

Elméleti kérdések (szemantika, elsőrend)

1. Adja meg az elsőrendű logika interpretációjának definícióját!

Definíció

Az $\langle U, \rho \rangle$ párt az $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ **elsőrendű nyelv** egy interpretációjának nevezzük, ha

1. $U \neq \emptyset$, azaz U nemüres halmaz;
2. $Dom(\rho) = Con$, azaz a ρ a Con halmazon értelmezett függvény, amelyre teljesülnek a következők:
 - a. Ha $a \in \mathcal{F}(0)$, akkor $\rho(a) \in U$;
 - b. Ha $f \in \mathcal{F}(n)$ ($n \neq 0$), akkor $\rho(f)$ az $U^{(n)}$ halmazon értelmezett az U halmazba képező függvény $(\rho(f) : U^{(n)} \rightarrow U)$;
 - c. Ha $p \in \mathcal{P}(0)$, akkor $\rho(p) \in \{0, 1\}$;
 - d. Ha $P \in \mathcal{P}(n)$ ($n \neq 0$), akkor $\rho(P) \subseteq U^{(n)}$.

2. Adja meg az értékelés definícióját!

Definíció

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy **elsőrendű nyelv**, $\langle U, \rho \rangle$ pedig a nyelv egy **interpretációja**. Az $\langle U, \rho \rangle$ interpretációra támaszkodó v értékelésen egy olyan függvényt értünk, amely teljesíti a következőket:

1. $Dom(v) = Var$;
2. Ha $x \in Var$, akkor $v(x) \in U$.

3. Adja meg a módosított értékelés definícióját!

Definíció (A módosított értékelés fogalma)

Legyen v egy tetszőleges $\langle U, \rho \rangle$ interpretációra támaszkodó értékelés, $x \in Var$ egy változó és $u \in U$ egy objektum. Ekkor bármely $y \in Var$ esetén

$$v[x : u](y) = \begin{cases} u, & \text{ha } y = x; \\ v(y), & \text{egyébként.} \end{cases}$$

4. Ismertesse az elsőrendű szemantikai szabályokat!
5. Ismertesse az elsőrendű atomi formulákra vonatkozó szemantikai szabályokat! (Lásd az elsőrendű szemantikai szabályok 4., 5. és 6. pontját!)
6. Adja meg az univerzális kvantor szemantikai szabályát! (Lásd az elsőrendű szemantikai szabályok 9. pontját!)
7. Adja meg az egzisztenciális kvantor szemantikai szabályát! (Lásd az elsőrendű szemantikai szabályok 9. pontját!)

Definíció

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy **elsőrendű nyelv**, $\langle U, \varrho \rangle$ a nyelv egy **interpretációja**, v pedig az $\langle U, \varrho \rangle$ interpretációra támaszkodó értékelés.

1. Ha $a \in \mathcal{F}(0)$, akkor $|a|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = \varrho(a)$.

2. Ha $x \in Var$, akkor $|x|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = v(x)$.

3. Ha $f \in \mathcal{F}(n)$, ($n = 1, 2, \dots$), és $t_1, t_2, \dots, t_n \in Term$, akkor

$$|f(t_1, t_2, \dots, t_n)|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = \varrho(f)(|t_1|_v^{\langle U, \varrho \rangle}, |t_2|_v^{\langle U, \varrho \rangle}, \dots, |t_n|_v^{\langle U, \varrho \rangle})$$

4. Ha $p \in \mathcal{P}(0)$, akkor $|p|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = \varrho(p)$

5. Ha $t_1, t_2 \in Term$, akkor

$$|(t_1 = t_2)|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = \begin{cases} 1, & \text{ha } |t_1|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = |t_2|_v^{\langle U, \varrho \rangle} \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

6. Ha $P \in \mathcal{P}(n) \setminus (n \neq 0)$, $t_1, \dots, t_n \in Term$, akkor

$$|P(t_1, \dots, t_n)|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = \begin{cases} 1, & \text{ha } \langle |t_1|_v^{\langle U, \varrho \rangle}, \dots, |t_n|_v^{\langle U, \varrho \rangle} \rangle \in \varrho(P); \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

7. Ha $A \in Form$, akkor $|\neg A|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = 1 - |A|_v^{\langle U, \varrho \rangle}$.

8. Ha $A, B \in Form$, akkor

$$|(A \supset B)|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = \begin{cases} 0 & \text{ha } |A|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = 1, \text{ és } |B|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = 0; \\ 1, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

$$|(A \wedge B)|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = \begin{cases} 1 & \text{ha } |A|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = 1, \text{ és } |B|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = 1; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

$$|(A \vee B)|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = \begin{cases} 0 & \text{ha } |A|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = 0, \text{ és } |B|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = 0; \\ 1, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

$$|(A \equiv B)|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = \begin{cases} 1 & \text{ha } |A|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = |B|_v^{\langle U, \varrho \rangle}; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

9. Ha $A \in Form$, $x \in Var$, akkor

$$|\forall x A|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = \begin{cases} 0, & \text{ha van olyan } u \in U, \text{ hogy } |A|_{v[x:u]}^{\langle U, \varrho \rangle} = 0; \\ 1, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

$$|\exists x A|_v^{\langle U, \varrho \rangle} = \begin{cases} 1, & \text{ha van olyan } u \in U, \text{ hogy } |A|_{v[x:u]}^{\langle U, \varrho \rangle} = 1; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

8. Mondja ki az elsőrendű szemantika alaptételeit!

Tétel

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy **elsőrendű nyelv**, $A \in Form$ egy formula, $\langle U, \rho \rangle$ egy **elsőrendű interpretáció** és v egy $\langle U, \rho \rangle$ interpretációra támaszkodó **értékelés**.

Ekkor az $|A|_v^{\langle U, \rho \rangle}$ érték egyértelműen meghatározott.

Tétel

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy **elsőrendű nyelv**, $A \in Form$ egy formula, $\langle U, \rho \rangle$ egy **elsőrendű interpretáció** és v_1, v_2 két $\langle U, \rho \rangle$ interpretációra támaszkodó **értékelés**.

Ha minden $x \in FreeVar(A)$ esetén $v_1(x) = v_2(x)$, akkor

$$|A|_{v_1}^{\langle U, \rho \rangle} = |A|_{v_2}^{\langle U, \rho \rangle}$$