik emlős nem tud repülni.

a) M, b) $\neg M$, c) S, d) $\neg S$, e) $\neg M$, f) $\neg\neg M$ (vagy egyszerűen M).

1.10. feladat. Formalizáljuk az ítéletlogika nyelvén az alábbi állításokat!

a) Nem igaz, hogy Colombus 1998-ban fedezte fel Amerikát.
b) Nem Colombus fedezte fel 1998-ban Amerikát.
c) Colombus 1998-ban nem fedezte fel Amerikát.

d) Colombus 1998-ban nem Amerikát fedezte fel.
e) Nem igaz, hogy Colombus nem 1998-ban fedezte fel Amerikát.
f) Nem áll, hogy nem igaz, hogy Colombus 1998-ban Amerikát fedezte fel.

MEGOLDÁS: A látszat ellenére ezek az állítások összetettek:

C: Colombus felfedezte Amerikát.
F: 1998-ban felfedezték Amerikát.
V: Colombus 1998-ban felfedezett valamit.

a) $C \wedge \neg F$
b) $\neg C \wedge F$
c) $\neg(C \wedge F)$
d) $\neg(C \wedge F) \wedge V$
e) $\neg(C \wedge \neg F)$
f) $\neg\neg(C \wedge F)$

1.11. FELADAT. Fordítsuk le (formalizáljuk) az ítéletlogika nyelvére az alábbi állításokat!

a) Esik az eső, bár süt a nap.
b) Ha esik az eső, és süt a nap, akkor szivárvány van, kivéve, ha éppen dél van.
c) Nem áll, hogy nem igaz, hogy éppen dél van, és mégsem süt a nap.
d) Ha esik az eső, de nincs szivárvány, akkor nem süt a nap, vagy éppen dél van.

e) Ha nem kell várnom a reggelire, akkor – föltéve, hogy nem alszom el – időben beérek a munkahelyre.
f) Ha elalszom, várnom kell a reggelire.
g) Ha várnom kell a reggelire, pedig nem alszom el, akkor nem érek be időben a munkahelyre.
h) Ha nem alszom el, a reggelire sem kell várnom, és időben be is érek a munkahelyre.

i) Ha a szemtanú megbízható, és az írásszakértő véleménye helytálló, úgy a bűncselekményt akkor és csak akkor követték el előre megfontolt szándékkal, ha a talált ujjlenyomatok a tettestől vagy esetleges bűntársától származnak.
j) Ha a szemtanú megbízható, az írásszakértő véleménye helytálló, és a talált ujjlenyomatok a tettestől származnak, akkor a bűncselekményt előre megfontolt szándékkal követték el.
k) Feltételezve, hogy a bűncselekményt előre megfontolt szándékkal követték el, a talált ujjlenyomatok nem a tettestől származnak, sem pedig annak lehetséges bűntársától, ezért ez esetben az írásszakértő véleménye nem helytálló.
l) De ha a bűncselekményt nem előre megfontolt szándékkal követték el, akkor az írásszakértő véleménye helytálló, annak ellenére, hogy a szemtanú nem megbízható.

Megoldás: Formailag több megoldás is lehetséges, ezek szemantikai jelentése azonban megegyezik.

a) $(E \wedge S)$

b) $(\neg D \supset ((E \wedge S) \supset Sz))$, vagy $(((E \wedge S) \wedge \neg D) \supset Sz)$

c) $\neg\neg(D \wedge \neg S)$

d) $((E \wedge \neg Sz) \supset (\neg S \vee D))$

E: Esik az eső.
S: Süt a nap.
Sz: Szivárvány van.
D: Éppen dél van.

e) $(\neg R \supset (\neg A \supset I))$, vagy $((\neg R \wedge \neg A) \supset I)$

f) $(A \supset R)$

g) $((R \wedge \neg A) \supset \neg I)$

h) $(\neg A \supset (\neg R \wedge I))$

R: Várnom kell a reggelire.
A: Elalszom.
I: Időben beérek a munkahelyre.

i) $((M \wedge H) \supset (B \equiv (U_T \vee U_B)))$

j) $(((M \wedge H) \wedge U_T) \supset B)$

k) $(B \supset ((\neg U_T \wedge \neg U_B) \supset \neg H))$

l) $(\neg B \supset (H \wedge \neg M))$

M: A szemtanú megbízható.
H: Az írásszakértő véleménye helytálló.
B: A bűncselekményt előre megfontolt szándékkal követték el.
U_T: A talált ujjlenyomatok a tettestől származnak.
U_B: A talált ujjlenyomatok a tettes esetleges bűntársától származnak.

1.12. feladat. Logikai következménye-e a premisszáknak a konklúzió?

1.12.1. részfeladat.

P$_1$) Éva szőke, kivéve, ha barnára festeti a haját.
P$_2$) Ádámnak csak akkor tetszik Éva, ha nem festeti barnára a haját.

K) Éva szőke, vagy nem tetszik Ádámnak.

Megoldás:

P$_1$) $(\neg B \supset S)$
P$_2$) $(T \supset \neg B)$

K) $(S \vee \neg T)$

S: Éva szőke.
B: Éva barnára festeti a haját.
T: Éva tetszik Ádámnak.

S	B	T	$(\neg\, B \supset S)$	$(T \supset \neg\, B)$	$(S \vee \neg\, T)$
i	i	i	$h\ i\ \boldsymbol{i}\ i$	$i\ \boldsymbol{h}\ h\ i$	
i	i	h	$h\ i\ \boldsymbol{i}\ i$	$h\ \boldsymbol{i}\ h\ i$	$i\ \boldsymbol{i}\ i\ h$
i	h	i	$i\ h\ \boldsymbol{i}\ i$	$i\ \boldsymbol{i}\ i\ h$	$i\ \boldsymbol{i}\ h\ i$
i	h	h	$i\ h\ \boldsymbol{i}\ i$	$h\ \boldsymbol{i}\ i\ h$	$i\ \boldsymbol{i}\ i\ h$
h	i	i	$h\ i\ \boldsymbol{i}\ h$	$i\ \boldsymbol{h}\ h\ i$	
h	i	h	$h\ i\ \boldsymbol{i}\ h$	$h\ \boldsymbol{i}\ h\ i$	$h\ \boldsymbol{i}\ i\ h$
h	h	i	$i\ h\ \boldsymbol{h}\ h$		
h	h	h	$i\ h\ \boldsymbol{h}\ h$		

Minden Boole-kombináció estén, melyekre a premisszák igazak, a konklúzió is igaz, ezért az logikai következménye a premisszáknak.
Megjegyzés: Ha egy interpretáció esetén az egyik premissza hamis, akkor ezzel az interpretációval nem kell tovább foglalkozni. Ezért hiányoznak bizonyos sorok a fenti igazságtáblából.

1.12.2. részfeladat.

P$_1$) Süt a nap, feltéve, hogy nem esik az eső.
P$_2$) Nem süt a nap.
P$_3$) Vagy esik az eső, vagy nem.

K) Esik az eső.

Megoldás:

P$_1$) ($\neg$ (esik az eső) $\supset$ (süt a nap))
P$_2$) $\neg$ (süt a nap)
P$_3$) ((esik az eső) $\vee$ $\neg$ (esik az eső))
(A kizáró-vagy és a megengedő-vagy jelentése ez esetben megegyezik.)

K) (esik az eső)

A konklúzió következménye a premisszáknak.

1.12.3. részfeladat.

P$_1$) Akkor és csak akkor csillagos az ég, ha éjjel hideg van.
P$_2$) Vagy csillagos az ég, vagy pedig felhős.

P_3) Ha nincs éjjel hideg, felhős az ég, és nem pedig csillagos.

K) Nem igaz, hogy a felhős ég ellenére éjjel hideg van.

MEGOLDÁS:

P_1) ((csillagos az ég) $\equiv$ (éjjel hideg van))
P_2) (((csillagos az ég) $\vee$ (felhős az ég)) $\wedge$ ($\neg$ (csillagos az ég) $\vee$ $\neg$ (felhős az ég)))
P_3) ($\neg$ (éjjel hideg van) $\supset$ ((felhős az ég) $\wedge$ $\neg$ (csillagos az ég)))

K) $\neg$((felhős az ég) $\wedge$ (éjjel hideg van))

A konklúzió következménye a premisszáknak.

1.12.4. RÉSZFELADAT.

P_1) Van olyan emlős, amely tud úszni, feltéve, hogy minden madár tud repülni.
P_2) Van olyan emlős, amely nem tud úszni.

K) Nem minden madár tud repülni.

MEGOLDÁS:

P_1) $(R \supset U)$
P_2) $\neg N$

K) $\neg R$

U: Van olyan emlős, amely tud úszni.
N: Van olyan emlős, amely nem tud úszni.
R: Minden madár tud repülni.

A konklúzió nem következménye a premisszáknak.

1.12.5. RÉSZFELADAT.

P) Kék is az ég, meg nem is.
K) Esik az eső.

MEGOLDÁS:

P) ((kék az ég) $\wedge$ $\neg$ (kék az ég))
K) (esik az eső)

A konklúzió következménye a premisszának. (Logikai ellentmondásból bármi következik.)

1.12.6. RÉSZFELADAT.

P) Péternek is tetszik Éva.
K) Vagy esik az eső, vagy nem.

MEGOLDÁS:

P) (Péternek tetszik Éva)
K) ((esik az eső) $\vee$ $\neg$ (esik az eső))

A konklúzió következménye a premisszának. (Logikai törvény bármiből következik.)

1.13. FELADAT. Ekvivalensek-e a feladatban szereplő állítások?

1.13.1. RÉSZFELADAT.

a) Jancsi fiú, és Juliska lány, kivéve, ha rossz nevet adtak nekik.
b) Csak akkor teljesül, hogy Jancsi fiú, és Juliska lány, ha nem adtak nekik rossz nevet.

MEGOLDÁS:

a) $(\neg R \supset (F \wedge L))$
b) $((F \wedge L) \supset \neg R)$

F: Jancsi fiú
L: Juliska lány
R: Rossz nevet adtak nekik

F	L	R	$(\neg\, R \supset (\, F \wedge L\,))$	$((\, F \wedge L\,) \supset \neg\, R\,)$
i	i	i	$h\ i\ \boldsymbol{i}\ \ i\ i\ i$	$i\ i\ i\ \ \boldsymbol{h}\ h\ i$
i	i	h	$i\ h\ \boldsymbol{i}\ \ i\ i\ i$	$i\ i\ i\ \ \boldsymbol{i}\ i\ h$
i	h	i	$h\ i\ \boldsymbol{i}\ \ i\ h\ h$	$i\ h\ h\ \ \boldsymbol{i}\ h\ i$
i	h	h	$i\ h\ \boldsymbol{h}\ \ i\ h\ h$	$i\ h\ h\ \ \boldsymbol{i}\ i\ h$
h	i	i	$h\ i\ \boldsymbol{i}\ \ h\ h\ i$	$h\ h\ i\ \ \boldsymbol{i}\ h\ i$
h	i	h	$i\ h\ \boldsymbol{h}\ \ h\ h\ i$	$h\ h\ i\ \ \boldsymbol{i}\ i\ h$
h	h	i	$h\ i\ \boldsymbol{i}\ \ h\ h\ h$	$h\ h\ h\ \ \boldsymbol{i}\ h\ i$
h	h	h	$i\ h\ \boldsymbol{h}\ \ h\ h\ h$	$h\ h\ h\ \ \boldsymbol{i}\ i\ h$

Igazságértékük nem egyezik meg minden Boole-kombináció estén, ezért nem ekvivalensek. (A továbbiakban az igazságtáblák elkészítését az olvasóra bízom.)

1.13.2. RÉSZFELADAT.

a) Nincs sár, kivéve, ha esik az eső.
b) Csak akkor van sár, ha esik az eső.

MEGOLDÁS:

a) $(\neg\,(\text{esik az eső}) \supset \neg\,(\text{sár van}))$
b) $((\text{sár van}) \supset (\text{esik az eső}))$

A két formula ekvivalens.

1.13.3. RÉSZFELADAT.

a) Szívesen sétálok, feltéve, hogy süt a nap, de nem fúj a szél.
b) Csak akkor nem sétálok szívesen, ha nem süt a nap, vagy fúj a szél.
c) Nem igaz, hogy nem sétálok szívesen, holott süt a nap, és a szél sem fúj.

Megoldás:

a) (((süt a nap) $\wedge \neg$ (fúj a szél)) $\supset$ (szívesen sétálok))
b) ($\neg$ (szívesen sétálok) $\supset$ ($\neg$ (süt a nap) $\vee$ (fúj a szél)))
c) $\neg$($\neg$ (szívesen sétálok) $\wedge$ ((süt a nap) $\wedge \neg$ (fúj a szél)))

Mindhárom formula ekvivalens.

1.13.4. részfeladat.

a) Esik az eső, kivéve, ha nincs felhő az égen.
b) Esik az eső, vagy nincs felhő az égen.

Megoldás:

a) ($\neg\neg$ (van felhő az égen) $\supset$ (esik az eső))
b) ((esik az eső) $\vee \neg$ (van felhő az égen))

A két formula ekvivalens.

1.14. feladat. Szemantikailag mit lehet mondani az alábbi formulákról? (tautológia | kielégíthető | ellentmondás)

a) $((A \vee B) \equiv (\neg A \supset B))$
b) $((A \wedge B) \equiv \neg(A \supset \neg B))$
c) $(((A \supset B) \supset C) \equiv (A \supset (B \supset C))$
d) $((A \supset (B \supset C)) \equiv ((A \wedge B) \supset C))$
e) $((A \supset (B \supset C)) \equiv ((A \supset B) \supset (A \supset C)))$
f) $((A \supset (\neg C \supset B)) \supset (\neg A \vee (B \supset A)))$
g) $(((A \wedge B) \supset \neg C) \wedge (C \wedge \neg(A \supset \neg B)))$
h) $((C \wedge A) \supset ((B \supset \neg A) \vee A))$
i) $((\neg A \wedge B) \supset (C \supset (A \supset B)))$

Megoldás:

a)

$(($	A	$\vee$	B	$)\equiv($	$\neg$	A	$\supset$	B	$))$
	h	h	h	$\boldsymbol{i}$	i	h	h	h	
	h	i	i	$\boldsymbol{i}$	i	h	i	i	
	i	i	h	$\boldsymbol{i}$	h	i	i	h	
	i	i	i	$\boldsymbol{i}$	h	i	i	i	

Mivel a főoperátor alatt csupa i szerepel (azaz minden interpretáció esetén igaz), a formula tautológia.

Az a), b), d), e), f), h) és i) tautológia, a c) kielégíthető, míg a g) ellentmondás.

1.15. FELADAT. Az alábbi formulahalmazok közül melyek ellentmondásosak?

a) $\{A \supset B \vee \neg C,\ A,\ \neg B,\ C\}$
b) $\{A \supset B \vee \neg C,\ A,\ \neg B,\ A \wedge \neg B\}$
c) $\{A \supset B \vee \neg C,\ A,\ \neg B,\ A \wedge \neg B \wedge \neg C\}$
d) $\{A \supset B \vee \neg C,\ A,\ \neg B,\ \neg\neg A \wedge \neg B\}$
e) $\{\neg(A \vee \neg B \supset C),\ B,\ A\}$
f) $\{\neg(A \vee \neg B \supset C),\ B,\ A \wedge B \wedge \neg C\}$
g) $\{\neg(A \vee \neg B \supset C),\ B,\ A \vee \neg B\}$
h) $\{\neg(A \vee \neg B \supset C),\ B,\ \neg A \wedge B\}$

MEGOLDÁS:

a)

A	$\supset$	B	$\vee$	$\neg$	C	A	$\neg$	B	C
h	$\boldsymbol{i}$	h	i	i	h	$\boldsymbol{h}$	$\boldsymbol{i}$	h	$\boldsymbol{h}$
h	$\boldsymbol{i}$	h	h	h	i	$\boldsymbol{h}$	$\boldsymbol{i}$	h	$\boldsymbol{i}$
h	$\boldsymbol{i}$	i	i	i	h	$\boldsymbol{h}$	$\boldsymbol{h}$	i	$\boldsymbol{h}$
h	$\boldsymbol{i}$	i	i	h	i	$\boldsymbol{h}$	$\boldsymbol{h}$	i	$\boldsymbol{i}$
i	$\boldsymbol{i}$	h	i	i	h	$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{i}$	h	$\boldsymbol{h}$
i	$\boldsymbol{h}$	h	h	h	i	$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{i}$	h	$\boldsymbol{i}$
i	$\boldsymbol{i}$	i	i	i	h	$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{h}$	i	$\boldsymbol{h}$
i	$\boldsymbol{i}$	i	i	h	i	$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{h}$	i	$\boldsymbol{i}$

Mivel bármely interpretáció esetén legalább egy formula hamis, a formulahalmaz kielégíthetetlen, azaz ellentmondásos.

Az a) és h) halmazok ellentmondásosak, míg a többi kielégíthető.

1.16. FELADAT. Kielégíthetők-e az alábbi formulahalmazok.

a) $\{\neg Y,\ X \vee Y,\ X \supset Z\}$
b) $\{\neg Y,\ X \vee Y,\ X \supset Z,\ \neg Z\}$
c) $\{\neg Z,\ X \vee V,\ X \supset Y,\ Y \supset Z,\ V \supset W \supset Z\}$

(Forrás: Pásztorné Varga K. – Várterész M. *A matematikai logika alkalmazásszemléletű tárgyalása*)

Megoldás:

a)

$\neg$	Y	X	$\vee$	Y	X	$\supset$	Z
$\boldsymbol{i}$	h	h	$\boldsymbol{h}$	h	h	$\boldsymbol{i}$	h
$\boldsymbol{i}$	h	h	$\boldsymbol{h}$	h	h	$\boldsymbol{i}$	i
$\boldsymbol{h}$	i	h	$\boldsymbol{i}$	i	h	$\boldsymbol{i}$	h
$\boldsymbol{h}$	i	h	$\boldsymbol{i}$	i	h	$\boldsymbol{i}$	i
$\boldsymbol{i}$	h	i	$\boldsymbol{i}$	h	i	$\boldsymbol{h}$	h
$\boldsymbol{i}$	h	i	$\boldsymbol{i}$	h	i	$\boldsymbol{i}$	i
$\boldsymbol{h}$	i	i	$\boldsymbol{i}$	i	i	$\boldsymbol{h}$	h
$\boldsymbol{h}$	i	i	$\boldsymbol{i}$	i	i	$\boldsymbol{i}$	i

Mivel létezik olyan interpretáció ($I(X) = i$, $I(Y) = h$, $I(Z) = i$), mely esetén mindegyik formula igaz, a formulahalmaz kielégíthető.

c) 5 változó esetén az igazságtábla 32 sorból áll. Ennek vizsgálata már körülményes, viszont rövid formulák esetében létezik egy másik megközelítés. Ahhoz, hogy a formulahalmaz adott interpretáció esetén igaz legyen, minden formulának igaznak kell lennie. Keressünk egy ilyen interpretációt:
$I(\neg Z) = 1 \Leftrightarrow I(Z) = 0$;
$I(Y \supset Z) = 1 \Leftrightarrow I(Y) = 0$;
$I(X \supset Y) = 1 \Leftrightarrow I(X) = 0$;
$I(X \vee V) = 1 \Leftrightarrow I(V) = 1$;
$I(V \supset (W \supset Z)) = 1 \Leftrightarrow I(W \supset Z) = 1 \Leftrightarrow I(W) = 0$.
Ezen interpretáció esetén a formulahalmaz igaz, tehát kielégíthető.

Az a) és c) halmazok kielégíthetőek, míg a b) ellentmondásos.

1.17. feladat. Az alábbi formulák közül melyek KNF illetve melyek DNF formulák?

a) $((A \vee B) \wedge (\neg A \supset B))$
b) $((A \vee B \vee \neg C) \wedge \neg A \wedge B)$
c) $(\neg A \wedge B)$
d) $(\neg(A \vee B \vee C) \wedge \neg B)$
e) $(\neg A \vee B \vee \neg C)$
f) $(A \vee (\neg B \wedge \neg C) \vee C)$

Megoldás: A b), c), e) formulák KNF, míg a c), e) és f) formulák DNF formulák. Megjegyzés: A c) illetve az e) formulák egyszerre KNF illetve DNF formulák is, ugyanis a literálok konjunkciója egyaránt tekinthető elemi konjunkciónak vagy egy elemű diszjunkciók konjunkciójának (és ugyanez igaz a diszjunkcióra is).

1.18. feladat. KNF illetve DNF megfeleltetés.

1.18.1. részfeladat. A $\neg(A \supset \neg(B \supset \neg(C \supset \neg A)))$ formulának az alábbi formulák közül melyek KNF formulái?

a) $(A \vee C) \wedge (\neg B \vee C)$
b) $(\neg A \wedge B \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C)$
c) $\neg(A \vee B) \wedge C$
d) $A \wedge (C \vee \neg B)$

MEGOLDÁS: Két tulajdonságot kell megvizsgálni: a formula KNF formula-e, és hogy ekvivalens-e az eredeti formulával. A b) és c) formulák nem KNF formulák, így ezekkel nem is kell tovább foglalkozni.

$\neg($	A	$\supset$	$\neg($	B	$\supset$	$\neg($	C	$\supset$	$\neg$	$A)))$
h	*h*	*i*	*h*	*h*	*i*	*h*	*h*	*i*	*i*	*h*
h	*h*	*i*	*h*	*h*	*i*	*h*	*i*	*i*	*i*	*h*
h	*h*	*i*	*i*	*i*	*h*	*h*	*h*	*i*	*i*	*h*
h	*h*	*i*	*i*	*i*	*h*	*h*	*i*	*i*	*i*	*h*
i	*i*	*h*	*h*	*h*	*i*	*h*	*h*	*i*	*h*	*i*
i	*i*	*h*	*h*	*h*	*i*	*i*	*i*	*h*	*h*	*i*
h	*i*	*i*	*i*	*i*	*h*	*h*	*h*	*i*	*h*	*i*
i	*i*	*h*	*h*	*i*	*i*	*i*	*i*	*h*	*h*	*i*

$(A$	$\vee$	$C)$	$\wedge$	$(\neg$	B	$\vee$	$C)$
h	*h*	*h*	***h***	*i*	*h*	*i*	*h*
h	*i*	*i*	***i***	*i*	*h*	*i*	*i*
h	*h*	*h*	***h***	*h*	*i*	*h*	*h*
h	*i*	*i*	***i***	*h*	*i*	*i*	*i*
i	*i*	*h*	***i***	*i*	*h*	*i*	*h*
i	*i*	*i*	***i***	*i*	*h*	*i*	*i*
i	*i*	*h*	***h***	*h*	*i*	*h*	*h*
i	*i*	*i*	***i***	*h*	*i*	*i*	*i*

A	$\wedge$	$(C$	$\vee$	$\neg$	$B)$
h	***h***	*h*	*i*	*i*	*h*
h	***h***	*i*	*i*	*i*	*h*
h	***h***	*h*	*h*	*h*	*i*
h	***h***	*i*	*i*	*h*	*i*
i	***i***	*h*	*i*	*i*	*h*
i	***i***	*i*	*i*	*i*	*h*
i	***h***	*h*	*h*	*h*	*i*
i	***i***	*i*	*i*	*h*	*i*

Az igazságtábla alapján csak a d) formula ekvivalens az eredetivel, így csak ez a formula lehet az eredeti KNF formulája.

1.18.2. RÉSZFELADAT. A $\neg(C \vee \neg(A \vee \neg(B \vee C)))$ formulának mely formulák DNF formulái?

a) $(A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C)$
b) $C \vee \neg(A \wedge B)$
c) $(A \wedge \neg C) \vee (\neg B \wedge \neg C)$
d) $\neg C \wedge (\neg A \vee \neg B)$

MEGOLDÁS: A b) és d) formulák nem DNF formulák, míg az a) formula nem ekvivalens az eredetivel. Így csak a c) formula az eredeti DNF formulája.

1.19. FELADAT. Hozzuk KNF és DNF formára a következő formulákat!

a) $\neg(X \wedge Y \supset \neg X) \wedge \neg(X \wedge Y \supset \neg Y)$
b) $(Z \supset X) \supset (\neg(Y \vee Z) \supset X)$
c) $((X \supset Y) \supset (Z \supset \neg X)) \supset (\neg Y \supset \neg Z)$
d) $((((X \supset Y) \supset \neg X) \supset \neg Y) \supset \neg Z) \supset Z$
e) $(X \supset (Y \supset Z)) \supset ((X \supset \neg Z) \supset (X \supset \neg Y))$

(Forrás: Pásztorné Varga K. – Várterész M. *A matematikai logika alkalmazásszemléletű tárgyalása*)

Megoldás: Egy formulának számtalan formailag különböző KNF (illetve DNF) formája lehet. Az alábbiakban egy-egy lehetséges megoldás található. (Más megoldás esetén meg kell vizsgálni, hogy megfelel-e a formai követelményeknek, valamint, hogy ekvivalens-e az eredeti formulával.)

a) $\neg(X \wedge Y \supset \neg X) \wedge \neg(X \wedge Y \supset \neg Y) \quad \sim_0$ / implikációk eltávolítása
$\neg(\neg(X \wedge Y) \vee \neg X) \wedge \neg(\neg(X \wedge Y) \vee \neg Y) \quad \sim_0$ / negációk bevitele
$\cancel{\neg\neg}(X \wedge Y) \wedge \cancel{\neg\neg}X \wedge \cancel{\neg\neg}(X \wedge Y) \wedge \cancel{\neg\neg}Y \quad \sim_0$ / egyszerűsítés
$X \wedge Y$ egyszerre KNF és DNF

b) $\cancel{(Z \wedge \neg X)} \vee Y \vee Z \vee X$ DNF és KNF

c) $((\neg X \vee Y) \wedge Z \wedge X) \vee Y \vee \neg Z \quad \sim_0$ / De Morgan azonosság
$(\cancel{(\neg X \wedge Z \wedge X)} \vee \cancel{(Y \wedge Z \wedge X)}) \vee Y \vee \neg Z$ DNF és KNF

d) Z DNF és KNF

e) $(X \wedge Y \wedge \neg Z) \vee (X \wedge Z) \vee \neg X \vee \neg Y$ DNF
$(X \vee \neg X \vee \neg Y) \wedge (X \vee Z \vee \neg X \vee \neg Y) \wedge (Y \vee X \vee \neg X \vee \neg Y) \wedge (Y \vee Z \vee \neg X \vee \neg Y) \wedge (\neg Z \vee X \vee \neg X \vee \neg Y) \wedge (\neg Z \vee Z \vee \neg X \vee \neg Y)$ KNF
(egyszerűsítés után azonosan igaz($\top$) formulát kapunk)

1.20. feladat. Írjuk fel a teljes zárójelezett alakját az alábbi formuláknak!

a) $(X \supset Y \supset Z \supset \neg X) \supset \neg Y \supset \neg Z$
b) $(X \supset Y \supset Z) \supset (X \supset \neg Z) \supset X \supset \neg Y$
c) $X \wedge \neg Y \vee Z \wedge Y \supset X \wedge Y \wedge Z$
d) $Z \supset X \supset \neg(Y \vee Z) \supset X$
e) $\neg(X \wedge Y \supset \neg X) \wedge \neg(X \wedge Y \supset \neg Y)$
f) $(X \wedge \neg Y) \vee (\neg X \wedge Y \wedge Z) \vee X \vee Y \wedge \neg Z$

Megoldás:

a) $((X \supset (Y \supset (Z \supset \neg X))) \supset (\neg Y \supset \neg Z))$
b) $((X \supset (Y \supset Z)) \supset ((X \supset \neg Z) \supset (X \supset \neg Y)))$
c) $((X \wedge (\neg Y \vee (Z \wedge Y))) \supset (X \wedge (Y \wedge Z)))$
d) $(Z \supset (X \supset (\neg(Y \vee Z) \supset X)))$
e) $(\neg((X \wedge Y) \supset \neg X) \wedge \neg((X \wedge Y) \supset \neg Y))$
f) $((X \wedge \neg Y) \vee ((\neg X \wedge (Y \wedge Z)) \vee (X \vee (Y \wedge \neg Z))))$

1.21. feladat. Hagyjuk el az alábbi formulákból a felesleges zárójeleket!

a) $((X \wedge \neg Z) \vee ((\neg X \wedge Z) \vee X) \vee (Y \wedge \neg Z))$
b) $((((X \supset Y) \supset Z) \supset \neg X) \supset \neg Y)$
c) $\neg(X \supset (Y \supset (Z \supset \neg(X \supset \neg Y))))$
d) $(((X \wedge Y) \vee \neg Z) \supset ((\neg X \wedge Y) \vee \neg(\neg Y \wedge Z)))$
e) $(((\neg X \vee Y) \vee \neg Z) \wedge ((\neg Y \vee Z) \wedge (X \vee (Y \vee \neg Z))))$

MEGOLDÁS:

a) $(X \wedge \neg Z) \vee (\neg X \wedge Z) \vee X \vee (Y \wedge \neg Z)$

b) $(((X \supset Y) \supset Z) \supset \neg X) \supset \neg Y$

c) $\neg(X \supset Y \supset Z \supset \neg X \supset \neg Y)$

d) $(X \wedge Y) \vee \neg Z \supset (\neg X \wedge Y) \vee \neg(\neg Y \wedge Z)$

e) $(\neg X \vee Y \vee \neg Z) \wedge (\neg Y \vee Z) \wedge (X \vee Y \vee \neg Z)$

MEGJEGYZÉS: A zárójelek a logikai összekötőjelek közötti precedencia sorrend valamint a $\wedge$ ill. a $\vee$ asszociatív tulajdonsága miatt hagyhatóak el.

2. Elsőrendű logika

2.1. FELADAT. Legyenek x, y, z π típusú változók és $f_{(\pi \to \pi)}$, $g_{(\pi,\pi \to \pi)}$, $h_{(\pi,\pi,\pi \to \pi)}$ pedig függvényszimbólumok egy nyelvben. Termek-e ebben a nyelvben a következő szimbólumsorozatok:

a) $f(g(x, y))$
b) $f(g(x), h(x, y, z))$
c) $g(f(z), h(x, x, x))$
d) $\exists g(f(x), y)$
e) $f(x) \wedge g(x, y)$

MEGOLDÁS: a) igen, b) nem, c) igen, d) nem, e) nem

2.2. FELADAT. Legyenek x, y, z π_1 valamint α, β, γ π_2 típusú változók és $f_{(\pi_1 \to \pi_2)}$, $g_{(\pi_2,\pi_1 \to \pi_1)}$, $h_{(\pi_1,\pi_1 \to \pi_1)}$ pedig függvényszimbólumok egy nyelvben. Termek-e ebben a nyelvben a következő szimbólumsorozatok, és ha igen, milyen típusúak.

a) $g(f(g(x, y)), x)$
b) $h(g(\beta, y), g(f(x), g(\alpha, x)))$
c) $g(f(x), h(x, y, z))$
d) $f(h(h(g(\alpha, x), g(\beta, y)), g(\gamma, z)))$
e) $\neg g(f(x), h(y, z))$
f) $h(g(\alpha, c), x)$

MEGOLDÁS: a) nem, b) igen (π_1 típusú), c) nem, d) igen (π_2), e) nem, f) nem

2.3. FELADAT. Soroljuk fel a következő termek résztermeit, és határozzuk meg a funkcionális összetettségüket!

a) x
b) $f(x)$
c) $h(x, f(y))$
d) $g(h(x, f(y)), y, f(z))$
e) $h(g(x, y, z), f(x))$
f) $f(g(h(x, f(y)), y, f(y)))$

Megoldás:

a) $\{x\}$ $\quad \tilde{l} = 0$
b) $\{f(x),\ x\}$ $\quad \tilde{l} = 1$
c) $\{h(x, f(y)),\ x,\ f(y),\ y\}$ $\quad \tilde{l} = 2$
d) $\{g(h(x, f(y)), y, f(z)),\ h(x, f(y)),\ y,\ f(z),\ x,\ f(y),\ z\}$ $\quad \tilde{l} = 4$
e) $\{h(g(x, y, z), f(x)),\ g(x, y, z),\ f(x),\ x,\ y,\ z\}$ $\quad \tilde{l} = 3$
f) $\{f(g(h(x, f(y)), y, f(y))),\ g(h(x, f(y)), y, f(y)),\ h(x, f(y)),\ y,\ f(y),\ x\}$ $\quad \tilde{l} = 5$

2.4. feladat. Legyenek x, y, z π típusú változók, c π típusú konstans, $f_{(\pi\to\pi)}$, $g_{(\pi,\pi\to\pi)}$, $h_{(\pi,\pi,\pi\to\pi)}$ függvényszimbólumok és $P_{(\pi)}$, $Q_{(\pi,\pi,\pi)}$ predikátumszimbólumok egy nyelvben. Formulák-e ebben a nyelvben a következő szimbólumsorozatok:

a) $Q(x, f(y), h(y, z, z))$
b) $(P(c) \supset \forall y(Q(x, y, z) \wedge P(g(x, y))))$
c) $Q(P(x), f(y), f(z))$
d) $f(h(x, y, z))$
e) $QxP(h(x, y, f(c)))$
f) $Q(g(x, y), f(y, z), h(x, y, z))$
g) $\exists! xP(h(x, y, z))$
h) $P(x) \vee \forall xyQ(x, x, y)$
i) $\forall x(\exists y(P(x) \wedge Q(x, y, x)))$
j) $Q(x, f(x), f(f(x))) \supset \exists y : Q(f(x), f(f(x)), y)$
k) $\neg P(x) \supset \forall cP(g(c, x))$

Megoldás: Az a), b), i) jelsorozatok formulák a fenti nyelvben, míg a c), d), e), f), g), h), j), k) szimbólumsorozatok nem.

2.5. feladat. Legyenek x, y, z π_1 valamint α, β, γ π_2 típusú változók, $f_{(\pi_1\to\pi_2)}$, $g_{(\pi_2,\pi_1\to\pi_1)}$, $h_{(\pi_1,\pi_2\to\pi_1)}$ függvényszimbólumok és $P_{(\pi_1)}$, $Q_{(\pi_2,\pi_1)}$ predikátumszimbólumok egy elsőrendű logikai nyelvben. Formulák-e ebben a nyelvben a következő szimbólumsorozatok:

a) $Q(f(y), h(y, \alpha, z)) \vee \forall xP(x)$
b) $\forall x(Q(\alpha, h(x, P(y))) \vee P(x))$
c) $\exists xP(x) \supset \forall \alpha Q(\alpha, g(f(x), g(\alpha, x)))$
d) $P(g(\alpha, x)) \supset \forall x, yQ(\alpha, h(x, f(y)))$
e) $P(g(\beta, y)) \vee \neg\exists x\forall zQ(\beta, h(z, f(x)))$
f) $Q(\alpha, x) \wedge \exists y(P(y) \vee (g(f(y), y)))$
g) $\forall x\exists \alpha P(f(h(x, \alpha))) \wedge P(z)$

Megoldás: A c) és e) jelsorozatok formulák a fenti nyelvben, míg az a), b), d), f), g) szimbólumsorozatok nem.

2.6. FELADAT. Soroljuk fel az alábbi formulák prímkomponenseit!

a) $\forall x(\forall y(P(x) \supset \forall zQ(z,y))) \supset ((P(x) \supset \neg\exists x\forall yQ(x,y)) \supset \neg\forall zQ(z,z))$
b) $Q(f(x), h(y,x,z)) \supset P(x)$
c) $\neg((\exists x(P(x) \supset Q(x,y)) \wedge (Q(y,x) \supset R(x))) \supset \forall x(\neg P(x)))$
d) $(\exists xQ(x,y) \supset \neg(P(g(x,y)) \wedge \forall zP(z)))$
e) $(\exists x\neg(P(f(x)) \supset Q(x,y)) \supset \forall zR(z))$

MEGOLDÁS:

a) $\{\forall x(\forall y(P(x) \supset \forall zQ(z,y))),\ P(x),\ \exists x\forall yQ(x,y),\ \forall zQ(z,z)\}$
b) $\{Q(f(x), h(y,x,z)),\ P(x)\}$
c) $\{\exists x(P(x),\ Q(x,y),\ Q(y,x),\ R(x),\ \forall x(\neg P(x))\}$
d) $\{\exists xQ(x,y),\ P(g(x,y)),\ \forall zP(z)\}$
e) $\{\exists x\neg(P(f(x)) \supset Q(x,y)),\ \forall zR(z)\}$

2.7. FELADAT. Soroljuk fel az alábbi formulák összes részformuláit, és határozzuk meg a logikai összetettségüket!

a) $\forall x(\forall y(P(x) \supset Q(x,y)))$
b) $((P(x) \supset \neg\exists x\forall yQ(x,y)) \supset \neg\forall zQ(z,z))$
c) $Q(f(x), g(y,x))$
d) $(\exists xQ(x,y) \supset \neg(P(g(x,y)) \wedge \forall zP(z)))$
e) $(\exists x\neg(P(f(x)) \supset Q(x,y)) \supset \forall zR(z))$
f) $\neg((\exists x(P(x) \supset Q(x,y)) \wedge (Q(y,x) \supset R(x))) \supset \forall x(\neg P(x)))$

MEGOLDÁS:

a) $\{\forall x(\forall y(P(x) \supset Q(x,y))),\ \forall y(P(x) \supset Q(x,y)),\ P(x) \supset Q(x,y),\ P(x),\ Q(x,y)\}$
$l = 3$

b) $\{(P(x) \supset \neg\exists x\forall yQ(x,y)) \supset \neg\forall zQ(z,z),\ P(x) \supset \neg\exists x\forall yQ(x,y),\ \neg\forall zQ(z,z),$
$P(x),\ \neg\exists x\forall yQ(x,y),\ \forall zQ(z,z),\ \exists x\forall yQ(x,y),\ Q(z,z),\ \forall yQ(x,y),\ Q(x,y)\}$
$l = 7$

c) $\{Q(f(x), g(y,x))\}$
$l = 0$

d) $\{\exists xQ(x,y) \supset \neg(P(g(x,y)) \wedge \forall zP(z)),\ \exists xQ(x,y),\ \neg(P(g(x,y)) \wedge \forall zP(z)),$
$Q(x,y),\ P(g(x,y)) \wedge \forall zP(z),\ P(g(x,y)),\ \forall zP(z),\ P(z)\}$
$l = 5$

e) $\{\exists x\neg(P(f(x)) \supset Q(x,y)) \supset \forall zR(z),\ \exists x\neg(P(f(x)) \supset Q(x,y)),\ \forall zR(z),$
$\neg(P(f(x)) \supset Q(x,y)),\ R(z),\ P(f(x)) \supset Q(x,y),\ P(f(x)),\ Q(x,y)\}$
$l = 5$

f) $\{\neg((\exists x(P(x) \supset Q(x,y)) \wedge (Q(y,x) \supset R(x))) \supset \forall x(\neg P(x))),$
$(\exists x(P(x) \supset Q(x,y)) \wedge (Q(y,x) \supset R(x))) \supset \forall x(\neg P(x)),$
$\exists x(P(x) \supset Q(x,y)) \wedge (Q(y,x) \supset R(x)),\ \forall x(\neg P(x)),\ \exists x(P(x) \supset Q(x,y)),$
$Q(y,x) \supset R(x),\ \neg P(x),\ P(x) \supset Q(x,y),\ Q(y,x),\ R(x),\ P(x),\ Q(x,y)\}$
$l = 8$

2.8. FELADAT. Jelöljük be az egyes kvantorok hatáskörét!

a) $\forall x(\exists y Q(f(x), h(y,x,z)) \supset P(x))$
b) $\forall x(P(x) \lor \neg\exists x Q(x, g(x,x))) \land \exists x P(f(f(x)))$
c) $\exists x(P(x) \lor \forall y \neg Q(g(x,y),y) \land \exists x P(x))$
d) $\exists x \forall x P(x) \lor \neg P(x)$

MEGOLDÁS:

a) $\boxed{\forall x(\boxed{\exists y Q(f(x), h(y,x,z))} \supset P(x))}$

b) $\boxed{\forall x(P(x) \lor \neg\boxed{\exists x Q(x, g(x,x))})} \land \boxed{\exists x P(f(f(x)))}$

c) $\boxed{\exists x(P(x) \lor \boxed{\forall y \neg Q(g(x,y),y)} \land \boxed{\exists x P(x)})}$

d) $\boxed{\exists x \boxed{\forall x P(x)}} \lor \neg P(x)$

2.9. FELADAT. Legyenek x, y, z egy elsőrendű nyelv változói, míg c egy konstans, és tegyük fel, hogy az alábbi jelsorozatok a nyelv formulái. Jelöljük be a kötöttségi viszonyokat, és határozzuk meg a paraméterek halmazát!

a) $\exists x \forall y Q(x,y) \lor P(x)$
b) $\forall x(P(x,y) \supset \forall y Q(y))$
c) $(\forall x P(x,y) \supset \forall y R(x,y)) \land P(c)$
d) $(\neg\exists z Q(z,z) \land R(f(y,z)))$
e) $\forall x(\forall y P(x,y,z) \supset Q(x,y))$
f) $\forall y \exists z(P(x,y,z) \supset \exists x \forall x Q(z,x))$
g) $\exists x \forall y(P(x) \lor Q(x, f(y))) \supset \forall y Q(x,y)$

MEGOLDÁS:

a) $\exists x \forall y Q(x,y) \lor P(x)$ $\quad Par = \{x\}$

b) $\forall x(P(x,y) \supset \forall y Q(y))$ $\quad Par = \{y\}$

c) $(\forall x P(x,y) \supset \forall y R(x,y)) \land P(c)$ $\quad Par = \{x,y\}$ (c nem paraméter!)

d) $(\neg\exists z Q(z,z) \land R(f(y,z)))$ $\quad Par = \{y,z\}$

e) $\forall x(\forall y P(x,y,z) \supset Q(x,y))$ $\quad Par = \{y,z\}$

f) $\forall y \exists z(P(c,y,z) \supset \exists x \forall x Q(z,x))$ $\quad Par = \emptyset$

g) $\exists x \forall y(P(x) \lor Q(x, f(y))) \supset \forall y Q(x,y)$ $\quad Par = \{x\}$

2.10. FELADAT. Változó-tiszták-e az alábbi formulák? Ha nem, hozzuk olyan alakra!

a) $\forall x P(x) \vee \forall x P(f(x)) \vee \forall x P(f(f(x))) \vee P(x)$
b) $\forall x(\forall y P(x, y, z) \supset Q(x, y))$
c) $\exists x \forall y(P(x) \vee Q(x, f(y))) \supset \forall y Q(x, y)$
d) $\forall x \exists y(P(x) \vee \forall y Q(g(x, y), y) \vee P(y))$
e) $P(c) \supset \exists x(P(x) \vee Q(x, y)) \vee P(y)$
f) $\neg \forall x(P(g(x, x)) \supset \exists x P(x) \vee \forall x Q(x, x)) \wedge P(x)$
g) $\exists x R(x, y, z) \supset \forall x \forall y(P(y) \wedge R(x, y, z))$

MEGOLDÁS:

a) A formula nincs változó-tiszta alakban, ugyanis különböző kvantorok ugyanazt a változó-nevet kötik, sőt a kötött illetve szabad változó-nevek halmazának metszete sem üres.

$\forall x P(x) \vee \forall x P(f(x)) \vee \forall x P(f(f(x))) \vee P(\overset{\uparrow}{x})$ (kötöttségek bejelölése)

$\forall \ \ P(\ \ ) \vee \forall \ \ P(f(\ \ )) \vee \forall \ \ P(f(f(\ \ ))) \vee P(\overset{\uparrow}{x})$ (váz meghatározása)

$\forall y P(y) \vee \forall z P(f(z)) \vee \forall v P(f(f(v))) \vee P(\overset{\uparrow}{x})$ (új változó-nevek beírása)

b) $\forall x(\forall v P(x, v, z) \supset Q(x, y))$
c) $\exists z \forall y(P(z) \vee Q(z, f(y))) \supset \forall v Q(x, v)$
d) $\forall x \exists y(P(x) \vee \forall z Q(g(x, z), z) \vee P(y))$
e) $P(c) \supset \exists x(P(x) \vee Q(x, y)) \vee P(y)$
(az y paraméter két helyen is szerepel, de ettől még a formula változó-tiszta)
f) $\neg \forall y(P(g(y, y)) \supset \exists z P(z) \vee \forall v Q(v, v)) \wedge P(x)$
g) $\exists x R(x, y, z) \supset \forall v \forall w(P(w) \wedge R(v, w, z))$

2.11. FELADAT. Döntsük el a formulákról, hogy melyek egymás variánsai, azaz melyek kongruensek!

2.11.1. RÉSZFELADAT.

a) $\exists x(\forall y Q(z, x, y) \supset \exists z P(z, x)$
b) $\exists z(\forall x Q(z, z, x) \supset \exists x P(x, z)$
c) $\exists y(\forall x Q(z, y, x) \supset \exists x P(x, y)$
d) $\exists z(\forall x Q(y, z, x) \supset \exists v P(v, z)$
e) $\exists y(\forall x Q(z, y, x) \supset \exists z P(z, x)$
f) $\exists y(\forall x Q(z, y, x) \supset \exists z P(z, y)$

Megoldás: Két formula akkor és csak akkor egymás variánsa, ha vázuk megegyezik.

a) $\exists\ (\forall\ Q(\overset{\uparrow}{z},\ ,\ )\supset\exists\ P(\ ,\ )$

b) $\exists\ (\forall\ Q(\ ,\ ,\ )\supset\exists\ P(\ ,\ )$

c) $\exists\ (\forall\ Q(\overset{\uparrow}{z},\ ,\ )\supset\exists\ P(\ ,\ )$

d) $\exists\ (\forall\ Q(\overset{\uparrow}{y},\ ,\ )\supset\exists\ P(\ ,\ )$

e) $\exists\ (\forall\ Q(\overset{\uparrow}{z},\ ,\ )\supset\exists\ P(\ ,\overset{\uparrow}{x})$

f) $\exists\ (\forall\ Q(\overset{\uparrow}{z},\ ,\ )\supset\exists\ P(\ ,\ )$

Tehát csak az a), c) és f) formulák egymás variánsai.

2.11.2. részfeladat.

a) $\forall z(\forall xQ(z,x,v)\supset\exists v(P(v,u)\supset\exists wQ(v,w,x)))$
b) $\forall x(\forall wQ(x,w,v)\supset\exists w(P(w,u)\supset\exists vQ(w,v,x)))$
c) $\forall x(\forall wQ(x,w,v)\supset\exists w(P(v,u)\supset\exists wQ(v,w,x)))$
d) $\forall z(\forall xQ(x,z,v)\supset\exists w(P(w,u)\supset\exists vQ(w,v,x)))$
e) $\forall v(\forall wQ(v,w,x)\supset\exists x(P(x,u)\supset\exists wQ(v,w,x)))$

Megoldás: Csak az a) és b) formulák kongruensek.

2.11.3. részfeladat.

a) $\forall zQ(z,\beta)\vee\exists x\neg Q(x,\gamma)$
b) $\forall zQ(z,\gamma)\vee\exists x\neg Q(x,\beta)$
c) $\forall yQ(y,\gamma)\vee\exists z\neg Q(z,\beta)$
d) $\forall xQ(x,\beta)\vee\exists x\neg Q(x,\gamma)$

Megoldás: Az a) és d), valamint a b) és c) formulák kongruensek.

2.11.4. részfeladat.

a) $\forall z\forall y(Q(z,y)\supset\neg(\exists yQ(z,y)\vee P(z)))$
b) $\forall x\forall u(Q(x,u)\supset\neg(\exists uQ(x,u)\vee P(z)))$
c) $\forall u\forall y(Q(y,u)\supset\neg(\exists zQ(u,z)\vee P(z)))$
d) $\forall x\forall y(Q(x,y)\supset\neg(\exists zQ(x,z)\vee P(z)))$
e) $\forall z\forall y(Q(z,y)\supset\neg(\exists uQ(z,u)\vee P(u)))$

Megoldás: Csak a b) és d) formulák kongruensek.

2.12. FELADAT. Az alábbi elsőrendű formulák közül melyek propozícionális tautológiák?

a) $\forall x(P(x) \supset Q(x)) \supset (\forall x P(x) \supset \forall x Q(x))$
b) $\forall x P(x) \supset (\exists x \forall y R(x,y) \supset \forall x P(x))$
c) $\forall x \neg P(x) \supset (\exists y R(y,y) \supset \neg \exists x P(x))$
d) $\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \supset \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$
e) $\exists x(P(x) \vee Q(x)) \equiv (\exists x P(x) \vee \exists x Q(x))$
f) $\forall x(P(x) \vee \neg P(x))$
g) $\forall x P(x) \vee \forall x \neg P(x)$
h) $\forall x P(x) \vee \neg \forall x P(x)$
i) $\forall x P(x) \vee \exists x \neg P(x)$
j) $\forall x P(x) \vee \neg \forall y P(y)$

MEGOLDÁS:

a) Miután bejelöltük a formula prímkomponenseit, írjuk fel a Quine-táblát:

$\boxed{\forall x(P(x) \supset Q(x))}$	$\supset$ (	$\boxed{\forall x P(x)}$	$\supset$	$\boxed{\forall x Q(x)}$)
h	$\boldsymbol{i}$	h	i	h
h	$\boldsymbol{i}$	h	i	i
h	$\boldsymbol{i}$	i	h	h
h	$\boldsymbol{i}$	i	i	i
i	$\boldsymbol{i}$	h	i	h
i	$\boldsymbol{i}$	h	i	i
i	$\boldsymbol{h}$	i	h	h
i	$\boldsymbol{i}$	i	i	i

Mivel a főoperátor alatt szerepel h is, a formula nem propozícionális tautológia.

b)

$\boxed{\forall x P(x)}$	$\supset$ (	$\boxed{\exists x \forall y R(x,y)}$	$\supset$	$\boxed{\forall x P(x)}$)
h	$\boldsymbol{i}$	h	i	h
h	$\boldsymbol{i}$	i	h	h
i	$\boldsymbol{i}$	h	i	i
i	$\boldsymbol{i}$	i	i	i

Mivel a főoperátor alatt csupa i szerepel, a formula propozícionális tautológia. (Figyeljük meg, hogy a $\forall x P(x)$ prímkomponens kétszer is szerepel a formulában.)

A feladat többi része hasonlóan megoldható. A b), h) és j) formulák prop. tautológiák, míg az a), c), d), e), f), g) és i) formulák nem.

MEGJEGYZÉS: A j) feladatban a $\forall x P(x)$ és $\forall y P(y)$ prímkomponensek kongruens (szintaktikailag ekvivalens) formulák, ezért nem különböztetjük meg őket.

2.1. Prenex alak

2.13. FELADAT. Határozzuk meg az alábbi formulák prenex alakját!

a) $\forall x P(x) \supset \neg \exists x P(x) \vee Q(x, c)$
b) $\exists x \forall y Q(x, y) \vee \exists x \forall y Q(x, y)$
c) $\exists x \forall y Q(f(x), y) \supset \exists x \forall y Q(x, y)$
d) $\exists x(P(x) \vee \forall x P(x) \supset \forall y Q(x, y))$
e) $\exists x(\forall y Q(x, y) \vee \exists z P(z)) \supset \exists x P(x)$
f) $\forall x(\exists y Q(x, y) \supset \forall x P(x)) \supset \neg \forall x \exists y Q(x, y)$
g) $\neg \exists x(\exists y Q(x, y) \supset P(y)) \supset \forall x(P(x) \vee \exists x Q(x, y))$
h) $\forall x(\exists y Q(x, y) \supset \forall x P(x)) \supset \neg(\forall x P(x) \vee \forall x R(x))$

MEGOLDÁS:

a) $\forall x P(x) \supset \neg \exists x P(x) \vee Q(x, c)$
$\forall y P(y) \supset \neg \exists z P(z) \vee Q(x, c)$ (változótiszta alak)
$\exists y(P(y) \supset \neg \exists z P(z) \vee Q(x, c))$
$\exists y(P(y) \supset \forall z \neg P(z) \vee Q(x, c))$
$\exists y(P(y) \supset \forall z(\neg P(z) \vee Q(x, c)))$
$\exists y \forall z(P(y) \supset \neg P(z) \vee Q(x, c))$ (prenex alak)

b) $\exists x \forall y \exists z \forall u(Q(x, y) \vee Q(z, u))$
c) $\forall x \exists y \exists z \forall u(Q(f(x), y) \supset Q(z, u))$
d) $\exists x \exists z \forall y(P(x) \vee P(z) \supset Q(x, y))$
e) $\forall x \exists y \forall z \exists u((Q(x, y) \vee P(z)) \supset P(u))$
f) $\exists x \exists y \exists z \exists u \forall w((Q(x, y) \supset P(z)) \supset \neg Q(u, w))$
g) $\exists x \forall z \forall u \exists w(\neg(Q(x, z) \supset P(y)) \supset (P(u) \vee Q(w, y)))$
h) $\exists x \exists y \exists z \exists u \exists w((Q(x, y) \supset P(z)) \supset \neg(P(u) \vee R(w)))$

2.14. FELADAT. Mely formulá(k) az eredeti formula prenex alakja(i)?

2.14.1. RÉSZFELADAT. Eredeti formula: $\neg R(\beta, y) \wedge \exists \beta \exists x R(\beta, x)$

a) $\exists \beta \exists x(\neg R(\beta, y) \wedge R(\beta, x))$
b) $\exists \beta \exists x(\neg R(\alpha, y) \wedge R(\beta, x))$
c) $\exists \gamma \forall x(\neg R(\beta, y) \wedge R(\gamma, x))$
d) $\exists \alpha \exists x(\neg R(\beta, y) \wedge R(\alpha, x))$
e) $\exists x \exists \gamma(\neg R(\beta, y) \wedge R(\gamma, x))$
f) $\exists \gamma(\neg R(\beta, y) \wedge \exists x R(\gamma, x))$

Megoldás: A feladat megoldásához szükség lesz az eredeti formula vázára:

$$\neg R(\beta, y) \wedge \exists\ \exists\ R(\ ,\ )$$

a) $\exists\ \exists\ (\neg R(\ , y) \wedge R(\ ,\ ))$ (szabad változó kötött lett $\Rightarrow$ nem)

b) $\exists\ \exists\ (\neg R(\alpha, y) \wedge R(\ ,\ ))$ (szabad változó neve megváltozott $\Rightarrow$ nem)

c) $\exists\gamma\underline{\underline{\forall x}}(\neg R(\beta, y) \wedge R(\gamma, x))$ (nem megfelelő az x-et kötő kvantor $\Rightarrow$ nem)

d) $\exists\ \exists\ (\neg R(\beta, y) \wedge R(\ ,\ ))$ (igen)

e) $\exists\ \exists\ (\neg R(\beta, y) \wedge R(\ ,\ ))$ (**azonos** kvantorok felcserélhetőek $\Rightarrow$ igen)

f) $\exists\gamma(\neg R(\beta, y) \wedge \underline{\underline{\exists x}} R(\gamma, x))$ (az x-et kötő kvantor nincs kiemelve $\Rightarrow$ nem prenex)

Tehát a d) és e) formulák az eredeti formula prenex alakjai.

2.14.2. részfeladat. Eredeti formula: $\forall z Q(z, \gamma) \supset \exists x \neg Q(x, \beta)$

a) $\forall z \exists x(Q(z, \gamma) \supset \neg Q(x, \beta))$
b) $\exists z \exists x(Q(z, \gamma) \supset \neg Q(x, \beta))$
c) $\forall z \forall x(Q(z, \gamma) \supset \neg Q(x, \beta))$
d) $\exists z \forall x(Q(z, \gamma) \supset \neg Q(x, \beta))$

Megoldás: Csak a b) formula az eredeti prenex alakja, a többi formulában a kvantorok nem megfelelőek.

2.14.3. részfeladat. Eredeti formula: $\exists x(\forall y Q(x, y) \vee \exists z P(z)) \supset \exists x P(x)$

a) $\forall x \exists y \forall z \exists x((Q(x, y) \vee P(z)) \supset P(x))$
b) $\forall x \exists y \forall z \exists u(Q(x, y) \vee P(z)) \supset P(u)$
c) $\forall x \exists y \exists u((Q(x, y) \vee \forall z P(z)) \supset P(u))$
d) $\exists y \forall x \forall z \exists u((Q(x, y) \vee P(z)) \supset P(u))$
e) $\forall x \exists y \forall z \exists u((Q(x, y) \vee P(z)) \supset P(u))$
f) $\forall x \exists y \forall z((Q(x, y) \vee P(z)) \supset P(x))$
g) $\forall y \exists x \forall w \exists z((Q(y, x) \vee P(w)) \supset P(z))$
h) $\forall x \exists y \forall z \exists u((Q(y, x) \vee P(z)) \supset P(u))$

MEGOLDÁS:

a) Változnak a kötöttségi viszonyok (nem változótiszta) $\Rightarrow$ nem.
b) A kvantorok az implikációs előtagra vonatkoznak (hiányzik a zárójel) $\Rightarrow$ nem.
c) Nem prenex (a z-t kötő kvantor nem lett kiemelve) $\Rightarrow$ nem.
d) Egymás hatáskörében lévő **eltérő** kvantorok nem felcserélhetőek $\Rightarrow$ nem.
e) Igen.
f) Változnak a kötöttségi viszonyok (nem változótiszta) $\Rightarrow$ nem.
g) Igen.
h) Változnak a kötöttségek, és az x ill. y-t kötő kvantorok sem megfelelőek $\Rightarrow$ nem.

Tehát az e) és g) formulák az eredeti prenex alakjai.

2.2. Interpretáció, változókiértékelés

2.15. FELADAT. Legyen adott a $\langle\{\pi\},\{P\},\emptyset,\emptyset\rangle$ logikai nyelv $(\{(\pi,\pi)\},\emptyset,\emptyset)$ szignatúrával. Tekintsük az $\mathcal{I}$ interpretációt, melyben $U_\pi=\{1,2,3\}$, míg $P^{\mathcal{I}}$ értéke az alábbi táblázat alapján határozható meg:

u	1	1	1	2	2	2	3	3	3
v	1	2	3	1	2	3	1	2	3
$P^{\mathcal{I}}(u,v)$	i	i	h	i	h	i	h	h	i

Legyen $\kappa=\binom{x\ y\ z}{2\ 1\ 3}$ egy változókiértékelés ebben az interpretációban.

a) Soroljuk fel κ összes z-variánsát!
b) Mi lesz a $P(y,z)$ formula értéke a fenti interpretációban a κ kiértékelés esetén?
c) Határozzuk meg $P(x,x)$ értékét az $\mathcal{I}$ interpretációban a κ összes x-variáns változókiértékelése esetén!
d) Mi lesz a $\forall xP(x,z)$ formula értéke az $\mathcal{I}$ interpretációban a κ kiértékelés mellett?
e) Határozzuk meg $\exists yP(x,y)$ értékét az $\mathcal{I}$ interpretációban a κ összes y-variáns változókiértékelése esetén!

MEGOLDÁS:

a) $\kappa[z\mapsto 1]=\binom{x\ y\ z}{2\ 1\ 1}$, $\kappa[z\mapsto 2]=\binom{x\ y\ z}{2\ 1\ 2}$, $\kappa[z\mapsto 3]=\binom{x\ y\ z}{2\ 1\ 3}$.
b) $|P(y,z)|^{\mathcal{I},\kappa}=P^{\mathcal{I}}(1,3)=h$
c) $|P(x,x)|^{\mathcal{I},\kappa[x\mapsto 1]}=i$, $|P(x,x)|^{\mathcal{I},\kappa[x\mapsto 2]}=h$, $|P(x,x)|^{\mathcal{I},\kappa[x\mapsto 3]}=i$.
d) $|\forall xP(x,z)|^{\mathcal{I},\kappa}=h$, ugyanis $P^{\mathcal{I}}(1,3)=h$, azaz nem minden $u\in U_\pi$ univerzum-elem esetén teljesül, hogy $|P(x,z)|^{\mathcal{I},\kappa[x\mapsto u]}=i$.
e) Mivel y nem paraméter a formulában,

$$|\exists yP(x,y)|^{\mathcal{I},\kappa[y\mapsto 1]}=|\exists yP(x,y)|^{\mathcal{I},\kappa[y\mapsto 2]}=|\exists yP(x,y)|^{\mathcal{I},\kappa[y\mapsto 3]}=|\exists yP(x,y)|^{\mathcal{I},\kappa}=i.$$

A formula igaz lesz, hiszen például $P^{\mathcal{I}}(2,1)=i$, azaz létezik u univerzum-elem, hogy $|P(x,y)|^{\mathcal{I},\kappa[y\mapsto u]}=i$.

2.16. FELADAT. Legyen adott a $\langle\{\pi\},\{P,Q\},\emptyset,\{c\}\rangle$ logikai nyelv $(\{(\pi),(\pi,\pi)\},\emptyset,\{\pi\})$ szignatúrával. Tekintsük az $\mathcal{I}$ interpretációt, ahol $U_\pi=\{1,2,3,4\}$, $c^{\mathcal{I}}=2$,

$$P^{\mathcal{I}}(u)=\begin{cases} i, & \text{ha } u \text{ páros,}\\ h & \text{egyébként,}\end{cases} \qquad Q^{\mathcal{I}}(u,v)=\begin{cases} i, & \text{ha } u\cdot v=4,\\ h & \text{egyébként.}\end{cases}$$

Határozzuk meg az alábbi formulák értékét az $\mathcal{I}$ interpretációban a $\kappa=\binom{x\ y\ z}{1\ 2\ 3}$ változókiértékelés mellett!

a) $\forall x(\neg P(x)\vee\exists yQ(x,y))$
b) $\exists x(Q(x,x)\wedge\neg P(c))\vee P(z)$
c) $\exists x(P(x)\wedge Q(x,c))$
d) $\forall x\forall yQ(x,y)$
e) $\exists x\forall yQ(x,y)$
f) $\forall x\exists y(P(x)\supset Q(x,y))$
g) $\neg\exists x(P(x)\wedge\forall y\neg Q(x,y))$

MEGOLDÁS:

a) $|\forall x(\neg P(x)\vee\exists yQ(x,y))|^{\mathcal{I},\kappa}$ pontosan akkor igaz, ha bármely $u\in U_\pi$ univerzum-elem esetén $|\neg P(x)\vee\exists yQ(x,y)|^{\mathcal{I},\kappa[x\mapsto u]}=i$, azaz $|\neg P(x)|^{\mathcal{I},\kappa[x\mapsto u]}=i$ ($P^{\mathcal{I}}(u)=h$) vagy $|\exists yQ(x,y)|^{\mathcal{I},\kappa[x\mapsto u]}=i$ (létezik $v\in U_\pi$, hogy $|Q(x,y)|^{\mathcal{I},\kappa[x\mapsto u,y\mapsto v]}=i$). Három eset lehetséges:

- u nem páros, ekkor $P^{\mathcal{I}}(u)=h\Rightarrow|\neg P(x)|^{\mathcal{I},\kappa[x\mapsto u]}=i$,
- $u=2$, ekkor $v=2$ esetén $|Q(x,y)|^{\mathcal{I},\kappa[x\mapsto 2,y\mapsto 2]}=i\Rightarrow|\exists yQ(x,y)|^{\mathcal{I},\kappa[x\mapsto 2]}=i$,
- $u=4$ esetén $|Q(x,y)|^{\mathcal{I},\kappa[x\mapsto 4,y\mapsto 1]}=i\Rightarrow|\exists yQ(x,y)|^{\mathcal{I},\kappa[x\mapsto 4]}=i$.

Tehát bármely u esetén $|\neg P(x)\vee\exists yQ(x,y)|^{\mathcal{I},\kappa[x\mapsto u]}=i$, ezért a formula igaz.

b) Tetszőleges κ' esetén $|P(c)|^{\mathcal{I},\kappa'}=P^{\mathcal{I}}(2)=i\Rightarrow|\neg P(c)|^{\mathcal{I},\kappa'}=h$. Ekkor $\kappa'(x)$ értékétől függetlenül $|Q(x,x)\wedge\neg P(c)|^{\mathcal{I},\kappa'}=h$, tehát $|\exists x(Q(x,x)\wedge\neg P(c))|^{\mathcal{I},\kappa'}=h$. Ugyanakkor $|P(z)|^{\mathcal{I},\kappa}=P^{\mathcal{I}}(3)=h$. Tehát a $|\exists x(Q(x,x)\wedge\neg P(c))\vee P(z)|^{\mathcal{I},\kappa}=h$.

c) $|\exists x(P(x)\wedge Q(x,c))|^{\mathcal{I},\kappa}=i$

d) $|\forall x\forall yQ(x,y)|^{\mathcal{I},\kappa}=h$ (ellenpélda: $Q^{\mathcal{I}}(1,1)=h$)

e) $|\exists x\forall yQ(x,y)|^{\mathcal{I},\kappa}=h$

f) $|\forall x\exists y(P(x)\supset Q(x,y))|^{\mathcal{I},\kappa}=i$

g) $|\neg\exists x(P(x)\wedge\forall y\neg Q(x,y))|^{\mathcal{I},\kappa}=i$

2.17. FELADAT. Legyen adott a $\langle\{\pi\},\{P,Q\},\emptyset,\emptyset\rangle$ logikai nyelv $(\{(\pi,\pi),(\pi)\},\emptyset,\emptyset)$ szignatúrával. Tekintsük az $\mathcal{I}$ interpretációt, ahol $U_\pi=\{\text{a, b, c, \ldots, z}\}$. $P^{\mathcal{I}}(u,v)=i$ pontosan akkor, ha u nemszigorúan megelőzi v-t az angol ábécé szerinti rendezésben, míg $Q^{\mathcal{I}}(u)=i$ pontosan akkor, ha u magánhangzó. Határozzuk meg az alábbi formulák értékét az $\mathcal{I}$ interpretációban.

a) $\exists x(Q(x)\wedge\forall y(Q(y)\supset P(x,y)))$
b) $\forall x(Q(x)\wedge\forall y(Q(y)\supset P(x,y)))$

c) $\exists x(Q(x) \wedge \forall y(Q(y) \supset P(y,x)))$
d) $\forall x(Q(x) \wedge \exists y(Q(y) \supset P(x,y)))$

MEGOLDÁS:

a) $|\exists x(Q(x) \wedge \forall y(Q(y) \supset P(x,y)))|^{\mathcal{I},\kappa}$ pontosan akkor igaz, ha létezik $u \in U_\pi$ univerzum-elem, melyre $|Q(x) \wedge \forall y(Q(y) \supset P(x,y))|^{\mathcal{I},\kappa[x\mapsto u]} = i$, azaz $|Q(x)|^{\mathcal{I},\kappa[x\mapsto u]} = i$ ($Q^{\mathcal{I}}(u) = i$) és $|\forall y(Q(y) \supset P(x,y))|^{\mathcal{I},\kappa[x\mapsto u]} = i$. Ez utóbbi pontosan akkor teljesül, ha bármely $v \in U_\pi$ univerzum-elemre $|Q(y) \supset P(x,y)|^{\mathcal{I},\kappa[x\mapsto u,y\mapsto v]} = i$, azaz $|Q(y)|^{\mathcal{I},\kappa[x\mapsto u,y\mapsto v]} = h$ ($Q^{\mathcal{I}}(v) = h$) vagy $|P(x,y)|^{\mathcal{I},\kappa[x\mapsto u,y\mapsto v]} = i$ ($P^{\mathcal{I}}(u,v) = i$). Legyen u az ábécé első magánhangzója, azaz 'a'. Két eset lehetséges:

- v nem magánhangzó $\Rightarrow |Q(y) \supset P(x,y)|^{\mathcal{I},\kappa[x\mapsto u,y\mapsto v]} = i$,
- v magánhangzó $\Rightarrow |P(x,y)|^{\mathcal{I},\kappa[x\mapsto u,y\mapsto v]} = i \Rightarrow |Q(y) \supset P(x,y)|^{\mathcal{I},\kappa[x\mapsto u,y\mapsto v]} = i$.

Tehát bármely v-re $|Q(y) \supset P(x,y)|^{\mathcal{I},\kappa[x\mapsto u,y\mapsto v]} = i$, így $|\forall y(Q(y) \supset P(x,y))|^{\mathcal{I},\kappa[x\mapsto u]}$ igaz, valamint $|Q(x)|^{\mathcal{I},\kappa[x\mapsto u]} = i$. Ezért a formula igaz.

b) $|\forall x(Q(x) \wedge \forall y(Q(y) \supset P(x,y)))|^{\mathcal{I}} = h$ (például $x \mapsto \mathrm{b}$ esetén $Q^{\mathcal{I}}(\mathrm{b}) = h$)
c) $|\exists x(Q(x) \wedge \forall y(Q(y) \supset P(y,x)))|^{\mathcal{I}} = i$
d) $|\forall x(Q(x) \wedge \exists y(Q(y) \supset P(x,y)))|^{\mathcal{I}} = h$

2.3. Logikai törvény, ellentmondás, kielégíthetőség

2.18. FELADAT. Igazoljuk, hogy az alábbi formulák kielégíthetőek, de nem logikai törvények!

a) $\exists x P(x) \supset \forall x P(x)$
b) $\exists x P(x) \supset P(x)$
c) $\forall x(P(x) \vee R(x)) \supset \forall x P(x) \vee \forall x R(x)$
d) $\exists x P(x) \wedge \exists x R(x) \supset \exists x(P(x) \wedge R(x))$
e) $\forall x Q(x,x) \supset \forall x \forall y Q(x,y)$
f) $\exists x \exists y Q(x,y) \supset \exists x Q(x,x)$
g) $\forall x \exists y Q(x,y) \supset \exists y \forall x Q(x,y)$

(Forrás: Pásztorné Varga K. – Várterész M. *A matematikai logika alkalmazásszemléletű tárgyalása*)

MEGOLDÁS: Elegendő két interpretáció és hozzá tartozó változókiértékelés meghatározása: az egyik esetén a formula igaz ($\Rightarrow$ kielégíthető), míg a másik esetén hamis ($\Rightarrow$ nem logikai törvény). Az alábbiakban néhány egyszerű megoldás látható, ahol U jelöli az univerzumot, $P^{\mathcal{I}}, Q^{\mathcal{I}}, R^{\mathcal{I}}$ rendre a P, Q, R-hez rendelt relációkat, míg κ a változókiértékelést.

a) **Kielégíthető:** $U = \{1\}$, $P^{\mathcal{I}}(u) = i \iff u$ páros. $(|\exists x P(x) \supset \forall x P(x)|^{\mathcal{I},\kappa} = i)$
Nem törvény: $U = \{1, 2\}$, $P^{\mathcal{I}}(u) = i \iff u$ páros. $(|\exists x P(x) \supset \forall x P(x)|^{\mathcal{I},\kappa} = h)$
b) **Kielégíthető:** $U = \{1, 2\}$, $P^{\mathcal{I}}(u) = i \iff u$ páros, $\kappa = \binom{x}{2}$.
Nem törvény: $U = \{1, 2\}$, $P^{\mathcal{I}}(u) = i \iff u$ páros, $\kappa = \binom{x}{1}$.
c) **Kielégíthető:** $U = \{1, 3\}$, $P^{\mathcal{I}}(u) = i \iff u$ páros, $R^{\mathcal{I}}(u) = i \iff u$ páratlan.
Nem törvény: $U = \{1, 2\}$, $P^{\mathcal{I}}(u) = i \iff u$ páros, $R^{\mathcal{I}}(u) = i \iff u$ páratlan.
d) **Kielégíthető:** $U = \{1, 3\}$, $P^{\mathcal{I}}(u) = i \iff u$ páros, $R^{\mathcal{I}}(u) = i \iff u$ prím.
Nem törvény: $U = \{3, 4\}$, $P^{\mathcal{I}}(u) = i \iff u$ páros, $R^{\mathcal{I}}(u) = i \iff u$ prím.
e) **Kielégíthető:** $U = \{1\}$, $Q^{\mathcal{I}}(u, v) = i \iff u = v$.
Nem törvény: $U = \{1, 2\}$, $Q^{\mathcal{I}}(u, v) = i \iff u = v$.
f) **Kielégíthető:** $U = \{1\}$, $Q^{\mathcal{I}}(u, v) = i \iff u + v = 3$.
Nem törvény: $U = \{1, 2\}$, $Q^{\mathcal{I}}(u, v) = i \iff u + v = 3$.
g) **Kielégíthető:** $U = \{1\}$, $Q^{\mathcal{I}}(u, v) = i \iff u + v = 3$.
Nem törvény: $U = \{1, 2\}$, $Q^{\mathcal{I}}(u, v) = i \iff u + v = 3$.

2.19. FELADAT. Igazoljuk, hogy az alábbi formulák nem logikai ellentmondások!

a) $\exists x P(x) \wedge \exists x \neg P(x)$
b) $\forall x \exists y Q(x, y) \wedge \forall x \neg Q(x, x)$
c) $\exists x(P(x) \vee P(f(x))) \wedge \exists y(\neg P(y) \wedge \neg P(f(y)))$
d) $\neg(\exists x P(x) \supset (R(x) \supset P(x)))$
e) $P(g(c, c)) \wedge \neg P(c)$

MEGOLDÁS: Egy formula pontosan akkor nem logikai ellentmondás, ha kielégíthető. Tehát elegendő megadni egy interpretációt és benne egy változókiértékelést, mely esetén a formula igaz. Az alábbiakon kívűl számtalan más megoldás is létezik.

a) $U = \{1, 2\}$, $P^{\mathcal{I}}(u) = i \iff u$ páros. $(|\exists x P(x) \wedge \exists x \neg P(x)|^{\mathcal{I},\kappa} = i)$
b) $U = \{1, 2\}$, $Q^{\mathcal{I}}(u, v) = i \iff u + v = 3$.
c) $U = \{1, 2, 3\}$, $P^{\mathcal{I}}(u) = i \iff u$ páros, $f^{\mathcal{I}}(u) = (u \mod 3) + 1$
d) $U = \{1, 2\}$, $P^{\mathcal{I}}(u) = i \iff u$ páros, $R^{\mathcal{I}}(u) = i \iff u$ páratlan, $\kappa = \binom{x}{1}$.
e) $U = \mathbb{N}$, $P^{\mathcal{I}}(u) = i \iff u$ páros, $g^{\mathcal{I}}(u, v) = u + v$, $c^{\mathcal{I}} = 1$.

2.20. FELADAT. Bizonyítsuk be, hogy a következő formula logikai törvény!

$$\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x) \supset \forall x(P(x) \wedge Q(x))$$

Megoldás: Egy formula pontosan akkor logikai törvény, ha minden interpretációban és bármely változókiértékelés mellett a formula igaz.

Tekintsünk egy tetszőleges $\mathcal{I}$ interpretációt és benne egy κ változókiértékelést, ekkor

$$\begin{aligned}&|\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x) \supset \forall x(P(x) \wedge Q(x))|^{\mathcal{I},\kappa} = \\ &\quad = |\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)|^{\mathcal{I},\kappa} \supset |\forall x(P(x) \wedge Q(x))|^{\mathcal{I},\kappa} = \\ &\quad = |\forall x P(x)|^{\mathcal{I},\kappa} \wedge |\forall x Q(x)|^{\mathcal{I},\kappa} \supset |\forall x(P(x) \wedge Q(x))|^{\mathcal{I},\kappa}.\end{aligned}$$

Vegyük sorra az összes lehetséges esetet:

- $|\forall x P(x)|^{\mathcal{I},\kappa} = 0$, akkor $|\forall x P(x)|^{\mathcal{I},\kappa} \wedge |\forall x Q(x)|^{\mathcal{I},\kappa} = 0$, és így a formula igaz.
- $|\forall x Q(x)|^{\mathcal{I},\kappa} = 0$, ekkor $|\forall x P(x)|^{\mathcal{I},\kappa} \wedge |\forall x Q(x)|^{\mathcal{I},\kappa} = 0$, így a formula igaz.
- $|\forall x(P(x) \wedge Q(x))|^{\mathcal{I},\kappa} = 1$ esetén a formula ugyancsak igaz.
- $|\forall x P(x)|^{\mathcal{I},\kappa} = 1$ (azaz bármely u_1 univerzum-elemre $|P(x)|^{\mathcal{I},\kappa[x\mapsto u_1]} = 1$), továbbá $|\forall x Q(x)|^{\mathcal{I},\kappa} = 1$ (azaz bármely u_2 univerzum-elemre $|Q(x)|^{\mathcal{I},\kappa[x\mapsto u_2]} = 1$), valamint $|\forall x(P(x) \wedge Q(x))|^{\mathcal{I},\kappa} = 0$ (azaz létezik olyan u_3 univerzum-elem, melyre $|(P(x) \wedge Q(x))|^{\mathcal{I},\kappa[x\mapsto u_3]} = 0$). Ez utóbbiból következik, hogy $|(P(x)|^{\mathcal{I},\kappa[x\mapsto u_3]} = 0$ vagy $|Q(x))|^{\mathcal{I},\kappa[x\mapsto u_3]} = 0$, ami viszont ellentmond annak, hogy bármely univerzum-elemre (így u_3-ra is) $|P(x)|^{\mathcal{I},\kappa[x\mapsto u_3]} = 1$ és $|Q(x)|^{\mathcal{I},\kappa[x\mapsto u_3]} = 1$. $\lightning$

Tehát mind a 4 esetben a formula vagy igaz, vagy az eset nem lehetséges. Azaz bármely interpretáció és változókiértékelés esetén a formula igaz, ezért logikai törvény.

2.21. feladat. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi formula logikai törvény!

$$\forall x \neg P(x) \supset (\exists y R(y, y) \supset \neg \exists x P(x))$$

Megoldás *(egy másik módszer)*:
Elsőrendű logikai nyelv esetében, ha egy formula propozícionális tautológia, akkor logikai törvény, viszont ez fordítva nem igaz. Más szóval, ha egy formula nem propozícionális tautológia, attól még lehet logikai törvény.

$$\boxed{\forall x \neg P(x)} \supset (\boxed{\exists y R(y,y)} \supset \boxed{\neg \exists x P(x)})$$

h	$\boldsymbol{i}$	h	i	h
h	$\boldsymbol{i}$	h	i	i
h	$\boldsymbol{i}$	i	h	h
h	$\boldsymbol{i}$	i	i	i
i	$\boldsymbol{i}$	h	i	h
i	$\boldsymbol{i}$	h	i	i
i	$\boldsymbol{h}$	i	h	h
i	$\boldsymbol{i}$	i	i	i

A fenti Quine-tábla azt mutatja, hogy a formula nem propozícionális tautológia, mert a prímkomponensek $|\forall x \neg P(x)|^{\mathcal{I},\kappa} = 1$, $|\exists y R(y,y)|^{\mathcal{I},\kappa} = 1$, $|\neg \exists x P(x)|^{\mathcal{I},\kappa} = 0$ értékelése esetén a formula hamis. A kérdés csak az, hogy létezhet-e ilyen értékelése a prímkomponenseknek.

Tegyük fel hogy létezik, ekkor $|\forall x \neg P(x)|^{\mathcal{I},\kappa} = 1 \Rightarrow$ bármely u_1 univerzum-elem esetén $|\neg P(x)|^{\mathcal{I},\kappa[x \mapsto u_1]} = 1$, azaz $|P(x)|^{\mathcal{I},\kappa[x \mapsto u_1]} = 0$. Ugyanakkor $|\neg \exists x P(x)|^{\mathcal{I},\kappa} = 0 \Rightarrow |\exists x P(x)|^{\mathcal{I},\kappa} = 1 \Rightarrow$ van olyan u_2 univerzum-elem, melyre $|P(x)|^{\mathcal{I},\kappa[x \mapsto u_2]} = 1$. Mivel u_1 tetszőleges univerzum-elem, és u_2 is eleme az univerzumnak, ez ellentmondás, és így nem létezhet a prímkomponenseknek ilyen értékelése. $\lightning$

Tehát a prímkomponensek minden lehetséges értékelése esetén a formula igaz, ezért logikai törvény (de nem propozícionális tautológia).

2.22. feladat. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi formulák logikai törvények!

a) $\forall x (P(x) \vee \neg P(x))$
b) $\exists x (P(x) \wedge Q(x)) \supset \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$
c) $\forall x P(x) \vee \exists x \neg P(x)$
d) $\neg \exists x ((P(x) \vee Q(x)) \wedge \neg P(x) \wedge \neg Q(x))$

Megoldás: A bizonyítást az olvasóra bízom. Az előző két feladatban megadott módszerek bármelyike alkalmazható.

2.23. feladat. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi formulák logikai ellentmondások!

a) $\forall x P(x) \wedge \exists x \neg P(x)$
b) $\forall x (P(x) \wedge \exists x \neg P(x))$
c) $\neg (\forall x P(x) \vee \exists y \neg P(y)$
d) $\neg (R(c) \supset \exists x \neg P(x)) \wedge \neg \forall x P(x)$
e) $\exists x Q(x,x) \wedge \neg (\neg \exists x Q(x,x) \supset P(c))$

f) $\forall x \exists y Q(x,y) \wedge \exists x \forall y \neg Q(x,y)$

MEGOLDÁS: Egy formula pontosan akkor logikai ellentmondás, ha minden interpretációban és bármely változókiértékelés mellett a formula hamis.

a) Tekintsünk egy tetszőleges $\mathcal{I}$ interpretációt és benne egy κ változókiértékelést, ekkor

$$|\forall x P(x) \wedge \exists x \neg P(x)|^{\mathcal{I},\kappa} = |\forall x P(x)|^{\mathcal{I},\kappa} \wedge |\exists x \neg P(x)|^{\mathcal{I},\kappa}.$$

Vegyük sorra az összes lehetséges esetet:

- $|\forall x P(x)|^{\mathcal{I},\kappa} = h$, akkor a formula hamis.
- $|\forall x P(x)|^{\mathcal{I},\kappa} = i$, akkor bármely u univerzum-elem esetén $|P(x)|^{\mathcal{I},\kappa[x \mapsto u]} = i$. Ekkor viszont nem létezhet u' univerzumelem, melyre $|P(x)|^{\mathcal{I},\kappa[x \mapsto u']} = h$, azaz $|\exists x \neg P(x)|^{\mathcal{I},\kappa} = h$, tehát a formula ugyancsak hamis.

Tehát bármely interpretáció és értékelés esetén a formula hamis, ezért logikai ellentmondás.

A többi bizonyítást az olvasóra bízom.
MEGJEGYZÉS: Ezek a feladatok visszavezethetőek a formula negálásával kapott formula logikai törvény voltának bizonyítására.

2.24. FELADAT. Milyen szemantikai tulajdonsággal rendelkeznek az alábbi formulák? (logikai törvény, ellentmondás, kielégíthető)

a) $\forall x Q(x,y) \supset \forall x Q(x,x)$
b) $\forall x \forall y (Q(x,y) \supset (P(y) \supset Q(x,y)))$
c) $\forall x \exists y Q(x,y) \supset \exists y \forall x Q(x,y)$
d) $\exists x \neg (P(x) \supset (\exists y Q(x,y) \supset P(x)))$
e) $\forall x (P(x) \supset Q(x,x)) \wedge \forall x \exists y (\neg Q(x,y) \wedge Q(y,x))$
f) $\exists x \exists y \exists z (Q(x,y) \wedge Q(x,y) \supset Q(x,z))$

MEGOLDÁS: A d) formula logikai ellentmondás, míg az a), b), c), e) és f) formulák kielégíthetőek, melyek közül a b) és f) logikai törvény is egyben.

2.4. Következtetés

2.25. FELADAT. Logikai következményei-e a premisszáknak a felsorolt formulák?

2.25.1. RÉSZFELADAT. Premisszák: $\exists x A(x)$, $\forall x B(x)$ és $\exists x C(x)$.

a) $\forall x (A(x) \wedge B(x))$
b) $\forall x (\neg C(x) \supset B(x))$
c) $\exists x (A(x) \wedge C(x))$
d) $\exists x (A(x) \wedge \exists x C(x))$

Megoldás:
A probléma visszavezethető egy formula logikai törvény voltának bizonyítására (például $((\exists x A(x)) \wedge (\forall x B(x)) \wedge (\exists x C(x))) \supset (\forall x (A(x) \wedge B(x)))$ az a) résznek megfelelő formula). Ehelyett azonban egy másik módszert mutatok be.

Legyen $\mathcal{I}$ interpretáció és benne egy κ változókiértékelés olyan, hogy a premisszák mindegyike igaz, azaz $|\exists x A(x)|^{\mathcal{I},\kappa} = i$, $|\forall x B(x)|^{\mathcal{I},\kappa} = i$ és $|\exists x C(x)|^{\mathcal{I},\kappa} = i$. Csak ilyen interpretációk esetén kell vizsgálni a formulákat.

a) Ellenpélda: $U = \mathbb{Z}^+$, $A^{\mathcal{I}}(u) = i \iff u$ páros, $B^{\mathcal{I}}(u) = i \iff u$ pozitív, $C^{\mathcal{I}}(u) = i \iff u$ páratlan. Ekkor a premisszák igazak, míg $|\forall x (A(x) \wedge B(x))|^{\mathcal{I},\kappa} = h$. Tehát nem következménye.

b) Tegyük fel, hogy $|\forall x (\neg C(x) \supset B(x))|^{\mathcal{I},\kappa} = h$, akkor létezik u univerzum-elem, mely esetén $|\neg C(x) \supset B(x)|^{\mathcal{I},\kappa[x \mapsto u]} = h$, azaz $C^{\mathcal{I}}(u) = h$ és $B^{\mathcal{I}}(u) = h$. Viszont a 2. premissza szerint bármely univerzum-elem, akárcsak u esetén $B^{\mathcal{I}}(u) = i$. Ez ellentmondás, tehát $|\forall x (\neg C(x) \supset B(x))|^{\mathcal{I},\kappa} = i$, ezért következménye.

c) Az a) részben bemutatott ellenpélda módosítás nélkül alkalmazható itt is. Tehát nem következménye.

d) Tegyük fel, hogy $|\exists x (A(x) \wedge \exists x C(x))|^{\mathcal{I},\kappa} = h$, ekkor bármely u univerzum-elem esetén $|A(x) \wedge \exists x C(x)|^{\mathcal{I},\kappa[x \mapsto u]} = h$, amely csak akkor teljesül, ha $|A(x)|^{\mathcal{I},\kappa[x \mapsto u]} = h$ vagy $|\exists x C(x)|^{\mathcal{I},\kappa[x \mapsto u]} = h$. Viszont mivel az 1. premissza igaz, létezik v univerzum-elem, melyre $|A(x)|^{\mathcal{I},\kappa[x \mapsto v]} = i$, ezért $|\exists x C(x)|^{\mathcal{I},\kappa[x \mapsto u]} = h$. Ez csak akkor teljesül, ha bármely w univerzum-elemre $|C(x)|^{\mathcal{I},\kappa[x \mapsto w]} = h$, ami viszont ellentmond a 3. premisszának. Ez ellentmondás, tehát $|\exists x (A(x) \wedge \exists x C(x))|^{\mathcal{I},\kappa} = i$, és így következménye a premisszáknak.

2.25.2. részfeladat. Premisszák: $\neg \exists x (F(x) \supset K(x))$ valamint $\exists x (A(x) \wedge \neg K(x))$.

a) $\forall x (A(x) \supset F(x))$
b) $\exists x (F(x) \wedge A(x))$
c) $\exists x (A(x) \wedge \neg F(x))$
d) $\forall x A(x) \vee \forall y F(y)$

Megoldás:
Egy következtetés pontosan akkor helyes, ha a konklúzió minden olyan $\mathcal{I}$ interpretációban és κ változókiértékelés mellett igaz, ahol a premisszák igazak. Ezért elég azokat az eseteket vizsgálni, ahol a premisszák igazak. Tekintsünk egy tetszőleges $\mathcal{I}$ interpretációt és κ változókiértékelést, mely esetén (1) $|\neg\exists x(F(x) \supset K(x))|^{\mathcal{I},\kappa} = i$ valamint (2) $|\exists x(A(x) \wedge \neg K(x))|^{\mathcal{I},\kappa} = i$. A (2)-ből következik, hogy létezik olyan u univerzum-elem, melyre $|A(x) \wedge \neg K(x)|^{\mathcal{I},\kappa[x\mapsto u]} = i$. Ez csak akkor teljesül, ha $|A(x)|^{\mathcal{I},\kappa[x\mapsto u]} = i$ és $|\neg K(x)|^{\mathcal{I},\kappa[x\mapsto u]} = i$ (azaz $K^{\mathcal{I}}(u) = h$) is teljesül. Ugyanakkor az (1) pontosan akkor teljesül, ha $|\exists x(F(x) \supset K(x))|^{\mathcal{I},\kappa} = h$. Ez azt jelenti, hogy nem létezik v univerzum-elem, melyre $|F(x) \supset K(x)|^{\mathcal{I},\kappa[x\mapsto v]} = i$. Tehát minden v univerzum-elem esetén $|F(x) \supset K(x)|^{\mathcal{I},\kappa[x\mapsto v]} = h$, ezért $|F(x)|^{\mathcal{I},\kappa[x\mapsto v]} = i$ és $|K(x)|^{\mathcal{I},\kappa[x\mapsto v]} = h$.

a) Bármely v univerzum-elemre $|F(x)|^{\mathcal{I},\kappa[x\mapsto v]} = i$, ezért $|A(x) \supset F(x)|^{\mathcal{I},\kappa[x\mapsto v]} = i$ is teljesül, tehát $|\forall x(A(x) \supset F(x))|^{\mathcal{I},\kappa} = i$. Ez tehát következménye a premisszáknak.
b) Létezik u, melyre $|A(x)|^{\mathcal{I},\kappa[x\mapsto u]} = i$, ugyanakkor bármely v-re, így $v = u$-ra is $|F(x)|^{\mathcal{I},\kappa[x\mapsto u]} = i$, ezért $|F(x) \wedge A(x)|^{\mathcal{I},\kappa[x\mapsto u]} = i$, azaz $|\exists x(F(x) \wedge A(x))|^{\mathcal{I},\kappa} = i$. Ezért következménye.
c) Tetszőleges v univerzum-elem esetén $|\neg F(x)|^{\mathcal{I},\kappa[x\mapsto v]} = h$, így $|A(x) \wedge \neg F(x)|^{\mathcal{I},\kappa[x\mapsto v]} = h$. Ekkor $|\exists x(A(x) \wedge \neg F(x))|^{\mathcal{I},\kappa} = h$, azaz nem következménye.
d) $|\forall y F(y)|^{\mathcal{I},\kappa} = i$, ezért $|\forall x A(x) \vee \forall y F(y)|^{\mathcal{I},\kappa} = i$ is teljesül, tehát következménye.

Az a), b) és d) formulák következményei a premisszáknak, míg a c) nem.

2.25.3. részfeladat. Premisszák: $\forall x(K(x) \supset M(x))$ valamint $\exists x(\neg M(x) \wedge S(x))$.

a) $\forall x \neg K(x)$
b) $\exists x(S(x) \wedge \neg K(x))$
c) $\exists x(S(x) \wedge M(x))$
d) $\forall x \neg K(x) \vee \exists x M(x)$

Megoldás:
A levezetést az olvasóra bízom, az előző feladatokban bemutatott módszerek bármelyike alkalmazható. A b) és d) formulák következményei a premisszáknak, míg az a), c) nem.

2.25.4. részfeladat. Premisszák: $\forall x(F(x) \supset \neg K(x))$ valamint $\forall x(A(x) \supset \neg K(x))$.

a) $\forall x(A(x) \supset \neg F(x))$
b) $\exists x(A(x) \wedge \neg F(x))$
c) $\forall x(A(x) \supset F(x))$

Megoldás:
Egyik formula sem következménye a premisszáknak.

2.5. Formalizálás

2.26. FELADAT. Formalizáljuk az állításokat a megadott elsőrendű nyelven!

2.26.1. RÉSZFELADAT. $\mathcal{L} = \left\langle \{\pi\}, \{P_{(\pi,\pi)}, Q_{(\pi,\pi)}\}, \emptyset, \emptyset \right\rangle$, ahol $P(x,y)$, $Q(x,y)$ jelentse rendre a következőket: x szereti y-t, x és y rokonok.

a) Mindenki szeret valakit.
b) Van olyan, aki mindenkit szeret.
c) Vannak, akik rokonok és szeretik egymást.
d) Mindenki szereti a rokonait.
e) Valaki szereti a rokonait.
f) Van olyan, aki csak a rokonait szereti.
g) A rokonok szeretik egymást.

MEGOLDÁS:

a) $\forall x \exists y P(x,y)$
b) $\exists x \forall y P(x,y)$
c) $\exists x \exists y (Q(x,y) \wedge P(x,y))$
d) $\forall x \forall y (Q(x,y) \supset P(x,y))$
e) $\exists x \forall y (Q(x,y) \supset P(x,y))$
f) $\exists x \forall y (P(x,y) \supset Q(x,y))$
g) $\forall x \forall y (Q(x,y) \supset P(x,y) \wedge P(y,x))$
(x és y szeretik egymást $=$ x szereti y-t és y szereti x-et)

2.26.2. RÉSZFELADAT. $\mathcal{L} = \left\langle \{\pi\}, \{P_{(\pi)}, Q_{(\pi)}, R_{(\pi,\pi)}\}, \emptyset, \{a_\pi\} \right\rangle$, ahol $P(x)$, $Q(x)$ és $R(x,y)$ jelentse rendre a következőket: x fiatal, x idős, x barátkozik y-nal, míg az a konstans jelölje Aladárt.

a) Aladár fiatal.
b) Aladár nem barátkozik senkivel.
c) Aladár barátkozik fiatalokkal.
d) Aladár csak fiatalokkal barátkozik.
e) Aladár fiatal, vagy fiatalokkal barátkozik.
f) Az idősek nem barátkoznak Aladárral.
g) Aladár mindenkivel barátkozik, aki fiatal.
h) A fiatalok nem barátkoznak idősekkel.
i) Nincs olyan idős, aki nem barátkozik fiatallal.
j) Aki fiatal, nem barátkozik Aladárral, aki öreg, azzal pedig Aladár nem barátkozik.

MEGOLDÁS:

a) $P(a)$
b) $\forall x \neg R(a,x)$
c) $\exists x(P(x) \wedge R(a,x))$
d) $\forall x(R(a,x) \supset P(x))$
e) $P(a) \vee \exists x(P(x) \wedge R(a,x))$
f) $\forall x(Q(x) \supset \neg R(x,a))$
g) $\forall x(P(x) \supset R(a,x))$
h) $\forall x(P(x) \supset \neg \exists y(Q(y) \wedge R(x,y)))$
i) $\neg \exists x(Q(x) \wedge \neg \exists y(P(y) \wedge R(x,y)))$
j) $\forall x(P(x) \supset \neg R(x,a)) \wedge \forall y(Q(y) \supset \neg R(a,y))$

2.26.3. RÉSZFELADAT. $\mathcal{L} = \left\langle \{\pi\}, \{P_{(\pi)}, Q_{(\pi)}\}, \{f_{(\pi \mapsto \pi)}, g_{(\pi \mapsto \pi)}\}, \emptyset \right\rangle$, ahol $P(x)$, $Q(x)$ jelentése rendre az, hogy x férfi, x nő, míg $f(x)$ és $g(x)$ jelölje rendre x apját valamint x anyját.

a) Egyaránt vannak férfiak és nők.
b) Mindenki vagy nő vagy férfi.
c) Aki férfi, az nem nő.
d) Bárkinek az apja férfi, az anyja pedig nő.
e) A férfiak anyja nő.
f) Vannak nők, akiknek az anyja férfi.

MEGOLDÁS:

a) $\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$
b) $\forall x((Q(x) \vee P(x)) \wedge (\neg Q(x) \vee \neg P(x)))$
c) $\forall x(P(x) \supset \neg Q(x))$
d) $\forall x(P(f(x)) \wedge Q(g(x)))$
e) $\forall x(P(x) \supset Q(g(x)))$
f) $\exists x(Q(x) \wedge P(g(x)))$

3. Nevezetes elsőrendű logikai nyelvek

3.1. Az Ar nyelv

$Ar = \langle \{szt\}, \{P\}, \{f, g, h\}, \{nulla\} \rangle$ az alábbi szignatúrával:

$$(\{(szt, szt)\}, \{(szt, szt), (szt, szt, szt), (szt, szt, szt)\}, \{szt\})$$

Ennek a nyelvnek egy interpretációja: $\mathcal{I} = \langle \mathcal{I}_{Srt}, \mathcal{I}_{Pr}, \mathcal{I}_{Fn}, \mathcal{I}_{Cnst} \rangle$, ahol $\mathcal{I}_{Srt}(szt) = \mathbb{N}_0$, $P^{\mathcal{I}}(x, y)$ jelölje az $(x = y)$ relációt, $f^{\mathcal{I}}(x)$ az $(x++)$ (azaz 1-gyel való növelés), $g^{\mathcal{I}}(x, y)$ az $(x + y)$ és $h^{\mathcal{I}}(x, y)$ az $(x \cdot y)$ műveleteket, míg $\mathcal{I}_{Cnst}(nulla) = 0$. Ezt az interpretációt a természetes számok interpretációjának nevezzük, de hasonló módon definiálhatjuk az egész ($\mathbb{Z}$) vagy valós ($\mathbb{R}$) számok interpretációját is.

3.1. FELADAT. Fejezzük ki az Ar nyelvben az $\mathbb{N}$ interpretáció mellett az alábbi fogalmakat!

a) 1 (mint természetes szám)
b) $(x \leq y)$
c) $(x \geq y)$
d) $(x < y)$
e) $(x > y)$
f) $(x \neq y)$
g) $(x \mid y)$ (x osztója y-nak)
h) (x prím) (Azaz x kiárólag 1-gyel és önmagával osztható.)
i) (x összetett) (1-en és önmagán kívül van más osztója is.)
j) (x páros)
k) (x négyzetszám)
l) $(z = lnko(x, y))$ (x és y legnagyobb közös osztója z, melyet $lnko(x, y)$-nal jelölünk.)
m) $(z = lkkt(x, y))$ (x és y legkisebb közös többszöröse z, melyet $lkkt(x, y)$-nal jelölünk.)
n) (x és y ikerprímek) (Két természetes számot akkor nevezünk ikerprímnek, ha mindkettő prím, és különbségük 2. Például: $(3, 5)$ vagy $(17, 19)$.)

Megoldás:

a) $1 \rightleftharpoons f(0)$ (azaz $f(nulla)$)
b) $(x \leq y) \rightleftharpoons \exists z((x+z)=y)$ (azaz $\exists z P(g(x,z),y)$)
c) $(x \geq y) \rightleftharpoons (y \leq x)$
d) $(x \neq y) \rightleftharpoons \neg(x=y)$ (azaz $\neg P(x,y)$)
e) $(x < y) \rightleftharpoons \neg(x \geq y)$ vagy $(x < y) \rightleftharpoons (x \leq y) \wedge (x \neq y)$
f) $(x > y) \rightleftharpoons \neg(x \leq y)$ vagy $(x > y) \rightleftharpoons (x \geq y) \wedge (x \neq y)$
g) $(x \,|\, y) \rightleftharpoons \exists z((x \cdot z)=y) \wedge (x \neq 0)$
h) $(x$ prím$) \rightleftharpoons (x \neq 0) \wedge (x \neq 1) \wedge \forall z((z \,|\, x) \supset (z=1) \vee (z=x))$
i) $(x$ összetett$) \rightleftharpoons (x \neq 0) \wedge (x \neq 1) \wedge \neg(x$ prím$)$
j) $(x$ páros$) \rightleftharpoons (f(f(0)) \,|\, x)$
k) $(x$ négyzetszám$) \rightleftharpoons \exists z((z \cdot z)=x)$
l) $(z = lnko(x,y)) \rightleftharpoons (z \,|\, x) \wedge (z \,|\, y) \wedge \forall v((v \,|\, x) \wedge (v \,|\, y) \supset (v \leq z))$
m) $(z = lkkt(x,y)) \rightleftharpoons (x \,|\, z) \wedge (y \,|\, z) \wedge \forall v((x \,|\, v) \wedge (y \,|\, v) \supset (v \geq z))$
n) $(x$ és y ikerprímek$) \rightleftharpoons (x$ prím$) \wedge (y$ prím$) \wedge ((x = f(f(y))) \vee (y = f(f(x))))$

Megjegyzés: Egy jelölés (fogalom) csak akkor használható, ha az a nyelvnek eleme, vagy már definiálva van.

3.2. feladat. Fejezzük ki az Ar nyelvben az $\mathbb{N}$ interpretáció mellett az alábbi állításokat!

a) Van legnagyobb a természetes számok között.
b) A természetes számok halmaza alulról korlátos.
c) A természetes számok száma végtelen.
d) A prímek száma végtelen.
e) A prímek száma véges.
f) Az ikerprímek száma végtelen.
g) A négyzetszámok összetett számok.
h) Minden természetes szám előállítható négy négyzetszám összegeként.
i) Létezik páros prímszám.
j) Bármely 4-nél nagyobb páros szám előállítható két prím összegeként.
k) A $2x = 1$ egyenletnek legfeljebb egy megoldása van.
l) A $3x^2 - 2x - 1 = 0$ egyenletnek pontosan két különböző gyöke van.
m) Két természetes szám legnagyobb közös osztója soha sem nagyobb, mint e két szám legkisebb közös többszöröse.
n) Bármely három egymást követő szám közül valamelyik osztható 3-mal.
o) Létezik $4n + 1$ alakú négyzetszám.

MEGOLDÁS:

a) $\exists x \forall y (x \geq y)$
Itt használtuk az $(x \geq y)$ jelölést, mely nem eleme a nyelvnek, ezért definiálni kell: $(x \geq y) \rightleftharpoons \exists z(x = (y + z))$.
Mivel ezeket a jelöléseket az előző feladatban definiáltuk, ezért – annak ellenére, hogy a megoldás részét képezik – a továbbiakban kizárólag a még nem definiált jelöléseket írom le.
b) $\exists x \forall y (x \leq y)$
c) $\forall x \exists y (x < y)$ (azaz felülről nem korlátos, melyből következik hogy végtelen)
d) $\forall x \exists y ((x < y) \wedge (y \text{ prím}))$
e) $\exists x \forall y ((y \text{ prím}) \supset (y \leq x))$ (az előző példa negáltja is helyes)
f) $\forall x \exists y ((x < y) \wedge (y \text{ prím}) \wedge (f(f(y)) \text{ prím}))$ (bonyolultabb megoldások is léteznek)
g) $\forall x ((x \cdot x) \text{ összetett})$
h) $\forall x \exists y \exists z \exists v \exists w (((y \cdot y) + ((z \cdot z) + ((v \cdot v) + (w \cdot w)))) = x)$
i) $\exists x ((2 \,|\, x) \wedge (x \text{ prím}))$ (nem szerepelt az előző feladatban: $2 \rightleftharpoons f(f(0))$)
j) $\forall x ((2 \,|\, x) \wedge (x > 4) \supset \exists y \exists z ((y \text{ prím}) \wedge (z \text{ prím}) \wedge (x = (y + z))))$ $(4 \rightleftharpoons 2 + 2)$
k) $\forall x \forall y (((x + x) = 1) \wedge ((y + y) = 1) \supset (x = y))$
l) $\exists x \exists y ((x \neq y) \wedge (x \text{ gyök}) \wedge (y \text{ gyök}) \wedge \forall z ((z \text{ gyök}) \supset (z = x) \vee (z = y)))$
$(x \text{ gyök}) \rightleftharpoons ((f(f(f(0))) \cdot (x \cdot x)) = f(x + x))$ (azaz $3x^2 = 2x + 1$)
m) $\forall x \forall y (lnko(x, y) \leq lkkt(x, y))$
n) $\forall x ((3 \,|\, x) \vee (3 \,|\, f(x)) \vee (3 \,|\, f(f(x))))$ (ahol $3 \rightleftharpoons f(2)$)
o) $\exists x (((f(3) \cdot x) + 1) \text{ négyzetszám})$

MEGJEGYZÉS: Egy jelölés csak akkor használható, ha az a nyelvnek eleme, vagy már definiálva van.

3.2. A *Geom* nyelv

$Geom = \langle \{pt, et, st\}, \{P, Q, R\}, \emptyset, \emptyset \rangle$ a $(\{(pt, pt), (pt, et), (pt, st)\}, \emptyset, \emptyset)$ szignatúrával. Használjuk a következő változóneveket:

$$\begin{aligned} pt \text{ típusú változók} &\rightarrow A, B, C, \ldots \\ et \text{ típusú változók} &\rightarrow e, f, g, \ldots \\ st \text{ típusú változók} &\rightarrow a, b, c, \ldots \end{aligned}$$

Ennek a nyelvnek egy interpretációja: $\mathcal{I} = \langle \mathcal{I}_{Srt}, \mathcal{I}_{Pr}, \mathcal{I}_{Fn}, \mathcal{I}_{Cnst} \rangle$, ahol $\mathcal{I}_{Srt}(pt), \mathcal{I}_{Srt}(et), \mathcal{I}_{Srt}(st)$ rendre a térbeli pontok, egyenesek illetve síkok halmaza. $P^{\mathcal{I}}(A, B)$, $Q^{\mathcal{I}}(A, e)$, $R^{\mathcal{I}}(A, a)$ jelölje rendre az $(A = B)$ (két pont megegyezik), $(A \in e)$ (a pont illeszkedik az egyenesre) valamint $(A \in a)$ (a pont illeszkedik a síkra) relációt.

3.3. FELADAT. Fejezzük ki a *Geom* nyelvben az alábbi fogalmakat!

a) $(A \neq B)$ (két pont különbözik)
b) $(A \notin e)$ (pont nem illeszkedik egyenesre)

c) $(e = f)$ (két egyenes megegyezik)
d) $(a = b)$ (két sík megegyezik)
e) $(e \in a)$ (egyenes illeszkedik a síkra)
f) $(e \parallel f)$ (két egyenes párhuzamos)
g) $(e \nparallel f)$ (két egyenes metsző)
h) $kitero(e, f)$ (két egyenes kitérő)
i) $(a \parallel b)$ (két sík párhuzamos)
j) $(a \nparallel b)$ (két sík metsző)

MEGOLDÁS:

a) $(A \neq B) \rightleftharpoons \neg(A = B)$
b) $(A \notin e) \rightleftharpoons \neg(A \in e)$
c) $(e = f) \rightleftharpoons \forall A((A \in e) \equiv (A \in f))$
d) $(a = b) \rightleftharpoons \forall A((A \in a) \equiv (A \in b))$
e) $(e \in a) \rightleftharpoons \forall A((A \in e) \supset (A \in a))$
f) $(e \parallel f) \rightleftharpoons \exists a((e \in a) \wedge (f \in a)) \wedge \forall A((A \in e) \supset (A \notin f))$ vagy
$(e \parallel f) \rightleftharpoons \exists a((e \in a) \wedge (f \in a)) \wedge \neg\exists A((A \in e) \wedge (A \in f))$
g) $(e \nparallel f) \rightleftharpoons \neg(e = f) \wedge \exists A((A \in e) \wedge (A \in f))$
Gyakori hibák: $\neg(e \parallel f)$ nem jó, mert lehetnek kitérőek is; $\neq$ relációt eddig csak pontokra definiáltuk, ezért $(e \neq f)$ nem alkalmazható, vagy külön definiálni kell.
h) $kitero(e, f) \rightleftharpoons \neg\exists a((e \in a) \wedge (f \in a))$
i) $(a \parallel b) \rightleftharpoons \neg\exists A((A \in a) \wedge (A \in b))$
j) $(a \nparallel b) \rightleftharpoons \neg(a = b) \wedge \exists A((A \in a) \wedge (A \in b))$ vagy
$(a \nparallel b) \rightleftharpoons \neg(a = b) \wedge \neg(a \parallel b)$

MEGJEGYZÉS: Egy jelölés (fogalom) csak akkor használható, ha az a nyelvnek eleme, vagy már definiálva van.

3.4. FELADAT. Formalizáljuk *Geom* nyelven az alábbi állításokat!

a) Bármely két egyenes párhuzamos, metsző, vagy kitérő.
b) Bármely három pontra illeszthető egyenes.
c) Három pont nem mindig esik egy egyenesre.
d) Két párhuzamos egyenes esetén, ha egy harmadik egyenes párhuzamos az egyikkel, akkor párhuzamos a másikkal is.
e) Létezik három párhuzamos egyenes, melyek egy síkra illeszkednek.
f) Bármely egyenes és rá nem illeszkedő pont esetén a ponton át pontosan egy párhuzamos egyenes húzható.
g) Két különböző pontra pontosan egy egyenes illeszkedik.
h) Két tettszőleges párhuzamos sík esetén egy egyenes vagy mindkét síkot metszi, vagy egyiket sem.
i) Bármely három nem egy egyenesre eső pontra pontosan egy sík illeszkedik.
j) Két metsző sík metszéspontjai egy egyenesre esnek.

Megoldás:

a) $\forall e \forall f((e \parallel f) \vee (e \nmid f) \vee kitero(e,f))$
Itt használtuk az $(e \parallel f)$, $(e \nmid f)$ és $kitero(e,f)$ jelöléseket, melyek nem elemei a nyelvnek, ezért ezeket definiálni kell. Mivel ezek már az előző feladatban szerepeltek, a továbbiakban csak a még definiálatlan jelöléseket írom le.

b) $\forall A \forall B \forall C \exists e((A \in e) \wedge (B \in e) \wedge (C \in e))$

c) $\neg \forall A \forall B \forall C \exists e((A \in e) \wedge (B \in e) \wedge (C \in e))$

d) $\forall e \forall f \forall g((e \parallel f) \wedge (e \parallel g) \supset (f \parallel g))$

e) $\exists e \exists f \exists g((e \parallel f) \wedge (e \parallel g) \wedge (f \parallel g) \wedge \exists a((e \in a) \wedge (f \in a) \wedge (g \in a)))$

f) $\forall e \forall A((A \notin e) \supset \exists f((A \in f) \wedge (f \parallel e) \wedge \forall g((A \in g) \wedge (g \parallel e) \supset (f = g))))$

g) $\forall A \forall B((A \neq B) \supset \exists e((A \in e) \wedge (B \in e) \wedge \forall f((A \in f) \wedge (B \in f) \supset (e = f))))$

h) $\forall a \forall b((a \parallel b) \supset \forall e((e \nmid a) \equiv (e \nmid b)))$,
ahol $(e \nmid a) \;\rightleftharpoons\; \neg(e \in a) \wedge \exists A((A \in e) \wedge (A \in a))$.

i) $\forall A \forall B \forall C(\neg \exists e(A,B,C \in e) \supset \exists a((A,B,C \in a) \wedge \forall b((A,B,C \in b) \supset (a = b))))$,
ahol $(A,B,C \in e) \;\rightleftharpoons\; (A \in e) \wedge (B \in e) \wedge (C \in e)$,
valamint $(A,B,C \in a) \;\rightleftharpoons\; (A \in a) \wedge (B \in a) \wedge (C \in a)$.

j) $\forall a \forall b((a \nmid b) \supset \exists e \forall A((A \in a) \wedge (A \in b) \supset (A \in e)))$

Megjegyzés: Egy jelölés csak akkor használható, ha az a nyelvnek eleme, vagy már definiálva van.

4. Gentzen-kalkulus

axiómaséma

$$X, \Gamma \to \Delta, X$$

levezetési szabályok

$(\to \supset)$ $$\frac{X, \Gamma \to \Delta, Y}{\Gamma \to \Delta, (X \supset Y)}$$

$(\supset \to)$ $$\frac{\Gamma \to \Delta, X \qquad Y, \Gamma \to \Delta}{(X \supset Y), \Gamma \to \Delta}$$

$(\to \wedge)$ $$\frac{\Gamma \to \Delta, X \qquad \Gamma \to \Delta, Y}{\Gamma \to \Delta, (X \wedge Y)}$$

$(\wedge \to)$ $$\frac{X, Y, \Gamma \to \Delta}{(X \wedge Y), \Gamma \to \Delta}$$

$(\to \vee)$ $$\frac{\Gamma \to \Delta, X, Y}{\Gamma \to \Delta, (X \vee Y)}$$

$(\vee \to)$ $$\frac{X, \Gamma \to \Delta \qquad Y, \Gamma \to \Delta}{(X \vee Y), \Gamma \to \Delta}$$

$(\to \neg)$ $$\frac{X, \Gamma \to \Delta}{\Gamma \to \Delta, \neg X}$$

$(\neg \to)$ $$\frac{\Gamma \to \Delta, X}{\neg X, \Gamma \to \Delta}$$

$(\to \forall)$ $$\frac{\Gamma \to \Delta, A}{\Gamma \to \Delta, \forall x A} \quad (x \notin \mathrm{Par}(\Gamma, \Delta))$$

$(\forall \to)$ $$\frac{[A(x \parallel t)], \forall x A, \Gamma \to \Delta}{\forall x A, \Gamma \to \Delta}$$

$(\to \exists)$ $$\frac{\Gamma \to \Delta, [A(x \parallel t)], \exists x A}{\Gamma \to \Delta, \exists x A}$$

$(\exists \to)$ $$\frac{A, \Gamma \to \Delta}{\exists x A, \Gamma \to \Delta} \quad (x \notin \mathrm{Par}(\Gamma, \Delta))$$

(Forrás: Pásztorné Varga K. – Várterész M. *A matematikai logika alkalmazásszemléletű tárgyalása*)

4.1. FELADAT. Bizonyítsuk be az alábbi ítéletlogikai szekventeket a zsákutcamentes Gentzen-kalkulusban (**C**-kalkulus)!

4.1.1. RÉSZFELADAT. $\to A \supset (B \supset A)$

(Forrás: Pásztorné Varga K. – Várterész M. *A matematikai logika alkalmazásszemléletű tárgyalása*)

MEGOLDÁS:

$$\cfrac{\cfrac{A, B \to A}{A \to B \supset A}}{\to A \supset (B \supset A)}$$

4.1.2. RÉSZFELADAT. $A \wedge B \to B \wedge A$

(Forrás: Pásztorné Varga K. – Várterész M. *A matematikai logika alkalmazásszemléletű tárgyalása*)

MEGOLDÁS:

$$\dfrac{\dfrac{A, B \to B \qquad A, B \to A}{A, B \to B \wedge A}}{A \wedge B \to B \wedge A}$$

4.1.3. RÉSZFELADAT. $\to (A \wedge B \supset C) \supset (A \supset (B \supset C))$

(Forrás: Pásztorné Varga K. – Várterész M. *A matematikai logika alkalmazásszemléletű tárgyalása*)

MEGOLDÁS:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A, B \to A, C \qquad A, B \to B, C}{A, B \to A \wedge B, C} \qquad C, A, B \to C}{A \wedge B \supset C, A, B \to C}}{A \wedge B \supset C, A \to B \supset C}}{A \wedge B \supset C \to A \supset (B \supset C)}}{\to (A \wedge B \supset C) \supset (A \supset (B \supset C))}$$

4.1.4. RÉSZFELADAT. $\to (A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$

(Forrás: Pásztorné Varga K. – Várterész M. *A matematikai logika alkalmazásszemléletű tárgyalása*)

MEGOLDÁS:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \to C, B, A \qquad A, B \to C, B}{(A \supset B), A \to C, B} \qquad C, (A \supset B), A \to C}{(B \supset C), (A \supset B), A \to C} \qquad (A \supset B), A \to A, C}{A \supset (B \supset C), (A \supset B), A \to C}}{A \supset (B \supset C), (A \supset B) \to A \supset C}}{A \supset (B \supset C) \to (A \supset B) \supset (A \supset C)}}{\to (A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))}$$

4.1.5. RÉSZFELADAT. $A \vee B \supset C \to (A \supset C) \wedge (B \supset C)$

(Forrás: Pásztorné Varga K. – Várterész M. *A matematikai logika alkalmazásszemléletű tárgyalása*)

MEGOLDÁS:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \to A, B, C}{A \to A \vee B, C} \qquad A, C \to C}{A \vee B \supset C, A \to C}}{A \vee B \supset C \to A \supset C} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{B \to A, B, C}{B \to A \vee B, C} \qquad B, C \to C}{A \vee B \supset C, B \to C}}{A \vee B \supset C \to B \supset C}}{A \vee B \supset C \to (A \supset C) \wedge (B \supset C)}$$

4.1.6. RÉSZFELADAT. $(A \supset C) \land (B \supset C) \to A \lor B \supset C$

(Forrás: Pásztorné Varga K. – Várterész M. *A matematikai logika alkalmazásszemléletű tárgyalása*)

MEGOLDÁS:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \to C, A, B \qquad B \to C, A, B}{A \lor B \to C, A, B} \qquad C, A \lor B \to C, A}{B \supset C, A \lor B \to C, A} \qquad C, B \supset C, A \lor B \to C}{A \supset C, B \supset C, A \lor B \to C}}{A \supset C, B \supset C \to A \lor B \supset C}}{(A \supset C) \land (B \supset C) \to A \lor B \supset C}$$

4.1.7. RÉSZFELADAT. $A \supset (B \supset C) \to A \land B \supset C$

(Forrás: Pásztorné Varga K. – Várterész M. *A matematikai logika alkalmazásszemléletű tárgyalása*)

MEGOLDÁS:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{C, A, B \to C \qquad A, B \to C, B}{B \supset C, A, B \to C} \qquad A, B \to C, A}{A \supset (B \supset C), A, B \to C}}{A \supset (B \supset C), A \land B \to C}}{A \supset (B \supset C) \to A \land B \supset C}$$

4.1.8. RÉSZFELADAT. $A \land B \supset C \to A \supset (B \supset C)$

(Forrás: Pásztorné Varga K. – Várterész M. *A matematikai logika alkalmazásszemléletű tárgyalása*)

MEGOLDÁS:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A, B \to A, C \qquad A, B \to B, C}{A, B \to A \land B, C} \qquad C, A, B \to C}{A \land B \supset C, A, B \to C}}{A \land B \supset C, A \to B \supset C}}{A \land B \supset C \to A \supset (B \supset C)}$$

4.1.9. RÉSZFELADAT. $A \supset (B \lor C) \to (A \supset B) \lor (A \supset C)$

(Forrás: Pásztorné Varga K. – Várterész M. *A matematikai logika alkalmazásszemléletű tárgyalása*)

Megoldás:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{B, A \to B, C \qquad C, A \to B, C}{B \vee C, A \to B, C} \qquad A \to B, C, A}{A \supset (B \vee C), A \to B, C}}{A \supset (B \vee C), A \to B, A \supset C}}{A \supset (B \vee C) \to A \supset B, A \supset C}}{A \supset (B \vee C) \to (A \supset B) \vee (A \supset C)}}{}$$

4.1.10. részfeladat. $(A \supset B) \vee (A \supset C) \to A \supset (B \vee C)$

(Forrás: Pásztorné Varga K. – Várterész M. *A matematikai logika alkalmazásszemléletű tárgyalása*)

Megoldás:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{B, A \to B, C \qquad A \to B, C, A}{A \supset B, A \to B, C} \qquad \dfrac{C, A \to B, C \qquad A \to B, C, A}{A \supset C, A \to B, C}}{(A \supset B) \vee (A \supset C), A \to B, C}}{(A \supset B) \vee (A \supset C), A \to B \vee C}}{(A \supset B) \vee (A \supset C) \to A \supset (B \vee C)}$$

4.1.11. részfeladat. $\neg(A \supset B) \to \neg A \vee \neg B$

(Forrás: Pásztorné Varga K. – Várterész M. *A matematikai logika alkalmazásszemléletű tárgyalása*)

Megoldás:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A, B \to B}{A, B \to A \supset B}}{\to \neg A, \neg B, A \supset B}}{\neg(A \supset B) \to \neg A, \neg B}}{\neg(A \supset B) \to \neg A \vee \neg B}$$

4.1.12. részfeladat. $A \supset B \to \neg A \vee B$

(Forrás: Pásztorné Varga K. – Várterész M. *A matematikai logika alkalmazásszemléletű tárgyalása*)

Megoldás:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{B, A \to B \qquad A \to B, A}{A \supset B, A \to B}}{A \supset B \to \neg A, B}}{A \supset B \to \neg A \vee B}$$

4.2. FELADAT. Bizonyítsuk be a következő szekventeket a Gentzen-kalkulusban!

a) $A \supset B, B \supset C \to A \supset C$
b) $A \vee (B \vee C), \neg A, \neg B \to C$
c) $\neg A \supset B \vee C \to \neg B \supset A \vee C$
d) $\to (A \supset (B \supset C)) \wedge (A \supset C) \wedge (C \supset A)$

4.3. FELADAT. Bizonyítsuk be az alábbi szekventeket a Gentzen-kalkulusban!

4.3.1. RÉSZFELADAT. $\to \forall x P(x) \supset \exists x P(x)$

(Forrás: Pásztorné Varga K. – Várterész M. *A matematikai logika alkalmazásszemléletű tárgyalása*)

MEGOLDÁS:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\forall x P(x), P(x) \to \exists x P(x), P(x)}{\forall x P(x), P(x) \to \exists x P(x)}}{\forall x P(x) \to \exists x P(x)}}{\to \forall x P(x) \supset \exists x P(x)}$$

4.3.2. RÉSZFELADAT. $\neg \exists x P(x) \vee R \to \forall x (P(x) \supset R)$

(Forrás: Pásztorné Varga K. – Várterész M. *A matematikai logika alkalmazásszemléletű tárgyalása*)

MEGOLDÁS:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{P(x) \to R, P(x), \exists x P(x)}{P(x) \to R, \exists x P(x)}}{\neg \exists x P(x), P(x) \to R} \qquad R, P(x) \to R}{\neg \exists x P(x) \vee R, P(x) \to R}}{\neg \exists x P(x) \vee R \to P(x) \supset R}}{\neg \exists x P(x) \vee R \to \forall x (P(x) \supset R)}$$

4.3.3. RÉSZFELADAT. $\to \forall x (R \supset P(x)) \supset (R \supset \forall x P(x))$

(Forrás: Pásztorné Varga K. – Várterész M. *A matematikai logika alkalmazásszemléletű tárgyalása*)

MEGOLDÁS:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{P(x), \forall x (R \supset P(x)), R \to P(x) \qquad \forall x (R \supset P(x)), R \to P(x), R}{R \supset P(x), \forall x (R \supset P(x)), R \to P(x)}}{\forall x (R \supset P(x)), R \to P(x)}}{\forall x (R \supset P(x)), R \to \forall x P(x)}}{\forall x (R \supset P(x)) \to R \supset \forall x P(x)}}{\to \forall x (R \supset P(x)) \supset (R \supset \forall x P(x))}$$

4.3.4. RÉSZFELADAT. $\exists x(P(x) \wedge R(x)) \rightarrow \exists x P(x) \wedge \exists x R(x)$

(Forrás: Pásztorné Varga K. – Várterész M. *A matematikai logika alkalmazásszemléletű tárgyalása*)

MEGOLDÁS:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{P(x), R(x) \rightarrow P(x)}{P(x), R(x) \rightarrow \exists x P(x)} \qquad \dfrac{P(x), R(x) \rightarrow R(x)}{P(x), R(x) \rightarrow \exists x R(x)}}{P(x), R(x) \rightarrow \exists x P(x) \wedge \exists x R(x)}}{P(x) \wedge R(x) \rightarrow \exists x P(x) \wedge \exists x R(x)}}{\exists x(P(x) \wedge R(x)) \rightarrow \exists x P(x) \wedge \exists x R(x)}$$

4.4. FELADAT. Bizonyítsuk be a következő szekventeket a Gentzen-kalkulusban!

a) $\neg \forall x P(x) \vee R \rightarrow \exists x(P(x) \supset R)$, ahol $x \notin \mathrm{Par}(R)$.
b) $\exists x \forall y Q(x, y) \rightarrow \forall y \exists x Q(x, y)$
c) $\forall x \forall y Q(x, y) \rightarrow \forall y \forall x Q(x, y)$
d) $\forall x P(x) \vee \forall x R(x) \rightarrow \forall x(P(x) \vee R(x))$

(Forrás: Pásztorné Varga K. – Várterész M. *A matematikai logika alkalmazásszemléletű tárgyalása*)