

Elméleti kérdések (természetes levezetés)

1. Adja meg a szekvencia definícióját!

Definíció

Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ egy **nulladrendű nyelv**, $\Gamma \subset Form$ egy formulahalmaz és $A \in Form$ egy formula.

Ha az A formula szintaktikai következménye a Γ formulahalmaznak, akkor a ' $\Gamma \vdash A$ ' jelsorozatot szekvenciának nevezzük.

2. Adja meg és értelmezze a természetes levezetés azonosság szabályát!

$$\frac{\varepsilon}{\Gamma, A \vdash A}$$

3. Adja meg és értelmezze a természetes levezetés bővítés szabályát!

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, B \vdash A}$$

4. Adja meg és értelmezze a természetes levezetés szűkítés szabályát!

$$\frac{\Gamma, B, B, \Delta \vdash A}{\Gamma, B, \Delta \vdash A}$$

5. Adja meg és értelmezze a természetes levezetés felcserélés szabályát!

$$\frac{\Gamma, B, C, \Delta \vdash A}{\Gamma, C, B, \Delta \vdash A}$$

6. Adja meg és értelmezze a természetes levezetés metszet szabályát!

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Delta, A \vdash B}{\Gamma, \Delta \vdash B}$$

7. Adja meg a természetes levezetés implikációra vonatkozó szabályait!

Definíció (bevezető szabály)

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \supset B}$$

Definíció (alkalmazó szabály)

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash A \supset B}{\Gamma \vdash B}$$

8. Adja meg a természetes levezetés negációra vonatkozó szabályait!

Definíció (bevezető szabály)

$$\frac{\Gamma, A \vdash B \quad \Gamma, A \vdash \neg B}{\Gamma \vdash \neg A}$$

Definíció (alkalmazó szabály)

$$\frac{\Gamma \vdash \neg \neg A}{\Gamma \vdash A}$$

9. Adja meg a természetes levezetés konjunkcióra vonatkozó szabályait!

Definíció (bevezető szabály)

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}$$

Definíció (alkalmazó szabály)

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash C}{\Gamma, A \wedge B \vdash C}$$

10. Adja meg a természetes levezetés diszjunkcióra vonatkozó szabályait!

Definíció (bevezető szabályok)

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} \quad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}$$

Definíció (alkalmazó szabály)

$$\frac{\Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \vee B \vdash C}$$

11. Adja meg a természetes levezetés (materiális) ekvivalenciára vonatkozó szabályait!

Definíció (bevezető szabály)

$$\frac{\Gamma, A \vdash B \quad \Gamma, B \vdash A}{\Gamma \vdash A \equiv B}$$

Definíció (alkalmazó szabályok)

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash A \equiv B}{\Gamma \vdash B} \quad \frac{\Gamma \vdash B \quad \Gamma \vdash A \equiv B}{\Gamma \vdash A}$$

12. Adja meg a természetes levezetés induktív definícióját!

Definíció

Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ egy **nulladrendű nyelv**, $\Gamma, \Delta \subseteq Form$ és $A, B, C \in Form$. A természetes levezetés által az $L^{(0)}$ nyelvben bizonyítható következményrelációk $PrND$ halmazát az alábbi induktív definíció adja meg:

- Bázis:
 - $\Gamma, A \vdash A \in PrND$ (az **azonosság szabálya**).
- Szabályok:
 - Strukturális szabályok:
 - Ha $\Gamma \vdash A \in PrND$, akkor $\Gamma, B \vdash A \in PrND$ (a **bővítés szabálya**).
 - Ha $\Gamma, B, B, \Delta \vdash A \in PrND$, akkor $\Gamma, B, \Delta \vdash A \in PrND$ (a **szűkítés szabálya**).
 - Ha $\Gamma, B, C, \Delta \vdash A \in PrND$, akkor $\Gamma, C, B, \Delta \vdash A \in PrND$ (a **felcserélés szabálya**).
 - Ha $\Gamma \vdash A \in PrND$ és $\Delta, A \vdash B \in PrND$, akkor $\Gamma \cup \Delta \vdash B \in PrND$ (a **metszet szabálya**).
 - Logikai szabályok:
 - Ha $\Gamma, A \vdash B \in PrND$, akkor $\Gamma \vdash (A \supset B) \in PrND$ (az **implikáció bevezető szabálya**).
 - Ha $\Gamma \vdash A \in PrND$ és $\Gamma \vdash (A \supset B) \in PrND$, akkor $\Gamma \vdash B \in PrND$ (az **implikáció alkalmazó szabálya**).
 - Ha $\Gamma, A \vdash B \in PrND$ és $\Gamma, A \vdash \neg B \in PrND$, akkor $\Gamma \vdash \neg A \in PrND$ (a **negáció bevezető szabálya**).
 - Ha $\Gamma \vdash \neg \neg A \in PrND$, akkor $\Gamma \vdash A \in PrND$ (a **negáció alkalmazó szabálya**).
 - Ha $\Gamma \vdash A \in PrND$ és $\Gamma \vdash B \in PrND$, akkor $\Gamma \vdash (A \wedge B) \in PrND$ (a **konjunkció bevezető szabálya**).
 - Ha $\Gamma, A, B \vdash C \in PrND$, akkor $\Gamma, (A \wedge B) \vdash C \in PrND$ (a **konjunkció alkalmazó szabálya**).
 - Ha $\Gamma \vdash A \in PrND$, akkor $\Gamma \vdash (A \vee B) \in PrND$ (a **diszjunkció bevezető szabálya**).
 - Ha $\Gamma \vdash B \in PrND$, akkor $\Gamma \vdash (A \vee B) \in PrND$ (a **diszjunkció bevezető szabálya**).
 - Ha $\Gamma, A \vdash C \in PrND$ és $\Gamma, B \vdash C \in PrND$, akkor $\Gamma, (A \vee B) \vdash C \in PrND$ (a **diszjunkció alkalmazó szabálya**).
 - Ha $\Gamma, A \vdash B \in PrND$ és $\Gamma, B \vdash A \in PrND$, akkor $\Gamma \vdash (A \equiv B) \in PrND$ (a **(materiális) ekvivalencia bevezető szabálya**).
 - Ha $\Gamma \vdash A \in PrND$ és $\Gamma \vdash (A \equiv B) \in PrND$, akkor $\Gamma \vdash B \in PrND$ (a **(materiális) ekvivalencia alkalmazó szabálya**).
 - Ha $\Gamma \vdash B \in PrND$ és $\Gamma \vdash (A \equiv B) \in PrND$, akkor $\Gamma \vdash A \in PrND$ (a **(materiális) ekvivalencia alkalmazó szabálya**).

13. Mondja ki a nulladrendű kalkulus és a természetes levezetés kapcsolatát feltáró tételt!

Tétel

Legyen $L^{(0)} = \langle LC, Con, Form \rangle$ egy **nulladrendű nyelv**, $\Gamma \subseteq Form$ és $A \in Form$.

$\Gamma \vdash A$ (azaz a Γ formulahalmaznak **szintaktikai következménye** az A formula) akkor és csak akkor, ha a $\Gamma \vdash A$ a **természetes levezetés által bizonyítható** következményreláció, azaz $\Gamma \vdash A \in PrND$.

14. Mondja ki a természetes levezetés kontrapozícióhoz kötődő segédtételeit!

$$\frac{\Gamma, \neg A \vdash \neg B}{\Gamma, B \vdash A}$$

$$\frac{\Gamma, \neg A \vdash B}{\Gamma, \neg B \vdash A}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \neg B}{\Gamma, B \vdash \neg A}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma, \neg B \vdash \neg A}$$