

Az informatika logikai alapjai

Mihálydeák Tamás

mihalydeak.tamas@inf.unideb.hu

Számítógéptudományi Tanszék

2009. november 5.

- A logika feladata
 - A helyes következtetés törvényszerűségeinek a feltárása
 - Az információközlésben kulcsszerepet játszó kifejezések jelentésének a megadása
- A helyes következtetés
 - Következtetés: viszony (a premisszák és a konklúzió között)
 - Helyes következtetés: a premisszák igazsága maga után vonja a konklúzió igazságát (a premisszák valamely tulajdonsága öröklődik a konklúzióra)
 - Logikailag helyes következtetés: ha az örökítés szükségszerű

- Arisztotelész(Kr.e. 384–322)
- A bizonyító érvelés
- Az ellentmondás elve: "A legbiztosabb alapelv ... ez: lehetetlen, hogy egy és ugyanaz a valami ugyanakkor, ugyanabban a tekintetben ... vonatkozzék is valamire, meg nem is." (1005b19-23)
- A kizárt harmadik elve: "Az ellentmondás két tagja között nem állhat fenn semmi közbeeső, hanem mindenről mindent vagy állítani vagy tagadni kell."(1011b 23-24)

Definíció

Klasszikus nulladrendű nyelven az

$$L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$$

rendezett hármast értjük, ahol

- 1 $LC = \{\neg, \supset, \wedge, \vee, \equiv, (,)\}$ (a nyelv logikai konstansainak halmaza).
- 2 $Con \neq \emptyset$ a nyelv nemlogikai konstansainak (állítás- vagy kijelentés-paramétereinek) legfeljebb megszámlálhatóan végtelen halmaza.
- 3 Az $LC \cap Con = \emptyset$
- 4 A nyelv formuláinak a halmazát, azaz a $Form$ halmazt az alábbi induktív definíció adja meg:

Definició

- $Con \subseteq Form$
- $\text{Ha } A \in Form, \text{ akkor } \neg A \in Form.$
- $\text{Ha } A, B \in Form, \text{ akkor}$
 - $(A \supset B) \in Form,$
 - $(A \wedge B) \in Form,$
 - $(A \vee B) \in Form,$
 - $(A \equiv B) \in Form.$

Megjegyzés

A Con halmaz elemeit atomi formuláknak vagy prímmformuláknak nevezzük.

Definició

- Ha A atomi formula, akkor nincs **közvetlen** részformulája;
- $\neg A$ egyetlen **közvetlen** részformulája A ;
- Az $(A \supset B)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \equiv B)$ formulák **közvetlen** részformulái az A és a B formulák.

Definició

Egy A formula részformuláinak halmaza az a legszűkebb halmaz [jelölés: $RF(A)$], amelyre teljesül, hogy

- 1 $A \in RF(A)$,
(azaz az A formula részformulája önmagának);
- 2 ha $A' \in RF(A)$ és B közvetlen részformulája A' -nek, akkor $B \in RF(A)$
(azaz, ha egy A' formula részformulája A -nak, akkor A' összes közvetlen részformulája is részformulája A -nak).

Definíció

Az *A formula szerkezeti fáján* egy olyan véges rendezett fát értünk, amelynek csúcsai formulák,

- gyökere az A formula,
- $\neg B$ alakú csúcsának egyetlen gyermeke a B formula,
- $(B \supset C), (B \wedge C), (B \vee C), (B \equiv C)$ alakú csúcsainak két gyermekét a B , illetve a C formulák alkotják,
- levelei prímmformulák (atomi formulák).

Definíció

A ρ függvényt az $L^{(0)}$ nyelv egy **interpretációjának** nevezzük, ha

- 1 $Dom(\varrho) = Con$
- 2 $\text{Ha } p \in Con, \text{ akkor } \varrho(p) \in \{0, 1\}.$

Definíció

Legyen adott egy ϱ interpretáció. $|A|_{\varrho}$ jelöli az A formula ϱ interpretáció szerinti értékét.

- 1 $\text{Ha } p \in \text{Con}, \text{ akkor } |p|_{\varrho} = \varrho(p)$
- 2 $\text{Ha } A \in \text{Form}, \text{ akkor } |\neg A|_{\varrho} = 1 - |A|_{\varrho}.$
- 3 $\text{Ha } A, B \in \text{Form}, \text{ akkor}$
 - $|(A \supset B)|_{\varrho} = \begin{cases} 0 & \text{ha } |A|_{\varrho} = 1, \text{ és } |B|_{\varrho} = 0; \\ 1, & \text{egyébként.} \end{cases}$
 - $|(A \wedge B)|_{\varrho} = \begin{cases} 1 & \text{ha } |A|_{\varrho} = 1, \text{ és } |B|_{\varrho} = 1; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$
 - $|(A \vee B)|_{\varrho} = \begin{cases} 0 & \text{ha } |A|_{\varrho} = 0, \text{ és } |B|_{\varrho} = 0; \\ 1, & \text{egyébként.} \end{cases}$
 - $|(A \equiv B)|_{\varrho} = \begin{cases} 1 & \text{ha } |A|_{\varrho} = |B|_{\varrho}; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$

Definició

Legyen $\Gamma \subseteq \text{Form}$ egy tetszőleges formulahalmaz! A ρ interpretáció **modellje** a Γ **formulahalmaznak**, ha minden $A \in \Gamma$ esetén $|A|_\rho = 1$

Definíció

Az A *formula modelljén* az $\{A\}$ egyelemű formulahalmaz modelljét értjük.

Definíció

Egy $\Gamma \subseteq \text{Form}$ **formulahalmaz kielégíthető**, ha van modellje.
(Van olyan interpretáció, amelyben a formulahalmaz minden eleme igaz.)

Definició

Egy $A \in \text{Form}$ **formula kielégíthető**, ha az $\{A\}$ formulahalmaz kielégíthető.

Megjegyzés

- *Kielégíthető formulahalmaz: nem tartalmaz logikai ellentmondást, azaz a formulahalmaz elemei lehetnek egyszerre igazak.*
- *Kielégíthető formula: a formula lehet igaz, azaz nem logikai hamisság.*
- *Ha egy formulahalmaz kielégíthető, akkor minden eleme kielégíthető.*
- *Az előző állítás megfordítása nem igaz. Pl.: a $\{p, \neg p\}$ formulahalmaz minden eleme kielégíthető, de maga a formulahalmaz nem kielégíthető.*

Tétel

Egy kielégíthető formulahalmaz minden részhalmaza kielégíthető.
(A logikai ellentmondástalanság szűkítéssel nem rontható el.)

Bizonyítás.

- Legyen $\Gamma \subseteq \text{Form}$ egy tetszőleges kielégíthető formulahalmaz, és $\Delta \subseteq \Gamma$!
- Γ kielégíthetősége miatt a Γ formulahalmaznak van modellje, legyen Γ egy modellje a ϱ interpretáció.
- ϱ tulajdonsága: Ha $A \in \Gamma$, akkor $|A|_{\varrho} = 1$
- Mivel $\Delta \subseteq \Gamma$, ha $A \in \Delta$, akkor $A \in \Gamma$, s így $|A|_{\varrho} = 1$. Azaz a ϱ interpretáció modellje Δ -nak, tehát Δ kielégíthető.



Definició

*Kielégíthetlenség: Egy $\Gamma \subseteq \text{Form}$ **formulahalmaz kielégíthetetlen**, ha nem kielégíthető (ha nincs modellje).*

Definició

Egy $A \in \text{Form}$ **formula kielégíthetetlen**, ha az $\{A\}$ formulahalmaz kielégíthetetlen.

Megjegyzés

Kielégíthetetlen formulahalmaz: logikai ellentmondást tartalmaz, azaz a formulahalmaz elemei nem lehetnek egyszerre igazak.

Tétel

Egy kielégíthetetlen formulahalmaz minden bővítése kielégíthetetlen. (A logikai ellentmondás bővítéssel nem szüntethető meg.)

Bizonyítás.

- Indirekt bizonyítás:
- Tegyük fel, hogy $\Gamma \subseteq \text{Form}$ tetszőleges kielégíthetetlen formulahalmaz, $\Delta \subseteq \text{Form}$ pedig tetszőleges formulahalmaz.
- Indirekt feltétel: Γ kielégíthetetlen, és $\Gamma \cup \Delta$ kielégíthető.
- $\Gamma \subseteq \Gamma \cup \Delta$
- Az előző állítás miatt Γ kielégíthető, ez pedig ellentmondás.



Definíció

A Γ formulahalmaznak *logikai következménye* az A formula, ha a $\Gamma \cup \{\neg A\}$ formulahalmaz kielégíthetetlen. Jelölés: $(\Gamma \models A)$

Definíció

$A \models B$, ha $\{A\} \models B$.

Definíció

Az A formula *érvényes*, ha $\emptyset \models A$. Jelölés: $\models A$

Definíció

Az A és a B formula *logikailag ekvivalens*, ha $A \models B$ és $B \models A$.
Jelölés: $A \Leftrightarrow B$

Tétel

Legyen $\Gamma \subseteq \text{Form}$, és $A \in \text{Form}$. $\Gamma \models A$ akkor és csak akkor, ha a Γ formulahalmaz *minden* modellje modellje az A formulának (azaz az $\{A\}$ egyelemű formulahalmaznak) is.

Bizonyítás.

→ Indirekt feltétel: $\Gamma \models A$ és van olyan modellje a Γ formulahalmaznak, amely nem modellje az A formulának.

Legyen ez a modell a ϱ interpretáció!

A ϱ tulajdonságai:

- ① minden $B \in \Gamma$ esetén $|B|_{\varrho} = 1$;
- ② $|A|_{\varrho} = 0$, azaz $|\neg A|_{\varrho} = 1$

Ekkor a $\Gamma \cup \{\neg A\}$ formulahalmaz minden eleme igaz ϱ -ban, tehát $\Gamma \cup \{\neg A\}$ kielégíthető, azaz $\Gamma \not\models A$, ami ellentmondás.



Bizonyítás.

← Indirekt feltétel: A Γ formulahalmaz minden modellje modellje az A formulának, de $\Gamma \not\models A$.

Ekkor a $\Gamma \cup \{\neg A\}$ formulahalmaz kielégíthető, azaz van modellje.

Legyen ez a modell a ϱ interpretáció!

A ϱ tulajdonságai:

- ① minden $B \in \Gamma$ esetén $|B|_{\varrho} = 1$;
- ② $|\neg A|_{\varrho} = 1$, azaz $|A|_{\varrho} = 0$

Tehát a Γ formulahalmaznak van olyan modellje, ami nem modellje az A formulának, s ez ellentmondás.



Következmény

Legyen $\Gamma \subseteq \text{Form}$, és $A \in \text{Form}$. $\Gamma \models A$ akkor és csak akkor, ha **minden** olyan interpretációban, amelyben a Γ formulahalmaz minden eleme igaz, igaz az A formula is.

Tétel

Ha A érvényes formula ($\models A$), akkor minden Γ formulahalmaz esetén $\Gamma \models A$. (Egy érvényes formula minden formulahalmaznak következménye.)

Bizonyítás.

- Ha A érvényes formula, akkor a definíció szerint $\emptyset \models A$.
- $\emptyset \cup \{\neg A\}$ ($= \{\neg A\}$) kielégíthetetlen, s így bővítései is kielégíthetetlenek.
- $\Gamma \cup \{\neg A\}$ bővítése $\{\neg A\}$ -nak, így kielégíthetetlen, tehát $\Gamma \models A$.



Tétel

Ha a Γ formulahalmaz kielégíthetetlen, akkor minden A formula esetén $\Gamma \models A$. (Egy kielégíthetetlen formulahalmaznak minden formula következménye.)

Bizonyítás.

- A már bizonyított állítás szerint: Ha a Γ formulahalmaz kielégíthetetlen, akkor Γ minden bővítése is kielégíthetetlen.
- $\Gamma \cup \{\neg A\}$ bővítése Γ -nak, így kielégíthetetlen, tehát $\Gamma \models A$.



Tétel

Dedukció tétel: *Ha $\Gamma \cup \{A\} \models B$, akkor $\Gamma \models (A \supset B)$.*

Bizonyítás.

- Indirekt feltétel: Tegyük fel, hogy $\Gamma \cup \{A\} \models B$, és $\Gamma \not\models (A \supset B)$.
- Így $\Gamma \cup \{\neg(A \supset B)\}$ kielégíthető, tehát van modellje. Legyen egy modellje a ϱ interpretáció!
- A ϱ tulajdonságai:
 - 1 Γ minden eleme igaz a ϱ interpretáció szerint.
 - 2 $|\neg(A \supset B)|_{\varrho} = 1$
- $|(A \supset B)|_{\varrho} = 0$, azaz $|A|_{\varrho} = 1$ és $|B|_{\varrho} = 0$. Így $|\neg B|_{\varrho} = 1$.
- $\Gamma \cup \{A\} \cup \{\neg B\}$ formulahalmaz minden eleme igaz a ϱ interpretáció szerint, tehát $\Gamma \cup \{A\} \not\models B$, ami ellentmondás.



Tétel

A dedukció tétel megfordítása: Ha $\Gamma \models (A \supset B)$, akkor $\Gamma \cup \{A\} \models B$.

Bizonyítás.

- Indirekt feltétel: Tegyük fel, hogy $\Gamma \models (A \supset B)$, és $\Gamma \cup \{A\} \not\models B$.
- Így $\Gamma \cup \{A\} \cup \{\neg B\}$ kielégíthető, tehát van modellje. Legyen egy modellje a ϱ interpretáció!
- A ϱ tulajdonságai:
 - ① Γ minden eleme igaz a ϱ interpretáció szerint.
 - ② $|A|_{\varrho} = 1$
 - ③ $|\neg B|_{\varrho} = 1$, így $|B|_{\varrho} = 0$
- $|(A \supset B)|_{\varrho} = 0$, $|\neg(A \supset B)|_{\varrho} = 1$.
- $\Gamma \cup \{\neg(A \supset B)\}$ formulahalmaz minden eleme igaz a ϱ interpretáció szerint, tehát $\Gamma \not\models (A \supset B)$.



Következmény

$A \models B$ akkor és csak akkor, ha $\models (A \supset B)$

Bizonyítás.

Bizonyítás: Az előző két tételben legyen $\Gamma = \emptyset$.



Tétel

Metszet tétel: Ha $\Gamma \cup \{A\} \models B$ és $\Delta \models A$, akkor $\Gamma \cup \Delta \models B$.

Bizonyítás.

Indirekt. □

Az negáció igazságtáblázata:

$\neg$	$\neg p$
0	1
1	0

- A kettős negáció törvénye: $\neg\neg A \Leftrightarrow A$

A konjunkció igazságtáblázata:

$\wedge$	0	1	(q)
0	0	0	
1	0	1	
(p)			

- Felcserélhető (kommutatív): $(A \wedge B) \Leftrightarrow (B \wedge A)$
bármely $A, B \in Form$ esetén.
- Csoportosítható (asszociatív): $(A \wedge (B \wedge C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \wedge C)$
bármely $A, B, C \in Form$ esetén.
- Idempotens: $(A \wedge A) \Leftrightarrow A$ bármely $A \in Form$ esetén.

- $(A \wedge B) \models A, (A \wedge B) \models B$
- Az ellentmondás törvénye: $\models \neg(A \wedge \neg A)$
- Az $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ formulahalmaz $(A_1, A_2, \dots, A_n \in Form)$ akkor és csak akkor kielégíthető, ha az $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n$ formula kielégíthető.
- Az $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ formulahalmaz $(A_1, A_2, \dots, A_n \in Form)$ akkor és csak akkor kielégíthetetlen, ha az $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n$ formula kielégíthetetlen.
- Az $\{A_1, A_2, \dots, A_n\} \models A$ $(A_1, A_2, \dots, A_n, A \in Form)$ akkor és csak akkor, ha az $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n \models A$.

Az diszjunkció igazságtáblázata:

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

- Felcserélhető (kommutatív): $(A \vee B) \Leftrightarrow (B \vee A)$ bármely $A, B \in Form$ esetén.
- Csoportosítható (asszociatív): $(A \vee (B \vee C)) \Leftrightarrow ((A \vee B) \vee C)$ bármely $A, B, C \in Form$ esetén.
- Idempotens: $(A \vee A) \Leftrightarrow A$ bármely $A \in Form$ esetén.
- $A \models (A \vee B)$ bármely $A, B \in Form$ esetén.
- $\{(A \vee B), \neg A\} \models B$
- A kizárt harmadik törvénye. $\models (A \vee \neg A)$

- A konjunkció és az diszjunkció kapcsolata:

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

	1	0
1	1	1
0	1	0

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

- A fenti tulajdonság azt jelenti, hogy a konjunkció és a diszjunkció egymás duálisai.

- Kétoldali disztributivitás:

- $(A \vee (B \wedge C)) \Leftrightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$
- $(A \wedge (B \vee C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$

- Elnyelési tulajdonság

- $(A \wedge (B \vee A)) \Leftrightarrow A$
- $(A \vee (B \wedge A)) \Leftrightarrow A$

De Morgan törvények

- Mit állítunk akkor, amikor egy konjunkciót tagadunk?
- Mit állítunk akkor amikor egy diszjunkció tagadunk?
- $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$
- $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$

- A De Morgan törvények bizonyítása.

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg A \wedge \neg B)$	$(A \vee B)$	$\neg(A \vee B)$
0	0	1	1	1	0	1
0	1	1	0	0	1	0
1	0	0	1	0	1	0
1	1	0	0	0	1	0

- Az implikáció igazságtáblázata:

$\supset$	0	1
0	1	1
1	0	1
- $\models (A \supset A)$
- Modus ponens (leválasztási szabály): $\{(A \supset B), A\} \models B$
- Modus tollens (indirekt cáfolás sémája):
 $\{(A \supset B), \neg B\} \models \neg A$
- Láncszabály: $\{(A \supset B), (B \supset C)\} \models (A \supset C)$
- Redukció ad absurdum: $\{(A \supset B), (A \supset \neg B)\} \models \neg A$

- $\neg A \models (A \supset B)$
- $B \models (A \supset B)$
- Áthelyezési törvény: $((A \wedge B) \supset C) \Leftrightarrow (A \supset (B \supset C))$
- Kontrapozíció: $(A \supset B) \Leftrightarrow (\neg B \supset \neg A)$
- $(A \supset \neg A) \models \neg A$
- $(\neg A \supset A) \models A$
- $(A \supset (B \supset C)) \Leftrightarrow ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
- $\models (A \supset (\neg A \supset B))$
- $((A \vee B) \supset C) \Leftrightarrow ((A \supset C) \wedge (B \supset C))$
- Az $\{A_1, A_2, \dots, A_n\} \models A$ ($A_1, A_2, \dots, A_n, A \in Form$) akkor és csak akkor, ha az $((A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n) \supset A)$ formula érvényes.

- Az ekvivalencia igazságtáblázata:

$\equiv$	0	1
0	1	0
1	0	1

- $\models (A \equiv A)$
- $\models \neg(A \equiv \neg A)$

Kifejezhetőség

- $(A \supset B) \Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$
- $(A \supset B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$
- $(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg(A \supset \neg B)$
- $(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \supset B)$
- $(A \vee B) \Leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$
- $(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$
- $(A \equiv B) \Leftrightarrow ((A \supset B) \wedge (B \supset A))$

Az igazságfunktorok elmélete

- A bázis fogalma: Igazságfunktorok egy olyan halmazát értjük bázison, amelynek elemeivel minden igazságfunktor kifejezhető.
 - Például: $\{\neg, \supset\}, \{\neg, \wedge\},$
 - $\{\neg, \supset\}$:
 - 1 $(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg(p \supset \neg q)$
 - 2 $(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \supset q)$
 - Sheffer művelet: $(p|q) \Leftrightarrow_{\text{def}} \neg(p \wedge q)$
 - Sem–sem művelet: $(p \parallel q) \Leftrightarrow_{\text{def}} (\neg p \wedge \neg q)$
 - Megjegyzés: Mind a Sheffer, mind a sem–sem művelet önmagában bázist alkot.

Definíció

Ha $p \in \text{Con}$, akkor a $p, \neg p$ formulákat literálnak nevezzük (p a literál alapja).

Definíció

Ha az A formula literál vagy különböző alapú literálok konjunkciója, akkor A -t elemi konjunkciónak nevezzük.

Definíció

Ha az A formula literál vagy különböző alapú literálok diszjunkciója, akkor A -t elemi diszjunkciónak (vagy klóznak) nevezzük.

Definíció

Elemi konjunkciók diszjunkcióját diszjunktív normálformának nevezzük.

Definíció

Elemi diszjunkciók konjunkcióját konjunktív normálformának nevezzük.

Állítás

Az állításlogika minden formulájához létezik vele logikailag ekvivalens normálforma.

- A konvenciók célja az egyértelmű olvashatóság fenntartása mellett a formulákban előforduló zárójelek számának a csökkentése.
 - A létrejött jelsorozatok betű szerint nem formulák, de egyértelműen előállítható belőlük egy formula.
 - A továbbiakban az egyszerűség kedvéért az így létrejött jelsorozatokat is formuláknak nevezzük, s használatukkor mindig a belőlük egyértelműen előállítható formulákra gondolunk.
-
- A legkülső zárójelpár mindig elhagyható.
 - A kétargumentumú logikai konstansok elsőbbségi sorrendje:
$$\wedge, \vee, \supset, \equiv$$
 - A negáció erősebb bármely kétargumentumú logikai konstansnál.

- Az azonos kétargumentumú logikai konstansok egymás közötti elsőbbségét a balról jobbra szabály rendezzi: először mindig a bal oldali formulát tekintjük külön műveleti komponensnek.

Megjegyzés

- *A szabálynak csak az implikációnál van jelentősége:*
 - az $A \supset B \supset C$ „formula” egyértelműen zárójelezett alakja:

$$(A \supset (B \supset C));$$
- *A konjunkció és a diszjunkció esetében a műveltek asszociativitása miatt a szabályt nem követő zárójelezések is logikailag ekvivalens formulát eredményeznek. Pl.: az $A \wedge B \wedge C$ „formula” egyértelműen zárójelezett alakja:

$$(A \wedge (B \wedge C))[\Leftrightarrow ((A \wedge B) \wedge C)].$$*

Definíció

Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ a klasszikus állításlogika nyelve ($LC = \{\neg, \supset, (,)\}$).

A klasszikus állításkalkulus axiómasémái (alapsémái):

- (A1): $A \supset (B \supset A)$
- (A2): $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
- (A3): $(\neg A \supset \neg B) \supset (B \supset A)$

Definíció

- Az alapsémák (axiómasémák) szabályos behelyettesítésén olyan formulákat értünk, amelyek valamely alapsémából a benne szereplő betűk tetszőleges formulával való helyettesítése útján jönnek létre.
- A klasszikus állításkalkulus alapformulái (axiómái) az alapsémák (axiómasémák) szabályos behelyettesítései.

Definíció

- Az *alapsémák* (axómasémák) szabályos behelyettesítésén olyan formulákat értünk, amelyek valamely alapsémából a benne szereplő betűk tetszőleges formulával való helyettesítése útján jönnek létre.
- A klasszikus állításkalkulus *alapformulái* (axiómái) az alapsémák (axiómasémák) szabályos behelyettesítései.

Definíció

A szintaktikai következményreláció strukturális induktív definíciója:

- Legyen $\Gamma \subseteq \text{Form}$, $A \in \text{Form}$. A Γ formulahalmaznak szintaktikai következménye az A formula ($\Gamma \vdash A$), ha az alábbiak valamelyike teljesül:
 - 1 ha $A \in \Gamma$, akkor $\Gamma \vdash A$;
 - 2 ha A alapformula (axióma), akkor $\Gamma \vdash A$;
 - 3 ha $\Gamma \vdash B$, és $\Gamma \vdash B \supset A$, akkor $\Gamma \vdash A$.

Definíció

Legyen $\Gamma \subseteq \text{Form}$, $A \in \text{Form}$. Ha az A formula szintaktikai következménye a Γ formulahalmaznak, akkor a ' $\Gamma \vdash A$ ' jelsorozatot *szekvenciának* nevezzük.

A természetes levezetés technikájának alapvető szabálya a dedukciótételen alapul.

Tétel

Dedukciótétel: Ha $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$, akkor $\Gamma \vdash A \supset B$.

Másként felírva:

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \supset B}$$

Bizonyítás: gyakorlaton

Strukturális szabályok

Legyen a továbbiakban $\Gamma, \Delta \subseteq Form, A, B, C, \in Form$.

Az azonosság törvénye

$$\frac{\emptyset}{\Gamma, A \vdash A}$$

A bővítés szabálya

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, B \vdash A}$$

A szűkítés szabálya

$$\frac{\Gamma, B, B, \Delta \vdash A}{\Gamma, B, \Delta \vdash A}$$

Strukturális szabályok

A felcserélés (permutálás) szabálya

A felcserélés (permutálás) szabálya:
$$\frac{\Gamma, B, C, \Delta \vdash A}{\Gamma, C, B, \Delta \vdash A}$$

A metszet szabály (vágás szabálya)

A metszet szabály (vágás szabálya):
$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Delta, A \vdash B}{\Gamma, \Delta \vdash B}$$

Logikai szabályok

Az implikáció (bevezető, illetve alkalmazó) szabályai

$$(\supset 1.) \quad \frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \supset B}$$

$$(\supset 2.) \quad \frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash A \supset B}{\Gamma \vdash B}$$

A konjunkció szabályai

$$(\wedge 1.) \quad \frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}$$

$$(\wedge 2.) \quad \frac{\Gamma, A, B \vdash C}{\Gamma, A \wedge B \vdash C}$$

A diszjunkció szabályai

$$(\vee 1.) \quad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}$$

$$(\vee 2.) \quad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}$$

$$(\vee 3.) \quad \frac{\Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \vee B \vdash C}$$

Logikai szabályok

A negáció szabályai

$$(\neg 1.) \quad \frac{\Gamma, A \vdash B \quad \Gamma, A \vdash \neg B}{\Gamma \vdash \neg A}$$

$$(\neg 2.) \quad \frac{\Gamma \vdash \neg \neg A}{\Gamma \vdash A}$$

A (materiális) ekvivalencia szabályai

$$(\equiv 1.) \quad \frac{\Gamma, A \vdash B \quad \Gamma, B \vdash A}{\Gamma \vdash A \equiv B}$$

$$(\equiv 2.) \quad \frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash A \equiv B}{\Gamma \vdash B}$$

$$(\equiv 3.) \quad \frac{\Gamma \vdash B \quad \Gamma \vdash A \equiv B}{\Gamma \vdash A}$$