

Elméleti kérdések (elsőrendű szintaxis)

1. Adja meg az elsőrendű nyelv definícióját!
7. Adja meg az elsőrendű nyelv formuláinak értelmezését és definícióját! (Az elsőrendű nyelv definíciójának 6. pontj)

Definíció (klasszikus elsőrendű nyelv)

Klasszikus elsőrendű nyelven az

$$L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$$

rendezett ötöst értjük, ahol

1. $LC = \{\neg, \supset, \wedge, \vee, \equiv, =, \forall, \exists, (,)\}$ (a nyelv **logikai konstansainak** halmaza).
2. $Var = \{x_n \mid n = 0, 1, 2, \dots\}$ a nyelv **változóinak megszámlálhatóan végtelen** halmaza.
3. $Con = \bigcup_{n=0}^{\infty} (\mathcal{F}(n) \cup \mathcal{P}(n))$ a nyelv nemlogikai konstansainak legfeljebb **megszámlálhatóan végtelen** halmaza.
 - a. $\mathcal{F}(0)$ a névparaméterek (névkonstansok),
 - b. $\mathcal{F}(n)$ az n argumentumú ($n = 1, 2, \dots$) függvényjelek (műveleti jelek),
 - c. $\mathcal{P}(0)$ az állításparaméterek (állításkonstansok),
 - d. $\mathcal{P}(n)$ az n argumentumú ($n = 1, 2, \dots$) predikátumparaméterek (predikátumkonstansok) halmaza.
4. Az $LC, Var, \mathcal{F}(n), \mathcal{P}(n)$ halmazok ($n = 0, 1, 2, \dots$) páronként diszjunktak.
5. A nyelv **terminusainak** a halmazát, azaz a $Term$ halmazt az alábbi induktív definíció adja meg:
 - a. $Var \cup \mathcal{F}(0) \subseteq Term$
 - b. Ha $f \in \mathcal{F}(n)$, ($n = 1, 2, \dots$), és $t_1, t_2, \dots, t_n \in Term$, akkor $f(t_1, t_2, \dots, t_n) \in Term$.
6. A nyelv formuláinak a halmazát, azaz a $Form$ halmazt az alábbi **induktív definíció** adja meg:
 - a. $\mathcal{P}(0) \subseteq Form$
 - b. Ha $t_1, t_2 \in Term$, akkor $(t_1 = t_2) \in Form$
 - c. Ha $P \in \mathcal{P}(n)$, ($n = 1, 2, \dots$), és $t_1, t_2, \dots, t_n \in Term$, akkor $P(t_1, t_2, \dots, t_n) \in Form$.
 - d. Ha $A \in Form$, akkor $\neg A \in Form$.
 - e. Ha $A, B \in Form$, akkor $(A \supset B), (A \wedge B), (A \vee B), (A \equiv B) \in Form$.
 - f. Ha $x \in Var, A \in Form$, akkor $\forall x A, \exists x A \in Form$.

2. Adja meg az elsőrendű nyelv változóinak értelmezését és definícióját!

Értelmezés

A köznyelvi mondatokban nevek helyett néha névmásokkal utalunk egyes individuumokra (objektumokra). A tudományos nyelvben gyakran kívánatos analóg kifejezési formák megadása. A szabatosság, az egyértelműség és a tömörség érdekében ilyenkor mesterséges névmásokat vezetnek be, amelyeket **változóknak** neveznek.

3. Adja meg az elsőrendű nyelv terminusainak értelmezését és definícióját!
4. Mikor nevezünk egy terminust nyitottnak, illetve zárttnak?

Értelmezés

Összefoglalóan **terminusnak** vagy röviden **termnek** nevezzük azokat a kifejezéseket, amelyekkel egyes individuumokra (objektumokra) utalunk. A terminusok a nevek logikai megfelelői.

Az elsőrendű logikában a terminusoknak három különböző fajtája szerepel:

- névparaméter: a tulajdonnevek megfelelői, azaz egy adott kontextusban mindig ugyanazt az individuumot (objektumot) jelölik. Logikai szempontból a például a számnemek ($1, 2, \dots, \pi, \dots$) tulajdonneveknek minősülnek.
 - Jelölés: a, b, c és ezek indexezett változatai.
- változó: kontextuális jelölő (a kontextus határozza meg, hogy mely objektumot jelöli), a névmások logikai megfelelője.
 - Jelölés: x, y, z és ezek indexezett változatai.
- összetett név: a függvényjelek (műveleti jelek) alkalmazása során létrejött nevek. Pl.: $2+3, x-5$.
 - Jelölés: t és ennek indexezett változatai.

5. Adja meg az elsőrendű nyelv atomi formuláinak definícióját!
6. Mit értünk elsőrendű prímformulán?

Definíció

Ha $L^{(1)}$ egy elsőrendű nyelv (azaz $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$), akkor az elsőrendű atomi formulák halmazát (jelölés: $AtForm$) az alábbi induktív definíció adja meg:

1. $\mathcal{P}(0) \subseteq AtForm$
2. Ha $t_1, t_2 \in Term$, akkor $(t_1 = t_2) \in AtForm$
3. Ha $P \in \mathcal{P}(n)$, ($n = 1, 2, \dots$), és $t_1, t_2, \dots, t_n \in Term$, akkor $P(t_1, t_2, \dots, t_n) \in AtForm$.

8. Adja meg az elsőrendű nyelv egy A formula részformulái halmazának, az $RF(A)$ halmaznak a definícióját!

Definíció (részformula az elsőrendű nyelvben)

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy tetszőleges **elsőrendű nyelv**, $A \in Form$ pedig a nyelv tetszőleges formulája. Az A formula részformuláinak halmaza az a legszűkebb halmaz [jelölés: $RF(A)$], amelyre teljesül, hogy

1. $A \in RF(A)$, azaz az A formula részformulája önmagának;
2. ha $\neg B \in RF(A)$, akkor $B \in RF(A)$;
3. ha $(B \supset C) \in RF(A)$, akkor $B, C \in RF(A)$;
4. ha $(B \wedge C) \in RF(A)$, akkor $B, C \in RF(A)$;
5. ha $(B \vee C) \in RF(A)$, akkor $B, C \in RF(A)$;
6. ha $(B \equiv C) \in RF(A)$, akkor $B, C \in RF(A)$;
7. ha $\forall x B \in RF(A)$, akkor $B \in RF(A)$;
8. ha $\exists x B \in RF(A)$, akkor $B \in RF(A)$.

9. Mit értünk az elsőrendű nyelv egy formulájának közvetlen részformuláján?

Definíció (közvetlen részformula az elsőrendű nyelvben)

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy tetszőleges elsőrendű nyelv.

1. Ha A **elsőrendű atomi formula**, akkor nincs közvetlen részformulája;
2. $\neg A$ egyetlen közvetlen részformulája A ;
3. Az $(A \supset B)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \equiv B)$ formulák közvetlen részformulái az A és a B formulák.
4. $\forall x A$ egyetlen közvetlen részformulája A ;
5. $\exists x A$ egyetlen közvetlen részformulája A .

10. Adja meg az elsőrendű nyelvben egy formula részformuláinak definícióját a közvetlen részformula fogalmának felhasználásával!

Definíció (részformula definíciója közvetlen részformulák segítségével elsőrendű nyelv esetén)

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy tetszőleges elsőrendű nyelv, $A \in Form$ pedig a nyelv tetszőleges formulája. Egy A formula részformuláinak halmaza az a legszűkebb halmaz [jelölés: $RF(A)$], amelyre teljesül, hogy

1. $A \in RF(A)$, (azaz az A formula részformulája önmagának);
2. ha $A' \in RF(A)$ és B közvetlen részformulája A' -nek, akkor $B \in RF(A)$ (azaz, ha egy A' formula részformulája A -nak, akkor A' összes közvetlen részformulája is részformulája A -nak).

11. Adja meg a szerkezeti fa definícióját az elsőrendű nyelvben!

Definíció (szerkezeti fa elsőrendű nyelv esetén)

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy tetszőleges elsőrendű nyelv, $A \in Form$ pedig a nyelv tetszőleges formulája. Az A formula szerkezeti fáján egy olyan véges rendezett fát értünk, amelynek csúcsai formulák,

1. gyökere az A formula,
2. $\neg B$ alakú csúcsának egyetlen gyermeke a B formula,
3. $(B \supset C)$, $(B \wedge C)$, $(B \vee C)$, $(B \equiv C)$ alakú csúcsainak két gyermekét a B , illetve a C formulák alkotják,
4. $\forall x B$ alakú csúcsának egyetlen gyermeke a B formula,
5. $\exists x B$ alakú csúcsának egyetlen gyermeke a B formula,
6. levelei prímmformulák (atomi formulák).

12. Hogyan definiáljuk egy formula szabad változóinak halmazát, azaz az A formula esetén a $FreeVar(A)$ halmazt?

Definíció

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy elsőrendű nyelv, és $A \in Form$ egy formula.

Az A formula szabad változóinak $FreeVar(A)$ -val jelölt halmazát az alábbi induktív definíció adja meg:

1. Ha A atomi formula (azaz $A \in AtForm$), akkor a $FreeVar(A)$ halmaz elemei az A formulában előforduló változók.
2. Ha az A formula $\neg B$ alakú, akkor $FreeVar(A) = FreeVar(B)$.
3. Ha az A formula $(B \supset C)$, $(B \wedge C)$, $(B \vee C)$ vagy $(B \equiv C)$ alakú, akkor $FreeVar(A) = FreeVar(B) \cup FreeVar(C)$.
4. Ha az A formula $\forall x B$ vagy $\exists x B$ alakú, akkor $FreeVar(A) = FreeVar(B) \setminus \{x\}$.

13. Hogyan definiáljuk egy formula kötött változóinak halmazát, azaz az A formula esetén a $BoundVar(A)$ halmazt?

Definíció

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy elsőrendű nyelv, és $A \in Form$ egy formula.

Az A formula kötött változóinak $BoundVar(A)$ -val jelölt halmazát az alábbi induktív definíció adja meg:

1. Ha A atomi formula (azaz $A \in AtForm$), akkor a $BoundVar(A) = \emptyset$.
2. Ha az A formula $\neg B$ alakú, akkor $BoundVar(A) = BoundVar(B)$.
3. Ha az A formula $(B \supset C)$, $(B \wedge C)$, $(B \vee C)$ vagy $(B \equiv C)$ alakú, akkor $BoundVar(A) = BoundVar(B) \cup BoundVar(C)$.
4. Ha az A formula $\forall x B$ vagy $\exists x B$ alakú, akkor $BoundVar(A) = BoundVar(B) \cup \{x\}$.

14. Mikor nevezzük az A formulában az x változó valamely előfordulását szabadnak?

Definíció

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy elsőrendű nyelv, $A \in Form$ egy formula és $x \in Var$ egy változó.

Az x változó valamely A -beli előfordulását szabadnak nevezzük, ha a tekintett előfordulás nem esik az A formula valamely $\forall x B$ vagy $\exists x B$ alakú részformulájába.

15. Mikor nevezzük az A formulában az x változó valamely előfordulását kötöttnek?

Definíció

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy elsőrendű nyelv, $A \in Form$ egy formula és $x \in Var$ egy változó.

Az x változó valamely A -beli előfordulását kötöttnek nevezzük, ha a tekintett előfordulás nem szabad előfordulás.

16. Mikor nevezzük az elsőrendű nyelv A formuláját nyíltnek?

Definíció

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy elsőrendű nyelv, és $A \in Form$ egy formula.

Ha $FreeVar(A) \neq \emptyset$, akkor az A formulát nyílt formulának nevezzük.

17. Mikor nevezzük az elsőrendű nyelv A formuláját zártnak?

Definíció

Legyen $L^{(1)} = \langle LC, Var, Con, Term, Form \rangle$ egy **elsőrendű nyelv**, és $A \in Form$ egy formula.
Ha az A formula nem nyílt, akkor zárt formulának nevezzük.

18. Ismertesse az elsőrendű nyelv esetén alkalmazott zárójelelhagyási konvenciókat!

Az elsőrendű logikában alkalmazott zárójelelhagyási konvenciók a nulladrendű logikában alkalmazott **zárójelelhagyási konvenciók** kibővítése az alábbi szabályokkal:

- a kvantorok erősebbek bármely állításlogikai műveletnél,
- az univerzális és az egzisztenciális kvantor egyenrangú (azaz erősségben egyik sem előzi meg a másikat).