

Elméleti kérdések (centrális fogalmak, elsőrend)

1. Adja meg az elsőrendű modell definícióját!

Definíció

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy **elsőrendű nyelv** és $\Gamma \subseteq Form$ egy tetszőleges formulahalmaz. Az $\langle U, \rho, v \rangle$ rendezett hármas elsőrendű modellje a Γ formulahalmaznak, ha

- $\langle U, \rho \rangle$ egy **interpretációja** az $L^{(1)}$ nyelvnek;
- v egy $\langle U, \rho \rangle$ interpretációra támaszkodó **értékelés**;
- minden $A \in \Gamma$ esetén $|A|_v^{\langle U, \rho \rangle} = 1$

2. Adja meg az elsőrendű logika esetében egy formulahalmaz kielégíthetőségének definícióját!

Definíció

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy **elsőrendű nyelv** és $\Gamma \subseteq Form$ egy tetszőleges formulahalmaz. A Γ formulahalmaz kielégíthető, ha van **(elsőrendű) modellje**.

3. Adja meg az elsőrendű logika esetében egy formula kielégíthetőségének definícióját!

Definíció

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy **elsőrendű nyelv** és $A \in Form$ egy tetszőleges formula. Az A formula kielégíthető, ha az $\{A\}$ formulahalmaz kielégíthető.

4. Adja meg az elsőrendű logika esetében egy formulahalmaz kielégíthetlenségének definícióját!

Definíció

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy **elsőrendű nyelv** és $\Gamma \subseteq Form$ egy tetszőleges formulahalmaz. A Γ formulahalmaz kielégíthetetlen, ha nem kielégíthető, azaz nincs modellje.

5. Adja meg az elsőrendű logika esetében egy formula kielégíthetlenségének definícióját!

Definíció

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy **elsőrendű nyelv** és $A \in Form$ egy tetszőleges formula. Az A formula kielégíthetetlen, ha az $\{A\}$ formulahalmaz kielégíthetetlen.

6. Adja meg az elsőrendű logika esetében a következményreláció szemantikai definícióját!

Definíció (logikai következmény szemantikai definíciója)

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy **elsőrendű nyelv**, $\Gamma \subseteq Form$ egy tetszőleges formulahalmaz, és $A \in Form$ egy formula.

A Γ formulahalmaznak **logikai következménye** az A formula, ha a $\Gamma \cup \{\neg A\}$ **formulahalmaz kielégíthetetlen**.

Jelölés: $\Gamma \models A$

7. Mikor mondjuk az elsőrendű logika esetében, hogy az A formulának logikai következménye a B formula?

Definíció

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Term, Con, Form \rangle$ egy **elsőrendű nyelv** és $A, B \in Form$ két tetszőleges formula. Az A formulának **logikai következménye** a B formula, ha a $\{A\} \models B$.

Jelölés: $A \models B$

8. Adja meg az elsőrendű logika esetében egy formula érvényességének definícióját!

Definíció

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy **elsőrendű nyelv**, és $A \in Form$ egy formula.

Az A formula érvényes, ha $\emptyset \models A$, azaz ha az A formula **logikai következménye** az üres halmaznak.

- Jelölés: $\models A$

9. Adja meg az elsőrendű logika esetében a logikai ekvivalencia definícióját!

10. Mikor mondjuk az elsőrendű logika esetében, hogy az A és a B formula logikailag ekvivalens?

Definíció

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy **elsőrendű nyelv**, és $A, B \in Form$ két formula.

Az A és a B formula logikailag ekvivalens, ha $A \models B$ és $B \models A$.

Jelölés: $A = B$

11. Mondja ki az elsőrendű logika esetében a kielégíthető formulahalmazok szűkítésre vonatkozó tételt!

Tétel

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy **elsőrendű nyelv**, $\Gamma \subseteq Form$ egy formulahalmaz.

Ha Γ **kielégíthető formulahalmaz** és $\Delta \subseteq \Gamma$, akkor Δ **kielégíthető formulahalmaz**.

12. Mondja ki az elsőrendű logika esetében a kielégíthetetlen formulahalmazok bővítésére vonatkozó tételt!

Tétel

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy **elsőrendű nyelv**, $\Gamma \subseteq Form$ egy formulahalmaz.

Ha Γ **kielégíthetetlen formulahalmaz**, és $\Gamma \subseteq \Delta$, akkor Δ **kielégíthetetlen formulahalmaz**.

13. Mondja ki az elsőrendű logika esetében a kielégíthetetlen formulahalmazok lehetséges logikai következményeire vonatkozó tételt!

Tétel

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy **elsőrendű nyelv** és $\Gamma \subseteq Form$ egy formulahalmaz..

Ha a Γ formulahalmaz **kielégíthetetlen**, akkor minden A formula esetén $\Gamma \models A$.

14. Mondja ki az elsőrendű logika esetében azt a tételt, amely a következményrelációnak azt az esetét vizsgálja, amikor a konklúzió érvényes formula!

Tétel

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy **elsőrendű nyelv**, $A \in Form$.

Ha A **érvényes formula** ($\models A$), akkor minden $\Gamma \subseteq Form$ formulahalmaz esetén $\Gamma \models A$.

15. Mondja ki az elsőrendű logika esetében a dedukció tételt!

Tétel

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy **elsőrendű nyelv**, $\Gamma \subseteq Form$ egy formulahalmaz és $A, B \in Form$ két formula.

Ha $\Gamma \cup \{A\} \models B$, akkor $\Gamma \models (A \supset B)$.

16. Mondja ki az elsőrendű logika esetében a dedukció tétel megfordítását!

Tétel

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy **elsőrendű nyelv**, $\Gamma \subseteq Form$ egy formulahalmaz és $A, B \in Form$ két formula.
Ha $\Gamma \models (A \supset B)$, akkor $\Gamma \cup \{A\} \models B$.

17. Mondja ki az elsőrendű logika esetében a metszet tételt!

Tétel

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy **elsőrendű nyelv**, $\Gamma, \Delta \subseteq Form$ két formulahalmaz és $A, B \in Form$ két formula.
Ha $\Gamma \cup \{A\} \models B$ és $\Delta \models A$, akkor $\Gamma \cup \Delta \models B$.

18. Mi a kapcsolat az elsőrendű logika esetében a logikai következményreláció és az implikáció között?

A dedukciótétel és megfordításának következménye:

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy **elsőrendű nyelv**, és $A, B \in Form$ két formula.
 $A \models B$ akkor és csak akkor, ha $\models (A \supset B)$

19. Mi a kapcsolat az elsőrendű logika esetében a logikai ekvivalencia és a (materiális) ekvivalencia között?

A dedukciótétel és megfordításának következménye:

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy **elsőrendű nyelv** és $A, B \in Form$ két formula.
 $A \models B$ akkor és csak akkor, ha $\models (A \equiv B)$.