Lajkó Károly

Analízis II.

harmadik, javított kiadás

Debreceni Egyetem
Matematikai és Informatikai Intézet
2003

lajko@math.klte.hu

Amennyiben hibát talál a jegyzetben, kérjük jelezze a szerzőnek!

A jegyzet dvi, pdf és ps formátumban letölthető a következő címről:

http://riesz.math.klte.hu/~lajko/jegyzet.html

Ez a jegyzet AMS-TEX-ben készült

Szedés és tördelés: Kovács László

TARTALOMJEGYZÉK

I. DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS

1. Valós függvények differenciálhányadosa

1. Definíció. Legyen $\langle a, b\rangle$ egy nyílt vagy zárt intervallum, $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ valós függvény. A

$$\varphi(x, x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad (x \neq x_0,\ x, x_0 \in \langle a, b\rangle) \tag{1}$$

által definiált φ függvényt az f függvény x, x_0-hoz tartozó differenciahányados függvényének nevezzük.
Geometriailag: iránytangens.

2. Definíció. Az $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható az $x_0 \in \langle a, b\rangle$ pontban, ha létezik a

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \tag{2}$$

(véges) határérték. Ezt – az $f'(x_0)$-lal jelölt – határértéket az f függvény x_0-beli differenciálhányadosának nevezzük.

3. Definíció. Ha f az $\langle a, b\rangle$ minden pontjában differenciálható, akkor azt mondjuk, hogy differenciálható $\langle a, b\rangle$-n.
A (2) szerint definiált $f' : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ függvényt az f függvény differenciálhányados függvényének nevezzük.

Megjegyzések:

1. A differenciálhatóság definiálható $f : D \to \mathbb{R}$ típusú függvényekre is, ahol $D \subset \mathbb{R}$ nyílt halmaz (vagy tetszőleges és x_0 belső pontja vagy torlódási pontja).

2. Más jelölések: $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$, $\left.\dfrac{df}{dx}\right|_{x = x_0}$.

3. Geometriai interpretáció:
Definíció. Ha az $f : \langle a, b\rangle \to R$ függvény differenciálható az x_0 pontban, akkor az

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0) \qquad (x \in \mathbb{R}) \tag{3}$$

egyenest az f függvény $(x_0, f(x_0))$-beli érintőjének nevezzük.
($f'(x_0)$ így az $(x_0, f(x_0))$ pontbeli érintő iránytangense.)

4. Egyoldali differenciálhányados is értelmezhető, ha a (2)-ben jobb-, illetve baloldali határértéket tekintünk. (Jelölés: $f'_+(x_0)$, $f'_-(x_0)$.) Továbbá bizonyítható, hogy f akkor és csakis akkor differenciálható $x_0 \in (a, b)$-ben, ha létezik $f'_+(x_0)$, $f'_-(x_0)$ és egyenlőek.

5. $f(x) = |x|$ $(x \in \mathbb{R})$ nem differenciálható $x_0 = 0$-ban.

6. *Fizikai jelentés:* átlagsebesség, pillanatnyi sebesség, gyorsulás.

7. Példák:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = c \implies \exists\ f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f'(x) = 0;$$

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x \implies \exists\ f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f'(x) = 1;$$

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^n \implies \exists\ f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f'(x) = n \cdot x^{n-1} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

2. Differenciálhatóság és folytonosság

Tétel. *Ha az $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható az $x_0 \in \langle a, b\rangle$ pontban, akkor folytonos is x_0-ban.*

Bizonyítás. x_0 torlódási pontja $\langle a, b\rangle$-nek, így elegendő megmutatni, hogy $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ és $= f(x_0)$.

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = \lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0)\right] =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} (x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0$$

igaz, ami adja, hogy $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ és ezt kellett bizonyítani.

3. Differenciálhatóság és lineáris approximálhatóság

Definíció. Az $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ függvényt lineárisan approximálhatónak mondjuk az $x_0 \in \langle a, b\rangle$ pontban, ha létezik olyan $A \in \mathbb{R}$ konstans és

$\omega : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ függvény, hogy $\lim\limits_{x\to x_0} \omega(x) = \omega(x_0) = 0$ és

$$(L) \qquad f(x) - f(x_0) = A \cdot (x - x_0) + \omega(x) \cdot (x - x_0) \qquad (x \in \langle a, b\rangle)$$

teljesül.

Tétel. *Az $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ függvény akkor, és csakis akkor differenciálható az $x_0 \in \langle a, b\rangle$ pontban, ha lineárisan approximálható. Továbbá $A = f'(x_0)$.*

Bizonyítás.

a) $(\Rightarrow)$ Ha f differenciálható x_0-ban, akkor legyen

$$\omega(x) \doteq \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0), & x \in \langle a, b\rangle\setminus\{x_0\} \\ 0, & x = x_0 \end{cases} .$$

Nyilvánvaló, hogy $\lim\limits_{x\to x_0} \omega(x) = \omega(x_0) = 0$ és $A = f'(x_0)$-lal kapjuk (L)-t is, azaz f lineárisan approximálható.

b) $(\Leftarrow)$ Ha f lineárisan approximálható x_0-ban, akkor (L)-ből jön, hogy

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A + \omega(x) \qquad (x \in \langle a, b\rangle\setminus\{x_0\})$$

így $\lim\limits_{x\to x_0} \omega(x) = 0$ adja f differenciálhatóságát és hogy $f'(x_0) = A$ is teljesül.

4. Differenciálhatóság és műveletek

1. Tétel. *Ha az $f, g : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ függvények differenciálhatók az $x_0 \in \langle a, b\rangle$-ben, akkor az $f + g$, $f \cdot g$ és $g(x_0) \neq 0$ esetén az $\dfrac{f}{g}$ is differenciálhatók x_0-ban és*

a) $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$;

b) $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$;

c) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}$.

Bizonyítás.

a) Az állítás az

$$\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

egyenlőségből, $f'(x_0)$ és $g'(x_0)$ létezése miatt, az $x \to x_0$ határátmenettel következik.

b) Az

$$\frac{(f\cdot g)(x)-(f\cdot g)(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot g(x)+f(x_0)\cdot\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

egyenlőség, $f'(x_0)$ és $g'(x_0)$ létezése – határátmenettel – adja az állítást. (Felhasználjuk azt is, hogy g folytonos x_0-ban.)

c) A bizonyítás hasonló az előbbiekhez.

Következmények:

1. Ha $f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ differenciálható x_0-ban, $c \in \mathbb{R}$, akkor $c \cdot f$ is differenciálható, és

$$(cf)'(x_0) = c \cdot f'(x_0).$$

2. Ha $f, g : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ differenciálhatók x_0-ban, akkor $f-g$ is, és

$$(f-g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0).$$

3. Ha $f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ olyan, hogy $f(x_0) \neq 0$, és $\exists\ f'(x_0)$, akkor

$$\exists\ \left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{f^2(x_0)}.$$

4. Ha az $f_i : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ $(i = 1,\ldots,n)$ függvények differenciálhatók $x_0 \in \langle a,b\rangle$-ben, $\lambda_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1,\ldots,n)$, akkor $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot f_i$ is differenciálható x_0-ban, és

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot f_i\right)'(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot f_i'(x_0).$$

5. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k$ $(a_k \in \mathbb{R})$ függvény differenciálható, és

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{n} k \cdot a_k \cdot x^{k-1}.$$

6. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ ($P_n(x)$, $Q_m(x)$ polinom függvények és $Q_m(x) \neq 0$) differenciálható függvény.

2. Tétel (az összetett függvény differenciálhatósága).
Legyenek $g : \langle c, d\rangle \to \mathbb{R}$, $f : \langle a, b\rangle = g[\langle c, d\rangle] \to \mathbb{R}$ olyan függvények, hogy g differenciálható az $x_0 \in \langle c, d\rangle$-ben, f differenciálható az $y_0 = g(x_0) \in \langle a, b\rangle$-ben. Akkor az $F = f \circ g$ függvény is differenciálható x_0-ban és

$$\text{(ÖD)} \qquad F'(x_0) = (f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy $f \circ g$ lineárisan approximálható x_0-ban.
– $\exists\ g'(x_0) \implies g$ lineárisan approximálható $\implies \exists\ \omega_1 : \langle c, d\rangle \to \mathbb{R}$, hogy $\lim\limits_{x \to x_0} \omega_1(x) = \omega_1(x_0) = 0$ és

$$(\mathrm{L}_1)\ \ g(x) - g(x_0) = g'(x_0) \cdot (x - x_0) + \omega_1(x) \cdot (x - x_0) \qquad (x \in \langle c, d\rangle).$$

– $\exists\ f'(y_0) = f'(g(x_0)) \implies f$ lineárisan approximálható $\implies$
$\exists\ \omega_2 : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, hogy $\lim\limits_{y \to y_0} \omega_2(y) = \omega_2(y_0) = 0$ és

$$(\mathrm{L}_2)\ \ f(y) - f(y_0) = f'(y_0) \cdot (y - y_0) + \omega_2(y) \cdot (y - y_0) \qquad (y \in \langle a, b\rangle).$$

– Ha $x \in \langle c, d\rangle$-re $y \doteq g(x)$, akkor (L_1) és (L_2) adja, hogy

$$\begin{aligned} F(x) - F(x_0) = f(g(x)) - f(g(x_0)) &= \\ &= [f'(g(x_0)) + \omega_2(y)] \cdot [g'(x_0) + \omega_1(x)](x - x_0) = \\ &= f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)(x - x_0) + [f'(g(x_0)) \cdot \omega_1(x) + \\ &+ \omega_2(g(x)) \cdot (g'(x_0) + \omega_1(x))](x - x_0). \end{aligned}$$

– $\omega(x) \doteq \begin{cases} f'(g(x_0))\omega_1(x) + \omega_2(g(x))[g'(x_0) + \omega_1(x)], & (x \in \langle c, d\rangle \setminus \{x_0\}) \\ 0, & x = x_0 \end{cases}$
választással ($\lim\limits_{x \to x_0} \omega_1(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to x_0} \omega_2(g(x)) = 0$ miatt) kapjuk, hogy $\lim\limits_{x \to x_0} \omega(x) = \omega(x_0) = 0$ és $A = f'(g(x_0))g'(x_0)$ mellett

$$F(x) - F(x_0) = A \cdot (x - x_0) + \omega(x) \cdot (x - x_0) \qquad (x \in \langle c, d\rangle),$$

ami F lineáris approximálhatóságát jelenti x_0-ban.
– Így $F = f \circ g$ differenciálható x_0-ban és teljesül (ÖD).

3. Tétel (az inverz függvény differenciálhatósága). *Ha $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ szigorúan monoton, folytonos $\langle a, b\rangle$-n és $x_0 \in \langle a, b\rangle$-ben $\exists f'(x_0) \neq 0$, akkor*

f^{-1} *differenciálható* $f(x_0)$*-ban és*

$$\text{(ID)} \qquad (f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)} \ ,$$

illetve

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} \qquad (y_0 = f(x_0)).$$

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy f^{-1} (ami nyilván létezik f szigorú monotonitása miatt) lineárisan approximálható $f(x_0) = y_0$-ban.

– $\exists\ f'(x_0) \implies f$ lineárisan approximálható $\implies \exists\ \omega_1 : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, hogy $\lim\limits_{x\to x_0} \omega_1(x) = \omega_1(x_0)$ és

$$\text{(L)} \qquad f(x) - f(x_0) = [f'(x_0) + \omega_1(x)] \cdot (x - x_0) \qquad (x \in \langle a, b\rangle).$$

– f szigorúan monoton, így $f(x) \neq f(x_0)$, ha $x \neq x_0 \implies$ $f'(x_0) + \omega_1(x) \neq 0$ $(x \neq x_0)$, így (L)-ből

$$(*) \qquad x - x_0 = \frac{f(x) - f(x_0)}{f'(x_0) + \omega_1(x)} \qquad (x \in \langle a, b\rangle \setminus \{x_0\})$$

következik.

– f folytonos $\implies$ (a Bolzano-tétel miatt) $f[\langle a, b\rangle] = \langle c, d\rangle \subset \mathbb{R}$ és így $f^{-1} : \langle c, d\rangle \to \langle a, b\rangle$, ami ($f$ szigorú monotonitása miatt) adja, hogy $\forall\ y \in \langle c, d\rangle$-re $\exists$ pontosan egy $x \in \langle a, b\rangle$, hogy $f(x) = y$, illetve $x = f^{-1}(y)$. Továbbá ha $y_0 = f(x_0)$, ill. $x_0 = f^{-1}(y_0)$, úgy $y \neq y_0$ adja, hogy $x \neq x_0$. Mindezek alapján $(*)$-ból kapjuk, hogy

$$(**) \qquad f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0) = \frac{1}{f'(x_0) + \omega_1(f^{-1}(y))} \cdot (y - y_0)$$

következik, ha $y \in \langle c, d\rangle \setminus \{y_0\}$.

– Ha most

$$\omega_2(y) \doteq \begin{cases} \dfrac{1}{f'(x_0) + \omega_1(f^{-1}(y))} - \dfrac{1}{f'(x_0)} \ , & (y \neq y_0) \\ 0 \ , & (y = y_0) \end{cases}$$

akkor egyrészt f^{-1} folytonossága miatt $\lim\limits_{y\to y_0} \omega_2(y) = \omega_2(y_0) = 0$, másrészt $(**)$-ból kapjuk, hogy

$$f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0) = \left[\frac{1}{f'(x_0)} + \omega_2(y)\right] \cdot (y - y_0) \qquad (\, y \in \langle c, d\rangle \,) \ ,$$

melyek éppen f^{-1} lineáris approximálhatóságát jelentik $f(x_0) = y_0$-ban.
– Így f^{-1} differenciálható $f(x_0)$-ban és (ID) teljesül.

5. Hatványsorok differenciálhatósága

Tétel. *Legyen a* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ *hatványsor konvergencia sugara* ϱ, *akkor az*

$$f(x) \doteq \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n \ , \qquad x \in (-\varrho, \varrho) \tag{1}$$

szerint definiált $f : (-\varrho, \varrho) \to \mathbb{R}$ *függvény differenciálható és*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1} \ , \qquad x \in (-\varrho, \varrho) \tag{2}$$

teljesül.

Bizonyítás.

a) A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1}$ hatványsor konvergencia sugara is ϱ, mert a sor konvergencia tartományában

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1} = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^n$$

teljesül, így a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^n$ hatványsor konvergencia sugarát kell meghatározni, melyre

$$\varrho' = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|n \cdot a_n|}} = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}} = \varrho \ .$$

b) (1) differenciálható és (2) teljesül. Ehhez elég megmutatni, hogy

$$\lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right] = 0 \qquad \forall\ x_0 \in (-\varrho, \varrho) \ .$$

Felhasználva az (1) és (2) hatványsorok abszolút konvergenciáját $\forall\ x, x_0 \in (-\varrho, \varrho)$ esetén és hogy $\exists\ r > 0$, amire $|x_0| < r < \varrho$, így $|x| < r$ esetén:

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right| =$$

$$= \left| \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n - \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x_0^n}{x - x_0} - \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x_0^{n-1} \right| =$$

$$= \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \left[\frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} - n x_0^{n-1} \right] \right| =$$

$$= \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \left[x^{n-1} + x^{n-2} x_0 + x^{n-3} x_0^2 + \cdots + x x_0^{n-2} + x_0^{n-1} - n x_0^{n-1} \right] \right| \leq$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \cdot |x^{n-1} - x_0^{n-1} + x_0 \cdot (x^{n-2} - x_0^{n-2}) + \cdots + x_0^{n-1} \cdot (1-1)| =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \cdot |x - x_0| \left| \sum_{k=1}^{n-1} k \cdot x^{n-k-1} \cdot x_0^{k-1} \right| \leq$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \cdot |x - x_0| \cdot r^{n-2} \sum_{k=1}^{n-1} k = |x - x_0| \cdot \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \cdot \frac{n(n-1)}{2} \cdot r^{n-2} =$$

$$= s \cdot \frac{|x - x_0|}{2} \ ,$$

ahol s a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| \cdot n(n-1) \cdot r^{n-2}$ (egyébként konvergens) sor összege.
Ebből $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{s}{2} \cdot |x - x_0| = 0$ miatt jön az állítás.

6. Elemi függvények differenciálhatósága

1. Tétel. *Az* $\exp, \sin, \cos, \mathrm{sh}, \mathrm{ch}$ *függvények differenciálhatók és*

$$\exp' = \exp \ , \quad \sin' = \cos \ , \quad \cos' = -\sin \ , \quad \mathrm{sh}' = \mathrm{ch} \ , \quad \mathrm{ch}' = \mathrm{sh} \ .$$

Bizonyítás. A hatványsorok differenciálhatósági tétele adja a differenciálhatóságot és a derivált függvényeket is (a számolás egyszerű).

2. Tétel. *Az* $\exp_a$, $\log_a$, $\ln$, x^μ *függvények differenciálhatók és*

$$\text{a)} \qquad \exp_a'(x) = \exp_a(x) \cdot \ln a \qquad (x \in \mathbb{R}) \; ;$$

$$\text{b)} \qquad \log_a'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln a} \qquad (x \in \mathbb{R}_+) \; ;$$

$$\text{c)} \qquad \ln'(x) = \frac{1}{x} \qquad (x \in \mathbb{R}_+) \; ;$$

$$\text{d)} \qquad (x^\mu)' = \mu \cdot x^{\mu-1} \qquad (x \in \mathbb{R}_+) \; .$$

Bizonyítás.

a) Az $\exp_a(x) \doteq \exp(x \cdot \ln a)$ definíció, $\exp'(y) = \exp(y)$ és $(x \cdot \ln a)' = \ln a$, valamint az összetett függvény differenciálhatóságára vonatkozó tétel adja az állítást.

b) A $\log_a \doteq \exp_a^{-1}$ definíció, az $\exp_a$ függvény differenciálhatósága, szigorú monotonitása, az inverz függvény differenciálhatósági tétele alapján:

$$\log_a'(x) = \frac{1}{\exp_a'[\log_a(x)]} = \frac{1}{\exp_a[\log_a(x)] \cdot \ln a} = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

c) $a = e \Longrightarrow \log_e a = \ln e = 1 \Longrightarrow \ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.

d) Az $x^\mu \doteq \exp(\mu \cdot \ln x)$ definíció és az összetett függvény differenciálhatóságára vonatkozó tétel alapján

$$(x^\mu)' = [\exp(\mu \cdot \ln x)]' = \exp(\mu \cdot \ln x) \cdot \frac{\mu}{x} = x^\mu \cdot \frac{1}{x} \cdot \mu = \mu \cdot x^{\mu-1} \; .$$

7. A sin és cos függvény további tulajdonságai

1. Tétel.

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \qquad (x \in \mathbb{R}) \; ;$$

$$|\sin(x)| \le 1, \quad |\cos(x)| \le 1 \qquad (x \in \mathbb{R}) \; .$$

Bizonyítás. Gyakorlaton.

2. Tétel.

$$\cos(x) - \cos(y) = -2 \cdot \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \qquad (\forall\, x, y \in \mathbb{R}) \; ;$$

$$\sin(x) - \sin(y) = 2 \cdot \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \qquad (\forall\ x, y \in \mathbb{R}) \ .$$

Bizonyítás. Egyszerű az addíciós tételek alapján.

3. Tétel. *A* $[0,2]$ *intervallumban egyetlen* x *szám van,melyre* $\cos(x) = 0$.

Bizonyítás.

– A cos függvény szigorúan monoton csökkenő $[0,2]$-ben:
Legyen ugyanis $x_1 < x_2$ $(x_1, x_2 \in [0,2])$, akkor a 2. Tétel miatt

$$(*) \qquad \cos(x_1) - \cos(x_2) = -2 \cdot \sin\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right) = $$
$$= 2 \cdot \sin\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right) \ ,$$

másrészt

$$(\diamond) \ \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots = x\left(1 - \frac{x^2}{2\cdot 3}\right) + \frac{x^5}{5!}\left(1 - \frac{x^2}{6\cdot 7}\right) + \cdots > 0$$

ha $0 < x < \sqrt{6}$.
Mivel pedig $x_1 < x_2$; $x_1, x_2 \in [0,2] \implies \frac{x_1+x_2}{2}, \frac{x_2-x_1}{2} \in (0, \sqrt{6})$, így $(*)$ és $(\diamond)$ miatt $\cos(x_1) - \cos(x_2) > 0 \implies \cos(x_1) > \cos(x_2)$, ami adja a cos függvény monoton csökkenését $[0,2]$-n.

– A cos függvény folytonos, $\cos(0) = 1$ és

$$\cos(2) = 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} - \frac{2^6}{6!} + \frac{2^8}{8!} - \cdots < 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} = -\frac{1}{3} \ ,$$

mert

$$-\frac{2^{2k}}{2k!} + \frac{2^{2k+1}}{(2k+1)!} < 0 \ ,$$

így Bolzano tétele miatt $\exists\ x \in [0,2]$, hogy $\cos(x) = 0$ és a szigorú monotonitás miatt csak egy ilyen x van.

Definíció. Jelöljük π-vel (pi-vel) azt a valós számot, melyre $0 < \frac{\pi}{2} < 2$ és $\cos\frac{\pi}{2} = 0$.

4. Tétel.

$$\sin\frac{\pi}{2}=1\ ,\quad \cos\pi=-1\ ,\quad \sin\pi=0\ ,\quad \sin 2\pi=0\ ,\quad \cos 2\pi=1\ ;$$
$$\sin(x+2\pi)=\sin(x)\ ,\quad \cos(x+2\pi)=\cos(x)\qquad (x\in\mathbb{R}).$$

Bizonyítás. Gyakorlaton (pl. $\sin^2\frac{\pi}{2}+\cos^2\frac{\pi}{2}=1 \implies \sin\frac{\pi}{2}=1$).

5. Tétel. *A* sin *és* cos *függvény növekvő, illetve csökkenő a* $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, *illetve a* $[0,\pi]$ *intervallumokon.*

Bizonyítás. Gyakorlaton.

8. További elemi függvények

a) A tg és ctg függvények. A

$$\mathrm{tg}:\mathbb{R}\backslash\{(k+\frac{1}{2})\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}\to\mathbb{R}\ ,\qquad \mathrm{tg}(x)\doteq\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\ ;$$
$$\mathrm{ctg}:\mathbb{R}\backslash\{k\cdot\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}\to\mathbb{R}\ ,\qquad \mathrm{ctg}(x)\doteq\frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

szerint definiált függvényeket tangens, ill. cotangens függvényeknek nevezzük. Legfontosabb tulajdonságaikat gyakorlaton vizsgáljuk.

b) Az arcus függvények.

– Az $f:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R},\ f(x)=\sin(x)$ folytonos és szigorúan monoton növekedő függvény inverzét arcsin (arkusz-szinusz) függvénynek nevezzük. Ez folytonos, szigorúan monoton növekedő és $\arcsin:[-1,1]\to\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

– A $g:[0,\pi]\to\mathbb{R},\ g(x)=\cos(x)$ folytonos és szigorúan monoton csökkenő függvény inverze az arccos (arkusz-koszinusz) függvény, mely folytonos, szigorúan monoton csökkenő és $\arccos:[-1,1]\to[0,\pi]$.

– Az $F:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R},\ F(x)=\mathrm{tg}(x)$ folytonos és szigorúan monoton növekedő függvény inverzét arctg (arkusz-tangens) függvénynek nevezzük. Ez folytonos, szigorúan monoton növekedő és $\mathrm{arctg}:\mathbb{R}\to\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

– A $G : (0,\pi) \to \mathbb{R}$, $G(x) = \operatorname{ctg}(x)$ folytonos és szigorúan monoton csökkenő függvény inverzét arcctg (arkusz-cotangens) függvénynek nevezzük. Ez folytonos, szigorúan monoton csökkenő és
$\operatorname{arcctg} : \mathbb{R} \to (0,\pi)$.

Tétel. *A* tg, ctg, arcsin, arccos, arctg, arcctg *függvények differenciálhatók és*

$$\operatorname{tg}'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}, \qquad \operatorname{ctg}'(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)},$$

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (x \neq \pm 1), \qquad \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (x \neq \pm 1),$$

$$\operatorname{arctg}'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \qquad \operatorname{arcctg}'(x) = -\frac{1}{1+x^2}.$$

c) Értelmezhetők a $\operatorname{th} \doteq \dfrac{\operatorname{sh}}{\operatorname{ch}}$, $\operatorname{cth} \doteq \dfrac{\operatorname{ch}}{\operatorname{sh}}$ tangens-hiperbolikusz és cotangens-hiperbolikusz függvények, és vizsgálhatók tulajdonságaik.

d) sh, ch, th, cth inverzeiként értelmezzük az arsh, arch, arth, arcth area-függvényeket és vizsgálhatjuk tulajdonságaikat.

Megjegyzés: A th, cth és az area függvények differenciálási szabálya is egyszerűen bizonyítható (lásd gyakorlaton).

9. Magasabbrendű deriváltak

Definíció. Legyen $f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ adott függvény. f 0-dik deriváltja:
$f^{(0)} \doteq f$. Ha $n \in \mathbb{N}$ és $f^{(n-1)} : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ értelmezett és differenciálható függvény, akkor f n-edik deriváltja az $f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$ függvény.
Ha $\forall\ n \in \mathbb{N}$-re $\exists\ f^{(n)}$, akkor azt mondjuk, hogy f akárhányszor differenciálható.

1. Tétel. *Ha* $f, g : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ *n-szer differenciálható, akkor* $c \cdot f$, $f+g$, $f \cdot g$

is n-szer differenciálható és $\forall\ x \in \langle a, b\rangle$ esetén

$$(c \cdot f)^{(n)}(x) = c \cdot f^{(n)}(x)\ ;$$

$$(f+g)^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) + g^{(n)}(x)\ ;$$

$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f^{(i)}(x) \cdot g^{(n-i)}(x) \quad \textit{(Leibniz-szabály).}$$

Bizonyítás. Teljes indukcióval egyszerű.

2. Tétel. *Az $f(x) \doteq \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x^k$ $(x \in (-\varrho, \varrho))$ hatványsor összegfüggvénye akárhányszor differenciálható és*

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot (k-n+1) \cdot a_k \cdot x^{k-n} \qquad (x \in (-\varrho, \varrho)),$$

továbbá $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} \quad (n = 0, 1, \ldots)$.

Bizonyítás. A hatványsorok differenciálhatósági tétele alapján, teljes indukcióval, illetve $x = 0$ helyettesítéssel egyszerű.

10. Differenciálható függvények vizsgálata

a) A lokális szélsőérték szükséges feltétele.

Tétel. *Legyen $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$. Ha f-nek az $x_0 \in (a, b)$-ben lokális maximuma (minimuma) van és $\exists\ f'(x_0)$, akkor $f'(x_0) = 0$.*

Bizonyítás. Ha például f-nek x_0-ban lokális minimuma van, akkor $\exists\ K(x_0, \delta) \subset (a, b)$, hogy $f(x) - f(x_0) \geq 0$ $(x \in K(x_0, \delta))$, így

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \begin{cases} \leq 0\ , & \text{ha } x_0 - \delta < x < x_0 \\ \geq 0\ , & \text{ha } x_0 < x < x_0 + \delta \end{cases}.$$

Ezért

$$f'(x_0) = \left\{ \begin{aligned} f'_-(x_0) &= \lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \\ f'_+(x_0) &= \lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \end{aligned} \right\} \implies f'(x_0) = 0.$$

Megjegyzés: A feltétel általában nem elégséges, ahogy ezt például az $f(x) = x^3$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény az $x_0 = 0$-ban mutatja.

b) Középértéktételek

Tétel (Cauchy). *Ha az* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *függvények folytonosak* $[a, b]$*-n, differenciálhatóak* (a, b)*-n, akkor* $\exists\ x \in (a, b)$*, hogy*

(C–K) $$[f(b) - f(a)] \cdot g'(x) = [g(b) - g(a)] \cdot f'(x)\ .$$

Bizonyítás.
- A $h : [a, b] \to \mathbb{R},\ h(t) \doteq [f(b) - f(a)] \cdot g(t) - [g(b) - g(a)] \cdot f(t)$ függvény folytonos $[a, b]$-n, differenciálható (a, b)-n, $h(a) = h(b)$.
- h felveszi $[a, b]$-n szélsőértékeit, így $\exists\ u, v \in [a, b]$, hogy $h(v) \le h(x) \le h(u)$ $(x \in [a, b])$.
- $\{u, v\} = \{a, b\}$ esetén $h(a) = h(b)$ és az előbbi egyenlőtlenség adja, hogy $h(x) = c$, és így $h'(x) = 0$ $(x \in [a, b])$. Ez pedig h differenciálásával adja az állítást.
- Ha $\{u, v\} \ne \{a, b\}$, akkor u vagy $v \in (a, b) \implies h'(u) = 0$ vagy $h'(v) = 0$, ami $x = u$ vagy $x = v$ mellett h differenciálásával adja az állítást.

Következmények:

1. Tétel (Lagrange). *Legyen* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *folytonos* $[a, b]$*-n, differenciálható* (a, b)*-n, akkor* $\exists\ x \in (a, b)$*, hogy*

(L–K) $$f(b) - f(a) = f'(x)(b - a)\ .$$

Bizonyítás. Következik (C-K)-ból $g(x) = x$ választással.

2. Tétel (Rolle). *Legyen* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *folytonos* $[a, b]$*-n, differenciálható* (a, b)*-n,* $f(a) = f(b)$*, akkor* $\exists\ x \in (a, b)$*, hogy* $f'(x) = 0$.

Bizonyítás. Következik (L-K)-ból $f(a) = f(b)$ miatt.

3. Tétel. *Ha* $g'(x) \ne 0$ $(x \in (a, b)) \implies g(b) \ne g(a)$ *(hiszen egyébként* (C-K) *miatt* $\exists x \in (a, b),\ g'(x) = 0$*), ekkor* (C-K) *írható az* $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$ *alakban.*

4. Tétel (a monotonitás elegendő feltétele). *Ha $f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ differenciálható, akkor*

$$\begin{array}{ll} a) & f' \geq 0 \implies f \text{ monoton növekedő;} \\ b) & f' \leq 0 \implies f \text{ monoton csökkenő;} \\ c) & f' = 0 \implies f = c, \text{ azaz konstans.} \end{array}$$

Bizonyítás. A Lagrange-tétel segítségével.
Legyen $x_1, x_2 \in \langle a,b\rangle$ tetszőleges. Az f $[x_1,x_2]$-re való leszűkítése teljesíti a Lagrange-tétel feltételeit, így $\exists\, x \in (x_1,x_2)$, hogy

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) \cdot f'(x) \ ,$$

így bármely fenti $x_1,\ x_2$-re

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & f' \geq 0 \implies f(x_2) \geq f(x_1) \implies f \text{ monoton növekedő;} \\ \text{b)} & f' \leq 0 \implies f(x_2) \leq f(x_1) \implies f \text{ monoton csökkenő;} \\ \text{c)} & f' = 0 \implies f(x_2) = f(x_1) \implies f = c, \text{ azaz konstans.} \end{array}$$

5. Tétel (a monotonitás szükséges és elegendő feltétele). *Legyen $f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény, akkor*

a) *f monoton növekvő (csökkenő) $\langle a,b\rangle$-n $\iff$, ha $f' \geq 0$ $(f' \leq 0)$;*
b) *f szigorúan monoton növekvő (csökkenő) $\langle a,b\rangle$-n $\iff$, ha $f' \geq 0$ $(f' \leq 0)$ és $\nexists\, \langle c,d\rangle \subset \langle a,b\rangle$, hogy $f'(x) = 0$ $(x \in \langle c,d\rangle)$.*

Bizonyítás.

a) Az elégségesség jön a 4. tételből. A szükségességhez legyen például f növekvő és $x \in \langle a,b\rangle$ teszőleges, h olyan, hogy $x + h \in \langle a,b\rangle$, akkor

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0 \implies f' \geq 0 \ .$$

b) – *Elégségesség:* Ha például $f' \geq 0$, akkor a) miatt f növekvő. Tegyük fel, hogy nem szigorúan monoton növekvő, akkor $\exists\, x,y \in \langle a,b\rangle$, $x < y$, hogy $f(x) = f(y)$, de akkor (f monotonitása miatt) $f(t) = c$, ha $t \in [x,y] \subset \langle a,b\rangle$, ami ellentmondás.
   – *Szükségesség:* Ha például f szigorúan monoton növekvő akkor a) miatt $f' \geq 0$. Ha $\exists\, \langle c,d\rangle \subset \langle a,b\rangle$, hogy $f'(x) = 0$ $(x \in \langle c,d\rangle)$, akkor $f(x) = \text{const}$ $(x \in \langle c,d\rangle)$, így f nem szigorúan monoton növekvő, ami ellentmondás.

6. Tétel (a szélsőérték egy elégséges feltétele).
Legyen $f : (x_0 - r, x_0 + r) \to \mathbb{R}$ *differenciálható függvény és* $f'(x) = 0$. *Ha*

a) $f'(x) \geq 0 \quad (x \in (x_0 - r, x_0)), \qquad f'(x) \leq 0 \quad (x \in (x_0, x_0 + r)),$
akkor f*-nek* x_0*-ban lokális maximuma van;*

b) $f'(x) \leq 0 \quad (x \in (x_0 - r, x_0)), \qquad f'(x) \geq 0 \quad (x \in (x_0, x_0 + r)),$
akkor f*-nek* x_0*-ban lokális minimuma van.*

Bizonyítás. Az 5. Tétel miatt f növekedő (illetve csökkenő) az $(x_0 - r, x_0]$ (illetve $[x_0, x_0 + r)$) intervallumokon, így x_0-ban maximuma van.
A minimum hasonlóan bizonyítható.

c) Taylor-sorok, Taylor-polinom

Definíció. Legyen az $f : (p, q) \to \mathbb{R}$ függvény akárhányszor differenciálható. A

$$\text{(TS)} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (x - a)^k \qquad (x, a \in (p, q))$$

hatványsort az f függvény a-hoz tartozó Taylor-sorának, míg n-edik részletösszegét, a

$$\text{(TP)} \qquad T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (x - a)^k \qquad (x, a \in (p, q))$$

polinomot az f függvény a-hoz tartozó Taylor-polinomjának nevezzük.
Ha $0 \in (p, q)$, akkor az $a = 0$-hoz tartozó Taylor-sort f MacLaurin-sorának nevezzük.

Megjegyzések:

1. Minden konvergens hatványsor összegfüggvényének Taylor-sora (lásd: exp, sin, . . .)

2. Fontos kérdés: Mikor állítható elő egy függvény Taylor-sorával?

Tétel (Taylor). *Legyen* $f : K(a, r) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ *és* $\exists\, f^{(n)}$, *akkor* $\forall\, x \in K(a, r)$ *esetén* $\exists\, \xi(x) \in K(a, r) \setminus \{a\}$, *hogy*

$$\text{(T)} \qquad f(x) = T_{n-1}(x) + \frac{f^{(n)}(\xi(x))}{n!} \cdot (x - a)^n \qquad (x \in K(a, r))\ .$$

Bizonyítás.

– Nyilvánvaló, hogy $\forall\ x \in K(a,r)$ esetén $\exists\ M(x) \in \mathbb{R}$ (és így egy $M : K(a,r) \to \mathbb{R}$ függvény), hogy

$$\text{(T*)} \qquad f(x) = T_{n-1}(x) + M(x) \cdot \frac{(x-a)^n}{n!} \qquad (x \in K(a,r))\ .$$

– Elegendő megmutatni, hogy $\exists\ \xi(x) \in K(a,r) \backslash \{a\}$, hogy

$$\text{(M)} \qquad M(x) = f^{(n)}(\xi(x))$$

– Ehhez tekintsük azt a $g : K(a,r) \to \mathbb{R}$ függvényt, melyre

$$g(t) = f(x) - \Bigg[f(t) + f'(t)(x-t) + \cdots + $$
$$+ \frac{f^{(n-1)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} + M(x)\frac{(x-t)^n}{n!} \Bigg]$$

– g következő tulajdonságai nyilvánvalóak:
  $g(x) = 0,\ g(a) = 0$ (lásd (T*) is!),
  g folytonos $[a,x]$ vagy $[x,a]$-ban,
  g differenciálható (a,x) vagy (x,a)-ban.

– Így teljesülnek a Rolle-tétel feltételei, ami adja, hogy $\exists\ \xi(x) \in (a,x)$ vagy (x,a), hogy

$$g'(\xi(x)) = -\frac{f^{(n)}(\xi(x))}{(n-1)!}(x-\xi(x))^{n-1} + M(x)\frac{(x-\xi(x))^{n-1}}{(n-1)!} = 0\ .$$

Ez pedig adja (M)-et, és akkor (T*) (T)-t.

Megjegyzések:

1. $n = 1$-re a Taylor-tétel a Lagrange-tétel.

2. Az

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(\xi(x))}{n!} \cdot (x-a)^n \qquad (x \in K(a,r))$$

szerint definiált R_n függvény a Taylor-formula Lagrange-féle maradéktagja.

3. Ha $\exists\ M$, hogy $\forall\ x \in K(a,r),\ n \in \mathbb{N}$ esetén $|f^{(n)}(x)| \le M$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, ezért

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (x-a)^k \qquad (x \in K(a,r)),$$

így az f függvény Taylor-sorának összege.

4. Az

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) & , \ x \neq 0 \\ 0 & , \ x = 0 \end{cases}$$

függvényre $\exists\ f^{(n)}(0) = 0$ $(n \in \mathbb{N})$, így az f függvény 0-hoz tartozó Taylor-sorának összege a 0 függvény, ami nyilván $\neq f$.

5. A Taylor-tétel alapján becsülhető f és T_{n-1} eltérése, például:

$$\left|\sin(x) - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}\right)\right| =$$
$$= \left|\frac{\sin^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \cdot x^{2n}\right| \leq \frac{|x|^{2n}}{(2n)!} \ .$$

6. Az $\ln(1+x) = f(x)$ $(x \in (-1, \infty))$ függvényre például

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{(n-1)} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \cdot \frac{1}{(1+\xi)^{n+1}} \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} \ ,$$

amiből $x = 1$ választással és határátmenettel

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} + \cdots \ ,$$

ahol a jobboldal az ismert Leibniz-féle sor.

d) A szélsőérték általános feltétele

Tétel. *Ha* $f : K(a,r) \to \mathbb{R}$ $(k-1)$*-szer differenciálható* $(k \geq 2)$, $f'(a) = \cdots = f^{(k-1)}(a) = 0$ *és* $\exists\ f^{(k)}(a) \neq 0$, *akkor*

a) *ha* k *páratlan, úgy* $f(a)$ *nem szélsőérték;*

b) *ha* k *páros, úgy* $f(a)$ *szélsőérték, hogy*

- $f^{(k)}(a) > 0$ *esetén* $f(a)$ *szigorú lokális minimum,*
- $f^{(k)}(a) < 0$ *esetén* $f(a)$ *szigorú lokális maximum.*

Bizonyítás.

– A Taylor-tételt $n = k-1$ mellett, $f'(a) = \cdots = f^{(k-2)}(a) = 0$ felhasználásával felírva

$$f(x) - f(a) = \frac{f^{(k-1)}(\xi(x))}{(k-1)!} \cdot (x-a)^{(k-1)}$$

$(x \in K(a,r),\ \xi(x) \in (a,x)$ vagy $(x,a))$ következik.

– Ugyanakkor például $f^{(k)}(a) > 0$ – a jeltartási tétel miatt – adja, hogy $\exists\, K(a,\delta) \subset K(a,r)$, hogy

$$\frac{f^{(k-1)}(x) - f^{(k-1)}(a)}{x-a} > 0\ , \quad \text{ill.} \quad \frac{f^{(k-1)}(x)}{x-a} > 0 \qquad (x \in K(a,\delta))\ .$$

Ugyanígy $f^{(k)}(a) < 0$-ra pedig $\dfrac{f^{(k-1)}(x)}{x-a} < 0$ $(x \in K(a,\delta))$ következik.

– Az előbbieket felhasználva:

a) Ha k páratlan, akkor $K(a,\delta)$-n

$$\text{sign}[f(x) - f(a)] = \text{sign}\, \frac{f^{(k-1)}(\xi(x))}{x-a} \cdot \text{sign}(x-a)^k$$

nem állandó $\Longrightarrow$ $f(a)$ nem szélsőérték.

b) Ha k páros, úgy

$$\text{sign}[f(x) - f(a)] = \text{sign}\, \frac{f^{(k-1)}(\xi(x))}{x-a}$$

és így

$$f(x) - f(a) > 0\ (< 0), \text{ha } f^{(k)} > 0\ (< 0)\ K(a,\delta)\text{-n},$$

ami adja ekkor is az állítást.

e) Konvex függvények

1. Definíció. Az $f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ függvény konvex (konkáv) $\langle a,b\rangle$-n, ha $\forall\ x_1, x_2 \in \langle a,b\rangle$ és $\forall\ p,q \in [0,1],\ p+q = 1$ esetén

(K) $$f(p \cdot x_1 + q \cdot x_2) \le p \cdot f(x_1) + q \cdot f(x_2)$$

(illetve (K)-ban $\ge$) teljesül. f szigorúan konvex (konkáv), ha (K)-ban szigorú egyenlőtlenség van.

Megjegyzés: Ha (K)-ban $q \doteq \dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$, $p \doteq \dfrac{x_2-x}{x_2-x_1}$ $(x \in (x_1,x_2))$, akkor $p,q \in [0,1]$, $p+q=1$, $px_1+qx_2=x$, így

$$f(x) \le \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\cdot(x-x_1)+f(x_1) \qquad (x \in (x_1,x_2)), \tag{1}$$

vagy

$$f(x) \le \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\cdot(x-x_2)+f(x_2) \qquad (x \in (x_1,x_2)) \tag{2}$$

következik. Ez azt jelenti, hogy f gráfjának pontjai az $(x_1,f(x_1))$ és $(x_2,f(x_2))$ pontokon áthaladó szelő alatt vannak ($\forall\, x_1,x_2 \in \langle a,b\rangle$, $x_1<x_2$ esetén).

1. Tétel. *Az $f:\langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény $\Longleftrightarrow$ konvex, ha az $f':\langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ függvény monoton növekvő.*

Bizonyítás.

a) Ha f konvex, akkor (1) és (2) adja, hogy

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \le \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x},$$

ahonnan $x\to x_1$ ill. $x\to x_2$ határátmenettel jön, hogy $f'(x_2) \ge f'(x_1)$ $\forall x_1<x_2$ esetén, azaz f' monoton növekvő.

b) Ha f' monoton növekvő, akkor $\forall\ x_1<x<x_2$ esetén (a Lagrange-tétel miatt) $\exists\ z_1 \in (x_1,x)$, $z_2 \in (x,x_2)$, hogy

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} = f'(z_1) \le f'(z_2) = \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$$

melyből rövid számolással jön (2), azaz f konvex.

Megjegyzések:

1. Hasonló állítás igaz konkáv függvényekre is.

2. $f \iff$ szigorúan konvex, ha f' szigorúan monoton növekvő.

3. Ha $\exists\ f''$, úgy: $f \iff$ konvex (konkáv), ha $f'' \ge 0$ $(f'' \le 0)$.

2. Definíció. Az $f:\langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ függvénynek az $x \in (a,b)$ inflexiós helye, $(x,f(x))$ inflexiós pontja, ha $\exists\ r>0$, hogy f konvex (konkáv) $(x-r,x]$-en és konkáv (konvex) $[x,x+r)$-en.

2. Tétel. *Az $f : \langle a,b \rangle \to \mathbb{R}$ differenciálható függvénynek az $x \in (a,b)$ $\Longleftrightarrow$ inflexiós helye, ha szélsőértékhelye f'-nek.*

Bizonyítás.

a) Ha $x \in (a,b)$ inflexiós hely, akkor a definíció szerint $\exists\ r > 0$, hogy f konvex (konkáv) $(x-r,x]$-en, konkáv (konvex) $[x,x+r)$-en $\Longrightarrow$ f' monoton növekvő (csökkenő) $(x-r,x]$-en, csökkenő (növekvő) $[x,x+r)$-en $\Longrightarrow$ x szélsőértékhelye f'-nek.

b) Ha $x \in (a,b)$ szélsőértek helye f'-nek, akkor $\exists\ r > 0$, hogy f növekvő (csökkenő) $(x-r,x]$-en, csökkenő (növekvő) $[x,x+r)$-en $\Longrightarrow$ f konvex (konkáv) $(x-r,x]$-en, konkáv (konvex) $[x,x+r)$-en $\Longrightarrow$ x inflexiós helye f-nek.

f) L'Hospital-szabály

Alapprobléma:
Ha $f,g : K(a,r) \to \mathbb{R}$ adottak és $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, akkor létezik-e $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ és hogyan számítható ki? (Lehet egyoldali határérték is.)

Tétel (L'Hospital-szabály). *Legyenek $f,g : (a,a+r) \to \mathbb{R}$ differenciálható függvények, hogy $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, $g(x)\cdot g'(x) \neq 0$. Ha létezik a $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ határérték, akkor létezik a $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ határérték is, és a kettő egyenlő egymással.*

Bizonyítás. Az $f(a) = g(a) = 0$ definícióval f és g a-ban folytonos függvénynyé terjeszthető ki. Ha $x \in (a,a+r)$ tetszőleges, úgy f és g teljesíti az $[a,x]$-ben a Cauchy-tétel feltételeit, így $\exists\ y \in (a,x)$, hogy

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(y)}{g'(y)}$$

Ha $\langle x_n \rangle$ olyan sorozat, hogy $x_n \in (a,x)$, $x_n \to a$, akkor $\exists\ \langle y_n \rangle$ $(a < y_n < x_n)$, hogy $y_n \to a$ és $\dfrac{f(x_n)}{g(x_n)} = \dfrac{f'(y_n)}{g'(y_n)}$, úgy $\lim\limits_{y_n\to a} \dfrac{f'(y_n)}{g'(y_n)}$ létezése miatt $\exists\ \lim\limits_{x_n\to a} \dfrac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim\limits_{y_n\to a} \dfrac{f'(y_n)}{g'(y_n)}$ ami adja az állítást.

Megjegyzések:

1. Hasonló igaz $(a-r,a)$-ra vagy $K(a,r)\backslash\{0\}$-n értelmezett függvények esetén.

2. Ha $f(a)=g(a)=0$; f,g differenciálhatók a-ban, és $g'(a)\neq 0$, akkor

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}\ .$$

3. Ha f és g értelmezési tartománya felülről, illetve alulról nem korlátos, akkor például

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{y\to 0+0}f\left(\frac{1}{y}\right),\quad \text{illetve}\quad \lim_{x\to-\infty}g(x)=\lim_{y\to 0-0}g\left(\frac{1}{y}\right)$$

miatt a L'Hospital-szabály végtelenben vett határértékre is megfogalmazható.

4. A L'Hospital szabály akkor is megfogalmazható, ha $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=+\infty$.

5. Ha $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=+\infty$, akkor az $f(x)\cdot g(x)=\dfrac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$ egyenlőség miatt alkalmazható a L'Hospital-szabály.

6. Például: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^n-1}{x}=n$ és $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{x}=1$ könnyen igazolható a L'Hospital szabály alkalmazásával.

1. feladatsor

1) Határozza meg az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ függvény x_0, x pontokhoz tartozó differenciahányadosát, ha $x_0 = 1$, $x = 1.1$, illetve ha $x_0 = -5$, $x = -5.1$.
2) Az egyenesvonalú mozgást végző pont mozgásegyenlete $s = 10t + 5t^2$. Határozza meg átlagsebességét a $20 \leq t \leq 20 + \Delta t$ időintervallumban, ha $\Delta t = 1$ vagy $\Delta t = 0.1$ vagy $\Delta t = 0.01$. Adja meg a $t = 20$-hoz tartozó pillanatnyi sebességet.
3) A definíció alapján határozza meg az alábbi függvények differenciálhányadosait:

$$\begin{aligned} &f_1(x) = x^n && (x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}), \\ &f_2(x) = \frac{1}{x} && (x \in \mathbb{R}_+), \\ &f_3(x) = \sqrt{x} && (x \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}), \\ &f_4(x) = \sqrt[3]{x} && (x \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

4) Számítsa ki $f'(1)$, $f'(2)$, $f'(3)$ értékét, ha

$$f(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3 \qquad (x \in \mathbb{R}_+).$$

5) Legyen

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , x \in \mathbb{Q} \\ 0 & , x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} . \end{cases}$$

Bizonyítsa be, hogy $\exists\ f'(0)$.
6) Igazolja, hogy ha $f(x) = x|x| \quad (x \in \mathbb{R})$, akkor $f'(x) = 2|x| \quad (x \in \mathbb{R})$.
7) Legyen

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & , x \in (-\infty, 1) \\ (1-x)(2-x) & , x \in [1, 2] \\ x - 2 & , x \in (2, \infty) . \end{cases}$$

Bizonyítsa be, hogy f differenciálható $\mathbb{R}$-en és határozza meg $f'(x)$-et.
8) Bizonyítsa be, hogy az

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin \dfrac{1}{x} & , x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

függvény differenciálható $x_0 = 0$-ban.

9) Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Bizonyítsa be, hogy ha f páratlan, akkor f' páros, illetve ha f páros, akkor f' páratlan.

10) Határozza meg az $f_1(x) = 3x - x^2 \quad (x \in \mathbb{R})$ függvény képét az $x_0 = 1$, míg az $f_2(x) = x^2 - 4$ függvény képét az $x_0 = 2$-ben érintő egyenest.

11) Ha $f + g$ vagy $f \cdot g$ differenciálható x_0-ban, akkor f az-e x_0-ban? Ha $f \circ g$ differenciálható x_0-ban, úgy $\exists$-e $g'(x_0)$?

12) Az alábbi f függvényeknél adja meg f'-t:

$f(x) = 2(3x^2 + 4)^4 \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad f(x) = \dfrac{2x}{1 - x^2} \quad (x \neq \pm 1),$

$f(x) = x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} \quad (x \in \mathbb{R}_+), \qquad f(x) = x\sqrt{1 + x^2} \quad (x \in \mathbb{R}),$

$f(x) = x^5 - \dfrac{3}{4}x^4 - 4x + 3 \quad (x \in \mathbb{R}),$

$f(x) = -x^7 + 2x^5 - \dfrac{3}{2x^2} - \dfrac{1}{x + 1} \qquad (x \neq 0,\ -1),$

$f(x) = x\sqrt{1 + x^2} \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} \quad (x \in \mathbb{R}_+),$

$f(x) = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} \quad (x \in \mathbb{R}_+), \qquad f(x) = \dfrac{x^3 + 3x^2 + 2}{2x^2 + 4} \quad (x \in \mathbb{R}),$

$f(x) = \sqrt{\dfrac{1 + x^2}{1 + x^4}} \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad f(x) = (a + b\sqrt{x})^4 \quad (x \in \mathbb{R}_+),$

$f(x) = \dfrac{1}{1 + \sqrt{x}} - \dfrac{1}{1 - \sqrt{x}} \quad (x > 0,\ x \neq 1),$

$f(x) = (1 + nx^m)(1 + mx^n) \quad (n, m \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}),$

$f(s) = (1 - 4s^2)(2s^3 + 1) \quad (s \in \mathbb{R}),$

$f(\varphi) = (2\varphi^3 - \sqrt[3]{3}\varphi + \varphi^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{3}} \quad (\varphi \in \mathbb{R}), \qquad f(x) = \dfrac{e^x + \sin x}{xe^x} \quad (x \neq 0),$

$f(x) = (\cos x^3)e^{\cos x \sin x} \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad f(x) = \sin(\cos \dfrac{1}{x^2}) \quad (x \neq 0),$

$f(x) = \ln(\sqrt{3x^2 + 2} + 2e^x + 1) \quad (x \in \mathbb{R}),$

$f(x) = a^{\cos x^2} \qquad (x \in \mathbb{R}), \qquad f(x) = \lg^3 x^2 \qquad (x \neq 0),$

$f(x) = \ln(\ln(\ln(x))) \qquad (x \in ?), \qquad f(x) = \ln|x| \qquad (x \neq 0),$

$$f(x) = x^x \qquad (x > 0), \qquad f(x) = \sin(x^{\cos x}) \qquad (x > 0),$$

$$f(x) = x^{x^x} \qquad (x > 0), \qquad f(x) = \log_a \operatorname{tg} x^2 \qquad (x \in ?),$$

$$f(x) = \operatorname{tg}^3 \left(\frac{x^2 + x + 1}{3} \right) \qquad (x \in ?), \qquad f(x) = \sqrt[x]{\operatorname{tg} 3x^2} \qquad (x \in ?),$$

$$f(x) = \arcsin \frac{2x}{1 + x^2} \qquad (x \in ?), \qquad f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x - 1}{x + 1} \qquad (x \in ?),$$

$$f(x) = \frac{\operatorname{sh}(2x + 1) + \operatorname{ch}(3x - 1)}{\operatorname{sh}^2(x + 2)} \qquad (x \in ?),$$

$$f(x) = \operatorname{th}(\ln(2x - \operatorname{ch} x)) \qquad (x \in ?),$$

$$f(x) = \sqrt{1 - \operatorname{th} x^2} \qquad (x \in ?), \qquad f(x) = \operatorname{arsh}(e^{x+3} - ex\sqrt{x}) \qquad (x \in ?),$$

$$f(x) = e^{\operatorname{arth} x^2} \qquad (x \in ?), \qquad f(x) = x^{\operatorname{arch} x} \qquad (x \in ?),$$

$$f(x) = \log_x(\operatorname{sh} x) \qquad (x \in ?), \qquad f(x) = \ln \left(\operatorname{th} \left(\frac{x + 1}{x - 1} \right) \right) \qquad (x \in ?).$$

13) Bizonyítsa be az I/7. fejezet 2., 4. és 5. tételét.

14) Vizsgálja az I/8. fejezetben definiált tg, ctg, arcsin, arccos, arctg, arcctg, th, cth, arsh, arch, arth, arcth függvények legfontosabb tulajdonságait, differenciálási szabályait.

15) Adja meg az alábbi magasabbrendű deriváltakat:

$$f_1(x) = \frac{a}{x^m} \qquad (x \neq 0), \qquad f_1'''(x) = ? \ ,$$

$$f_2(x) = x^k \qquad (x \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}), \qquad f_2^{(n)}(x) = ? \ ,$$

$$f_3(x) = x \cdot \ln(x) \qquad (x > 0), \qquad f_3^{(5)}(x) = ? \ ,$$

$$f_4(x) = \frac{1}{x(x - 1)} \qquad (x \neq 0,\ x \neq 1), \qquad f_4^{(20)}(x) = ? \ ,$$

$$f_5(x) = x^n e^x \qquad (x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}), \qquad f_5^{(n)}(x) = ? \ ,$$

$$f_6(x) = x \operatorname{sh} x \qquad (x \in \mathbb{R}), \qquad f_6^{(100)}(x) = ? \ ,$$

$$f_7(x) = \sin x \qquad (x \in \mathbb{R}), \qquad f_7^{(n)}(x) = ? \ ,$$

$$f_8(x) = x^3 \sin 3x \qquad (x \in \mathbb{R}), \qquad f_8^{(n)}(x) = ? \ .$$

16) Legyen

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3-x^2}{2} & , \ x \in [0,1] \\ \dfrac{1}{x} & , \ x \in [1,2] \ . \end{cases}$$

Mutassa meg, hogy az f függvény folytonosan differenciálható.
Határozza meg azt az $x \in (0,2)$ számot (vagy számokat), melyekre
$f(2) - f(0) = 2f'(x)$.

17) Legyen $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ $(x \in [-1,1])$. Igazolja, hogy $f(-1) = f(1)$, de $\nexists\, x \in (-1,1)$, hogy $f'(x) = 0$.

18) Bizonyítsa be, hogy ha $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenciálható és f' korlátos, akkor f egyenletesen folytonos.

19) Bizonyítsa be, hogy ha $f(x) = (x^2-1)^n$ $(x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N})$, akkor $f^{(n)}$ olyan n-edfokú polinom, melynek minden gyöke valós, egyszeres és $(-1,1)$-ben van.

20) Bizonyítsa be (a Lagrange-tétellel), hogy

$$|\sin x - \sin y| \le |x-y| \qquad (x, y \in \mathbb{R}) \ ,$$

$$\frac{a-b}{a} < \ln\frac{a}{b} < \frac{a-b}{b} \qquad (0 < b < a) \ ,$$

$$\frac{1}{n+1} < \ln\frac{n+1}{n} < \frac{1}{n} \qquad (n \in \mathbb{N}) \ .$$

21) Bizonyítsa be, hogy ha $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos, $f(a) \le g(a)$, f és g differenciálható (a,b)-n és $f'(x) \le g'(x)$ $(x \in (a,b))$, akkor
$f(x) \le g(x)$ $(x \in [a,b])$.

22) A 8. feladat segítségével bizonyítsa be, hogy

$$e^x \ge 1 + x \quad (x \in [0,\infty)), \qquad \sin x \le x \quad (x \in [0,\infty)),$$

$$x \le \operatorname{tg} x \quad \left(x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right) \ .$$

23) Határozza meg az alábbi függvények monoton szakaszait:

$$f_1(x) = 2 + x - x^2 \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad f_2(x) = 3x - x^3 \quad (x \in \mathbb{R}),$$

$$f_3(x) = \frac{2x}{1+x^2} \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad f_4(x) = x + \sin(x) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

24) Határozza meg az $f(x) = x^2 \operatorname{tg} x$ $\left(x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right)$ függvény 0-ponthoz

tartozó 4-edrendű Taylor-polinomját.

25) Írja fel az alábbi függvények Taylor-sorát:

$$f_1(x) = \sqrt{1+x} \quad (x \in [0, \infty)), \qquad f_2(x) = \ln(1+x) \quad (x \in [0, \infty)),$$
$$f_3(x) = \operatorname{tg} x \quad (x \in \mathbb{R}) .$$

26) Igazolja az alábbi egyenlőtlenségeket:

$$x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x \qquad (x \in (0, \infty)),$$
$$x + \frac{x^3}{3} < \operatorname{tg} x \qquad \left(x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right) .$$

27) Legyen $P(x) = 6x^4 - 7x^3 + 2x^2 - x + 5 \quad (x \in \mathbb{R})$. Határozza meg azt a $Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ polinomot, melyre $P(x) = Q(x-1) \quad (\forall\, x \in \mathbb{R})$.

28) A Taylor-tétel segítségével számítsa ki $\sqrt[3]{30}$, $\sin 18°$, $\sqrt[5]{250}$, $\ln 1.2$, $\operatorname{arctg} 0.8$, $(1.1)^{1.2}$ közelítő értékét és becsülje meg a hibát.

29) Keresse meg az alábbi függvények lokális (és globális) szélsőértékhelyeit és szélsőértékeit:

$$f_1(x) = 2 + x - x^2 \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad f_2(x) = (x-1)^2 \quad (x \in \mathbb{R}),$$
$$f_3(x) = (x-1)^4 \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad f_4(x) = (x+1)^{10} e^{-x} \quad (x \in \mathbb{R}),$$
$$f_5(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4 \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad f_6(x) = \frac{2x}{1+x^2} \quad (x \in \mathbb{R}),$$
$$f_7(x) = \cos x + \frac{1}{2}\cos 2x \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad f_8(x) = e^x \sin(x) \quad (x \in \mathbb{R}),$$
$$f_9(x) = x\sqrt[3]{x-1} \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad f_{10}(x) = \frac{x^2+1}{x^2+x+1} \quad (x \in \mathbb{R}),$$
$$f_{11}(x) = x + \frac{1}{x} \quad (x \neq 0), \qquad f_{12}(x) = \frac{4\sqrt{x}}{x+2} \quad (x \geq 0),$$
$$f_{13}(x) = 2^x \quad (x \in [1, 5]),$$

$$f_{14}(x) = |x^2 - 3x + 2| \quad (x \in [-3, 10]),$$
$$f_{15}(x) = \sqrt{5 - 4x} \quad (x \in [-1, 1]),$$
$$f_{16}(x) = \sin(x+1)\cos(x+2) \quad (x \in [0, 10]).$$

30) Bizonyítsa be, hogy ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenciálható, $f'(a) \neq f'(b)$, akkor $\forall\, \lambda \in (f'(a), f'(b))$ esetén $\exists\, x_0 \in (a, b)$, hogy $f'(x_0) = \lambda$ (Darboux-tétel).

31) Határozza meg az alábbi függvények konvex és konkáv szakaszait, inflexiós helyeit:

$$f_1(x) = 3x^2 - x^3 \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad f_2(x) = \sqrt{1+x^2} \quad (x \in \mathbb{R}),$$
$$f_3(x) = x + \sin(x) \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad f_4(x) = \ln(1+x^2) \quad (x \in \mathbb{R}),$$
$$f_5(x) = e^{-x^2} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

32) Bizonyítsa be, hogy ha $x, y \in \mathbb{R}_+,\ x \neq y$, akkor

$$\frac{x^7 + y^7}{2} > \left(\frac{x+y}{2}\right)^7 \quad ; \qquad x \ln x + y \ln y > (x+y) \ln \frac{x+y}{2} \ .$$

33) Végezze el a teljes függvényvizsgálatot és a függvények ábrázolását, ha:

$$f_1(x) = 3x - x^3 \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad f_2(x) = \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x \quad (x \in \mathbb{R}),$$
$$f_3(x) = x \operatorname{arctg} x \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad f_4(x) = \frac{x^4}{(1+x)^3} \quad (x \neq -1),$$
$$f_5(x) = \frac{9x + x^3}{x - x^3} \quad (x \neq 0, \pm 1), \qquad f_6(x) = |x| e^{-|x-1|} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

34) Határozza meg az alábbi határértékeket:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x}, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{ch} x - \cos x}{x^2}, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \cos x},$$
$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x},$$
$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x}, \qquad \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x} - 1}, \qquad \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right),$$
$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right), \qquad \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{\operatorname{th} x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x}\right), \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^\mu},$$
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{e^{ax}}, \quad (a, n > 0) \ .$$

II. INTEGRÁLSZÁMÍTÁS

1. Primitív függvény, határozatlan integrál

Bevezetés: Az $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ differenciálható függvényhez hozzárendelhető az $f' : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ függvény.

Kérdés: $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$-hez létezik-e $F : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, hogy $F' = f$?

Definíció. Legyen adott az $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ függvény. Az $F : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ differenciálható függvényt az f primitív függvényének vagy határozatlan integráljának nevezzük, ha $F' = f$.
Az F függvényre az $\int f$ jelölést használjuk. $\int f$ meghatározását integrálásnak mondjuk.
Az $F = \int f$ függvény x helyen felvett értékét $F(x) = \int f(x)dx$ vagy $(\int f)(x)$ jelöli, ami gyakran a primitív függvényt (határozatlan integrált) is jelenti.
A primitív függvény (határozatlan integrál) értelmezhető $f : H \to \mathbb{R}$ függvényre is, ahol H intervallumok egyesítése.

1. Tétel. *Ha $f, F : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, $F' = f$ $(F = \int f)$, úgy $G : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ akkor és csak akkor primitív függvénye (határozatlan integrálja) f-nek, ha $\exists\ C \in \mathbb{R}$, hogy $G(x) = F(x) + C$.*

Bizonyítás.
a) $G(x) = F(x) + C \implies G'(x) = F'(x) = f(x)$ $(x \in \langle a, b\rangle) \implies$ G primitív függvény.
b) Ha $G = \int f \implies G'(x) = F'(x)$ $(x \in \langle a, b\rangle) \implies [G(x) - F(x)]' = 0$ $(x \in \langle a, b\rangle) \implies G(x) = F(x) + C$.

Megjegyzés: Ha az f függvény értelmezési tartománya nem intervallum, akkor az állítás nem igaz.

Alapintegrálok:

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \begin{cases} \ln(x) + C_1 & (x > 0) \\ \ln(-x) + C_2 & (x < 0) \end{cases}$$

$$\int x^{\mu}\, dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu + 1} + C \qquad (x \in \mathbb{R}_+,\ \mu \neq -1)$$

$$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \qquad (x \in \mathbb{R},\ a > 0,\ a \neq 1)$$
$$\int \sin(x) \, dx = -\cos(x) + C \qquad (x \in \mathbb{R})$$
$$\int \cos(x) \, dx = \sin(x) + C \qquad (x \in \mathbb{R})$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsin(x) + C \qquad (x \in (-1,1))$$
$$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \mathrm{arctg}(x) + C \qquad (x \in \mathbb{R})$$
$$\int \mathrm{sh}(x) \, dx = \mathrm{ch}(x) + C \qquad (x \in \mathbb{R})$$
$$\int \mathrm{ch}(x) \, dx = \mathrm{sh}(x) + C \qquad (x \in \mathbb{R})$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \, dx = \mathrm{arsh}(x) + C = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C \qquad (x \in \mathbb{R})$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \, dx = \mathrm{arch}(x) + C = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) + C \qquad (x \in (1,\infty))$$
$$\int \frac{1}{\sin^2(x)} \, dx = -\mathrm{ctg}(x) + C_k \qquad (x \in (k\pi, (k+1)\pi),\ k \in \mathbb{Z})$$
$$\int \frac{1}{\cos^2(x)} \, dx = \mathrm{tg}(x) + C_k \qquad (x \in (k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}),\ k \in \mathbb{Z})$$
$$\int \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad (x \in (-\varrho, \varrho))$$

2. Tétel. *Legyen $f, g : \langle a,b \rangle \to \mathbb{R}$ olyan, hogy $\exists\ \int f$ és $\int g$, és $p, q \in \mathbb{R}$ tetszőleges, akkor $\exists\ \int (pf + qg)$ és $\exists\ C \in \mathbb{R}$, hogy*

$$\int [pf(x) + qg(x)] \, dx = p\int f(x) \, dx + q\int g(x) \, dx + C \qquad (x \in \langle a,b \rangle)\ .$$

Bizonyítás. Legyen $F = \int f$, $G = \int g$, akkor F', G' létezése miatt $\exists\ (pF + qG)'$ is, és

$$(pF + qG)'(x) = pF'(x) + qG'(x) = pf(x) + qg(x) \qquad (x \in \langle a,b \rangle)\ ,$$

ami azt jelenti, hogy $\exists \int (pf(x) + qg(x)) \, dx$ és $= pF(x) + qG(x) + C =$ $= p\int f(x) \, dx + q\int g(x) \, dx + C \quad (x \in \langle a,b \rangle)$.

3. Tétel (parciális integrálás tétele). *Ha az $f, g : \langle a,b \rangle \to \mathbb{R}$ függvények differenciálhatóak $\langle a,b \rangle$-n és $\exists \int f'g$, akkor $\exists \int fg'$ is, és van olyan*

$C \in \mathbb{R}$, hogy

(P) $\quad \int f(x)g'(x)\ dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\ dx + C \qquad (x \in \langle a,b\rangle)$.

Bizonyítás. A feltételek miatt az $f \cdot g - \int f'g$ függvény differenciálható, és

$$[f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\ dx]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) - f'(x)g(x) = f(x)g'(x)$$

ami a határozatlan integrál definíciója miatt azt jelenti, hogy $\exists \int fg'$ és teljesül (P).

Megjegyzés: Ha $P_n(x)$ egy n-edfokú polinom, úgy az alábbi integrálok a parciális integrálás tételével meghatározhatók:

$\int P_n(x)e^x\ dx$,	$\int P_n(x)\sin(x)\ dx$,	$\int P_n(x)\arcsin(x)\ dx$,
$\int P_n(x)\ln(x)\ dx$,	$\int P_n(x)\cos(x)\ dx$,	$\int P_n(x)\arccos(x)\ dx$,
	$\int P_n(x)\,\mathrm{sh}(x)\ dx$,	$\int P_n(x)\,\mathrm{arctg}(x)\ dx$,
	$\int P_n(x)\,\mathrm{ch}(x)\ dx$,	$\int P_n(x)\,\mathrm{arcctg}(x)\ dx$.

4. Tétel (helyettesítéses integrálás tétele). *Ha $f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$, $g : \langle c,d\rangle \to \langle a,b\rangle$ olyanok, hogy $\exists\ g' : \langle c,d\rangle \to \mathbb{R}$ és $\exists \int f$, akkor $\exists \int (f \circ g) \cdot g'$ és van olyan $C \in \mathbb{R}$, hogy*

(H) $\quad \int f(g(x)) \cdot g'(x)\ dx = ((\int f) \circ g)(x) + C = \int f(t)dt|_{t=g(x)} + C$

$(x \in \langle c,d\rangle)$.

Bizonyítás. A feltételek miatt $\exists[(\int f) \circ g]'$ és

$$[(\int f) \circ g]'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x) \qquad (x \in \langle c,d\rangle),$$

ami éppen azt jelenti, hogy $\exists \int (f \circ g)g'$ és teljesül (H).

Megjegyzés: Ha (a fentieken túl) $\exists\ g^{-1}$, akkor (H) a következő alakba is írható:

(H') $\int f(x)\ dx = ((\int (f \circ g)g') \circ g^{-1})(x) + C = \int f(g(t))g'(t)dt|_{t=g^{-1}(x)} + C$

$(x \in \langle c,d\rangle)$.

PÉLDÁK: Az

1) $\int \sqrt{1-x^2}$ esetén a $g(t) = \sin(t) \quad (t \in (-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}))$,
2) $\int R(\sin(x), \cos(x))\ dx$ esetén (ahol $R(u,v)$ racionális kifejezése u, v-nek és $x \in (-\pi,\pi)$) a

$$g(t) = 2\,\mathrm{arctg}\,t \quad (t \in \mathbb{R}) \quad (\text{ill. } \mathrm{tg}\,\frac{x}{2} = t = g^{-1}(x) \quad (x \in (-\pi,\pi))\ ,$$

3) $\int R\left(x, \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)\, dx$ esetén a $t = \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}} = g^{-1}(x),\ g(t) = \dfrac{dt^n - b}{a - ct^n}$,

4) $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\, dx$ esetén az Euler-féle (vagy trigonometrikus (sin), illetve hiperbolikusz (sh, ch) függvényes)

helyettesítéseket alkalmazzuk.

Racionális függvények integrálása.
A parciális törtekre bontás tétele szerint minden $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ racionális törtfüggvény egyértelműen előáll egy polinom és

$$\frac{a}{(x-b)^j}\ , \quad \frac{px+q}{(x^2+rx+s)^k} \qquad (j, k \in \mathbb{N}_+,\ r^2 - 4s < 0)$$

alakú törtek bizonyos (itt nem részletezett) összegeként, ahol $(x-b)^j$ és $(x^2+rx+s)^k$ a $Q_m(x)$ osztói. Így $\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ meghatározása visszavezethető az

$$\int \frac{a}{(x-b)^j}\, dx \text{ és } \int \frac{px+q}{(x^2+rx+s)^k}\, dx$$

meghatározására.

Megjegyzések:

1. Az utóbbi két integráltípust gyakorlaton vizsgáljuk (az első kezelése azonnal látható).

2. A 4. tétel utáni 2), 3), 4) példák esetén az integrálas racionális törtfüggvény integrálására vezethető vissza.

3. További ún. racionalizáló helyettesítések is vizsgálhatók (pl. $\int R(e^x)\, dx$, binom integrálok).

2. A Riemann-integrálhatóság fogalma

Legyen $[a, b] \subset \mathbb{R}$ zárt intervallum. A továbbiakban $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ típusú korlátos függvényekkel foglalkozunk.

1. Definíció. A

$$P = \{x_i \mid a = x_0 < x_1 < \cdots < x_i < \cdots < x_n = b\} \subset [a, b]$$

halmazt az $[a,b]$ intervallum egy felosztásának, az x_i pontokat a felosztás osztáspontjainak, az $[x_{i-1},x_i]$ $(i=1,\ldots,n)$ intervallumokat a felosztás részintervallumainak, míg $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ mellett a

$$\|P\| \doteq \sup\{\Delta x_i \mid i=1,\ldots,n\}$$

számot a felosztás finomságának nevezzük.

2. Definíció. Legyen P_1 és P_2 $[a,b]$ két felosztása. P_2 finomítása (továbbosztása) a P_1 felosztásnak, ha $P_1 \subset P_2$. A $P \doteq P_1 \cup P_2$ halmazt a P_1 és P_2 egyesítésének nevezzük.

3. Definíció. A $\langle P_k\rangle$ normális felosztássorozata $[a,b]$-nek, ha $\lim\limits_{k\to\infty}\|P_k\| = 0$ teljesül.

4. Definíció. Legyen $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ korlátos függvény, P egy felosztása $[a,b]$-nek.

$$M_i \doteq \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x), \qquad m_i \doteq \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) \qquad (M_i, m_i \ \exists \text{ és } \in\mathbb{R})$$

5. Definíció. Legyen $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ korlátos függvény, P egy felosztása $[a,b]$-nek. Az

$$s(f,P)=\sum_{i=1}^n m_i\Delta x_i, \quad S(f,P)=\sum_{i=1}^n M_i\Delta x_i, \quad \mathcal{O}(f,P)=\sum_{i=1}^n (M_i-m_i)\Delta x_i$$

számokat az f függvény P felosztáshoz tartozó alsó, felső, illetve oszcillációs összegének, míg $t_i\in[x_{i-1},x_i]$ esetén a

$$\sigma(f,P)=\sum_{i=1}^n f(t_i)\Delta x_i$$

számot az f függvény P felosztáshoz és $t_1,\ldots,t_n$-hez tartozó integrálközelítő összegének nevezzük. (Ezek „geometrialiag” bizonyos „területek”.)

1. Tétel. *Ha $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ korlátos függvény, akkor*

a) $\forall\ P$ *és* $\sigma(f,P)$-re: $\quad s(f,P)\le\sigma(f,P)\le S(f,P)$;

b) $\forall\ P_1\subset P_2$-re: $\quad s(f,P_1)\le s(f,P_2), \quad S(f,P_2)\le S(f,P_1)$;

c) $\forall\ P_1,P_2$-re: $\quad s(f,P_1)\le S(f,P_2)$.

Bizonyítás.

a) Ha $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tetszőleges, akkor $m_i \le f(t_i) \le$ $\le M_i \implies m_i \Delta x_i \le f(t_i)\Delta x_i \le M_i \Delta x_i \quad (i = 1, \dots, n) \implies$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i \ ,$$

ami az állítás.

b) Legyen $P_1 = \{x_0, \dots, x_n\}$, $P_2 = \{y_0, \dots, y_m\}$, $P_1 \subset P_2$, akkor $\forall\ [x_{i-1}, x_i]$-re $\exists\ j, k$, hogy

$$[x_{i-1}, x_i] = [y_{j-1}, y_j] \cup \dots \cup [y_{k-1}, y_k] \qquad (x_{i-1} = y_{j-1},\ x_i = y_k).$$

Ha $m_i^{(1)}$ a P_1, $m_i^{(2)}$ a P_2-höz tartozó infimumok, akkor $m_i^{(1)} \le m_j^{(2)}, \dots, m_k^{(2)}$, és így

$$m_i^{(1)} \Delta x_i = m_i^{(1)} \Delta y_j + \dots + m_i^{(1)} \Delta y_k \le m_j^{(2)} \Delta y_j + \dots + m_k^{(2)} \Delta y_k$$

adódik $\forall\ i = 1, \dots, n$-re, amiből összegzés után jön b) első fele. A második hasonlóan következik.

c) Ha P_1, P_2 tetszőleges felosztások, akkor $P_1, P_2 \subset P_1 \cup P_2$, így a) és b) miatt

$$s(f, P_1) \le s(f, P_1 \cup P_2) \le S(f, P_1 \cup P_2) \le S(f, P_2) \ ,$$

ami adja az állítást.

6. Definíció. Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény. Az

$$\underline{I} = \underline{\int_a^b} f \doteq \sup_P \{s(f, P)\}, \qquad \bar{I} = \overline{\int_a^b} f \doteq \inf_P \{S(f, P)\}$$

számokat az f függvény $[a, b]$ feletti alsó, illetve felső Darboux-integráljának nevezzük.

2. Tétel. *Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény, akkor $\underline{I}, \bar{I} \in \mathbb{R}$ és $\underline{I} \le \bar{I}$ teljesül.*

Bizonyítás. Az 1. Tétel c) része miatt $\forall\ P_1$-re $s(f, P_1) \le S(f, P)\ \forall\ P$ esetén, így $\exists\ \bar{I} \in \mathbb{R}$ továbbá $s(f, P_1) \le \bar{I} \implies \exists\ \underline{I} \in \mathbb{R}$ és $\underline{I} \le \bar{I}$.

Következmény: $\forall\ P$-re $s(f, P) \le \underline{I} \le \bar{I} \le S(f, P) \implies 0 \le \bar{I} - \underline{I} \le$ $\le \mathcal{O}(f, P)$.

PÉLDÁK:

1) $f(x) = x \quad (x \in [a,b]) \implies \underline{I} = \bar{I}$.

2) $\exists\ f$, hogy $\underline{I} \neq \bar{I}$ (például a Dirichlet függvény).

7. Definíció. Az $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény Riemann-integrálható $[a,b]$-n, ha $\underline{I} = \bar{I}$. Ezt a közös értéket az f $[a,b]$ feletti Riemann-integráljának nevezzük, és rá az I, $\int\limits_a^b f$ vagy $\int\limits_a^b f(x)\ dx$ jelölést használjuk.
Ha $[c,d] \subset [a,b]$ és f $[c,d]$-re való leszűkítése Riemann-integrálható $[c,d]$-n, akkor azt mondjuk, hogy f Riemann-integrálható $[c,d]$-n. $\int\limits_c^d f$ az $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény Riemann-integrálját jelöli $[c,d]$-n. Ha $f|_{[c,d]} = g$, akkor $\int\limits_c^d f \doteq \int\limits_c^d g$.

3. A Darboux-tétel és következményei

Lemma. *Legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos ($|f(x)| < K\ \forall\ x \in [a,b]$), $P = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\}$ $[a,b]$ egy felosztása. Ha P^* a P egy tetszőleges finomítása, akkor*

$$S(f,P) - S(f,P^*) \leq 2K \sum_{*} (x_i - x_{i-1}) \ , \tag{1}$$

ahol az összegzés az új osztáspontokhoz tartozó intervallumokra történik.

Bizonyítás. Legyen P' olyan finomítása P-nek, melyben csak olyan új osztáspontok vannak, hogy $x_{i-1} < x^{(1)} < x^{(2)} < \cdots < x^{(k)} < x_i$
$i \in \{1, \ldots, n\}$. Legyen

$$m_i \doteq \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \qquad M_i \doteq \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x),$$

és jelölje $M^{(1)}, \ldots, M^{(k+1)}$ az f szuprémumát az $[x_{i-1}, x_i]$-ben keletkező

$k+1$ új részintervallumon. Ekkor $|M_i|, |m_i| \le K$ és $|M^{(k)}| \ge |m_i|$ miatt

$$\begin{aligned}
&S(f,P) - S(f,P') = \\
&\quad = M_i(x_i - x_{i-1}) - \big[M^{(1)}(x^{(1)} - x_{i-1}) + \cdots + M^{(k+1)}(x_i - x^{(k)})\big] \le \\
&\quad \le M_i(x_i - x_{i-1}) - m_i\big(x^{(1)} - x_{i-1} + x^{(2)} - x^{(1)} + \cdots + x_i - x^{(k)}\big) = \\
&\quad = (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \le 2K(x_i - x_{i-1}) \ .
\end{aligned}$$

Ha ezt figyelembe vesszük, akkor már nyilvánvaló (1) P egy tetszőleges P^* finomítására.

Darboux-tétel. *Ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény, akkor $\forall$ ε-hoz $\exists$ $\delta(\varepsilon)$, hogy $[a,b]$ $\forall$ P felosztására, melyre $\|P\| < \delta(\varepsilon)$*

(D) $$S(f,P) - \bar{I} < \varepsilon \qquad \text{és} \qquad \underline{I} - s(f,P) < \varepsilon$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges, akkor $\bar{I}$ definíciója miatt $\exists$ P_0 felosztása $[a,b]$-nek, hogy

(2) $$S(f,P_0) - \bar{I} < \frac{\varepsilon}{2}$$

teljesül. Ha r_0 a P_0 részintervallumainak száma, úgy legyen

$$0 < \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{4r_0K}$$

és $P = \{a = x_0, \ldots, x_n = b\}$ olyan, hogy $\|P\| < \delta(\varepsilon)$. Ha $P^* = P \cup P_0$, akkor P^* finomítása P_0-nak és P-nek is. Ekkor a lemma és $\delta(\varepsilon)$ definíciója miatt

(3) $$0 \le S(f,P) - S(f,P^*) \le 2K \sum_* (x_i - x_{i-1}) \le 2Kr_0\delta < \frac{\varepsilon}{2} \ .$$

Ezután (2)-t és (3)-at is felhasználva

$$\bar{I} \le S(f,P) < S(f,P^*) + \frac{\varepsilon}{2} \le S(f,P_0) + \frac{\varepsilon}{2} < \bar{I} + \varepsilon$$

adódik, ami adja (D) első állítását.
$\underline{I}$-ra a bizonyítás hasonló.

A Darboux-tétel következménye. *Ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény, akkor*

a) $[a,b]$ $\forall \langle P_k \rangle$ *normális felosztássorozatára* $\exists$

$$\lim_{k\to\infty} s(f,P_k) = \underline{I}\ , \quad \lim_{k\to\infty} S(f,P_k) = \bar{I}\ , \quad \textit{és} \quad \lim_{k\to\infty} \mathcal{O}(f,P_k) = \bar{I} - \underline{I}\ ;$$

b) $[a,b]$ $\forall \langle P_k \rangle$ *normális felosztássorozatára* $\exists$ $\langle \sigma^1(f,P_k) \rangle$ *és* $\langle \sigma^2(f,P_k) \rangle$ *integrálközelítő összegsorozat, hogy*

$$\exists \lim_{k\to\infty} \sigma^1(f,P_k) = \underline{I} \quad \textit{illetve} \quad \lim_{k\to\infty} \sigma^2(f,P_k) = \bar{I}\ .$$

Bizonyítás.

a) Legyen $\varepsilon > 0$ adott, akkor a Darboux-tétel miatt $\exists\, \delta(\varepsilon) > 0$, hogy $\forall$ P-re, melyre $\|P\| < \delta(\varepsilon)$ $\quad |s(f,P) - \underline{I}| < \varepsilon,\ |S(f,P) - \bar{I}| < \varepsilon.$
Legyen $\langle P_k \rangle$ normális felosztássorozat akkor $\lim\limits_{k\to\infty} \|P_k\| = 0$ miatt $\delta(\varepsilon) > 0$-hoz $\exists\ N_1(\delta(\varepsilon))$, hogy $\forall\ k > N_1(\delta(\varepsilon))$ esetén $\|P_k\| < \delta(\varepsilon)$.
Ha tehát $N(\varepsilon) = N_1(\delta(\varepsilon))$, akkor $\forall\ k > N(\varepsilon)$-ra $\|P_k\| < \delta(\varepsilon)$, így

$$|s(f,P_k) - \underline{I}| < \varepsilon\ , \qquad |S(f,P_k) - \bar{I}| < \varepsilon\ ,$$

ami (a határérték definíciója miatt) adja az első két állítást.
A harmadik $\mathcal{O}(f,P_k) = S(f,P_k) - s(f,P_k)$-ból jön $k \to \infty$ esetén.

b) Legyen $\langle P_k \rangle \doteq \langle \{x_i^k \mid i = 0,\ldots,n_k\} \rangle$ normális felosztássorozat,

$$m_i^k = \inf f([x_{i-1}^k, x_i^k]), \quad M_i^k = \sup f([x_{i-1}^k, x_i^k]) \quad (i = 0,\ldots,n_k),$$

akkor (a pontos korlát definíciója miatt)

$$\exists\ t_{1i}^k \in [x_{i-1}^k, x_i^k],\ t_{2i}^k \in [x_{i-1}^k, x_i^k] \quad (i = 1,\ldots,n_k),$$

hogy

$$m_i^k + \frac{1}{k} > f(t_{1i}^k) \geq m_i^k, \quad M_i^k \geq f(t_{2i}^k) > M_i^k - \frac{1}{k} \quad (i = 1,\ldots,n_k).$$

Az egyenlőtlenségeket összegezve kapjuk, hogy az ilyen módon létező $\langle t_{1i}^k \rangle$, illetve $\langle t_{2i}^k \rangle$-hoz tartozó $\sigma^1(f,P_k)$, illetve $\sigma^2(f,P_k)$-ra

$$\sum_i \left(m_i^k + \frac{1}{k} \right) \Delta x_i^k > \sigma^1(f,P_k) \geq s(f,P_k),$$

illetve

$$S(f,P_k) \geq \sigma^2(f,P_k) > \sum_i \left(M_i^k - \frac{1}{k} \right) \Delta x_i^k\ ,$$

azaz

$$s(f,P_k) + \frac{b-a}{k} > \sigma^1(f,P_k) \geq s(f,P_k),$$

illetve

$$S(f,P_k) \geq \sigma^2(f,P_k) > S(f,P_k) - \frac{b-a}{k}$$

teljesül, melyből a) miatt kapjuk az állítást.

4. A Riemann-integrálhatóság kritériumai és elegendő feltételei

1. Tétel. *Az $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény akkor és csak akkor Riemann-integrálható $[a,b]$-n, ha $\exists\ I \in \mathbb{R}$ hogy $\forall\ \varepsilon > 0$-hoz $\exists\ \delta(\varepsilon) > 0$, hogy $\forall$ olyan P felosztására $[a,b]$-nek, melyre $\|P\| < \delta(\varepsilon)$, $|\sigma(f,P) - I| < \varepsilon$ teljesül $\forall\ \sigma(f,P)$-re*

Bizonyítás.

a) Legyen f Riemann-integrálható és $\underline{I} = \bar{I} = I$.
Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen adott, akkor a Darboux-tétel miatt $\exists\ \delta(\varepsilon)$, hogy $\forall\ P$-re, melyre $\|P\| < \delta(\varepsilon)$, $S(f,P) - \bar{I} < \varepsilon$, $\underline{I} - s(f,P) < \varepsilon$ teljesül, amiből $\underline{I} = \bar{I} = I$ és $s(f,P) \leq \sigma(f,P) \leq S(f,P)$ miatt $|\sigma(f,P) - I| < \varepsilon$ teljesül $\forall\ \sigma(f,P)$-re, ami adja az állítás első felét.

b) Tegyük fel, hogy $\exists\ I \in \mathbb{R}$, hogy $\forall\ \varepsilon > 0$-hoz $\exists\ \delta(\varepsilon)$, hogy $\forall$ olyan P-re, melyre $\|P\| < \delta(\varepsilon)$, $|\sigma(f,P) - I| < \varepsilon$ teljesül $\forall\ \sigma(f,P)$-re.
Ha $\varepsilon > 0$ tetszőleges, akkor:
– $\frac{\varepsilon}{3}$-hoz – a Darboux-tétel miatt – $\exists\ \delta_1\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$, hogy ha $\|P\| < \delta_1\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$, akkor

$$\underline{I} - s(f,P) < \frac{\varepsilon}{3}\ ; \tag{1}$$

– $\frac{\varepsilon}{3}$-hoz – a feltétel miatt – $\exists\ \delta_2\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$, hogy ha $\|P\| < \delta_2\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$, akkor

$$|\sigma(f,P) - I| < \frac{\varepsilon}{3}\ ; \tag{2}$$

– $\frac{\varepsilon}{3(b-a)}$-hoz $\exists\ t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ ($P = \{x_i \mid i = 0, \dots, n\}$), hogy

$f(t_i) - m_i < \dfrac{\varepsilon}{3(b-a)}$ és így

$$(3) \qquad \sigma(f,P) - s(f,P) = \sum_{i=1}^{n} (f(t_i) - m_i)\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{3}$$

teljesül.

Legyen $\delta(\varepsilon) = \inf\{\delta_1\left(\frac{\varepsilon}{3}\right), \ \delta_2\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)\}$, akkor $\|P\| < \delta(\varepsilon)$ esetén (1)–(2)–(3) miatt

$$|I - \underline{I}| \le |I - \sigma(f,P)| + |\sigma(f,P) - s(f,P)| + |s(f,P) - \underline{I}| < \varepsilon \ ,$$

tehát $I = \underline{I}$.

Hasonlóan következik, hogy $I = \bar{I}$.

Ezek adják, hogy $\underline{I} = \bar{I} = I$, azaz f Riemann-integrálható.

2. Tétel. *Az $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény akkor és csak akkor Riemann-integrálható $[a,b]$-n, ha $[a,b]$ $\forall$ $\langle P_k \rangle$ normális felosztássorozathoz tartozó $\forall$ $\sigma(f,P_k)$ integrálközelítő összegsorozat konvergens.*

Bizonyítás.

a) Legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható, azaz $\underline{I} = \bar{I}$. Legyen $\langle P_k \rangle$ normális felosztássorozat, akkor $s(f,P_k) \le \sigma(f,P_k) \le S(f,P_k)$,
a Darboux-tétel következménye és a rendőr-tétel miatt adódik $\sigma(f,P_k)$ konvergenciája az $I = \underline{I} = \bar{I}$ számhoz.

b) Legyen $\langle P_k \rangle$ tetszőleges normális felosztássorozat, hogy $\forall$ $\sigma(f,P_k)$ konvergens, akkor nyilván $\exists$ $I \in \mathbb{R}$, hogy $\forall$ $\sigma(f,P_k) \to I$. Ekkor a Darboux-tétel következményének b) része miatt létező $\langle \sigma^1(f,P_k) \rangle$ és $\langle \sigma^2(f,P_k) \rangle$ sorozatok határértéke is I, így $\underline{I} = \bar{I} = I$, azaz f Riemann-integrálható.

3. Tétel (Riemann-kritérium). *Az $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény akkor és csak akkor Riemann-integrálható $[a,b]$-n, ha $\forall$ $\varepsilon > 0$ esetén $\exists$ P felosztása $[a,b]$-nek, hogy*

$$\mathcal{O}(f,P) = S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon \ .$$

Bizonyítás.

a) Legyen f Riemann-integrálható, azaz $\underline{I} = \bar{I} = I$ és $\varepsilon > 0$ adott. A Darboux-tétel miatt $\dfrac{\varepsilon}{2}$-höz $\exists$ $\delta(\varepsilon) > 0$, hogy ha P olyan felosztása $[a,b]$-nek,melyre $\|P\| < \delta(\frac{\varepsilon}{2})$, akkor

$$I - s(f,P) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{és} \quad S(f,P) - I < \frac{\varepsilon}{2} \ ,$$

ami adja, hogy $\mathcal{O}(f,P) = S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon$.

b) Tegyük fel, hogy $\forall\, \varepsilon > 0$-ra $\exists\, P$, hogy $\mathcal{O}(f,P) = S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon$. Ekkor $0 \le \bar{I} - \underline{I} \le S(f,P) - s(f,P) = \mathcal{O}(f,P) < \varepsilon$ miatt következik, hogy $\underline{I} = \bar{I}$, azaz f Riemann-integrálható.

4. Tétel. *Az $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény akkor és csak akkor Riemann-integrálható $[a,b]$-n, ha az $[a,b]$ $\forall$ $\langle P_k \rangle$ normális felosztássorozata esetén $\langle \mathcal{O}(f,P_k) \rangle$ nullsorozat.*

Bizonyítás.

a) Ha f Riemann-integrálható, akkor a Darboux-tétel következményének a) része miatt $\lim\limits_{k\to\infty} \mathcal{O}(f,P_k) = \bar{I} - \underline{I} = 0$.

b) Ha $[a,b]$ $\forall$ $\langle P_k \rangle$ normális felosztássorozata esetén $\langle \mathcal{O}(f,P_k) \rangle$ nullsorozat, akkor ugyancsak a Darboux-tétel következményének a) része miatt

$$\bar{I} - \underline{I} = \lim_{k\to\infty} S(f,P_k) - \lim_{k\to\infty} s(f,P_k) = \lim_{k\to\infty} \mathcal{O}(f,P_k) = 0$$

következik, ami adja, hogy $\underline{I} = \bar{I}$, azaz f Riemann-integrálható.

5. Tétel. *$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény Riemann-integrálható.*

Bizonyítás. $\forall$ P-re $\bar{I} - \underline{I} \le \mathcal{O}(f,P)$, így elég megmutatni, hogy $\forall\, \varepsilon > 0$-hoz $\exists\, P$ felosztása $[a,b]$-nek, hogy $\mathcal{O}(f,P) < \varepsilon$ (mert akkor $\underline{I} = \bar{I}$):
f folytonossága adja egyenletes folytonosságát $[a,b]$-n, így $\dfrac{\varepsilon}{b-a}$-hoz $\exists\, \delta(\varepsilon)$, hogy $\forall\, x', x'' \in [a,b]$, $|x' - x''| < \delta(\varepsilon)$ esetén

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}\ .$$

Legyen P olyan, hogy $\|P\| < \delta(\varepsilon)$, akkor

$$\bar{I} - \underline{I} \le \mathcal{O}(f,P) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i') - f(x_i''))\Delta x_i < \varepsilon\ .$$

(Itt felhasználtuk, hogy f folytonossága miatt $\exists\, x_i', x_i'' \in [x_{i-1}, x_i]$, hogy $M_i = f(x_i')$, $m_i = f(x_i'')$.)

6. Tétel. *Egy $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton függvény Riemann-integrálható.*

Bizonyítás.

a) Ha $f(a) = f(b) \implies f(x) \equiv C \implies$ az állítás igaz.

b) Ha $f(a) \neq f(b)$, akkor $\forall\, \varepsilon > 0$ esetén olyan P-re, hogy $\|P\| < \dfrac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$ (felhasználva például monoton növekvő f függvény esetén, hogy $m_i = f(x_{i-1}),\ M_i = f(x_i)$) kapjuk, hogy

$$\bar{I} - \underline{I} \leq \mathcal{O}(f,P) = \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}[f(x_i) - f(x_{i-1})]\Delta x_i <$$

$$< \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)} \sum_{i=1}^{n}[f(x_i) - f(x_{i-1})] = \varepsilon\ ,$$

ami adja, hogy $\underline{I} = \bar{I}$ azaz f Riemann-integrálható.

7. Tétel. *Ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható $[a,b]$-n, $[c,d] \subset [a,b]$, akkor f Riemann-integrálható $[c,d]$-n is.*

Bizonyítás. Legyen g az f $[c,d]$-re való leszűkítése és $\langle P_k \rangle$ $[c,d]$ tetszőleges normális felosztássorozata. Ekkor $\exists$ $[a,b]$-nek olyan $\langle P_k^* \rangle$ normális felosztássorozata, hogy $P_k^* \cap [c,d] = P_k\ \forall\ k \in \mathbb{N}$. Másrészt $0 \leq \mathcal{O}(g,P_k) \leq \mathcal{O}(f,P_k^*)$ $\forall\, k \in \mathbb{N}$ és f Riemann-integrálhatósága miatt $\lim\limits_{k\to\infty} \mathcal{O}(f,P_k^*) = 0$, melyek a rendőr-tétel miatt adják, hogy $\lim\limits_{k\to\infty} \mathcal{O}(g,P_k) = 0$. Így a 4. tétel adja, hogy g Riemann-integrálható, azaz f Riemann-integrálható $[c,d]$-n.

8. Tétel (az integrál intervallum feletti additivitása). *Legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $c \in (a,b)$, f Riemann-integrálható $[a,c]$-n és $[c,b]$-n, akkor f Riemann-integrálható $[a,b]$-n is, és*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f\ .$$

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ adott, g és h f $[a,c]$-re, illetve $[c,b]$-re való leszűkítése. A feltételek miatt g és h Riemann-integrálhatók, így a 3. tétel miatt $\exists$ P_1 és P_2 felosztása $[a,c]$, illetve $[c,b]$-nek, hogy $\mathcal{O}(g,P_1) < \dfrac{\varepsilon}{2}$ és $\mathcal{O}(h,P_2) < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Ha $P \doteq P_1 \cup P_2$, úgy P $[a,b]$ egy felosztása, melyre $\mathcal{O}(f,P) = \mathcal{O}(g,P_1) + \mathcal{O}(h,P_2) < \varepsilon$, így a 3. tétel miatt f Riemann-integrálható $[a,b]$-n. Az egyenlőség bizonyításához legyen $\langle P_k^1 \rangle$ $\langle P_k^2 \rangle$ $[a,c]$, illeteve $[c,b]$ egy tetszőleges normális felosztássorozata, akkor $P_k \doteq P_k^1 \cup P_k^2$ esetén $\langle P_k \rangle$ normális felosztássorozata $[a,b]$-nek. Ekkor a

$$(*) \qquad \sigma(f,P_k) \doteq \sigma(g,P_k^1) + \sigma(h,P_k^2)$$

szerint definiált $\langle\sigma(f,P_k)\rangle$ egy integrálközelítő összeg sorozata f-nek $[a,b]$-n, melyre $\lim\limits_{k\to\infty}\sigma(f,P_k)=\int\limits_a^b f$ teljesül (az integrál létezése miatt), így $\lim\limits_{k\to\infty}\sigma(g,P_k^1)=\int\limits_a^c f$ és $\lim\limits_{k\to\infty}\sigma(h,P_k^2)=\int\limits_c^b f$ miatt $(*)$-ból kapjuk a tétel egyenlőségét.

Következmény.
Legyen $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ és $P=\{a=a_0,a_1,\ldots,a_{n-1},a_n=b\}$ egy felosztása $[a,b]$-nek. Ha f Riemann-integrálható $\forall$ $[a_{i-1},a_i]$ intervallumon, akkor Riemann-integrálható $[a,b]$-n és

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{a_{i-1}}^{a_i} f(x)\,dx$$

Bizonyítás. A 8. tétel felhasználásával és teljes indukcióval azonnal kapjuk az állítást.

9. Tétel. *Ha $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ korlátos és $\forall$ $c,d\in(a,b)$, $c<d$ esetén f Riemann-integrálható $[c,d]$-n, akkor Riemann-integrálható $[a,b]$-n is.*

Bizonyítás. A Riemann-kritérium segítségével bizonyítunk.
Legyen $\varepsilon>0$ tetszőlegesen adott és K olyan, hogy $|f(x)|<K$ $\forall$ $x\in[a,b]$. $c,d\in(a,b)$-t válasszuk úgy, hogy $c<d$ és $c-a=b-d<\dfrac{\varepsilon}{8K}$. Legyen P_1 olyan felosztása $[c,d]$-nek, hogy $\mathcal{O}(g,P_1)<\dfrac{\varepsilon}{2}$ (ahol g az f $[c,d]$-re való leszűkítése). Ekkor $P\doteq P_1\cup\{a,b\}$ olyan felosztása $[a,b]$-nek, hogy

$$\mathcal{O}(f,P)<2K(c-a)+\mathcal{O}(g,P_1)+2K(b-d)<\varepsilon\ ,$$

ami a Riemann-kritérium miatt adja, hogy f Riemann-integrálható $[a,b]$-n.

10. Tétel. *Legyenek $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ korlátos függvények, hogy $f(x)=g(x)$ véges sok $x\in[a,b]$ kivételével. Ha f Riemann-integrálható, akkor g is és $\int\limits_a^b f=\int\limits_a^b g$.*

Bizonyítás. Legyen $H=\{x\mid f(x)\neq g(x)\}$ és P olyan felosztása $[a,b]$-nek, hogy $H\subset P$. A 7. tétel miatt f Riemann-integrálható P $\forall$ részintervallumán, de akkor a 9. tétel miatt g is, és akkor a 8. tétel következménye miatt kapjuk g Riemann-integrálhatóságát $[a,b]$-n. Az egyenlőség abból jön, hogy ha $\langle P_k \rangle$ az $[a,b]$ egy normális felosztássorozata, akkor a $t_i^k \in [x_{i-1}^k, x_i^k]$ pontokat választhatjuk úgy, hogy $f(t_i^k) = g(t_i^k)$ $\forall i$-re és k-ra, ami adja, hogy ekkor $\sigma(f, P^k) = \sigma(g, P^k)$, melyből határátmenettel, a 2. tétel miatt $\int_a^b f = \int_a^b g$ következik.

11. Tétel. *Legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény, $H \subset [a,b]$ véges halmaz. Ha f folytonos $[a,b] \setminus H$-n, akkor Riemann-integrálható.*

Bizonyítás. Ha P $[a,b]$ olyan felosztása, hogy $H \subset P$, úgy f P részintervallumainak belsejében folytonos és ezért azok $\forall$ részén Riemann-integrálható, így a 9. tétel miatt P részintervallumain és végül a 8. tétel következménye miatt $[a,b]$-n is.

12. Tétel (Lebesgue-kritérium). *Az $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény akkor és csak akkor Riemann-integrálható, ha egy Lebesgue szerint nullmértékű halmaztól eltekintve folytonos. ($H \subset \mathbb{R}$ Lebesgue szerint nullmértékű, ha $\forall\ \varepsilon > 0$-hoz $\exists\ \{(a_n, b_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ intervallumrendszer, hogy $H \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n)$ és $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) < \varepsilon$.)*

5. Középiskolai vonatkozások, példák

a) Ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos, úgy Riemann-integrálható, azaz $\underline{I} = \bar{I}$. Az $[a,b]$ egyenlő részekre osztásával nyert $\langle P_k \rangle$ normális felosztássorozat, mert $\|P_k\| = \dfrac{b-a}{k} \to 0$. Így a Darboux-tétel következménye miatt:
$$\lim_{k\to\infty} s(f, P_k) = \underline{I} = \bar{I} = \lim_{k\to\infty} S(f, P_k)\ ,$$
így a középiskolában adott integrál definíció a Riemann-integrállal megegyező eredményt ad.

b) Tételeink alapján egy Riemann-integrálható függvény Riemann-integrálját $\forall$ $\langle P_k \rangle$ normális felosztássorozathoz tartozó $\langle s(f, P_k) \rangle$, $\langle S(f, P_k) \rangle$, vagy $\langle \sigma(f, P_k) \rangle$ sorozat határértéke megadja.

c) Példák:

– Az $f(x) = \dfrac{1}{x}$ $\quad (x \in [a,b],\ a > 0)$ függvény esetén

$$P_k = \left\{ x_n^k \doteq a \left(\sqrt[k]{\frac{b}{a}} \right)^n \mid n = 0, 1, \ldots, k \right\}$$

normális felosztássorozatból kiindulva számítható $\int\limits_a^b \frac{1}{x}\, dx$ értéke.

– Mi a helyzet a $g(x) = x^n$ $\quad (n \in \mathbb{N},\ x \in [a,b])$ függvény esetén?

6. A Riemann-integrál műveleti tulajdonságai

1. Tétel. *Ha $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálhatók, $p, q \in \mathbb{R}$, akkor a $(p \cdot f + q \cdot g) : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény is Riemann-integrálható és*

$$\int\limits_a^b (p \cdot f + q \cdot g) = p \cdot \int\limits_a^b f + q \cdot \int\limits_a^b g$$

Bizonyítás. $\forall\ \langle P_k \rangle$ normális felosztássorozatra

$$\sigma(p \cdot f + q \cdot g, P_k) = p \cdot \sigma(f, P_k) + q \cdot \sigma(g, P_k)\ ,$$

ami f és g Riemann-integrálhatósága és a Riemann-integrálhatóság kritériuma (II.4.2. tétel) miatt adja az állítást.

Megjegyzés: A tételből teljes indukcióval következik, hogy ha az $f_i : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvények Riemann-integrálhatók és $\lambda_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, n)$, akkor a $\sum\limits_{i=1}^n \lambda_i f_i$ függvény is Riemann-integrálható és

$$\int_a^b \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i \int\limits_a^b f_i\ .$$

2. Tétel. *Ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható, akkor f^2 is, továbbá ha $\exists\ c > 0$, hogy $|f(x)| \geq c \quad \forall\ x \in [a,b]$, akkor $\dfrac{1}{f}$ is Riemann-integrálható.*

Bizonyítás.

a) Legyen $\langle P_k \rangle$ $[a,b]$ egy normális felosztássorozata, hogy
$$P_k = \{a = x_0^k, x_1^k, \ldots, x_{n_k}^k = b\},$$
és K olyan, hogy $|f(x)| < K \quad \forall\ x \in [a,b]$. Ha $k \in \mathbb{N}$ tetszőlegesen rögzített, akkor $\forall\ \xi_i^k, \eta_i^k \in [x_{i-1}^k, x_i^k]$ $(i = 1, \ldots, n_k)$ esetén
$$|f^2(\xi_i^k) - f^2(\eta_i^k)| = |f(\xi_i^k) + f(\eta_i^k)||f(\xi_i^k) - f(\eta_i^k)| \leq$$
$$\leq 2K|f(\xi_i^k) - f(\eta_i^k)| \leq 2K(M_i^k - m_i^k)\ ,$$
ahol m_i^k, illetve M_i^k az f infimuma, illetve suprémuma az $[x_{i-1}^k, x_i^k]$ intervallumon. Ha m_i^{*k}, illetve M_i^{*k} jelöli f^2 infimumát, illetve suprémumát $[x_{i-1}^k, x_i^k]$-n, akkor az előbbi egyenlőtlenség miatt $\forall\ i = 1, \ldots, n_k$-ra
$$M_i^{*k} - m_i^{*k} = \sup_{\xi_i, \eta_i} |f^2(\xi_i^k) - f^2(\eta_i^k)| \leq 2K(M_i^k - m_i^k)\ .$$
Ha az utóbbi egyenlőtlenséget Δx_i^k-val megszorozzuk, majd összeadjuk azt kapjuk, hogy
$$0 \leq \mathcal{O}(f^2, P_k) \leq 2K\mathcal{O}(f, P_k)\ ;$$
ahol f Riemann-integrálhatósága és a II.4.4. tétel miatt $\lim\limits_{k\to\infty} \mathcal{O}(f, P_k) = 0$, és akkor a rendőr-tétel adja, hogy $\lim\limits_{k\to\infty} \mathcal{O}(f^2, P_k) = 0$, és így – újra a II.4.4. tétel miatt – adódik f^2 Riemann-integrálhatósága.

b) Az állítás másik része jön az
$$\left| \frac{1}{f(\xi_i^k)} - \frac{1}{f(\eta_i^k)} \right| = \frac{|f(\xi_i^k) - f(\eta_i^k)|}{|f(\xi_i^k)||f(\eta_i^k)|} \leq \frac{1}{c^2}|f(\xi_i^k) - f(\eta_i^k)| \leq \frac{1}{c^2}(M_i^k - m_i^k)$$
egyenlőtlenség felhasználásával.

3. Tétel. *Ha az $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvények Riemann-integrálhatók, akkor $f \cdot g$ is, továbbá ha $\exists\ c > 0$, hogy $|g(x)| > c\ \forall\ x \in [a,b]$-re, úgy $\frac{f}{g}$ is Riemann-integrálható.*

Bizonyítás. Az
$$f \cdot g = \frac{1}{4}[(f+g)^2 - (f-g)^2] \quad \text{és} \quad \frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$$
egyenlőségek – az első két tétel felhasználásával – nyilvánvalóan adják az állítást.

Megjegyzések:

1. A 3. Tétel teljes indukcióval adja, hogy véges sok Riemann-integrálható függvény szorzata is Riemann-integrálható.
2. Riemann-integrálható függvények kompozíciója általában nem Riemann-integrálható.
3. Legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $g : [c,d] \to \mathbb{R}$ és $R_f \subset [c,d]$. Ha f Riemann-integrálható és g folytonos, akkor $g \circ f$ Riemann-integrálható.

4. Tétel. *Ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható függvény, akkor $|f|$ is Riemann-integrálható.*

Bizonyítás. Legyen

$$g : [a,b] \to \mathbb{R},\ g \doteq \begin{cases} f(x) & ,\ \text{ha } f(x) \geq 0 \\ 0 & ,\ \text{ha } f(x) < 0 \end{cases}$$

és $\langle P_k \rangle$ $[a,b]$ tetszőleges felosztássorozata, hogy $P_k = \{x_0^k, \dots, x_{n_k}^k\}$ $(k \in \mathbb{N})$. Ha $k \in \mathbb{N}$ rögzített és m_i^k, M_i^k jelöli az f, míg m_i^{*k}, M_i^{*k} a g pontos alsó, illetve pontos felső korlátjait $[x_{i-1}^k, x_i^k]$-n, akkor

$$M_i^{*k} - m_i^{*k} \leq M_i^k - m_i^k \quad (i = 1, \dots, n_k)$$

teljesül. Ezen egyenlőtlenségeket Δx_i^k-val szorozva, összeadva

$$0 \leq \mathcal{O}(g, P_k) \leq \mathcal{O}(f, P_k)$$

adódik, amiből jön g, majd $|f| = 2g - f$ miatt $|f|$ Riemann-integrálhatósága.

7. Egyenlőtlenségek, középértéktételek Riemann-integrálra

1. Tétel. *Legyenek $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálhatók és $f \leq g$, akkor $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.*

Bizonyítás. Legyen $\langle P_k \rangle$ tetszőleges normális felosztássorozata $[a,b]$-nek, $t_i^k \in [x_{i-1}^k, x_i^k]$ tetszőleges, akkor $f(t_i^k) \leq g(t_i^k)$ miatt $\sigma(f, P_k) \leq \sigma(g, P_k)$, ami adja az állítást.

Megjegyzés: Ha $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvények és $f \le g$, akkor

$$\int_{\overline{a}}^{b} f \le \int_{\overline{a}}^{b} g \qquad \text{és} \qquad \int_{a}^{\underline{b}} f \le \int_{a}^{\underline{b}} g \ .$$

2. Tétel. *Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható, akkor*

$$\left| \int_{a}^{b} f \right| \le \int_{a}^{b} |f| \ .$$

Bizonyítás. $|f|$ Riemann-integrálhatóságát már bizonyítottuk, így a $-|f| \le f \le |f|$ egyenlőtlenségből az 1. tétel miatt $-\int |f| \le \int f \le \int |f|$, ami adja az állítást.

3. Tétel (középértéktétel). *Legyenek $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálhatók, továbbá*

$$m \le f(x) \le M \ , \quad 0 \le g(x) \qquad (x \in [a, b]),$$

akkor

$$m \cdot \int_{a}^{b} g \le \int_{a}^{b} f \cdot g \le M \cdot \int_{a}^{b} g \ .$$

Bizonyítás. $m \cdot g,\ f \cdot g,\ M \cdot g$ Riemann-integrálhatók és

$$m \cdot g \le f \cdot g \le M \cdot g$$

$[a, b]$-n, melyből az 1. tétel miatt jön az állítás.

Következmények:

1. Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható, $m \le f \le M$, akkor

$$m \le \frac{1}{b - a} \int_{a}^{b} f \le M \ .$$

Bizonyítás. A 3. tételből $g(x) = 1$ választással kapjuk az állítást.

2. Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, akkor $\exists\ c \in [a, b]$, hogy

$$f(c) = \frac{1}{b - a} \int_{a}^{b} f \ .$$

Bizonyítás. f folytonossága miatt $m = \inf f([a,b])$, $M = \sup f([a,b])$ függvényértékek, az 1. következmény miatt $\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f \in [m, M]$, így

Bolzano tétele miatt $\exists\, c$, hogy $f(c) = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f$, amit bizonyítani kellett.

4. Tétel (Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz egyenlőtlenség).
Ha $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható függvények,akkor

$$\left|\int\limits_a^b f\cdot g\right| \le \sqrt{\int\limits_a^b f^2}\sqrt{\int\limits_a^b g^2}\ .$$

Bizonyítás. Ha $\int\limits_a^b f^2 = \int\limits_a^b g^2 = 0$, akkor az $|f(x)\cdot g(x)| \le \frac{1}{2}(f^2(x) + g^2(x))$ egyenlőtlenségből az 1. tétel (és a műveleti tulajdonságok felhasználásával) $|\int\limits_a^b f\cdot g| = 0$ következik, így igaz a bizonyítandó egyenlőtlenség.

Ha pl. $\int\limits_a^b f^2 > 0$, akkor legyen $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, $F = (g - \lambda f)^2$, ahol $\lambda \in \mathbb{R}$ tetszőlegesen rögzített. F Riemann-integrálható és $F \ge 0$, így

$$0 \le \int\limits_a^b F = \lambda^2\int\limits_a^b f^2 - 2\lambda\int\limits_a^b f\cdot g + \int\limits_a^b g^2\ .$$

Ebből (hasonlóan, mint a C-B-S diszkrét változatánál) következik az állítás.

8. Az integrál, mint a felső határ függvénye

1. Definíció. Legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható, akkor

$$\int\limits_a^a f \doteq 0, \quad \int\limits_b^a \doteq -\int\limits_a^b$$

2. Definíció. Legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható, akkor az

$$F : [a,b] \to \mathbb{R}, \quad F(x) \doteq \int\limits_a^x f(t)dt \qquad \text{(I-F)}$$

szerint definiált F függvényt f integráljának, mint a felső határ függvényének nevezzük. Ezt szokás területmérő függvénynek, vagy f integrálfüggvényének is nevezni.

1. Tétel. *Legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható, akkor F (f integrálja, mint a felső határ függvénye) folytonos $[a,b]$-n.*

Bizonyítás. Ha $p, q \in [a,b]$ tetszőlegesek, akkor (az előző rész 2. tétele miatt)

$$\left|\int\limits_p^q f\right| \le \operatorname{sign}(q-p)\int\limits_p^q |f| \ .$$

f korlátos, így $\exists\ K \in \mathbb{R}$, hogy $|f| < K$. Ekkor $\forall\ \varepsilon > 0$-ra $\delta(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon}{K}$ mellett $\forall\ x, y \in [a,b],\ |x-y| < \delta(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon}{K}$ esetén

$$|F(x) - F(y)| = \left|\int\limits_a^x f - \int\limits_a^y f\right| = \left|\ \int\limits_x^y f\right| \le \operatorname{sign}(y-x)\int\limits_x^y |f| \le$$

$$\le \operatorname{sign}(y-x)\int\limits_x^y K = K[\operatorname{sign}(y-x)](y-x) = K|y-x| < \varepsilon$$

következik, ami adja F folytonosságát $\forall\ y \in [a,b]$ pontban.

2. Tétel. *Legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható és folytonos az $x \in [a,b]$ pontban, akkor az F (f integrálja, mint a felső határ függvénye) differenciálható x-ben, és $F'(x) = f(x)$. (Tehát, ha $f\ \forall\ x \in [a,b]$-ben folytonos, úgy F egy primitív függvénye f-nek.)*

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges, akkor f x-beli folytonossága miatt $\exists\ \delta(\varepsilon) > 0$, hogy

$$\forall\ t \in [a,b],\ |t-x| < \delta(\varepsilon) \implies |f(t) - f(x)| < \varepsilon \ .$$

Legyen h olyan, hogy $x + h \in [a,b]$ és $|h| < \delta(\varepsilon)$, akkor – felhasználva, hogy $\int\limits_x^{x+h} f(x)dt = hf(x)$ – jön:

$$\left|\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x)\right| = \left|\frac{1}{h}\left(\int\limits_a^{x+h} f(t)dt - \int\limits_a^x f(t)dt - \int\limits_x^{x+h} f(x)dt\right)\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{h}\left(\int\limits_x^{x+h} f(t)dt - \int\limits_x^{x+h} f(x)dt\right)\right| = \left|\frac{1}{h}\int\limits_x^{x+h} (f(t) - f(x))dt\right| \le$$

$$\leq \frac{1}{|h|}\operatorname{sign}(h)\int\limits_x^{x+h}|f(t)-f(x)|dt < \frac{1}{h}\int\limits_x^{x+h}\varepsilon dt = \frac{1}{h}h\varepsilon = \varepsilon \ ,$$

ami azt jelenti, hogy

$$\exists\ F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} \text{ és } = f(x) \ ,$$

amit bizonyítani kellett.
Ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos, úgy ez igaz $\forall\ x \in [a,b]$ esetén, azaz $F'(x) = f(x)$ $(x \in [a,b])$, tehát F egy primitív függvénye f-nek.
Tehát minden (intervallumon értelmezett) folytonos függvénynek van primitív függvénye.

9. A Newton-Leibniz formula

Tétel (Newton-Leibniz formula). *Legyen $f, F : [a,b] \to \mathbb{R}$ olyan, hogy f Riemann-integrálható, F folytonos $[a,b]$-n és differenciálható (a,b)-n, továbbá $F'(x) = f(x)$ $(x \in (a,b))$, akkor*

$$\int\limits_a^b f = F(b) - F(a)$$

(Az $F(b) - F(a)$ számot szokás $[F(x)]_a^b$ módon is jelölni.)

Bizonyítás. Legyen $\langle P_k \rangle = \langle \{x_i^k \mid i = 0,1,\ldots,n_k\} \rangle$ tetszőleges normális felosztássorozata $[a,b]$-nek. F teljesíti a Lagrange-tétel feltételeit bármely $[x_{i-1}^k, x_i^k]$ intervallumon, így $\exists\ t_i^k \in (x_{i-1}^k, x_i^k)$, hogy

$$F(x_i^k) - F(x_{i-1}^k) = F'(t_i^k)\Delta x_i^k = f(t_i^k)\Delta x_i^k \qquad \forall\ i = 0,1,\ldots,n_k \text{ esetén.}$$

Ezeket összegezve pedig

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n_k}(F(x_i^k) - F(x_{i-1}^k)) = \sum_{i=1}^{n_k} f(t_i^k)\Delta x_i^k = \sigma(f, P_k)$$

következik $\forall\ k$-ra, így $k \to \infty$ esetén (f integrálhatósága miatt)

$$F(b) - F(a) = \sigma(f, P_k) \to \int\limits_a^b f \ ,$$

azaz $F(b) - F(a) = \int_a^b f$ (mert $\sigma(f, P_k)$ konstans sorozat), és ezt kellett bizonyítani.

10. Parciális és helyettesítéses Riemann-integrálok

1. Tétel (parciális Riemann-integrálás). *Ha az $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvények folytonosan differenciálhatók, akkor*

$$\int_a^b fg' = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'g \ .$$

Bizonyítás. Legyen $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, $F(t) = \int_a^t fg' + \int_a^t f'g + f(a)g(a) - f(t)g(t)$, akkor $\forall\ t \in [a,b]$-re $\exists\ F'(t)$ és

$$F'(t) = f(t)g'(t) + f'(t)g(t) - [f(t)g(t)]' = 0 \qquad (\forall\ t \in [a,b]),$$

így $F(t) \equiv c$, illetve $F(a) \doteq 0$ miatt $c = 0$ és ezért $F(b) = 0$, ami F definíciójából adja az állítást.

2. Tétel (helyettesítéses Riemann-integrálás).
Ha $g : [a,b] \to [c,d]$ folytonosan differenciálható, $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ folytonos, akkor

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\ dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\ dx \ .$$

Bizonyítás. Legyen $H : [c,d] \to \mathbb{R}$, $H(u) \doteq \int_{g(a)}^{u} f(x)dx$, akkor H differenciálható és $H'(x) = f(x)$ $(x \in [c,d])$. Legyen továbbá $G : [c,d] \to \mathbb{R}$

$$G(t) = \int_a^t f(g(x))g'(x)\ dx - \int_{g(a)}^{g(t)} f(x)\ dx \ ,$$

akkor $\exists\ G'(t) = f(g(t))g'(t) - H'(g(t))g'(t) = 0$, és így $G(t) \equiv c$. De akkor $G(a) = 0 \implies c = 0 \implies G(b) = 0$, ami G definíciója miatt adja az állítást.

11. Függvénysorozatok és függvénysorok tagonkénti integrálhatósága és differenciálhatósága

1. Tétel. *Ha az $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ $(n = 1, 2, \dots)$ függvények Riemann-integrálhatók $[a,b]$-n és az $\langle f_n \rangle$ függvénysorozat egyenletesen konvergál az $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvényhez $[a,b]$-n, akkor f Riemann-integrálható $[a,b]$-n és*

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n \tag{1}$$

teljesül.

Bizonyítás.

a) f korlátos, mert $\langle f_n \rangle$ egyenletes konvergenciája miatt $\forall\ \varepsilon > 0$ esetén $\exists\ N(\varepsilon)$, hogy $\forall\ n > N(\varepsilon)$-ra $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ $(x \in [a,b])$, így

$$f_n(x) - \varepsilon < f(x) < f_n(x) + \varepsilon \qquad (x \in [a,b],\ n > N(\varepsilon)),$$

ami f_n korlátossága miatt adja f korlátosságát.

b) f Riemann-integrálható, mert ha $\varepsilon > 0$ tetszőleges, úgy $\dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$-hoz (az egyenletes konvergencia miatt) $\exists\ N(\varepsilon)$, hogy $\forall\ n > N(\varepsilon)$-ra

$$f_n(x) - \frac{\varepsilon}{2(b-a)} < f(x) < f_n(x) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \qquad (\forall\ x \in [a,b]) \tag{2}$$

teljesül. (2)-ből (az integrál és az egyenlőtlenségekre vonatkozó tételek miatt) $n > N(\varepsilon)$-ra

$$\int_a^b \left(f_n - \tfrac{\varepsilon}{2(b-a)}\right) = \underline{\int_a^b} \left(f_n - \tfrac{\varepsilon}{2(b-a)}\right) \le \underline{\int_a^b} f \le$$

$$\le \overline{\int_a^b} f \le \overline{\int_a^b} \left(f_n + \tfrac{\varepsilon}{2(b-a)}\right) = \int_a^b \left(f_n + \tfrac{\varepsilon}{2(b-a)}\right) ,$$

melyből $\overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f \le 2\dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) = \varepsilon$ következik $\forall\ \varepsilon > 0$-ra, így $\underline{I} = \bar{I}$, azaz f Riemann-integrálható.

c) (1) is teljesül, mert $\forall\ \varepsilon > 0$-ra $\dfrac{\varepsilon}{b-a}$-hoz $\exists\ N(\varepsilon)$ (az $\langle f_n \rangle$ egyenletes konvergenciája miatt), hogy $\forall\ n > N(\varepsilon)$-ra

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \qquad (\forall\ x \in [a,b]),$$

így f és f_n Riemann-integrálhatósága és az integrál tulajdonságai miatt

$$\left|\int_a^b f - \int_a^b f_n\right| = \left|\int_a^b (f - f_n)\right| \le \int_a^b |f - f_n| \le \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon\ ,$$

ami adja (1)-et.

Következmény: *Ha az $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvények Riemann-integrálhatók $[a,b]$-n, és $\sum f_n$ egyenletesen konvergál $[a,b]$-n az $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvényhez, akkor f Riemann-integrálható $[a,b]$-n és $\int_a^b f = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n$.*

Bizonyítás. A $\sum f_n$ függvénysor $\langle S_n \rangle$ részletösszeg sorozatára alkalmazzuk az 1. tételt.

2. Tétel. *Ha az $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ $(n = 1, 2, \dots)$ függvények folytonosan differenciálhatók $[a,b]$-n, valamely $x_0 \in [a,b]$ esetén $\langle f_n(x_0) \rangle$ konvergens, továbbá $\langle f_n' \rangle$ egyenletesen konvergens $[a,b]$-n, akkor $\langle f_n \rangle$ egyenletesen konvergál egy $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvényhez $[a,b]$-n, $\exists\ f'$ és*

(3) $$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x) \qquad (x \in [a,b])$$

Bizonyítás.

a) f_n' folytonossága miatt $\forall\ x \in [a,b]$-re $\exists \int_{x_0}^{x} f_n'$ és a N-L formula miatt $\int_{x_0}^{x} f_n' = f_n(x) - f_n(x_0) \quad \forall\ x \in [a,b]$ és $\forall\ n \in \mathbb{N}$ esetén, így

(4) $$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_n' \qquad (x \in [a,b],\ n \in \mathbb{N})\ .$$

b) Ha $f_n' \to g : [a,b] \to \mathbb{R}$, akkor ($f_n'$ folytonossága és $\langle f_n' \rangle$ egyenletes konvergenciája miatt) g folyonos $[a,b]$-n. Ezért g Riemann-integrálható $[a,b]$-n és az 1. tétel miatt

$$\lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} f_n' = \int_{x_0}^{x} g \qquad (\forall\ x \in [a,b])$$

teljesül, továbbá a konvergencia egyenletes. Ekkor (4) adja, hogy
$\exists\ f : [a,b] \to \mathbb{R}$, hogy

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \qquad (\forall\ x \in [a,b]),$$

és a konvergencia egyenletes.

c) Másrészt – ugyancsak (4)-ből – kapjuk g-re, hogy

$$\int_{x_0}^{x} g = \lim_{n\to\infty} [f_n(x) - f_n(x_0)] = f(x) - f(x_0) \qquad (\forall\, x \in [a,b]) ,$$

amiből – felhasználva, hogy g folytonos és így $\int_{x_0}^{x} g$ differenciálható és deriváltja g – következik, hogy $\exists\ (f - f(x_0))'$ és $= f'$, azaz $f' = g$ az $[a,b]$ intervallumon, így $f_n' \to f'$, amit bizonyítani kellett.

Következmények:

1. Ha $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ $(n = 1, 2, \dots)$ folytonosan differenciálhatók és $\exists\, x_0 \in [a,b]$, hogy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ konvergens és $\sum f_n'$ egyenletesen konvergens $[a,b]$-n, akkor $\exists\ \sum f_n = f$ és $\exists\ f' = \sum f_n'$.

2. A tétel speciális esete a hatványsorok differenciálhatóságára vonatkozó tétel (hiszen a feltételek ekkor természetesen teljesülnek).

12. Improprius Riemann-integrál

1. Definíció. Legyen $a \in \mathbb{R},\ a < b \le +\infty,\ f : [a,b) \to \mathbb{R}$ minden $[a,t] \subset [a,b)$ intervallumon korlátos és Riemann-integrálható függvény. Tegyük fel továbbá, hogy $b = +\infty$ vagy $\exists\ \varepsilon > 0$, hogy f nem korlátos a $[b - \varepsilon, b)$ intervallumban. Ha létezik a

$$\lim_{t \to b-0} \int_a^t f \doteq \int_a^b f \tag{1}$$

véges határérték, akkor azt az f függvény improprius Riemann-integrálјának nevezzük $[a,b)$-n. Ilyenkor azt mondjuk, hogy az $\int_a^b f$ improprius integrál konvergens. Ha (1) nem létezik, akkor az improprius integrált divergensnek mondjuk.

2. Definíció. Ha $a \in \mathbb{R},\ -\infty \le c < a,\ f : (c,a] \to \mathbb{R}$ minden $[t,a] \subset (c,a]$ intervallumon korlátos és Riemann-integrálható, $c = -\infty$ vagy $\exists\ \varepsilon > 0$, hogy f nem korlátos $(c, c+\varepsilon]$-on. Ha létezik a

$$\lim_{t\to c+0} \int_t^a f \doteq \int_c^a f \tag{2}$$

véges határérték, akkor azt az f improprius Riemann-integráljának nevezzük $(c, a]$-n. (A konvergencia illetve a divergencia az előzőekhez hasonló.)

3. Definíció. Legyen $-\infty \le a < b \le +\infty, f : (a, b) \to \mathbb{R}$ $\forall$ $[x, y] \subset (a, b)$ intervallumon korlátos és Riemann-integrálható, továbbá $a = -\infty$ vagy $b = +\infty$ (vagy mindkettő) vagy $\exists$ $\varepsilon > 0$, hogy f nem korlátos az $(a, a+\varepsilon] \cup [b-\varepsilon, b)$ intervallmon. Akkor a

$$\lim_{\substack{x\to a+0\\ y\to b-0}} \int_x^y f \doteq \int_a^b f$$

véges határértéket (ha létezik) f (a, b) feletti improprius Riemann-integráljának nevezzük.

PÉLDÁK:

$$\int_1^\infty x^\alpha \, dx = \begin{cases} -\dfrac{1}{\alpha+1} & \text{, ha } \alpha < -1 \\ \text{divergens} & \text{, egyébként.} \end{cases} \tag{$\diamond$}$$

$$\int_0^\infty e^{\alpha\cdot x} \, dx = \begin{cases} -\frac{1}{\alpha} & ,\ \alpha < 0 \\ +\infty & ,\ \alpha \ge 0\ . \end{cases} \tag{$\diamond\diamond$}$$

1. Tétel. *Ha az* $\int_a^b f$, $\int_a^b g$ *improprius Riemann-integrálok konvergensek,* $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, *akkor* $\int_a^b (\lambda_1 f + \lambda_2 g)$ *is konvergens, és*

$$\int_a^b (\lambda_1 f + \lambda_2 g) = \lambda_1 \cdot \int_a^b f + \lambda_2 \cdot \int_a^b g\ .$$

Bizonyítás. Például $\int_a^t$-re igaz, majd $t \to b-0$-val jön az állítás.

2. Tétel. *Legyen* $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$, $m \le f \le M$, $g \ge 0$, $\exists$ $\int_a^b g$, $\int_a^b fg$

improprius integrálok, akkor

$$m \cdot \int_a^b g \le \int_a^b fg \le M \cdot \int_a^b g \ ,$$

illetve ha f folytonos, úgy $\exists\ \xi \in [a,b)$, hogy

$$\int_a^b fg = f(\xi)\int_a^b g \ .$$

Bizonyítás. A Riemann-integrálra vonatkozó tétel alapján.

3. Tétel. *Legyen $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}_b$, $a < b$, $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható $\forall\ [a,c] \subset [a,b)$ intervallumon, és $d \in [a,b)$.*
Ha az $\int_a^b f$ improprius integrál konvergens, akkor az $\int_d^b f$ is az, továbbá

$$\int_a^b f = \int_a^d f + \int_d^b f$$

(ahol $\int_a^d f$ f $[a,d]$ feletti Riemann-integrálját, míg $\int_d^b f$ f $[d,b)$-re való leszűkítésének improprius integrálját jelöli.)

Bizonyítás. Mivel $\forall\ x \in (d,b)$-re

$$\int_a^x f(t)dt = \int_a^d f(x)\ dx + \int_d^x f(t)dt \ ,$$

ebből következik az állítás.

4. Definíció. Az $\int_a^b f$ (vagy $\int_c^a f$) improprius integrál abszolút konvergens, ha $\int_a^b |f|$ (vagy $\int_c^a |f|$) konvergens.

Megjegyzések:

1. Ha például $\int_a^b f$ abszolút konvergens $\Longrightarrow$ konvergens (mert $\left|\int_{t_1}^{t_2} f\right| \le \int_{t_1}^{t_2} |f|$).

2. Legyen $f, g : [a,b) \to \mathbb{R}$, $|f| \le g$, $\int_a^b g$ konvergens, akkor $\int_a^b f$ abszolút konvergens (majoráns kritérium).

3. Megfogalmazhatók a parciális és helyettesítéses improprius Riemann-integrálra vonatkozó tételek és a N-L formula egy változata is.

4. **Cauchy-McLaurin integrálkritérium sorokra:**
Legyen $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$*, hogy* $f \geq 0$ *és monoton csökkenő.*
A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ *sor akkor és csak akkor konvergens, ha az* $\int\limits_{1}^{\infty} f$ *improprius Riemann-integrál konvergens.*

2. feladatsor

1) Vezesse vissza alapintagrálokra a következő integrálok kiszámítását:

$$\int (3-x^2)^3\ dx\ ; \qquad \int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2\ dx\ ; \qquad \int \frac{x+a}{\sqrt{x}}\ dx\ ;$$

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}\ dx\ ; \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}}\ dx\ ; \qquad \int \sqrt{1-\sin 2x}\ dx\ ;$$

$$\int \operatorname{tg}^2 x\ dx\ ; \qquad \int \operatorname{cth}^2 x\ dx\ ;$$

$$\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}\ dx\ ; \qquad \int \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}}\ dx\ .$$

2) Határozza meg az alábbi integrálokat:

$$\int \frac{1}{\cos^2(3x-5)}\ dx\ ; \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2+9}}\ dx\ ; \qquad \int \sqrt[3]{1-3x}\ dx\ ;$$

$$\int \frac{1}{2+3x^2}\ dx\ ; \qquad \int \frac{1}{\sqrt{3x^2-2}}\ dx\ ; \qquad \int (2x-3)^{10}\ dx\ ;$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{2-5x}}\ dx\ ; \qquad \int (e^{-x}+e^{-2x})\ dx\ ;$$

Útmutatás:
Ha $\int f(x)\ dx = F(x)+C$, akkor $\int f(ax+b)\ dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C$.

3) Határozza meg az alábbi integrálokat:

$$\int x^2\sqrt[3]{1+x^3}\ dx\ ; \int \operatorname{tg} x\ dx\ ; \qquad \int x^2 e^{x^3+8}\ dx\ ; \qquad \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ dx\ ;$$

$$\int \frac{x}{3-2x^2}\ dx\ ; \qquad \int \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\ dx\ ; \qquad \int \frac{x}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}\ dx\ ; \int \frac{e^x}{2+e^x}\ dx\ ;$$

$$\int \frac{\ln^2 x}{x}\ dx\ ; \qquad \int \sin^5 x\cos x\ dx\ ; \int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}}\ dx\ ; \qquad \int \frac{\sin 2x}{3+\sin^2 x}\ dx\ .$$

Útmutatás:

$$\int f^\alpha\cdot f' = \frac{f^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C \quad (\alpha\neq -1); \qquad \int \frac{f'}{f} = \ln(f)+C \quad (f>0);$$

$$\int f(g(x))g'(x)\ dx = \int f(t)dt + C|_{t=g(x)}$$

4) A helyettesítéses integrálás tételét alkalmazva számítsa ki az alábbi integrálokat:

$$\int x^2 \sqrt[3]{1-x}\ dx\ ; \qquad \int \frac{x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}\ dx\ ; \qquad \int (1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\ dx\ ;$$

$$\int \sqrt{2+x^2}\ dx\ ; \qquad \int \frac{1}{x \log x \log(\log x)}\ dx\ ; \qquad \int \frac{x}{4+x^4}\ dx\ ;$$

$$\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}\ dx\ ; \qquad \int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\ dx\ ; \qquad \int \frac{1}{\sqrt{e^{2x}+1}}\ dx\ .$$

5) Algebrai átalakításokkal számítsa ki az alábbi integrálokat:

$$\int \frac{1}{1+\cos x}\ dx\ ; \quad \int \frac{1}{1-\cos x}\ dx\ ; \quad \int \frac{1}{\sin x}\ dx\ ; \quad \int \frac{1}{\cos x}\ dx\ ;$$

$$\int \frac{1}{\operatorname{sh} x}\ dx\ ; \quad \int \frac{1+x}{1-x}\ dx\ ; \quad \int \frac{x^2}{1+x}\ dx\ ; \quad \int \frac{(2-x)^2}{2-x^2}\ dx\ ;$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\ dx\ ; \quad \int x\sqrt{2-5x}\ dx\ ; \quad \int \frac{1}{x^2+x-2}\ dx\ ;$$

$$\int \frac{1}{(x^2+1)(x^2+2)}\ dx\ ; \quad \int \sin^2 x\ dx\ ; \quad \int \cos^2 x\ dx\ ;$$

$$\int \sin x \cdot \sin(x+\alpha)\ dx\ ; \quad \int \sin 3x \cdot \sin 5x\ dx\ ; \quad \int \cos\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{3}\ dx\ ;$$

$$\int \sin^3 x\ dx\ ; \quad \int \sin^4 x\ dx\ ; \quad \int \operatorname{ctg}^2 x\ dx\ .$$

6) Parciális integrálással határozza meg az alábbi integrálokat:

$$\int \ln x\ dx\ ; \quad \int (x^2+2x)\ln x\ dx\ ; \quad \int \sqrt{x}\ln^2 x\ dx\ ;$$

$$\int (x-1)e^x\ dx\ ; \quad \int x^2 e^{-2x}\ dx\ ; \quad \int x\cos x\ dx\ ;$$

$$\int (x^2+x)\operatorname{ch} x\ dx\ ; \quad \int x^2 \sin 2x\ dx\ ; \quad \int \operatorname{arctg} x\ dx\ ;$$

$$\int \arcsin x\ dx\ ; \quad \int x^2 \arccos x\ dx\ ; \quad \int x \operatorname{arctg} x\ dx\ ;$$

$$\int e^{2x}\cos 3x\ dx\ ; \quad \int \sin^n x\ dx\ .$$

7) Végezze el az alábbi racionális törtfüggvények integrálását:

$$\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}\,dx\ ; \qquad \int \frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)}\,dx\ ;$$

$$\int \frac{x^{10}}{x^2+x-2}\,dx\ ; \qquad \int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}\,dx\ ;$$

$$\int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4}\,dx\ ; \qquad \int \frac{x}{x^3-3x+2}\,dx\ ;$$

$$\int \left(\frac{x}{x^2-3x+2}\right)^2 dx\ ; \qquad \int \frac{x^2+5x+4}{x^4+5x^2+4}\,dx\ ;$$

$$\int \frac{1}{(x+1)(x^2+1)}\,dx\ ; \qquad \int \frac{1}{(x^3+1)^2}\,dx\ ;$$

$$\int \frac{x^2}{(x^2+2x+2)^2}\,dx\ ; \qquad \int \frac{x^2+3x-2}{(x-1)(x^2+x+1)^2}\,dx\ .$$

8) Alkalmas helyettesítéssel vezesse vissza az alábbi integrálokat racionális törtfüggvények integráljaira:

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx\ ; \qquad \int \frac{1}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}\,dx\ ;$$

$$\int \frac{x\sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}}\,dx\ ; \qquad \int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{2x-3}{x}}\,dx\ ;$$

$$\int x\sqrt{x^2+x+1}\,dx\ ; \qquad \int \sqrt{x^2-6x-7}\,dx\ ;$$

$$\int \frac{1}{1+\sin x+\cos x}\,dx\ ; \qquad \int \frac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x}\,dx\ ;$$

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}\,dx\ ; \qquad \int \frac{1}{2\sin x-\cos x+5}\,dx\ ;$$

$$\int \frac{1}{(2+\cos x)\sin x}\,dx\ ; \qquad \int \frac{e^x}{1-e^{2x}}\,dx\ ;$$

$$\int \sqrt{e^x-1}\,dx\ .$$

9) Számítsa ki az alábbi integrálokat (vegyes feladatok):

$$\int \frac{x^4+x^{-4}+2}{x^3}\,dx\ ; \qquad \int \frac{2^x\cdot 3^x}{9^x\cdot 4^x}\,dx\ ;$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}\,dx\ ; \qquad \int x^n \ln x\,dx\ ;$$
$$\int x^3 \cdot e^{-x^2}\,dx\ ; \qquad \int \sin x \ln(\operatorname{tg} x)\,dx\ ;$$
$$\int e^{ax}\cos bx\,dx\ ; \qquad \int x\sin\sqrt{x}\,dx\ ;$$
$$\int e^{2x}\sin^2 x\,dx\ ; \qquad \int \frac{x}{x^3-1}\,dx\ ;$$
$$\int \frac{1}{x^3+1}\,dx\ ; \qquad \int \frac{1}{(x+1)(x^2+1)(x^3+1)}\,dx\ ;$$

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^3}\,dx\ ; \qquad \int \frac{x^3}{(x-1)^{100}}\,dx\ ; \qquad \int \frac{x^4+1}{x^6+1}\,dx\ ;$$
$$\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}\,dx\ ; \qquad \int \frac{1}{x}\sqrt{x^2+2x+2}\,dx\ ; \qquad \int \frac{1}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}\,dx\ ;$$
$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^6 x}\,dx\ ; \qquad \int \sin 5x\cos x\,dx\ ; \qquad \int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}\,dx\ ;$$
$$\int xe^x\sin x\,dx\ ; \qquad \int xe^x\sin^2 x\,dx\ ; \qquad \int \frac{1}{(1+e^x)^2}\,dx\ ;$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{e^x-1}}\,dx\ ; \qquad \int \operatorname{ch}^4 x\,dx\ ; \qquad \int \frac{1}{\operatorname{sh} x+2\operatorname{ch} x}\,dx\ ;$$
$$\int \operatorname{sh} ax\cos bx\,dx\ ; \qquad \int \frac{1}{1+x^4+x^8}\,dx\ ; \qquad \int \sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}}\,dx\ ;$$
$$\int \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,dx\ ; \qquad \int \sqrt{1-x^2}\,dx\ ; \qquad \int \sqrt{1-x^2}\arcsin x\,dx\ ;$$
$$\int x^x(1+\ln x)\,dx\ ; \qquad \int x|x|\,dx\ ; \qquad \int e^{-|x|}\,dx\ ;$$
$$\int \max(1;x^2)\,dx\ ; \qquad \int xf''(x)\,dx\ ; \qquad \int f'(2x)\,dx\ .$$

10) Döntse el, hogy az alábbi $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ függvények közül melyek Riemann-integrálhatók:

$$f(x) = x+5\ ; \qquad f(x) = x^2\ ; \qquad f(x) = \operatorname{sign}(x)\ ;$$

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} & ,\ \text{ha } x\neq 0 \\ 0 & ,\ \text{ha } x=0 \end{cases}\ ; \qquad f(x)=\begin{cases} 2 & ,\ \text{ha } \dfrac{x}{\sqrt{2}}\in\mathbb{Q} \\ -1 & ,\ \text{egyébként} \end{cases}\ .$$

11) Határozza meg $\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,dx$ értékét, ha:

$f(x)=3$; $\qquad f(x)=[x]$; $\qquad f(x)=x$; $\qquad f(x)=\{x\}$;

$$f(x)=\begin{cases} 5 & ,\ \text{ha } |x|>\dfrac{1}{2} \\ -2 & ,\ \text{ha } |x|\leq\dfrac{1}{2} \end{cases}\ .$$

12) Számítsa ki az alábbi integrálok értékét:

$$\int\limits_{-1}^{2} x^2\,dx\ ; \qquad \int\limits_{-1}^{8} \sqrt[3]{x}\,dx\ ; \qquad \int\limits_{0}^{\pi} \sin x\,dx\ ;$$

$$\int\limits_{-\frac12}^{\frac12} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\ ; \qquad \int\limits_{\frac{1}{\sqrt3}}^{\sqrt3} \frac{1}{1+x^2}\,dx\ ; \qquad \int\limits_{0}^{\pi} x\sin x\,dx\ ;$$

$$\int\limits_{-1}^{0} \frac{1}{x^2-3x+2}\,dx\ ; \qquad \int\limits_{-2}^{-1} \frac{1}{x^2+4x+5}\,dx\ ; \qquad \int\limits_{1}^{e} \frac{\sin(\pi\log x)}{x}\,dx\ ;$$

$$\int\limits_{0}^{\pi} \sin^3 x\,dx\ ; \qquad \int\limits_{0}^{1} x^2e^x\,dx\ ; \qquad \int\limits_{0}^{1} \arccos x\,dx\ .$$

13) Számítsa ki az alábbi határértékeket:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}\right)\ ;$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}\ ; \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}} \qquad (p>0).$$

14) Határozza meg az $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvény lokális szélsőértékhelyeit, ha:

$$F(x)=\int\limits_{0}^{x}\log\frac{1+t^2}{5}\,dt\ ; \qquad F(x)=\int\limits_{\pi}^{x}\frac{\sin t}{2+\cos t}\,dt\ .$$

15) Határozza meg az $F : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ függvény deriváltját, ha:

$$F(x) = \int_x^{x^2} e^{-\frac{1}{t^2}}\, dt \; ; \qquad F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}} \cos(t^2)\, dt \; .$$

16) Bizonyítsa be, hogy:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\, dx = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} \prod\limits_{i=1}^{k} \dfrac{2i-1}{2i} & , \text{ ha } n = 2k \\ \prod\limits_{i=1}^{k} \dfrac{2i-1}{2i} & , \text{ ha } n = 2k+1 \; . \end{cases}$$

17) Döntse el, hogy az alábbi improprius integrálok közül melyek konvergensek:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^5}\, dx \; ; \qquad \int_1^\infty \frac{1}{x}\, dx \; ; \qquad \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3}}\, dx \; ;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx \; ; \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \sin x\, dx \; ; \qquad \int_1^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{x^3}\, dx \; .$$

18) Számítsa ki az alábbi improprius integrálokat:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx \; ; \qquad \int_{-2}^{2} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\, dx \; ; \qquad \int_1^\infty \frac{1}{x^3}\, dx \; ;$$

$$\int_0^\infty e^{-3x}\, dx \; ; \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\, dx \; ; \qquad \int_2^\infty \frac{1}{1-x^2}\, dx \; .$$

19) Határozza meg az alábbi integrálokat:

$$\int_0^1 e^{x^2}\, dx \; ; \qquad \int_0^1 \frac{\sin x}{x}\, dx \; ; \qquad \int_0^{\frac{1}{2}} x^p(1-x^n)^m\, dx \quad (p \geq 0,\ n \geq 0,\ m \geq 0).$$

III. A RIEMANN-INTEGRÁL ÁLTALÁNOSÍTÁSA ÉS ALKALMAZÁSA

1. Korlátos változású függvények

1. Definíció. Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ adott függvény,

$$P \doteq \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\}$$

$[a, b]$ egy felosztása. A

$$V(f, [a, b], P) \doteq \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \tag{1}$$

összeget az f függvény ($[a, b]$ feletti) P felosztáshoz tartozó variációjának nevezzük.

2. Definíció. Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ adott, P az $[a, b]$ egy tetszőleges felosztása, akkor a

$$V(f, [a, b]) = \sup_P V(f, [a, b], P) = \sup_P \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \tag{2}$$

számot az f függvény $[a, b]$ feletti teljes (totális) változásának (variációjának) nevezzük.

3. Definíció. Az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény korlátos változású $[a, b]$-n, ha

$$V(f, [a, b]) < +\infty \tag{3}$$

teljesül.

1. Tétel. *Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monoton, akkor korlátos változású.*

Bizonyítás. Ha például f monoton növekvő, P egy felosztása $[a, b]$-nek, akkor $f(x_{k+1}) - f(x_k) \geq 0$ $\forall$ k-ra, így

$$V(f, [a, b], P) = \sum_{k=0}^{n-1} (f(x_{k+1}) - f(x_k)) = f(b) - f(a) \qquad \forall\ P\text{-re}\ ,$$

ezért $V(f, [a, b]) = f(b) - f(a) < +\infty$, amit bizonyítani kellett.

2. Tétel. *Ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos változású, akkor korlátos.*

Bizonyítás. Legyen $x \in [a,b]$ tetszőleges, $P = \{a, x, b\}$ az $[a,b]$ egy felosztása, akkor

$$V(f,[a,b],P) = |f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)| < V(f,[a,b]) < +\infty \ ,$$

így $|f(x) - f(a)| < V(f,[a,b])$, azaz

$$f(a) - V(f,[a,b]) < f(x) < f(a) + V(f,[a,b]) \ ,$$

ami adja f korlátosságát.

Megjegyzés: Egy folytonos függvény nem feltétlenül korlátos változású.

3. Tétel. *Ha $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos változású függvények, akkor $f + g,\ f - g,\ f \cdot g : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos változásúak. Továbbá $g \geq \sigma > 0$ ($\sigma \in \mathbb{R}$) esetén $\dfrac{f}{g}$ is korlátos változású.*

Bizonyítás. Például $F = f + g$-re

$$\begin{aligned}|F(x_{k+1}) - F(x_k)| &= |f(x_{k+1}) + g(x_{k+1}) - f(x_k) - g(x_k)| \leq \\ &\leq |f(x_{k+1}) - f(x_k)| + |g(x_{k+1}) - g(x_k)| \ ,\end{aligned}$$

és ezért (1) miatt

$$V(F,[a,b],P) \leq V(f,[a,b],P) + V(g,[a,b],P) \ ,$$

amiből (2) miatt

$$V(F,[a,b]) \leq V(f,[a,b]) + V(g,[a,b]) < +\infty$$

következik, ami adja az állítást.
A másik két állítás hasonlóan bizonyítható.

4. Tétel. *Ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ adott függvény, $c \in [a,b]$ tetszőleges, akkor*

$$V(f,[a,b]) = V(f,[a,c]) + V(f,[c,b]) \tag{4}$$

teljesül.

Bizonyítás.
– Legyen P_1 $[a,c]$, P_2 $[c,b]$ egy felosztása, akkor $P_1 \cup P_2$ felosztása $[a,b]$-nek és (1) miatt

$$V(f,[a,b],P_1 \cup P_2) = V(f,[a,c],P_1) + V(f,[c,b],P_2)$$

következik, amiből (2) miatt előbb

$$V(f, [a, c], P_1) + V(f, [c, b], P_2) \le V(f, [a, b]) ,$$

majd

$$V(f, [a, c]) + V(f, [c, b]) \le V(f, [a, b]) \tag{5}$$

következik.

– Legyen most $P \doteq \{a = x_0, x_1, \ldots, x_j, x_{j+1}, \ldots, x_n = b\}$ $[a, b]$ tetszőleges felosztása, hogy $x_j \le c \le x_{j+1}$, akkor

$$P_1 = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_j, c\}, \qquad P_2 = \{c, x_{j+1}, \ldots, x_n = b\}$$

felosztása $[a, c]$, illetve $[c, b]$-nek, továbbá

$$|f(x_{j+1}) - f(x_j)| \le |f(x_{j+1}) - f(c)| + |f(c) - f(x_j)|$$

miatt

$$V(f, [a, b], P) = \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \le$$

$$\le \sum_{k=0}^{j-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| + |f(c) - f(x_j)| + |f(x_{j+1}) - f(c)| +$$

$$+ \sum_{k=j+1}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| =$$

$$= V(f, [a, c], P_1) + V(f, [c, b], P_2) \le V(f, [a, c]) + V(f, [c, b]) ,$$

illetve

$$V(f, [a, b]) \le V(f, [a, c]) + V(f, [c, b])$$

adódik, mely (5)-tel együtt adja az állítást.

Következmények:

1. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ akkor és csak akkor korlátos változású $[a, b]$-n, ha korlátos változású $[a, c]$-n és $[c, b]$-n.

2. Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ olyan, hogy monoton az $[a, a_1]$, $[a_1, a_2], \ldots,$ $[a_{n-1}, b]$ intervallumokon, akkor korlátos változású $[a, b]$-n.

5. Tétel (Jordan). *Az $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény akkor és csak akkor korlátos változású $[a,b]$-n, ha léteznek $g, h : [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton függvények, hogy $f = g - h$.*

Bizonyítás.

a) Legyen $f = g - h$, ahol g, h monoton. Ha P tetszőleges felosztása $[a,b]$-nek, akkor

$$V(f,[a,b],P) \le \sum_{k=0}^{n-1} |g(x_{k+1}) - g(x_k)| + \sum_{k=0}^{n-1} |h(x_{k+1}) - h(x_k)| =$$
$$= |g(b) - g(a)| + |h(b) - h(a)| \ ,$$

ami adja, hogy f korlátos változású $[a,b]$-n

b) Legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos változású.

$$g(x) \doteq \frac{1}{2}\left(V(f,[a,x]) + f(x)\right) \ ; \qquad h(x) \doteq \frac{1}{2}\left(V(f,[a,x]) - f(x)\right) \ .$$

Nyilvánvaló, hogy $f = g - h$. Megmutatjuk, hogy g, h monoton növekedőek:

Legyen $a \le x < y \le b$, x, y tetszőlegesek, akkor

$$g(y) - g(x) = \frac{1}{2}\left[V(f,[x,y]) + f(y) - f(x)\right] \ .$$

Másrészt

$$-(f(y) - f(x)) \le |f(y) - f(x)| \le V(f,[x,y]) \ ,$$

ami (az előbbivel együtt) adja, hogy $g(y) - g(x) \ge 0$, így g monoton növekedő $[a,b]$-n.

h monoton növekedő volta hasonlóan jön.

2. Riemann-Stieltjes integrál

1. Definíció. Legyenek $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvények, $P \doteq \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\}$ $[a,b]$ egy tetszőleges felosztása, $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ tetszőleges. A

$$\sigma(f,g,P) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k) \cdot [g(x_k) - g(x_{k-1})]$$

számot az f függvény P felosztáshoz, és a $t_k \quad (k = 1, \ldots, n)$ értékekhez tartozó, g-re vonatkozó Riemann-Stieltjes integrálközelítő összegének nevezzük.

2. Definíció. Az f függvény Riemann-Stieltjes integrálható a g függvényre vonatkozóan $[a, b]$-n, ha $[a, b]$ $\forall$ $\langle P_n \rangle$ normális felosztássorozatához tartozó $\forall$ $\langle \sigma(f, g, P_n) \rangle$ Riemann-Stieltjes integrálközelítő összegsorozat konvergens. E sorozatok (egyébként közös) határértékét, a

$$\lim_{n \to \infty} \sigma(f, g, P_n) \doteq \int_a^b f dg \qquad \left(= \int_a^b f(x) dg(x) \right)$$

számot az f függvény g-re vonatkozó Riemann-Stieltjes integráljának nevezzük $[a, b]$-n.

Megjegyzés: Ha $g(x) = x \quad (x \in [a, b]), \quad f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos,akkor a Riemann-Stieltjes integrál a Riemann-integrált adja.

1. Tétel. *Ha* $\exists \int_a^b f_1 dg, \ \int_a^b f_2 dg \implies \exists \int_a^b (f_1 + f_2) dg = \int_a^b f_1 dg + \int_a^b f_2 dg.$

Bizonyítás. A definíció közvetlen felhasználásával.

2. Tétel. *Ha* $\exists \int_a^b f dg_1, \ \int_a^b f dg_2 \implies \exists \int_a^b f d(g_1 + g_2) = \int_a^b f dg_1 + \int_a^b f dg_2.$

Bizonyítás. A definíció alapján.

3. Tétel. *Ha* $\exists \int_a^b f dg$ *és* $k, l \in \mathbb{R} \implies \exists \int_a^b (kf) d(lg) = kl \int_a^b f dg.$

Bizonyítás. A definíció alapján.

4. Tétel. *Ha* $a < c < b$ *és* $\exists \int_a^b f dg, \ \int_a^c f dg, \ \int_c^b f dg \implies \int_a^b f dg = \int_a^c f dg + \int_c^b f dg.$

Bizonyítás. A definíció alapján.

5. Tétel (parciális integrálás). *Ha az* $\int\limits_a^b f dg$ *és* $\int\limits_a^b g df$ *integrálok egyike létezik, akkor a másik is és*

$$\int\limits_a^b f dg + \int\limits_a^b g df = \big[f \cdot g\big]_a^b \ .$$

Bizonyítás. Legyen $\langle P_k \rangle$ $[a,b]$ egy normális felosztássorozata, hogy

$$P_k = \{a = x_0^k, x_1^k, \ldots, x_{n_k}^k = b\} \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

Legyenek adottak a $t_i^k \in [x_{i-1}^k, x_i^k]$ $(k \in \mathbb{N},\ i = 1, \ldots, n_k)$ értékek, továbbá $t_0^k = a$ és $t_{n_k+1}^k = b$, akkor

$$P_k^* \doteq \{a = t_0^k, t_1^k, \ldots, t_{n_k}^k, t_{n_k+1}^k = b\} \qquad (k \in \mathbb{N})$$

esetén $\langle P_k^* \rangle$ is normális felosztássorozata $[a,b]$-nek, mert nyilván

$$\|P_k^*\| \leq 2\|P_k\| \ .$$

(Itt bizonyos indexekre $t_i^k = t_{i+1}^k$ is teljesülhet, így a felosztásban elfajuló intervallumok is lehetnek.)
Továbbá $t_{i-1}^k \leq x_{i-1}^k \leq t_i^k \quad (k \in \mathbb{N},\ i = 1, \ldots, n_k + 1)$ is teljesül. Így

$$\sigma(f, g, P_k) = \sum_{i=1}^{n_k} f(t_i^k)\left[g(x_i^k) - g(x_{i-1}^k)\right] =$$
$$= f(t_1^k)\left[g(x_1^k) - g(a)\right] + f(t_2^k)\left[g(x_2^k) - g(x_1^k)\right] + \cdots +$$
$$+ f(t_{n_k}^k)\left[g(x_{n_k}^k) - g(x_{n_k-1}^k)\right] =$$
$$= -g(a)\left[f(t_1^k) - f(a)\right] - g(x_1^k)\left[f(t_2^k) - f(t_1^k)\right] - \cdots -$$
$$- g(b)\left[f(b) - f(t_{n_k}^k)\right] + f(b)g(b) - f(a)g(a) =$$
$$= -\sum_{i=1}^{n_k+1} g(x_i^k)\left[f(t_i^k) - f(t_{i-1}^k)\right] + f(b)g(b) - f(a)g(a) =$$
$$= -\sigma(g, f, P_k^*) + f(b)g(b) - f(a)g(a) \ ,$$

ami $k \to \infty$ határátmenettel adja az állítást, ha $\int\limits_a^b g df$ létezik.

Ha $\int\limits_a^b f dg$ létezését tesszük fel, akkor a bizonyításban felcseréljük f és g szerepét.

6. Tétel. *Ha* $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, *$f$ folytonos, g korlátos változású, akkor* $\exists \int\limits_a^b f dg$ *és*

$$\left| \int\limits_a^b f dg \right| \le M \cdot V(g, [a,b]), \text{ ha } |f| \le M \ .$$

Bizonyítás.

a) $\int\limits_a^b f dg$ létezéséhez azt kell megmutatni, hogy $\forall \langle P_k \rangle$ normális felosztássorozatára $[a,b]$-nek $\forall \langle \sigma(f,g,P_k) \rangle$ sorozat konvergens. Ez igaz, ha Cauchy-sorozat, azaz ha $\forall\, \varepsilon > 0$-hoz $\exists\, N(\varepsilon)$, hogy $\forall\, p,q > N(\varepsilon)$ esetén

$$|\sigma(f,g,P_p) - \sigma(f,g,P_q)| < \varepsilon \ .$$

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. f egyenletes folytonossága miatt $\dfrac{\varepsilon}{1+V(g,[a,b])} > 0$-hoz $\exists\, \delta(\varepsilon)$, hogy ha $t_1, t_2 \in [a,b]$, $|t_1 - t_2| < \delta(\varepsilon)$, akkor

$$(*) \qquad |f(t_1) - f(t_2)| < \frac{\varepsilon}{1+V(g,[a,b])} \ .$$

Legyen $\langle P_k \rangle$ tetszőleges normális felosztássorozata $[a,b]$-nek, hogy $P_k = \{x_i^k \mid i = 0,1,\ldots,n_k\}$ és legyenek adottak a $t_i^k \in [x_{i-1}^k, x_i^k]$ feltételeket teljesítő számok. $\langle P_k \rangle$ normális felosztásorozat, így $\dfrac{1}{2}\delta(\varepsilon)$-hoz $\exists\, N(\varepsilon) \doteq N(\frac{1}{2}\delta(\varepsilon))$, hogy $\forall\, p,q > N(\varepsilon)$ esetén $\|P_p\|, \|P_q\| < \dfrac{1}{2}\delta(\varepsilon)$. Megmutatjuk, hogy ekkor

$$|\sigma(f,g,P_p) - \sigma(f,g,P_q)| < \varepsilon \ .$$

Ha $p,q > N(\varepsilon)$ tetszőlegesen rögzített és $P_p \cup P_q = P =$ $= \{z_m \mid m = 0,1,\ldots,r\}$, akkor egyszerűen következik, hogy

$$\sigma(f,g,P_p) = \sum_m f(t_i^p)\,[g(z_m) - g(z_{m-1})] \ ,$$

$$\sigma(f,g,P_q) = \sum_m f(t_j^q)\,[g(z_m) - g(z_{m-1})] \ ,$$

ahol $\sigma(f,g,P_p)$, illetve $\sigma(f,g,P_q)$ összegben $[g(z_m) - g(z_{m-1})]$-et akkor és csak akkor szorozzuk éppen az $f(t_i^p)$, illetve az $f(t_j^q)$ értékekkel, ha $[z_{m-1}, z_m] \subset [x_{i-1}^p, x_i^p]$, illetve $[z_{m-1}, z_m] \subset [x_{j-1}^q, x_j^q]$ teljesül. Másrészt az adott $[z_{m-1}, z_m]$ intervallumokhoz tartozó $f(t_i^p)$ és $f(t_j^q)$ szorzókat meghatározó t_i^p, t_j^q számokra

$$|t_i^p - t_j^q| \le \|P_p\| + \|P_q\| < \delta(\varepsilon)$$

teljesül, így $(*)$ miatt

$$|f(t_i^p) - f(t_j^q)| < \frac{\varepsilon}{1 + V(g, [a,b])} \ .$$

Mindezeket tekintve

$$|\sigma(f,g,P_p) - \sigma(f,g,P_q)| = \left| \sum_m \left[f(t_i^p) - f(t_j^q) \right] [g(z_m) - g(z_{m-1})] \right| \le$$

$$\le \sum_m \left| f(t_i^p) - f(t_j^q) \right| |g(z_m) - g(z_{m-1})| \le$$

$$\le \sum_m \frac{\varepsilon}{1 + V(g,[a,b])} |g(z_m) - g(z_{m-1})| =$$

$$= \frac{\varepsilon}{1 + V(g,[a,b])} \sum_m |g(z_m) - g(z_{m-1})| < \varepsilon \ .$$

Tehát bizonyítottuk a $\langle \sigma(f,g,P_k) \rangle$ sorozat Cauchy-tulajdonságát és így konvergenciáját, $\forall \ \langle P_k \rangle$ normális felosztássorozat esetén.

b) Az egyenlőtlenség bizonyításához legyen $\langle P_k \rangle$ az $[a,b]$ tetszőleges felosztássorozata, az előbbi osztáspontokkal, akkor $|f| \le M$ miatt

$$|\sigma(f,g,P_k)| = \left| \sum_{i=1}^{n_k} f(t_i^k) \left[g(x_i^k) - g(x_{i-1}^k) \right] \right| \le$$

$$\le M \sum_{i=1}^{n_k} \left| g(x_i^k) - g(x_{i-1}^k) \right| \le MV(g, [a,b]) \ ,$$

melyből $k \to \infty$ határátmenettel következik az egyenlőtlenség.

7. Tétel. *Ha $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, f és g' folytonos, akkor $\exists \int_a^b f dg$ és*

$$\int_a^b f dg = \int_a^b f(x) g'(x) \ dx \ .$$

Bizonyítás.

a) $\int\limits_a^b f dg$ létezéséhez az előbbi tétel miatt elegendő belátni, hogy g korlátos változású. Legyen $P = \{x_i \mid i = 0, \dots, n\}$ $[a, b]$ egy felosztása.
$g : [a, b] \to \mathbb{R}$ $\forall$ $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, \dots, n)$ intervallumon teljesíti a Lagrange-tétel feltételeit, így léteznek $t_i \in (x_{i-1}, x_i)$ $(i = 1, \dots, n)$ számok, hogy

$$g(x_i) - g(x_{i-1}) = g'(t_i)(x_i - x_{i-1}) \qquad (i = 1, \dots, n)\ .$$

Másrészt g' folytonossága miatt $\exists$ K, hogy $|g'(x)| < K$ $\forall$ $x \in [a, b]$ (azaz g' korlátos), így

$$V(g, [a, b], P) = \sum_{i=1}^{n} |g(x_i) - g(x_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n} |g'(t_i)(x_i - x_{i-1})| < K(b - a)$$

$\forall$ P felosztására $[a, b]$-nek, ami adja, hogy g korlátos változású.

b) Az egyenlőség bizonyításához abból indulunk ki, hogy f és g' folytonossága miatt a jobboldali integrál is létezik, az $\int\limits_a^b f dg$ előbb bizonyított létezése mellett.
Így elegendő belátni, hogy egy adott $\langle P_k \rangle$ normális felosztássorozat esetén valamely $\langle \sigma(f, g, P_k) \rangle$, illetve $\langle \sigma^*(f \cdot g', P_k) \rangle$ integrálközelítő összegsorozatok határértékei megegyeznek, illetve különbségük 0-hoz tart. Legyen $\langle P_k \rangle$ a szokásos módon adott normális felosztássorozat, $t_i^k \in [x_{i-1}^k, x_i^k]$ $(k \in \mathbb{N},\ i = 1, \dots, n_k)$ tetszőlegesen adottak, úgy

$$\sigma(f, g, P_k) \doteq \sum_{i=1}^{n_k} f(t_i^k) \left[g(x_i^k) - g(x_{i-1}^k) \right]$$

$\int\limits_a^b f dg$ egy integrálközelítő összegsorozata.
Újra alkalmazva g-re a Lagrange-tételt $\forall$ $[x_{i-1}^k, x_i^k]$ $(k \in \mathbb{N},\ i = 1, \dots, n_k)$ intervallumon kapjuk, hogy $\exists$ $\xi_i^k \in (x_{i-1}^k, x_i^k)$ $(k \in \mathbb{N},\ i = 1, \dots, n_k)$, hogy

$$g(x_i^k) - g(x_{i-1}^k) = g'(\xi_i^k)(x_i^k - x_{i-1}^k) \qquad (k \in \mathbb{N},\ i = 1, \dots, n_k)\ .$$

Ezért

$$\sigma(f, g, P_k) = \sum_{i=1}^{n_k} f(t_i^k) g'(\xi_i^k) \Delta(x_i^k) \qquad (k \in \mathbb{N})$$

teljesül. Ha itt t_i^k helyett ξ_i^k-t írunk, úgy

$$\sigma^*(f\cdot g', P_k) \doteq \sum_{i=1}^{n_k} f(\xi_i^k)g'(\xi_i^k)\Delta(x_i^k) \qquad (k\in\mathbb{N})$$

az $\int\limits_a^b fg'$ egy $\langle\sigma^*(f\cdot g', P_k)\rangle$ integrálközelítő összegsorozatát definiálja. Elég tehát megmutatni, hogy

$$(*) \qquad \lim_{k\to\infty} |\sigma(f,g,P_k) - \sigma^*(f\cdot g', P_k)| = 0\ .$$

Ehhez felhasználjuk, hogy f egyenletes folytonossága miatt $\forall\ \varepsilon>0$-hoz $\exists\ \delta(\varepsilon)$, hogy $\forall\ t_1,t_2\in[a,b]$, $|t_1-t_2|<\delta(\varepsilon)$ esetén $|f(t_1)-f(t_2)|<\varepsilon$, ami adja, hogy ha $\|P_k\|<\delta(\varepsilon)$, akkor $|t_i^k-\xi_i^k|<\delta(\varepsilon)$ és így $|f(t_i^k)-f(\xi_i^k)|<\varepsilon$. Ekkor

$$|\sigma(f,g,P_k)-\sigma^*(f\cdot g',P_k)| = \left|\sum_i (f(t_i^k)-f(\xi_i^k))g'(\xi_i^k)\Delta(x_i^k)\right| \le$$

$$\le \sum_i |f(t_i^k)-f(\xi_i^k)||g'(\xi_i^k)|\Delta(x_i^k)\ .$$

Mivel pedig a $\langle\sum\limits_{i=1}^n |g'(\xi_i^k)|\Delta(x_i^k)\rangle$ sorozat a (g' folytonossága miatt létező) $\int\limits_a^b |g'|$ integrál egy integrálközelítő összegsorozata, így határértéke éppen ez az integrál, ami azt jelenti, hogy $\varepsilon=1$-hez $\exists\ N$, hogy $\forall\ k>N$-re

$$\sum_{i=1}^n |g'(\xi_i^k)|\Delta(x_i^k) < \int\limits_a^b |g'| + 1\ ,$$

ami adja, hogy

$$|\sigma(f,g,P_k)-\sigma^*(f\cdot g',P_k)| < \varepsilon(\int\limits_a^b |g'|+1)$$

$\forall\ \varepsilon>0$-ra, ezért igaz $(*)$ és akkor a korábban mondottak szerint a tételben megfogalmazott egyenlőség is.

3. Definíció. Legyenek $\underline{f}=(f_1,\ldots,f_n):[a,b]\to\mathbb{R}^n$, $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ adott függvények. Az $\underline{f}$ vektorértékű függvénynek a g (skalár értékű) függvényre vonatkozó Riemann-Stieltjes integrálján $[a,b]$ felett az

$$\int_a^b \underline{f}dg \doteq \left(\int_a^b f_1 dg, \ldots, \int_a^b f_n dg\right) \in \mathbb{R}^n$$

vektort értjük, ha az $\int_a^b f_i dg$ integrálok léteznek.

4. Definíció.
Legyenek $\underline{f} = (f_1, \ldots, f_n) : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $\underline{g} = (g_1, \ldots, g_n) : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ adott függvények. Az $\underline{f}$ vektorértékű függvénynek a $\underline{g}$ vektorértékű függvényre vonatkozó Riemann-Stieltjes integrálján $[a,b]$ felett az

$$\int_a^b \underline{f}d\underline{g} \doteq \sum_{i=1}^{n} \int_a^b f_i dg_i$$

számot értjük, ha az $\int_a^b f_i dg_i$ integrálok léteznek.

Megjegyzések:

1. Ha a 3. definícióban $g(x) = x$, $x \in [a,b]$, akkor az

$$\int_a^b \underline{f} \doteq \left(\int_a^b f_1, \ldots, \int_a^b f_n\right) \in \mathbb{R}^n$$

vektor az $\underline{f}$ vektorértékű függvény Riemann-integrálja $[a,b]$ felett, ha az $\int_a^b f_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ Riemann-integrálok léteznek.

2. Az $\int_a^b \underline{f}d\underline{g}$ típusú Riemann-Stieltjes integrálra a paragrafus 1-5. és 7. tételei változtatás nélkül, míg a 6. tétel kis változtatással átvihető.

3. **Newton-Leibniz-tétel** *Legyenek* $\underline{f}, \underline{F} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *olyanok, hogy* $\underline{f}$ *Riemann-integrálható, és* $\underline{F}' \doteq (F_1', \ldots, F_n') = \underline{f}$, *akkor*

$$\int_a^b \underline{f} = \underline{F}(b) - \underline{F}(a) \ .$$

Bizonyítás:

$$\int_a^b \underline{f} = \left(\int_a^b f_1, \ldots, \int_a^b f_n\right) = (F_1(b) - F_1(a), \ldots, F_n(b) - F_n(a)) =$$

$$= (F_1(b), \dots, F_n(b)) - (F_1(a), \dots, F_n(a)) = F(b) - F(a)$$

4. Legyen $\underline{f} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ Riemann-integrálható, akkor $\|\underline{f}\|$ is az, és

$$\left\| \int_a^b \underline{f} \right\| \le \int_a^b \|\underline{f}\| \ .$$

Bizonyítás: Ha $\underline{f} = (f_1, \dots, f_n)$, akkor $\|\underline{f}\| = \sqrt{f_1^2 + \cdots + f_n^2}$.
Az $f_1, \dots, f_n$ függvények Riemann-integrálhatók, így az $f_1^2, \dots, f_n^2$ függvények is, továbbá a négyzetgyök függvény folytonossága miatt az $\|\underline{f}\|$ függvény is Riemann-integrálható.

Legyen $\underline{y} = (y_1, \dots, y_n)$, ahol $y_j = \int_a^b f_j$, ekkor $\underline{y} = \int_a^b \underline{f}$ és

$$\|\underline{y}\|^2 = \sum_{j=1}^n y_j^2 = \sum_{j=1}^n y_j \int_a^b f_j = \int_a^b \left(\sum_{j=1}^n y_j f_j \right) .$$

A C-B-S-egyenlőtlenség alapján

$$\sum y_j f_j(t) \le \|\underline{y}\| \, \|\underline{f}(t)\| \qquad (a \le t \le b) \ ,$$

ami adja, hogy

$$\|\underline{y}\|^2 = \sum y_j \int_a^b f_j \le \|\underline{y}\| \int_a^b \|\underline{f}\| \ .$$

Ha $\underline{y} = 0$, akkor a tétel nyilván igaz, ha $\underline{y} \neq 0$, akkor az utóbbi egyenlőtlenséget $\|\underline{y}\|$-kel osztva adódik az állítás.

3. Görbék ívhossza

1. Definíció. Az $\underline{f} = (f_1, \dots, f_n) : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ folytonos függvényt $\mathbb{R}^n$-beli görbének nevezzük. $[a, b]$-t paraméter-intervallumnak, $\underline{f}$-t a görbe egy paraméterelőállításának nevezzük. $\underline{f}(a)$ és $\underline{f}(b)$ a görbe kezdő, illetve végpontjai. Ha $\underline{f}(a) = \underline{f}(b)$, akkor $\underline{f}$ zárt görbe. Ha $\underline{f}$ kölcsönösen egyértelmű, akkor ívnek nevezzük.

2. Definíció. $\underline{f} = (f_1, \ldots, f_n) : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ sima görbe, ha $\underline{f}$ folytonosan differenciálható (azaz $\underline{f}' \doteq (f_1', \ldots, f_n') : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ folytonos) és

$$\sum_{i=1}^{n} f_i'^2(t) > 0 \qquad (t \in [a,b])$$

teljesül.

3. Definíció. Az $\underline{f} = (f_1, \ldots, f_n) : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ görbe képe a

$$\Gamma = \{(f_1(t), \ldots, f_n(t)) \mid t \in [a,b]\}$$

halmaz. (A képet – néha jelölésben is – azonosítjuk a görbével.) Γ egy pontja az $\underline{f}$ görbe többszörös pontja, ha $\exists$ (legalább két) $t, t' \in [a,b]$, hogy $\underline{f}(t) = \underline{f}(t')$

Megjegyzések:

1. A $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ egységkör egy paraméteres előállítása az $\underline{f} = (\cos, \sin) : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ függvény. Belátható, hogy az egységkör sima, zárt görbe.

2. Ha $\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{a} \neq \underline{0}$ adott vektorok, akkor az

$$E \doteq \{\underline{a}t + \underline{b} = (a_1 t + b_1, \ldots, a_n t + b_n) \in \mathbb{R}^n, \ t \in \mathbb{R}\}$$

ponthalmazt a $\underline{b}$-n áthaladó $\underline{a}$ irányú n-dimenziós egyenesnek nevezzük. (A $t \to \underline{a}t + \underline{b} \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}$ leképezés az egyenes egy paraméteres előállítása.)

3. Legyen $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$ és $\underline{x} \neq \underline{y}$. Az $\{\underline{x} + t(\underline{y} - \underline{x}) \mid t \in [0,1]\} \subset \mathbb{R}^n$ halmazt az $\underline{x}$-et és $\underline{y}$-t összekötő n-dimenziós szakasznak nevezzük. (Természetesen $d(\underline{x}, \underline{y}) \doteq \|\underline{x} - \underline{y}\| \doteq \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$, $d(\underline{x}, \underline{0}) \doteq \|\underline{x}\| \doteq \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}$).

4. Definíció. Legyen $\underline{f} = (f_1, \ldots, f_n) : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ egy görbe $P = \{a = t_0, t_1, \ldots, t_m = b\}$ $[a,b]$ egy felosztása, $\|\underline{f}(t_i) - \underline{f}(t_{i-1})\|$ az $\underline{f}(t_i)$ és $\underline{f}(t_{i-1})$ pontokat összekötő szakasz hossza. Az

$$\ell(\underline{f}, P) = \sum_{i=1}^{m} \|\underline{f}(t_i) - \underline{f}(t_{i-1})\|$$

számot az $\underline{f}$ görbébe a P felosztása esetén beírt töröttvonal hosszának nevezzük. (Belátható, hogy ha $P_1 \subset P_2$, akkor $\ell(\underline{f}, P_1) \leq \ell(\underline{f}, P_2)$.)

5. Definíció. Az $\underline{f} = (f_1, \ldots, f_n) : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ görbe rektifikálható, ha az $\{\ell(\underline{f}, P) \mid P$ tetszőleges felosztása $[a,b]$-nek$\}$ halmaz korlátos. Az ekkor létező

$$\ell(\underline{f}) = \sup_P \{\ell(\underline{f}, P)\} \big(= \ell(\underline{f}, [a,b])\big)$$

számot az $\underline{f}$ görbe ívhosszának nevezzük.

Megjegyzések:

1. Az ívhossz nem függ a görbe paraméterelőállításától.

2. Az $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$ pontokat összekötő szakasz ívhossza $\|\underline{x} - \underline{y}\|$.

3. Ha $\underline{f} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ görbe, $c \in [a,b]$, $\underline{f}$ rektifikálható $[a,b]$-n, úgy

$$\ell(\underline{f}, [a,b]) = \ell(\underline{f}, [a,c]) + \ell(\underline{f}, [c,b]) \ .$$

(Makai I.: Differenciálszámítás I., 88-89. oldal)

Fontos a következő:

Tétel. *Legyen* $\underline{f} = (f_1, \ldots, f_n) : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *sima görbe, akkor rektifikálható, és ívhossza*

$$\ell(\underline{f}, [a,b]) = \int_a^b \|\underline{f}'(t)\| \ dt = \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^n f_i'^2(t)} \ dt \ .$$

Bizonyítás. Legyen $P = \{x_i \mid i = 0, \ldots, m\}$ $[a,b]$ egy felosztása, akkor a 78. oldal 3. és a 80. oldal 4. megjegyzések miatt

$$\|\underline{f}(x_i) - \underline{f}(x_{i-1})\| = \left\| \int_{x_{i-1}}^{x_i} \underline{f}'(t) \ dt \right\| \leq \int_{x_{i-1}}^{x_i} \|\underline{f}'(t)\| \ dt \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

következik, ahonnan összegzés után kapjuk, hogy

$$\ell(\underline{f}, P) = \sum_{i=1}^m \|\underline{f}(x_i) - \underline{f}(x_{i-1})\| \leq \sum_{i=1}^m \int_{x_{i-1}}^{x_i} \|\underline{f}'(t)\| \ dt = \int_a^b \|\underline{f}'(t)\| \ dt \ .$$

Következésképpen

$$\ell(\underline{f}) = \sup_P \ell(\underline{f}, P) \le \int_a^b \|\underline{f}'(t)\| \; dt \; .$$

Az ellenkező irányú egyenlőtlenség bizonyításához legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. $\underline{f}'$ egyenletesen folytonos $[a, b]$-n, ezért $\exists \; \delta(\varepsilon) > 0$, hogy $s, t \in [a, b]$, $|s - t| < \delta(\varepsilon)$ esetén

$$\|\underline{f}'(t) - \underline{f}'(s)\| < \varepsilon$$

Legyen $P = \{x_i \mid i = 0, \ldots, m\}$ egy olyan felosztása $[a, b]$-nek, melyre $\|P\| < \delta(\varepsilon)$. Ha $x_{i-1} < t < x_i$, akkor ezekből következik, hogy

$$\|\underline{f}'(t)\| - \|\underline{f}'(x_i)\| < \|\underline{f}'(t) - \underline{f}'(x_i)\| < \varepsilon \; ,$$

azaz

$$\|\underline{f}'(t)\| < \|\underline{f}'(x_i)\| + \varepsilon \; ,$$

így

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \|\underline{f}'(t)\| \; dt \le \int_{x_{i-1}}^{x_i} (\|\underline{f}'(x_i)\| + \varepsilon) \; dt = \|\underline{f}'(x_i)\| \Delta x_i + \varepsilon \Delta x_i =$$

$$= \left\| \int_{x_{i-1}}^{x_i} \underline{f}'(x_i) dt \right\| + \varepsilon \Delta x_i = \left\| \int_{x_{i-1}}^{x_i} [\underline{f}'(t) + \underline{f}'(x_i) - \underline{f}'(t)] \; dt \right\| + \varepsilon \Delta x_i \le$$

$$\le \left\| \int_{x_{i-1}}^{x_i} \underline{f}'(t) \; dt \right\| + \left\| \int_{x_{i-1}}^{x_i} [\underline{f}'(x_i) - \underline{f}'(t)] \; dt \right\| + \varepsilon \Delta x_i \le$$

$$\le \|\underline{f}(x_i) - \underline{f}(x_{i-1})\| + \int_{x_{i-1}}^{x_i} \|\underline{f}'(t) - \underline{f}'(x_i)\| dt + \varepsilon \Delta x_i \le$$

$$\le \|\underline{f}(x_i) - \underline{f}(x_{i-1})\| + 2\varepsilon \Delta x_i \; .$$

Ha összeadjuk ezeket az egyenlőtlenségeket, akkor azt kapjuk, hogy

$$\int_a^b \|\underline{f}'(t)\| \; dt \le \sum_{i=1}^m \|\underline{f}(x_i) - \underline{f}(x_{i-1})\| + 2\varepsilon \sum_{i=1}^m \Delta x_i =$$

$$= \ell(\underline{f}, P) + 2\varepsilon(b - a) \le \ell(\underline{f}) + 2\varepsilon(b - a) \; .$$

Mivel $\varepsilon > 0$ tetszőleges, ebből következik, hogy

$$\int_a^b \|\underline{f}'(t)\| \; dt \le \ell(\underline{f}) \; .$$

Ezután már

$$\ell(\underline{f}) \le \int\limits_a^b \|\underline{f}'(t)\|\ dt \le \ell(\underline{f})$$

adja az állítást.

Következmények:

1. Legyen $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény, akkor az $\underline{f} = (f_1, f_2) : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ $(f_1(t) = t,\ f_2(t) = g(t),\ t \in [a, b])$ a g gráfjának (grafikonjának) egy paraméteres előállítása, melyre $\underline{f}'(t) = (1, g'(t))$ teljesül, így ha $\mathcal{G}$ jelöli a g által adott görbét, akkor ívhosszára

$$\ell(\mathcal{G}) = \int\limits_a^b \sqrt{1 + g'^2(t)}\ dt$$

következik (1)-ből.

2. Tekintsük az $\underline{f} = (\cos, \sin) : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ egységkört.
Legyen $s \in (0, 2\pi]$, $\underline{f}_s : [0, s] \to \mathbb{R}^2$ $\underline{f}$ $[0, s]$-re való leszűkítése. Ekkor $\underline{f}_s$ az egységkör egy íve. (1)-ből jön, hogy

$$\ell(\underline{f}_s) = \int\limits_0^s \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t)}\ dt = \int\limits_0^s 1\ dt = s$$

az egységkör adott ívének hossza. Ha $s = 2\pi$, akkor $\ell(\underline{f}) = 2\pi$ az egységkör kerülete. Ez adja, hogy a mi π-nk megegyezik a középiskolás π-vel. s-t a P_0OP_s szög ívmértékének nevezzük. A $360°$-os szög ívmértéke 2π.

3. $\underline{f}_r = (f_1, f_2) : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2,\ f_1(t) = r \cdot \cos t,\ f_2(t) = r \cdot \sin t\ (t \in [0, 2\pi])$ az origó középpontú r sugarú kör. (1)-ből jön, hogy

$$\ell(\underline{f}_r) = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{r^2 \sin^2(t) + r^2 \cos^2(t)}\ dt = \int\limits_0^{2\pi} r\ dt = 2r\pi\ .$$

4. Görbementi-integrál

Definíció. Legyen $\underline{g} = (g_1, \ldots, g_n) : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ adott görbe, $\underline{f} : \underline{g}([a, b]) \to \mathbb{R}^n$ vektorfüggvény, hogy $\underline{f} = (f_1, \ldots, f_n)$. Az $\underline{f}$ függvény $\underline{g}$ görbementi-integrálján (jelölése $\int\limits_{\underline{g}} \underline{f}$) az $\underline{f} \circ \underline{g} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ függvény g-re vonatkozó $[a, b]$ feletti Riemann-Stieltjes integrálját értjük (ha létezik), azaz

$$\int\limits_{\underline{g}} \underline{f} \doteq \int\limits_a^b (\underline{f} \circ \underline{g}) \; d\underline{g} = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_a^b (f_i \circ \underline{g}) \; dg_i \; .$$

1. Tétel. *Ha $\underline{g}$ rektifikálható $[a, b]$-n, $\underline{f}$ folytonos $\underline{g}([a, b])$-n, akkor létezik az $\underline{f}$ függvény $\underline{g}$ görbementi integrálja.*

Bizonyítás. Felhasználjuk, hogy ha $\underline{g}$ rektifikálható, akkor a g_i függvények korlátos változásúak. Így mivel $f_i \circ \underline{g} : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, g_i korlátos változású

$$\Longrightarrow \; \exists \int\limits_a^b (f_i \circ \underline{g}) \; dg_i \quad (i = 1, \ldots, n) \; \Longrightarrow \; \exists \int\limits_a^b (\underline{f} \circ \underline{g}) \; dg \; , \text{ azaz } \int\limits_{\underline{g}} \underline{f} \; .$$

2. Tétel. *Ha $\exists \int\limits_{\underline{g}} \underline{f}$ és $\|(\underline{f} \circ \underline{g})(x)\| \le M$, akkor $\left|\int\limits_{\underline{g}} \underline{f}\right| \le M \cdot \ell(\underline{g})$.*

Bizonyítás.

$$\left|\int\limits_{\underline{g}} \underline{f}\right| \doteq \left|\int\limits_a^b (\underline{f} \circ \underline{g}) \; d\underline{g}\right| \doteq \left|\sum_{i=1}^{n} \int\limits_a^b (f_i \circ \underline{g}) \; dg_i\right| \le \sum_{i=1}^{n} \left|\int\limits_a^b (f_i \circ \underline{g}) \; dg_i\right| \le$$

$$\le M \cdot \sum_{i=1}^{n} \left|\int\limits_a^b 1 \; dg_i\right| \le M \cdot \ell(\underline{g}) \; .$$

3. Tétel. *Ha $\underline{g}'$ folytonos $[a, b]$-n, $\underline{f}$ folytonos $\underline{g}([a, b])$-n, akkor*

$$\int\limits_{\underline{g}} \underline{f} = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_a^b (f_i \circ \underline{g})(x) g_i'(x) \; dx \; .$$

Bizonyítás.

$$\int\limits_{\underline{g}} \underline{f} \doteq \int\limits_a^b (\underline{f} \circ \underline{g}) d\underline{g} \doteq \sum_{i=1}^{n} \int\limits_a^b (f_i \circ \underline{g}) \; dg_i = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_a^b (f_i \circ \underline{g})(x) g_i'(x) \; dx \; .$$

További tulajdonságok:

1. Additivitás $\underline{f}$-re, illetve a $\underline{g}$ görbére.

Például legyen $\underline{g} = \underline{g}^1 \cup \underline{g}^2$ és $\exists \int_{\underline{g}^i} \underline{f}$ $(i = 1, 2) \implies \exists \int_{\underline{g}} \underline{f} = \sum_{i=1}^{2} \int_{\underline{g}^i} \underline{f}$.

2. Ha $\underline{g}$ irányított görbe, $-\underline{g}$ az ellentétes irányítású, akkor $\int_{-\underline{g}} \underline{f} \doteq -\int_{\underline{g}} \underline{f}$.

Megjegyzések:

1. $\mathbb{R}^2$-beli görbék esetén a következő jelölések szokásosak:

$\underline{g}$-re: $\quad \underline{g}(t) = (x(t), y(t)) \qquad (t \in [a, b])$;

$\underline{f}$-re: $\quad \underline{f}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)) \qquad ((x, y) \in \underline{g}([a, b]))$;

$\int_{\underline{g}} \underline{f}$-re:

$$\int_{\underline{g}} \underline{f} = \int_a^b P(x(t), y(t))\ dx(t) + \int_a^b Q(x(t), y(t))\ dy(t) \doteq$$
$$\doteq \int_{\underline{g}} P\ dx + \int_{\underline{g}} Q\ dy \doteq \int_{\underline{g}} (P\ dx + Q\ dy)$$

Ilyenkor $\int_{\underline{g}} P\ dx$-et a $\underline{g}$ görbementi abszcissza szerinti, $\int_{\underline{g}} Q\ dy$-t a $\underline{g}$ görbementi ordináta szerinti görbementi-integrálnak nevezzük, illetve azt mondjuk, hogy $\int_{\underline{g}} (P\ dx + Q\ dy)$ a (P, Q) függvénypár $\underline{g}$ görbementi integrálja.

– Ha $\underline{g}$ az x-tengelyre merőleges szakasz $\implies \int_{\underline{g}} P\ dx = 0$.

– Ha $\underline{g}$ az y-tengelyre merőleges szakasz $\implies \int_{\underline{g}} Q\ dy = 0$.

– Ha $\underline{g}(x) = (x, f(x))$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos, akkor

$$\int_{\underline{g}} P\ dx = \int_a^b P(x, f(x))\ dx\ , \qquad \int_{\underline{g}} Q\ dy = \int_a^b Q(x, f(x)) f'(x)\ dx\ .$$

2. $\mathbb{R}^3$-beli görbékre:

$$\underline{g}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \qquad (t \in [a, b]) \ ;$$
$$\underline{f}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)) \qquad ((x, y, z) \in \underline{g}([a, b])) \ ;$$
$$\int_{\underline{g}} \underline{f} = \int_a^b P(x(t), y(t), z(t))\ dx(t) + \int_a^b Q(x(t), y(t), z(t))\ dy(t) +$$
$$+ \int_a^b R(x(t), y(t), z(t))\ dz(t) \doteq \int_{\underline{g}} P\ dx + \int_{\underline{g}} Q\ dy + \int_{\underline{g}} R\ dz \doteq$$
$$\doteq \int_{\underline{g}} (P\ dx + Q\ dy + R\ dz) \ .$$

Utóbbit a (P, Q, R) függvényhármas $\underline{g}$ görbementi integráljának is nevezik.

3. feladatsor

1) Korlátos változásúak-e az alábbi függvények:

$$f_1(x) = \sin^2 x \qquad (x \in [0, \pi]); \qquad f_2(x) = x^3 - 3x + 4 \qquad (x \in [0, 2]);$$

$$f_3(x) = \begin{cases} \sin \dfrac{\pi}{x} & , x \in (0, 1] \\ 0 & , x = 0 \end{cases} ; \quad f_4(x) = \begin{cases} 1 & , x \in [0, 1) \\ \frac{1}{2} & , x \in [1, 2) \\ 2 & , x \in [2, 3] \end{cases} ;$$

$$f_5(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} & , x \in (0, 1] \\ 0 & , x = 0 \end{cases} ; \quad f_6(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & , x \in (0, 1] \\ 0 & , x = 0 \end{cases} ;$$

$$f_7(x) = \begin{cases} c_i & , x \in [i-1, i) \quad i = 1, \ldots, n \\ c_n & , x = n \end{cases} .$$

2) Bizonyítsa be, hogy ha $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos változásúak $[a, b]$-n, akkor $f \cdot g$ is az.

3) Legyenek $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos változású függvények. Bizonyítsa be, hogy

$$V(f + g, [a, b]) \leq V(f, [a, b]) + V(g, [a, b]) ,$$

továbbá

$$V(kf, [a, b]) = |k| V(f, [a, b]) \qquad (k \in \mathbb{R}) .$$

4) Legyen

$$f(x) = 1 \qquad (x \in [0, 1]) \qquad \text{és} \qquad g(x) = \begin{cases} 0 & , x \in [0, \frac{1}{2}) \\ 1 & , x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} .$$

Létezik-e $\int\limits_0^1 f \, dg$ és $\int\limits_0^1 g \, df$?

5) Legyen

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , x \in [0, \frac{1}{2}) \\ 2 & , x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} , \qquad g(x) = \begin{cases} 0 & , x \in [0, \frac{1}{2}) \\ 1 & , x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} .$$

Bizonyítsa be, hogy nem létezik $\int\limits_0^1 f \, dg$.

(Általában: a Riemann-Stieltjes integrál nem létezik, ha $\exists \, x_0$ ahol sem f sem g nem folytonos.)

6) Határozza meg $\int\limits_{-1}^{2} x^5 \; d(|x|^3)$ értékét.

7) Legyen

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \; x = 0 \\ \frac{1}{x} & , \; x \in (0,1) \\ 1 & , \; x \in [1,2] \end{cases} , \qquad g(x) = \begin{cases} 1 & , \; x \in [0,1) \\ x & , \; x \in [1,2] \end{cases} .$$

Bizonyítsa be, hogy $\exists \int\limits_{0}^{2} f \; dg$ (bár $\nexists \int\limits_{0}^{2} f$).

8) Legyenek $a < a_1 < a_2 < \cdots < a_n < b$ tetszőleges valós számok, továbbá

$$g(x) = \begin{cases} 1 & , \; x \neq a_i \; , \quad i = 1, \ldots, n \\ c_i & , \; x = a_i \; , \quad i = 1, \ldots, n \; , \quad (c_i \in \mathbb{R}) \end{cases} .$$

Legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Határozza meg $\int\limits_{a}^{b} f \; dg$-t.

9) Legyen $g(x) = \sin x$ $(x \in [0,\pi])$. Határozza meg $\int\limits_{0}^{\pi} x \; dg(x)$-et.

10) Legyen $g(x) = e^{|x|}$ $(x \in [-1,1])$. Határozza meg $\int\limits_{-1}^{1} x \; dg(x)$-et.

11) Legyen $g(x) = k$ $(x \in [k-1,k], \; k = 1,2,\ldots)$. Határozza meg $\int\limits_{1}^{4} x \; dg(x)$-et.

12) Legyen $f(x) = c \quad (x \in [a,b])$ és $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos változású. Bizonyítsa be, hogy

$$\int\limits_{a}^{b} f \; dg = c\,[g(b) - g(a)] \; .$$

13) Legyen

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \; x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & , \; x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \cap [0,1] \end{cases} ,$$

és $g(x) =: [0,1] \to \mathbb{R}$ nem konstans, monoton növekedő függvény. Bizonyítsa be, hogy $\nexists \int\limits_{0}^{1} f \; dg$.

14) Legyen $\underline{f} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ egy görbe, $P = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\}$ $[a,b]$ egy felosztása, $\underline{g}_k$ az $\underline{f}$ leszűkítése az $[x_{k-1}, x_k]$ intervallumra. Bizonyítsa be, hogy

$$\ell(\underline{f}) = \ell(\underline{g}_1) + \cdots + \ell(\underline{g}_n)\ .$$

15) Legyen $\underline{f} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ és $\underline{g} : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ ugyanazon görbe paraméter-előállítása. Bizonyítsa be, hogy $\exists\ s : [a,b] \to [c,d]$ folytonos és monoton függvény, hogy $\underline{f}(t) = \underline{g}(s(t))$ $(t \in [a,b])$, továbbá $\ell(\underline{f}) = \ell(\underline{g})$.

16) Legyen $\underline{f} = (f_1, f_2) : [-3,3] \to \mathbb{R}^2$, ahol $f_1(t) = t^2 - t$, $f_2(t) = t^3 - 3t$. Van-e az $\underline{f}$ görbének többszörös pontja?

17) Rektifikálható-e az

$$\underline{f}(t) = \left(t, \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{t}} \sin \frac{\pi}{t} & , \ t > 0 \\ 0 & , \ t = 0 \end{cases}\right) \qquad (t \in [0,1])$$

görbe?

18) Határozza meg az alábbi görbék ívhosszát:

$$\underline{f}(t) = (3\cos t,\ 3\sin t,\ 2t) \qquad (t \in [0, 2\pi])\ ;$$

$$\underline{g}(t) = \left(t,\ \tfrac{3}{2}t^2,\ \tfrac{3}{2}t^3\right) \qquad (t \in [0,2])\ ;$$

$$\underline{h}(t) = \left(t,\ \tfrac{\sqrt{2}}{2}t^2,\ \tfrac{1}{3}t^3\right) \qquad (t \in [0,2])\ ;$$

$$\underline{k}(t) = (t\cos t,\ t\sin t,\ t) \qquad (t \in [0, \tfrac{\pi}{2}])\ .$$

19) Számítsa ki az alábbi görbementi integrálokat, azaz $\int_{\underline{g}} \underline{f}$-et, ha:

– $\underline{g}(t) = (t^2,\ 2t,\ t)$ $(t \in [0,1])$, $\underline{f}(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2 + x_3,\ x_1x_3,\ x_1x_2)$;

– $\underline{g}$ a $(2,0,1)$ és $(2,0,4)$ pontokat összekötő irányított egyenes szakasz, $\underline{f}(x_1, x_2, x_3) = (2x_1,\ -3x_2,\ x_3)$;

– $\underline{g}$ a $(0,0,0)$ és $(1,1,1)$ pontokat összekötő irányított egyenes szakasz, $\underline{f}(x_1, x_2, x_3) = (x_1x_3,\ -x_2,\ x_1)$;

– $\underline{g}(t) = (t,\ t^2,\ t^3)$ $(t \in [0,1])$, $\underline{f}(x_1, x_2, x_3) = (x_1x_3,\ -x_2,\ x_1)$;

– $\underline{g}$ a $(0,0,0,0)$ és $(1,1,1,1)$ pontokat összekötő szakasz, $\underline{f}(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1x_4,\ x_2,\ -x^2x_4,\ x_3)$;

– $\underline{g}(t) = \left(\sum\limits_{j=1}^n \alpha_i t, \ldots, \sum\limits_{j=1}^n \alpha_i t\right) \quad (t \in [0,1])\ ,$

$\underline{f}(x_1, \ldots, x_n) = \left(\sum\limits_{j=1}^n x_i^2, \ldots, \sum\limits_{j=1}^n x_i^2\right).$