Lajkó Károly

# Kalkulus II.

Debreceni Egyetem
Matematikai és Informatikai Intézet
2003

© Lajkó Károly

lajko@math.klte.hu

Amennyiben hibát talál a jegyzetben, kérjük jelezze a szerzőnek!

A jegyzet `dvi`, `pdf` és `ps` formátumban letölthető a következő címről:

http://riesz.math.klte.hu/~lajko/jegyzet.html

Ez a jegyzet $\mathcal{AMS}$-TEX-ben készült

Szedés és tördelés: Kovács László

# TARTALOMJEGYZÉK

**I. Vektorterek, Euklideszi terek, metrikus terek** ..... **5.**
1. Vektortér, euklideszi tér és metrikus tér fogalma ..... 5.
2. Az $\mathbb{R}^n$ euklideszi tér ..... 7.
3. $\mathbb{R}^n$ és metrikus tér topológiája ..... 8.

**Feladatsor** ..... **11.**

**II. A Riemann-integrál általánosítása és alkalmazása** ..... **13.**
1. Korlátos változású függvények ..... 13.
2. Riemann-Stieltjes integrál ..... 15.
3. Görbék ívhossza ..... 18.
4. Görbementi integrál ..... 20.

**Feladatsor** ..... **23.**

**III. Sorozatok $\mathbb{R}^n$-ben és metrikus térben** ..... **25.**
1. Alapfogalmak és kapcsolatuk ..... 25.
2. Sorozatok és műveletek, illetve rendezés ..... 26.
3. Részsorozatok ..... 26.
4. Cauchy-sorozatok ..... 27.

**IV. Többváltozós és vektorértékű függvények folytonossága, határértéke** ..... **29.**
1. Alapfogalmak ..... 29.
2. Folytonosság fogalma ..... 29.
3. Folytonosság és műveletek ..... 31.
4. Folytonosság és topologikus fogalmak ..... 31.
5. A határérték fogalma ..... 32.
6. Határérték és műveletek illetve egyenlőtlenségek ..... 35.
7. A határérték és a folytonosság kapcsolata ..... 36.

**V. A többváltozós függvények differenciálszámítása** ..... **37.**

1. További lineáris algebrai előismeretek ..... 37.
2. A differenciálhatóság ..... 43.
3. Iránymenti és parciális derivált ..... 45.
4. Differenciálási szabályok ..... 47.
5. Középértéktételek és következményeik ..... 48.
6. Magasabbrendű deriváltak, Young és Taylor tétele ..... 50.
7. Lokális szélsőérték ..... 54.
8. Inverzfüggvény-tételek ..... 56.
9. Implicit függvények ..... 57.
10. Feltételes szélsőérték ..... 59.
**Feladatsor** ..... **61.**
**VI. Riemann-integrál $\mathbb{R}^k$-ban** ..... **65.**
1. Riemann-integrál téglán ..... 65.
2. Riemann-integrál korlátos $\mathbb{R}^n$-beli halmazon ..... 73.
3. Jordan-mérhető halmazok $\mathbb{R}^n$-ben ..... 75.
4. Integráltranszformáció ..... 79.
**Feladatsor** ..... **85.**
**VII. Differenciálegyenletek** ..... **87.**
1. Differenciálegyenlet fogalma ..... 87.
2. Kezdeti érték probléma vagy Cauchy-feladat ..... 88.
3. Elemi úton megoldható differenciálegyenlet-típusok ..... 90.
4. Egzisztencia-tételek Cauchy-feladatokra ..... 97.
5. Magasabbrendű lineáris differenciálegyenletek ..... 102.
**Feladatsor** ..... **109.**

# I. VEKTORTEREK, EUKLIDESZI TEREK, METRIKUS TEREK

## 1. Vektortér, euklideszi tér és metrikus tér fogalma

**1. Definíció.** Legyen adott egy $V$ halmaz (elemeit vektoroknak nevezzük). Tegyük fel, hogy értelmezve van két művelet:

- a vektorok összeadása, melyet $x, y \in V$-re $x + y$ ,
- a skalárral való szorzás, melyet $x \in V \wedge \lambda \in \mathbb{R}$ esetén $\lambda x$ jelöl.

$V$-t e két művelettel vektortérnek, (vagy lineáris térnek) nevezzük, ha $\forall\, x, y, z \in V,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ esetén

1) $x + y = y + x$ (kommutativitás),
2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ (asszociativitás),
3) $\exists\, 0 \in V,\ x + 0 = x$ (nullelem létezése),
4) $\forall\, x \in V,\ \exists\ -x \in V,\ x + (-x) = 0$ (inverzelem létezése),
5) $1 \cdot x = x$ ,
6) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$ ,
7) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x,\ \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ (disztributivitás).

**2. Definíció.** Ha $V$ egy vektortér, akkor a $\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ függvényt skaláris, vagy belsőszorzatnak nevezzük, ha $\forall\, x, y, z \in V \wedge \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ esetén

1) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$ ,
2) $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$ ,
3) $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$ ,
4) $\langle x, x\rangle \geq 0,\ \langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0$

teljesül.

**3. Definíció.** Egy $V$ vektorteret, rajta egy skaláris (vagy belső) szorzattal, belsőszorzattérnek, vagy (néha csak valós értékű skaláris szorzat esetén) euklideszi térnek nevezünk.

**4. Definíció.** Ha $V$ belsőszorzattér, akkor az $x \in V$ vektor hosszán, vagy euklideszi normáján az $\|x\| \doteq \sqrt{\langle x, x\rangle}$ számot értjük.

**1. Tétel.** *Az euklideszi normára teljesül:*

*1)* $\|x\| \geq 0,\ \|x\| = 0 \iff x = 0, \qquad \forall\, x \in V\ ,$

*2)* $\|\lambda x\| = |\lambda|\ \|x\| \qquad \forall\, x \in V,\ \lambda \in \mathbb{R}\ ,$

*3)* $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \qquad \forall\, x, y \in V\ .$

*Bizonyítás.* Gyakorlaton.

**Megjegyzés:** Minden az 1)-3) tulajdonságot teljesítő $\|\ .\ \| : V \to \mathbb{R}$ függvényt normának nevezünk $V$-n.

**5. Definíció.** Ha $V$ belsőszorzattér (vagy euklideszi tér) akkor az $x, y \in V$ vektorok euklideszi távolságán a $d(x, y) \doteq \|x - y\|$ számot értjük és azt mondjuk, hogy a $d : V \times V \to \mathbb{R}$ függvény távolság, vagy metrika $V$-ben.

**2. Tétel.** *A $V$-beli euklideszi távolságra teljesül:*

*1)* $d(x, y) \geq 0\ , \quad d(x, y) = 0 \iff x = y\ , \qquad \forall\, x, y \in V\ ,$

*2)* $d(x, y) = d(y, x) \qquad \forall\, x, y \in V\ ,$

*3)* $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \qquad \forall\, x, y, z \in V\ .$

*Bizonyítás.* A norma tulajdonságai alapján egyszerű, gyakorlaton.

**6. Definíció.** Legyen $X$ egy nemüres halmaz. Ha értelmezve van egy $d : X \times X \to \mathbb{R}$ függvény az

1) $d(x, y) \geq 0\ , \quad d(x, y) = 0 \iff x = y\ , \qquad \forall\, x, y \in X\ ,$

2) $d(x, y) = d(y, x) \qquad \forall\, x, y \in X\ ,$

3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \qquad \forall\, x, y, z \in X$

tulajdonságokkal, akkor azt mondjuk, hogy $d$ metrika $X$-en és $X$-et metrikus térnek nevezzük. Jelölés: $(X, d)$.

**Megjegyzés:** $\mathbb{R}$ a $d(x, y) \doteq |x-y|$, míg a $V$ euklideszi tér a $d(x, y) \doteq \|x-y\|$ metrikával metrikus tér.

**7. Definíció.** Legyen $(X, d)$ metrikus tér. Az $a \in X$ $r$ $(> 0)$ sugarú nyílt gömbkörnyezetén a $K(a, r) \doteq \{x \in X \mid d(x, a) < r\}$ halmazt értjük.

**8. Definíció.** Legyen $(X, d)$ metrikus tér. $H \subset X$ korlátos, ha $H = \emptyset$ vagy $H \neq \emptyset$ esetén $\exists\ r \in \mathbb{R}$, hogy $\forall\ x, y \in H$-ra $d(x, y) \leq r$.
Ekkor a $\operatorname{diam} H \doteq \sup\{d(x, y) \mid x, y \in H\}$ számot $H$ átmérőjének nevezzük.

**Megjegyzés:** Egyszerűen belátható, hogy $H \subset X$ $(H \neq \emptyset)$ pontosan akkor korlátos, ha $\exists\ a \in X \wedge \exists\ r \in \mathbb{R}$, hogy $d(x,a) < r\ \forall\ x \in H$ esetén.

## 2. Az $\mathbb{R}^n$ euklideszi tér

**1. Definíció.** Legyen $\mathbb{R}^1 \doteq \mathbb{R}$, és ha $n \in \mathbb{N}$-re már $\mathbb{R}^n$ értelmezett, akkor $\mathbb{R}^{n+1} \doteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. $\mathbb{R}^n$ elemeit $(x_1, \ldots, x_n)$-nel jelöljük és rendezett valós szám $n$-eseknek nevezzük, ahol

$$(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n) \iff x_1 = y_1, \ldots, x_n = y_n\ .$$

Ha $x \doteq (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, akkor az $x_i$-ket az $x$ koordinátáinak, $\mathbb{R}^n$ elemeit pontoknak, vagy vektoroknak is nevezzük.
Szokásos az $\mathbb{R}^n \doteq \overset{1}{\mathbb{R}} \times \cdots \times \overset{n}{\mathbb{R}}$ jelölés is és azt is mondjuk, az $\mathbb{R}^n$ $\mathbb{R}$ önmagával vett $n$-szeres Descartes-szorzata.

**2. Definíció.** Legyen adott az $\mathbb{R}^n$ halmaz és értelmezzük benne az összeadás és skalárral való szorzás műveletét

$$x + y \doteq (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n), \quad \text{illetve} \quad \lambda x \doteq (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$$

szerint, ha $x = (x_1, \ldots, x_n),\ y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n\ \wedge\ \lambda \in \mathbb{R}$ .

**1. Tétel.** *$\mathbb{R}^n$ a most értelmezett két művelettel vektortér (vagy lineáris tér).*

*Bizonyítás.* A vektortér 1)-7) tulajdonságai egyszerűen ellenőrizhetők. A nullelem: $0 \doteq (\overset{1}{0}, \ldots, \overset{n}{0})$ .

**2. Tétel.** *Ha $x = (x_1, \ldots, x_n),\ y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, úgy*

$$\langle x, y \rangle \doteq x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

*skaláris (vagy belső) szorzat $\mathbb{R}^n$-ben.*

*Bizonyítás.* A belsőszorzat 1)-4) tulajdonságának ellenőrzésével.

**3. Tétel.** *Ha $x = (x_1, \ldots, x_n),\ y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, akkor az*

$$\|x\| \doteq \sqrt{\langle x, x \rangle} \doteq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}, \quad \textit{illetve} \quad d(x,y) \doteq \|x - y\| \doteq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

*szerint definiált norma, illetve távolság (metrika) teljesíti a norma, illetve metrika tulajdonságait.*

*Bizonyítás.* Egyszerű (feladat).

**Megjegyzések:**

**1.** A 2., 3. tételben definiált skaláris (belső) szorzattal, normával, illetve távolsággal (metrikával) $\mathbb{R}^n$ euklideszi tér, euklideszi normával és metrikával. $(\mathbb{R}^n, d)$-t $n$-dimenziós euklideszi térnek is nevezik.

**2.** Ha $n = 1$, úgy a $d(x, y) \doteq |x - y|$ $(x, y \in \mathbb{R})$ távolsággal $(\mathbb{R}^1, d) = (\mathbb{R}, d)$ metrikus tér, hiszen $d$ teljesíti a metrika 3 tulajdonságát.

**3.** Az $a \in \mathbb{R}^n$ pont (vektor) $r$ sugarú nyílt gömbkörnyezete a

$$K(a, r) \doteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, a) < r\}$$

halmaz, ahol $d$ az $\mathbb{R}^n$-beli euklideszi távolság.

**4.** A korlátosság és az átmérő fogalma $(\mathbb{R}^n, d)$-ben ugyanaz mint $(X, d)$-ben. Igaz továbbá, hogy $H \subset (\mathbb{R}^n, d) \iff$ korlátos, ha $\exists\, r \in \mathbb{R},\ H \subset K(0, r)$ (azaz $\|x\| < r\ \forall\, x \in H$).

## 3. $\mathbb{R}^n$ és metrikus tér topológiája

Az $(\mathbb{R}^n, d)$ konkrét és az $(X, d)$ absztrakt metrikus terekben egy $a \in (\mathbb{R}^n, d) \vee (X, d)$ vektor, pont vagy elem $r > 0$ sugarú nyílt gömbkörnyezetén a $K(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \vee X \mid d(x, a) < r\}$ halmazt értettük, ahol a

$$d(x, a) \doteq \|x - a\| \doteq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2}$$

$\mathbb{R}^n$-beli, vagy pedig a 2.6. definícióban szereplő 1.-3. tulajdonságú $d(x, a)$ metrika szerepel. Ha szükséges a megkülönböztetés, akkor szokás a $d_{\mathbb{R}^n}$, illetve $d_X$ jelölés is az $\mathbb{R}^n$, illetve $X$-beli távolságra (metrikára).

**1. Definíció.** Legyen adott $E \subset (\mathbb{R}^n, d) \vee (X, d)$ halmaz. Azt mondjuk, hogy

– $x \in E$ belső pontja $E$-nek, ha $\exists\, K(x, r)$, hogy $K(x, r) \subset E$;

– $x \in \mathbb{R}^n \vee X$ külső pontja $E$-nek, ha belső pontja $CE$-nek (azaz $\exists\ K(x,r),\ K(x,r) \cap E = \emptyset$);
– $x \in \mathbb{R}^n \vee X$ határpontja $E$-nek, ha nem belső és nem külső pontja (azaz $\forall\ K(x,r)$-re $K(x,r) \cap E \neq \emptyset\ \wedge\ K(x,r) \cap CE \neq \emptyset$).

A belső pontok halmazát $E$ belsejének, a határpontok halmazát $E$ határának nevezzük.

**2. Definíció.** Az $E \subset (\mathbb{R}^n, d) \vee (X, d)$ halmazt nyíltnak nevezzük, ha minden pontja belső pont; zártnak nevezzük, ha $CE$ nyílt.

**1. Tétel.** *Az $(\mathbb{R}^n, d) \vee (X, d)$ metrikus terekben igazak a következők:*

*1) $\mathbb{R}^n \vee X \wedge \emptyset$ nyílt halmazok,*
*2) nyílt halmazok egyesítése nyílt,*
*3) véges sok nyílt halmaz metszete nyílt,*

*illetve*

*4) $\mathbb{R}^n \vee X \wedge \emptyset$ zárt halmazok,*
*5) zárt halmazok metszete zárt,*
*6) véges sok zárt halmaz egyesítése zárt.*

**3. Definíció.** Legyen adott $E \subset (\mathbb{R}^n, d) \vee (X, d)$. Az $x_0 \in \mathbb{R}^n \vee X$ pontot az $E$ halmaz torlódási pontjának nevezzük, ha $\forall\ K(x_0, r)$ $(\mathbb{R}^n \vee X$-beli) környezet tartalmaz $x_0$-tól különböző $E$-beli pontot, azaz $(K(x_0, r) \backslash \{x_0\}) \cap E \neq \emptyset$.
$x_0 \in E$ izolált pontja $E$-nek, ha nem torlódási pontja, azaz $\exists\ K(x_0, r)$, hogy $(K(x_0, r) \backslash \{x_0\}) \cap E = \emptyset$. $E$ torlódási pontjainak halmazát szokás $E'$-vel jelölni.

**2. Tétel.** *Az $E \subset (\mathbb{R}^n, d) \vee (X, d)$ $\iff$ zárt, ha $E' \subset E$ (azaz tartalmazza minden torlódási pontját).*

**3. Tétel (Bolzano-Weierstrass).** *$\forall\ S \subset \mathbb{R}^n$ korlátos végtelen halmaznak létezik torlódási pontja.*

**Megjegyzés:** A tétel metrikus térben általában nem igaz.

**4. Definíció.** Nyílt halmazok egy $\{o_\nu\}$ rendszere az $S \subset \mathbb{R}^n \vee X$ halmaznak egy nyílt lefedése, ha $S \subset \bigcup_\nu o_\nu$.

**5. Definíció.** A $K \subset \mathbb{R}^n \vee X$ halmaz kompakt, ha minden nyílt lefedéséből kiválasztható véges sok halmaz, mely lefedi $K$-t.

**4. Tétel.**

*A) (***Heine-Borel***) Egy $K \subset \mathbb{R}^n$ halmaz $\Longleftrightarrow$ kompakt, ha korlátos és zárt.*

*B) Ha $K \subset (X, d)$ kompakt, akkor korlátos és zárt.*

**6. Definíció.** Az $(X, d)$ metrikus tér összefüggő, ha nem létezik $X$-nek olyan nemüres $o_1$, $o_2$ nyílt részhalmaza, hogy $o_1 \cap o_2 = \emptyset$ és $o_1 \cup o_2 = X$. A $H$ $(\neq \emptyset) \subset X$ összefüggő $X$-ben ha $(H, d)$ összefüggő metrikus tér. (A $d$ metrika $H \times H$-ra való leszűkítését is $d$-vel jelöljük, és $(H, d)$ valóban metrikus tér.)

**5. Tétel.** $(\mathbb{R}^n, d)$ *összefüggő.*

## Feladatsor

1) Bizonyítsa be az 1.1. tételt.
2) Bizonyítsa be az 1.2. tételt.
3) Bizonyítsa be, hogy $H \subset \mathbb{R} \vee \mathbb{R}^n \vee X \iff$ korlátos, ha $\exists\ a \in \mathbb{R} \vee \mathbb{R}^n \vee X$ és $r > 0$, hogy $H \subset K(a, r)$.
4) Bizonyítsa be, hogy $\mathbb{R}^n$ a benne értelmezett összeadással és skalárral való szorzással vektortér.
5) Adottak az $x = (1, 5, 5)$ , $y = (-2, 2, 3)$ $\mathbb{R}^3$-beli vektorok, határozza meg az $x + y,\ x - y,\ 3x - \frac{1}{2}y$ vektorokat.
6) Bizonyítsa be a 2.2. tételt.
7) Bizonyítsa be a 2.3. tételt.
8) Bizonyítsa be, hogy $(\mathbb{R}^n, d)$, illetve $(X, d)$-beli nyílt környezetek nyílt halmazok.
9) Legyen $A = \{(x, y) \mid x, y \in (0, 1)\ ;\ x, y \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}^2$. Határozza meg $A$ torlódási pontjait, határpontjait. Vizsgálja meg, hogy $A$ nyílt, vagy zárt halmaz-e?
10) Legyen $H \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ és $H_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ a $H$ elemeinek $i$-edik koordinátáiból álló halmaz. Bizonyítsa be, hogy $H \iff$ korlátos, ha $\forall\ H_i$ korlátos $(\mathbb{R}, d)$-ben.
11) Bizonyítsa be, hogy egy metrikus tér minden véges részhalmaza kompakt.

# II. A RIEMANN-INTEGRÁL ÁLTALÁNOSÍTÁSA ÉS ALKALMAZÁSA

## 1. Korlátos változású függvények

**1. Definíció.** Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ adott függvény,

$$P \doteq \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\}$$

$[a, b]$ egy felosztása. A

$$V(f, [a, b], P) \doteq \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \tag{1}$$

összeget az $f$ függvény ($[a, b]$ feletti) $P$ felosztáshoz tartozó variációjának nevezzük.

**2. Definíció.** Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ adott, $P$ az $[a, b]$ egy tetszőleges felosztása, akkor a

$$V(f, [a, b]) = \sup_P V(f, [a, b], P) = \sup_P \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \tag{2}$$

számot az $f$ függvény $[a, b]$ feletti teljes (totális) változásának (variációjának) nevezzük.

**3. Definíció.** Az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény korlátos változású $[a, b]$-n, ha

$$V(f, [a, b]) < +\infty \tag{3}$$

teljesül.

**1. Tétel.** *Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monoton, akkor korlátos változású.*

*Bizonyítás.* Ha például $f$ monoton növekvő, $P$ egy felosztása $[a, b]$-nek, akkor $f(x_{k+1}) - f(x_k) \geq 0 \ \forall \ k$-ra, így

$$V(f, [a, b], P) = \sum_{k=0}^{n-1} (f(x_{k+1}) - f(x_k)) = f(b) - f(a) \qquad \forall \ P\text{-re} \ ,$$

ezért $V(f, [a, b]) = f(b) - f(a) < +\infty$, amit bizonyítani kellett.

**2. Tétel.** *Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos változású, akkor korlátos.*

*Bizonyítás.* Legyen $x \in [a, b]$ tetszőleges, $P = \{a, x, b\}$ az $[a, b]$ egy felosztása, akkor

$$V(f, [a, b], P) = |f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)| < V(f, [a, b]) < +\infty \ ,$$

így $|f(x) - f(a)| < V(f, [a, b])$, azaz

$$f(a) - V(f, [a, b]) < f(x) < f(a) + V(f, [a, b]) \ ,$$

ami adja $f$ korlátosságát.

**Megjegyzés:** Egy folytonos függvény nem feltétlenül korlátos változású.

**3. Tétel.** *Ha $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos változású függvények, akkor $f + g,\ f - g,\ f \cdot g : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos változásúak. Továbbá $g \geq \sigma > 0$ $(\sigma \in \mathbb{R})$ esetén $\dfrac{f}{g}$ is korlátos változású.*

*Bizonyítás.* Például $F = f + g$-re

$$|F(x_{k+1}) - F(x_k)| = |f(x_{k+1}) + g(x_{k+1}) - f(x_k) - g(x_k)| \leq$$
$$\leq |f(x_{k+1}) - f(x_k)| + |g(x_{k+1}) - g(x_k)| \ ,$$

és ezért (1) miatt

$$V(F, [a, b], P) \leq V(f, [a, b], P) + V(g, [a, b], P) \ ,$$

amiből (2) miatt

$$V(F, [a, b]) \leq V(f, [a, b]) + V(g, [a, b]) < +\infty$$

következik, ami adja az állítást.
A másik két állítás hasonlóan bizonyítható.

**4. Tétel.** *Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ adott függvény, $c \in [a, b]$ tetszőleges, akkor*

$$V(f, [a, b]) = V(f, [a, c]) + V(f, [c, b]) \tag{4}$$

*teljesül.*

**Következmények:**

1. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ akkor és csak akkor korlátos változású $[a, b]$-n, ha korlátos változású $[a, c]$-n és $[c, b]$-n.
2. Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ olyan, hogy monoton az $[a, a_1],\ [a_1, a_2], \ldots,\ [a_{n-1}, b]$ intervallumokon, akkor korlátos változású $[a, b]$-n.

**5. Tétel (Jordan).** *Az $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény akkor és csak akkor korlátos változású $[a,b]$-n, ha léteznek $g, h : [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton függvények, hogy $f = g - h$.*

## 2. Riemann-Stieltjes integrál

**1. Definíció.** Legyenek $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvények, $P \doteq \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\}$ $[a,b]$ egy tetszőleges felosztása, $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ tetszőleges. A

$$\sigma(f,g,P) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k) \cdot [g(x_k) - g(x_{k-1})]$$

számot az $f$ függvény $P$ felosztáshoz, és a $t_k \quad (k = 1, \ldots, n)$ értékekhez tartozó, $g$-re vonatkozó Riemann-Stieltjes integrálközelítő összegének nevezzük.

**2. Definíció.** Az $f$ függvény Riemann-Stieltjes integrálható a $g$ függvényre vonatkozóan $[a,b]$-n, ha $[a,b]$ $\forall$ $\langle P_n \rangle$ normális felosztássorozatához tartozó $\forall$ $\langle \sigma(f,g,P_n) \rangle$ Riemann-Stieltjes integrálközelítő összegsorozat konvergens. E sorozatok (egyébként közös) határértékét, a

$$\lim_{n\to\infty} \sigma(f,g,P_n) \doteq \int_a^b f dg \qquad \left( = \int_a^b f(x) dg(x) \right)$$

számot az $f$ függvény $g$-re vonatkozó Riemann-Stieltjes integráljának nevezzük $[a,b]$-n.

**Megjegyzés:** Ha $g(x) = x \quad (x \in [a,b]), \quad f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos,akkor a Riemann-Stieltjes integrál a Riemann-integrált adja.

**1. Tétel.** *Ha* $\exists \int_a^b f_1 dg, \ \int_a^b f_2 dg \implies \exists \int_a^b (f_1 + f_2) dg = \int_a^b f_1 dg + \int_a^b f_2 dg.$

*Bizonyítás.* A definíció közvetlen felhasználásával.

**2. Tétel.** *Ha* $\exists \int_a^b f dg_1, \ \int_a^b f dg_2 \implies \exists \int_a^b f d(g_1 + g_2) = \int_a^b f dg_1 + \int_a^b f dg_2.$

*Bizonyítás.* A definíció alapján.

**3. Tétel.** *Ha* $\exists \int_a^b f dg$ *és* $k, l \in \mathbb{R} \implies \exists \int_a^b (kf) d(lg) = kl \int_a^b f dg.$

*Bizonyítás.* A definíció alapján.

**4. Tétel.** *Ha* $a < c < b$ *és* $\exists \int_a^b f dg, \int_a^c f dg, \int_c^b f dg \implies \int_a^b f dg = \int_a^c f dg + \int_c^b f dg.$

*Bizonyítás.* A definíció alapján.

**5. Tétel (parciális integrálás).** *Ha az* $\int_a^b f dg$ *és* $\int_a^b g df$ *integrálok egyike létezik, akkor a másik is és*

$$\int_a^b f dg + \int_a^b g df = \left[ f \cdot g \right]_a^b .$$

**6. Tétel.** *Ha* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, *f folytonos, g korlátos változású, akkor* $\exists \int_a^b f dg$ *és*

$$\left| \int_a^b f dg \right| \leq M \cdot V(g, [a, b]), \text{ ha } |f| \leq M .$$

**7. Tétel.** *Ha* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, *f és* $g'$ *folytonos, akkor* $\exists \int_a^b f dg$ *és*

$$\int_a^b f dg = \int_a^b f(x) g'(x) \, dx .$$

**3. Definíció.** Legyenek $\underline{f} = (f_1, \ldots, f_n) : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ adott függvények. Az $\underline{f}$ vektorértékű függvénynek a $g$ (skalár értékű) függvényre vonatkozó Riemann-Stieltjes integrálján $[a, b]$ felett az

$$\int_a^b \underline{f} dg \doteq \left( \int_a^b f_1 dg, \ldots, \int_a^b f_n dg \right) \in \mathbb{R}^n$$

vektort értjük, ha az $\int_a^b f_i dg$ integrálok léteznek.

**4. Definíció.**
Legyenek $\underline{f} = (f_1, \dots, f_n) : [a,b] \to \mathbb{R}^n,\ \underline{g} = (g_1, \dots, g_n) : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ adott függvények. Az $\underline{f}$ vektorértékű függvénynek a $\underline{g}$ vektorértékű függvényre vonatkozó Riemann-Stieltjes integrálján $[a,b]$ felett az

$$\int_a^b \underline{f} d\underline{g} \doteq \sum_{i=1}^n \int_a^b f_i dg_i$$

számot értjük, ha az $\int_a^b f_i dg_i$ integrálok léteznek.

**Megjegyzések:**

**1.** Ha a 3. definícióban $g(x) = x,\ x \in [a,b]$, akkor az

$$\int_a^b \underline{f} \doteq (\int_a^b f_1, \dots, \int_a^b f_n) \in \mathbb{R}^n$$

vektor az $\underline{f}$ vektorértékű függvény Riemann-integrálja $[a,b]$ felett, ha az $\int_a^b f_i\ (i = 1, \dots, n)$ Riemann-integrálok léteznek.

**2.** Az $\int_a^b \underline{f} d\underline{g}$ típusú Riemann-Stieltjes integrálra a paragrafus 1-5. és 7. tételei változtatás nélkül, míg a 6. tétel kis változtatással átvihető.

**3. Newton-Leibniz-tétel** *Legyenek $\underline{f}, \underline{F} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ olyanok, hogy $\underline{f}$ Riemann-integrálható, és $\underline{F}' \doteq (F_1', \dots, F_n') = \underline{f}$, akkor*

$$\int_a^b \underline{f} = \underline{F}(b) - \underline{F}(a)\ .$$

*Bizonyítás:*

$$\int_a^b \underline{f} = (\int_a^b f_1, \dots, \int_a^b f_n) = (F_1(b) - F_1(a), \dots, F_n(b) - F_n(a)) =$$
$$= (F_1(b), \dots, F_n(b)) - (F_1(a), \dots, F_n(a)) = F(b) - F(a)$$

**4.** Legyen $\underline{f} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ Riemann-integrálható, akkor $\|\underline{f}\|$ is az, és

$$\left| \int_a^b \underline{f} \right| \le \int_a^b \|\underline{f}\|\ .$$

## 3. Görbék ívhossza

**1. Definíció.** Az $\underline{f} = (f_1, \ldots, f_n) : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ folytonos függvényt $\mathbb{R}^n$-beli görbének nevezzük. $[a,b]$-t paraméter-intervallumnak, $\underline{f}$-t a görbe egy paraméterelőállításának nevezzük. $\underline{f}(a)$ és $\underline{f}(b)$ a görbe kezdő, illetve végpontjai. Ha $\underline{f}(a) = \underline{f}(b)$, akkor $\underline{f}$ zárt görbe. Ha $\underline{f}$ kölcsönösen egyértelmű, akkor ívnek nevezzük.

**2. Definíció.** $\underline{f} = (f_1, \ldots, f_n) : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ sima görbe, ha $\underline{f}$ folytonosan differenciálható (azaz $\underline{f}' \doteq (f_1', \ldots, f_n') : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ folytonos) és

$$\sum_{i=1}^{n} f_i'^2(t) > 0 \qquad (t \in [a,b])$$

teljesül.

**3. Definíció.** Az $\underline{f} = (f_1, \ldots, f_n) : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ görbe képe a

$$\Gamma = \{(f_1(t), \ldots, f_n(t)) \mid t \in [a,b]\}$$

halmaz. (A képet – néha jelölésben is – azonosítjuk a görbével.) $\Gamma$ egy pontja az $\underline{f}$ görbe többszörös pontja, ha $\exists$ (legalább két) $t, t' \in [a,b]$, hogy $\underline{f}(t) = \underline{f}(t')$

**Megjegyzések:**

**1.** A $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ egységkör egy paraméteres előállítása az $\underline{f} = (\cos, \sin) : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ függvény. Belátható, hogy az egységkör sima, zárt görbe.

**2.** Ha $\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^n,\ \underline{a} \neq \underline{0}$ adott vektorok, akkor az

$$E \doteq \{\underline{a}t + \underline{b} = (a_1 t + b_1, \ldots, a_n t + b_n) \in \mathbb{R}^n,\ t \in \mathbb{R}\}$$

ponthalmazt a $\underline{b}$-n áthaladó $\underline{a}$ irányú $n$-dimenziós egyenesnek nevezzük. (A $t \to \underline{a}t + \underline{b} \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}$ leképezés az egyenes egy paraméteres előállítása.)

**3.** Legyen $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$ és $\underline{x} \neq \underline{y}$. Az $\{\underline{x} + t(\underline{y} - \underline{x}) \mid t \in [0,1]\} \subset \mathbb{R}^n$ halmazt az $\underline{x}$-et és $\underline{y}$-t összekötő $n$-dimenziós szakasznak nevezzük. (Természetesen $d(\underline{x}, \underline{y}) \doteq \|\underline{x} - \underline{y}\| \doteq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2},\ d(\underline{x}, \underline{0}) \doteq \|\underline{x}\| \doteq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ ).

**4. Definíció.** Legyen $\underline{f} = (f_1, \dots, f_n) : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ egy görbe $P = \{a = t_0, t_1, \dots, t_m = b\}$ $[a,b]$ egy felosztása, $|\underline{f}(t_i) - \underline{f}(t_{i-1})|$ az $\underline{f}(t_i)$ és $\underline{f}(t_{i-1})$ pontokat összekötő szakasz hossza. Az

$$\ell(\underline{f}, P) = \sum_{i=1}^{m} \|\underline{f}(t_i) - \underline{f}(t_{i-1})\|$$

számot az $\underline{f}$ görbébe a $P$ felosztása esetén beírt töröttvonal hosszának nevezzük. (Belátható, hogy ha $P_1 \subset P_2$, akkor $\ell(\underline{f}, P_1) \le \ell(\underline{f}, P_2)$.)

**5. Definíció.** Az $\underline{f} = (f_1, \dots, f_n) : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ görbe rektifikálható, ha az $\{\ell(\underline{f}, P) \mid P$ tetszőleges felosztása $[a,b]$-nek$\}$ halmaz korlátos. Az ekkor létező

$$\ell(\underline{f}) = \sup_P \{\ell(\underline{f}, P)\} \big(= \ell(\underline{f}, [a,b])\big)$$

számot az $\underline{f}$ görbe ívhosszának nevezzük.

**Megjegyzések:**

**1.** Az ívhossz nem függ a görbe paraméterelőállításától.

**2.** Az $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$ pontokat összekötő szakasz ívhossza $\|\underline{x} - \underline{y}\|$.

**3.** Ha $\underline{f} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ görbe, $c \in [a,b]$, $\underline{f}$ rektifikálható $[a,b]$-n, úgy

$$\ell(\underline{f}, [a,b]) = \ell(\underline{f}, [a,c]) + \ell(\underline{f}, [c,b]) \ .$$

(Makai I.: Differenciálszámítás I., 88-89. oldal)

Fontos a következő:

**Tétel.** *Legyen $\underline{f} = (f_1, \dots, f_n) : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ sima görbe, akkor rektifikálható, és ívhossza*

$$\ell(\underline{f}, [a,b]) = \int_a^b \|\underline{f}'(t)\| \, dt = \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^{n} f_i'^2(t)} \, dt \ .$$

**Következmények:**

**1.** Legyen $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény, akkor az $\underline{f} = (f_1, f_2) : [a,b] \to \mathbb{R}^2 \quad (f_1(t) = t, \ f_2(t) = g(t), \ t \in [a,b])$ a $g$ gráfjának (grafikonjának) egy paraméteres előállítása, melyre

$\underline{f}'(t) = (1, g'(t))$ teljesül, így ha $\mathcal{G}$ jelöli a $g$ által adott görbét, akkor ívhosszára

$$\ell(\mathcal{G}) = \int_a^b \sqrt{1 + g'^2(t)}\ dt$$

következik (1)-ből.

**2.** Tekintsük az $\underline{f} = (\cos, \sin) : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ egységkört.
Legyen $s \in (0, 2\pi]$, $\underline{f}_s : [0, s] \to \mathbb{R}^2$ $\underline{f}$ $[0, s]$-re való leszűkítése. Ekkor $\underline{f}_s$ az egységkör egy íve. (1)-ből jön, hogy

$$\ell(\underline{f}_s) = \int_0^s \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t)}\ dt = \int_0^s 1\ dt = s$$

az egységkör adott ívének hossza. Ha $s = 2\pi$, akkor $\ell(\underline{f}) = 2\pi$ az egységkör kerülete. Ez adja, hogy a mi $\pi$-nk megegyezik a középiskolás $\pi$-vel. $s$-t a $P_0OP_s$ szög ívmértékének nevezzük. A 360°-os szög ívmértéke $2\pi$.

**3.** $\underline{f}_r = (f_1, f_2) : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $f_1(t) = r \cdot \cos t$, $f_2(t) = r \cdot \sin t$ $(t \in [0, 2\pi])$ az origó középpontú $r$ sugarú kör. (1)-ből jön, hogy

$$\ell(\underline{f}_r) = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 \sin^2(t) + r^2 \cos^2(t)}\ dt = \int_0^{2\pi} r\ dt = 2r\pi\ .$$

## 4. Görbementi-integrál

**Definíció.** Legyen $\underline{g} = (g_1, \ldots, g_n) : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ adott görbe, $\underline{f} : \underline{g}([a, b]) \to \mathbb{R}^n$ vektorfüggvény, hogy $\underline{f} = (f_1, \ldots, f_n)$. Az $\underline{f}$ függvény $\underline{g}$ görbementi-integrálján (jelölése $\int\limits_{\underline{g}} \underline{f}$) az $\underline{f} \circ \underline{g} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ függvény $g$-re vonatkozó $[a, b]$ feletti Riemann-Stieltjes integrálját értjük (ha létezik), azaz

$$\int_{\underline{g}} \underline{f} \doteq \int_a^b (\underline{f} \circ \underline{g})\ d\underline{g} = \sum_{i=1}^n \int_a^b (f_i \circ \underline{g})\ dg_i\ .$$

**1. Tétel.** *Ha $\underline{g}$ rektifikálható $[a, b]$-n, $\underline{f}$ folytonos $\underline{g}([a, b])$-n, akkor létezik az $\underline{f}$ függvény $\underline{g}$ görbementi integrálja.*

*Bizonyítás.* Felhasználjuk, hogy ha $\underline{g}$ rektifikálható, akkor a $g_i$ függvények korlátos változásúak. Így mivel $f_i \circ \underline{g} : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, $g_i$ korlátos változású

$$\implies \exists \int_a^b (f_i \circ \underline{g})\, dg_i \quad (i = 1, \dots, n) \implies \exists \int_a^b (\underline{f} \circ \underline{g})\, dg \text{ , azaz } \int_{\underline{g}} \underline{f} \ .$$

**2. Tétel.** *Ha* $\exists \int_{\underline{g}} \underline{f}$ *és* $\|(\underline{f} \circ \underline{g})(x)\| \le M$, *akkor* $\left|\int_{\underline{g}} \underline{f}\right| \le M \cdot \ell(\underline{g})$.

*Bizonyítás.*

$$\left|\int_{\underline{g}} \underline{f}\right| \doteq \left|\int_a^b (\underline{f} \circ \underline{g})\, d\underline{g}\right| \doteq \left|\sum_{i=1}^n \int_a^b (f_i \circ \underline{g})\, dg_i\right| \le \sum_{i=1}^n \left|\int_a^b (f_i \circ \underline{g})\, dg_i\right| \le$$

$$\le M \cdot \sum_{i=1}^n \left|\int_a^b 1\, dg_i\right| \le M \cdot \ell(\underline{g}) \ .$$

**3. Tétel.** *Ha* $\underline{g}'$ *folytonos* $[a,b]$*-n,* $\underline{f}$ *folytonos* $\underline{g}([a,b])$*-n, akkor*

$$\int_{\underline{g}} \underline{f} = \sum_{i=1}^n \int_a^b (f_i \circ \underline{g})(x) g_i'(x)\, dx \ .$$

*Bizonyítás.*

$$\int_{\underline{g}} \underline{f} \doteq \int_a^b (\underline{f} \circ \underline{g}) d\underline{g} \doteq \sum_{i=1}^n \int_a^b (f_i \circ \underline{g})\, dg_i = \sum_{i=1}^n \int_a^b (f_i \circ \underline{g})(x) g_i'(x)\, dx \ .$$

**További tulajdonságok:**

**1.** Additivitás $\underline{f}$-re, illetve a $\underline{g}$ görbére.

Például legyen $\underline{g} = \underline{g}^1 \cup \underline{g}^2$ és $\exists \int_{\underline{g}^i} \underline{f}\ (i = 1,2) \implies \exists \int_{\underline{g}} \underline{f} = \sum_{i=1}^2 \int_{\underline{g}^i} \underline{f}$.

**2.** Ha $\underline{g}$ irányított görbe, $-\underline{g}$ az ellentétes irányítású, akkor $\int_{-\underline{g}} \underline{f} \doteq -\int_{\underline{g}} \underline{f}$.

**Megjegyzések: 1.** $\mathbb{R}^2$-beli görbék esetén a következő jelölések szokásosak:

$$\begin{aligned}
&\underline{g}\text{-re:} && \underline{g}(t) = (x(t), y(t)) \qquad (t \in [a,b]) \ ; \\
&\underline{f}\text{-re:} && \underline{f}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y)) \qquad ((x,y) \in \underline{g}([a,b])) \ ; \\
&\int\limits_{\underline{g}} \underline{f}\text{-re:} && \int\limits_{\underline{g}} \underline{f} = \int\limits_a^b P(x(t), y(t))\ dx(t) + \int\limits_a^b Q(x(t), y(t))\ dy(t) \doteq \\
& && \doteq \int\limits_{\underline{g}} P\ dx + \int\limits_{\underline{g}} Q\ dy \doteq \int\limits_{\underline{g}} (P\ dx + Q\ dy)
\end{aligned}$$

Ilyenkor $\int\limits_{\underline{g}} P\ dx$-et a $\underline{g}$ görbementi abszcissza szerinti, $\int\limits_{\underline{g}} Q\ dy$-t a $\underline{g}$ görbementi ordináta szerinti görbementi-integrálnak nevezzük, illetve azt mondjuk, hogy $\int\limits_{\underline{g}} (P\ dx + Q\ dy)$ a $(P,Q)$ függvénypár $\underline{g}$ görbementi integrálja.

**2.** $\mathbb{R}^3$-beli görbékre:

$$\begin{aligned}
\underline{g}(t) &= (x(t), y(t), z(t)) \qquad (t \in [a,b]) \ ; \\
\underline{f}(x,y,z) &= (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)) \qquad ((x,y,z) \in \underline{g}([a,b])) \ ; \\
\int\limits_{\underline{g}} \underline{f} &= \int\limits_a^b P(x(t), y(t), z(t))\ dx(t) + \int\limits_a^b Q(x(t), y(t), z(t))\ dy(t) + \\
&+ \int\limits_a^b R(x(t), y(t), z(t))\ dz(t) \doteq \int\limits_{\underline{g}} P\ dx + \int\limits_{\underline{g}} Q\ dy + \int\limits_{\underline{g}} R\ dz \doteq \\
&\doteq \int\limits_{\underline{g}} (P\ dx + Q\ dy + R\ dz) \ .
\end{aligned}$$

Utóbbit a $(P,Q,R)$ függvényhármas $\underline{g}$ görbementi integráljának is nevezik.

## Feladatsor

1) Korlátos változásúak-e az alábbi függvények:

$$f_1(x) = \sin^2 x \qquad (x \in [0,\pi]); \quad f_2(x) = x^3 - 3x + 4 \qquad (x \in [0,2]).$$

2) Legyen

$$f(x) = 1 \qquad (x \in [0,1]) \qquad \text{és} \qquad g(x) = \begin{cases} 0 & , \ x \in [0, \frac{1}{2}) \\ 1 & , \ x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} .$$

Bizonyítsa be, hogy $\exists \int_0^1 f \ dg$.

3) Határozza meg $\int_{-1}^{2} x^5 \ d(|x|^3)$ értékét.

4) Legyen $g(x) = \sin x$ $(x \in [0,\pi])$. Határozza meg $\int_0^{\pi} x \ dg(x)$-et.

5) Legyen $g(x) = e^{|x|}$ $(x \in [-1,1])$. Határozza meg $\int_{-1}^{1} x \ dg(x)$-et.

6) Határozza meg az alábbi görbék ívhosszát:

$$\underline{f}(t) = (3\cos t, \ 3\sin t, \ 2t) \qquad (t \in [0, 2\pi]) \ ;$$
$$\underline{g}(t) = \left(t, \ \tfrac{3}{2}t^2, \ \tfrac{3}{2}t^3\right) \qquad (t \in [0,2]) \ ;$$

7) Számítsa ki az alábbi görbementi integrálokat, azaz $\int_g \underline{f}$-et, ha:

- $\underline{g}(t) = (t^2, \ 2t, \ t) \quad (t \in [0,1]), \quad \underline{f}(x_1,x_2,x_3) = (x_1^2 + x_3, \ x_1x_3, \ x_1x_2)$;
- $\underline{g}$ a $(2,0,1)$ és $(2,0,4)$ pontokat összekötő irányított egyenes szakasz, $\underline{f}(x_1,x_2,x_3) = (2x_1, \ -3x_2, \ x_3)$;

# III. SOROZATOK $\mathbb{R}^n$-BEN ÉS METRIKUS TÉRBEN

## 1. Alapfogalmak és kapcsolatuk

**1. Definíció.** Egy $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^k \vee (X, d)$ függvényt $\mathbb{R}^k \vee (X, d)$-beli sorozatnak nevezünk. A sorozat $n$-edik tagját $f(n)$, $a_n$, $x_n$ (vagy más) jelöli. A sorozat elemeinek halmazára az $\{a_n\}$ vagy $\{x_n\}$ (vagy más) jelölést használunk. Magát a sorozatot az $\langle a_n \rangle$, vagy $\langle x_n \rangle$ (vagy más) szimbólummal jelöljük.

**2. Definíció.** (*korlátosság*) Az $\langle x_n \rangle$ $\mathbb{R}^k \vee (X, d)$-beli sorozat korlátos, ha $\{x_n\}$ korlátos.

**3. Definíció.** (*konvergencia*) Az $\langle x_n \rangle$ $\mathbb{R}^k \vee (X, d)$-beli sorozat konvergens, ha $\exists\ x \in \mathbb{R}^k \vee (X, d)$, hogy $\forall\ \varepsilon > 0$ esetén $\exists\ n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, hogy $\forall\ n \geq n(\varepsilon)$-ra $(n \in \mathbb{N})$ $d(x, x_n) = \|x - x_n\| < \varepsilon$ teljesül. Az $x \in \mathbb{R}^k \vee (X, d)$ számot (vektort, elemet) $\langle x_n \rangle$ határértékének nevezzük. Azt, hogy $\langle x_n \rangle$ konvergens és határértéke $x$, így jelöljük: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ vagy $x_n \to x$.

**Megjegyzések:**

1. A környezet fogalmát felhasználva a konvergencia ún. „környezetes" definícióját kapjuk: az $\langle x_n \rangle$ sorozat konvergens, ha $\exists\ x \in \mathbb{R}^k \vee (X, d)$, hogy $\forall\ K(x, \varepsilon)$-hoz $\exists\ n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, hogy $\forall\ n \geq n(\varepsilon)$-ra $x_n \in K(x, \varepsilon)$ teljesül.
2. Egyszerűen belátható, hogy $x_n \to x \iff \forall\ K(x, \varepsilon)$-re $x_n \in K(x, \varepsilon)$ legfeljebb véges sok $n \in \mathbb{N}$ kivételével.

**4. Definíció.** (*divergencia*) Az $\langle x_n \rangle$ $\mathbb{R}^k \vee (X, d)$-beli sorozat divergens, ha nem konvergens, azaz ha $\forall\ x$ esetén $\exists\ \varepsilon > 0$ $(\vee K(x, \varepsilon))$, hogy $\forall\ n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$-re $\exists\ n \geq n(\varepsilon)$, hogy $d(x, x_n) \geq \varepsilon$ $(\vee\ x_n \notin K(x, \varepsilon))$.

**1. Tétel (a határérték egyértelműsége).** *Ha $\langle x_n \rangle$ $\mathbb{R}^k \vee (X, d)$-beli konvergens sorozat, akkor egy határértéke van (azaz $x_n \to a$ és $x_n \to b \implies a = b$).*

*Bizonyítás.* Lásd Kalkulus I., III.1., 1. tétel bizonyítása.

**2. Tétel (konvergencia és korlátosság).** *Ha az* $\langle x_n \rangle$ $(\mathbb{R}^k \vee (X,d)$*-beli) sorozat konvergens, akkor korlátos.*

*Bizonyítás.* Lásd Kalkulus I., III.1., 2. tétel bizonyítása.

**4. Tétel.** *Az* $\langle x_n \rangle$ $\mathbb{R}^k$*-beli sorozat* $\Longleftrightarrow$ *konvergens és határértéke* $x \in \mathbb{R}^k$*, ha* $x_n = (x_{1n}, \ldots, x_{kn})$ *jelöléssel az* $\langle x_{1n} \rangle, \ldots, \langle x_{kn} \rangle$ *(úgynevezett koordináta) sorozatok konvergensek és az* $x = (x_1, \ldots, x_k)$ *jelöléssel* $x_{in} \to x_i$ $(i = 1, \ldots, k)$.

PÉLDA: Határozza meg az

$$\left\langle \frac{n+1}{3n+2},\ \frac{1}{n^2+1} \right\rangle$$

sorozat határértékét!

## 2. Sorozatok és műveletek, illetve rendezés

**Definíció.** Ha $\langle x_n \rangle$ és $\langle y_n \rangle$ $\mathbb{R}^k$-beli sorozatok, $\lambda \in \mathbb{R}$ tetszőleges, akkor az

$$\langle x_n \rangle + \langle y_n \rangle \doteq \langle x_n + y_n \rangle\ ; \qquad \lambda \langle x_n \rangle \doteq \langle \lambda x_n \rangle$$

szerint definiált sorozatokat az adott sorozatok összegének illetve $\lambda$-szorosának nevezzük.

**Tétel.** *Legyen* $\langle x_n \rangle$ *és* $\langle y_n \rangle$ $\mathbb{R}^k$*-beli sorozat,* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tetszőleges, hogy* $x_n \to x$ *és* $y_n \to y$*, akkor* $\langle x_n \rangle + \langle y_n \rangle$ *és* $\lambda \langle x_n \rangle$ *konvergensek és* $x_n + y_n \to x + y$*,* $\lambda x_n \to \lambda x$.

*Bizonyítás.* Lásd Kalkulus I., III.2., 1. tétel bizonyítása (az a) részben az abszolútérték helyett $\mathbb{R}^k$-beli euklideszi normát kell írni).

## 3. Részsorozatok

**1. Definíció.** Legyen $\langle a_n \rangle$ $\mathbb{R}^k \vee (X,d)$-beli sorozat. Ha $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton növekvő és $b_n = a_{\varphi(n)}$, akkor $\langle b_n \rangle$-t az $\langle a_n \rangle$ részsorozatának nevezzük.

**1. Tétel.** *Ha az $\langle a_n \rangle$ konvergens és határértéke $a$ akkor $\forall$ $\langle b_n \rangle$ részsorozatára $b_n \to a$ teljesül.*

*Bizonyítás.* Lásd Kalkulus I., III.3., 1. tétel bizonyítása.

**Megjegyzés:** A tétel megfordítása nem igaz, de ha egy sorozat két diszjunkt részsorozatra bontható, melyek határértéke ugyanaz, akkor az a sorozatnak is határértéke.

**2. Tétel (Bolzano-Weierstrass-féle kiválasztási tétel).** *Ha az $\langle a_n \rangle$ $\mathbb{R}^k$-beli sorozat korlátos, akkor létezik konvergens részsorozata.*

*Bizonyítás.* Lásd Kalkulus I., III.3., 2. tétel bizonyítása ($a \in \mathbb{R}$ helyett $a \in \mathbb{R}^k$-t kell írni).

## 4. Cauchy-sorozatok

**1. Definíció.** Az $\langle a_n \rangle$ $\mathbb{R}^k \vee (X, d)$-beli sorozatot Cauchy-sorozatnak nevezzük, ha $\forall\ \varepsilon > 0$ esetén $\exists\ n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, hogy $\forall\ p, q \geq n(\varepsilon)$ $(p, q \in \mathbb{N})$ esetén $d(a_p, a_q) < \varepsilon$.

**Tétel (Cauchy-féle konvergencia kritérium).**
*Az $\langle x_n \rangle$ $\mathbb{R}^k$-beli sorozat $\iff$ konvergens, ha Cauchy-sorozat. ($(X, d)$-ben általában csak az igaz, hogy minden konvergens sorozat Cauchy-sorozat).*

*Bizonyítás.* Lásd Kalkulus I., III.3., 4. tétel bizonyítása ($x \in \mathbb{R}$ helyett $x \in \mathbb{R}^k$-t, $\mathbb{R}$ helyett $\mathbb{R}^k$-t kell írni).

**2. Definíció.** Az $(X, d)$ metrikus teret teljesnek nevezzük, ha benne minden Cauchy-sorozat konvergens.

**Megjegyzés:** $\mathbb{R}^k$ teljes metrikus tér.

# IV. TÖBBVÁLTOZÓS ÉS VEKTORÉRTÉKŰ FÜGGVÉNYEK FOLYTONOSSÁGA, HATÁRÉRTÉKE

## 1. Alapfogalmak

**1. Definíció.** Az $f : E \subseteq (X, d) \to \mathbb{R}$, $f : E \subseteq (X, d_X) \to (Y, d_Y)$, típusú függvényeket valós értékű, illetve metrikus teret metrikus térbe képező függvénynek nevezzük.

**2. Definíció.** Az $f : E \subseteq (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ függvény korlátos, ha $f(E)$ korlátos.
Az $f : E \subseteq (X, d) \to \mathbb{R}$ függvény alulról (felülről) korlátos, ha $f(E)$ alulról (felülről) korlátos.
A $\sup f(E)$, $\inf f(E)$ számokat az $f$ pontos felső, illetve pontos alsó korlátjának (supremumának, illetve infimumának) nevezzük $E$-n.

**3. Definíció.** Ha az $f : E \subseteq (X, d) \to \mathbb{R}$ függvény esetén létezik $x_1, x_2 \in E$, hogy

$$\sup f(E) = f(x_1), \quad \inf f(E) = f(x_2) \ ,$$

akkor azt mondjuk, hogy $f$-nek létezik abszolút maximuma, illetve minimuma $E$-n. Az $f : E \subseteq (X, d) \to \mathbb{R}$ függvénynek az $x_0 \in E$-ben helyi (lokális) maximuma, illetve minimuma van, ha létezik $K(x_0, \delta)$, hogy $x \in K(x_0, \delta) \cap E$-re $f(x) \leq f(x_0)$, illetve $f(x) \geq f(x_0)$ teljesül.

## 2. Folytonosság fogalma

**1. Definíció.** Az $f : E \subseteq (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ függvény az $x_0 \in E$ pontban folytonos, ha $\forall\, \varepsilon > 0$-hoz $\exists\, \delta(\varepsilon) > 0$, hogy $\forall\, x \in E$, $d_X(x, x_0) < \delta(\varepsilon)$ esetén $d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.
Az $f : E \subseteq (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ függvény folytonos az $A \subseteq E$ halmazon, ha $A$ minden pontjában folytonos.

**Megjegyzések:**

1. Speciálisan az $f : E \subseteq (\mathbb{R}^n, d) \to (\mathbb{R}^m, d)$ függvény az $x_0 \in E$ pontban folytonos, ha $\forall\ \varepsilon > 0$-hoz $\exists\ \delta(\varepsilon) > 0$, hogy $\forall\ x \in E,\ \|x - x_0\|_{\mathbb{R}^n} < \delta(\varepsilon)$ esetén $\|f(x) - f(x_0)\|_{\mathbb{R}^m} < \varepsilon$.

2. Megfogalmazható az úgynevezett környezetes változat is:
Az $f : E \subseteq (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ függvény az $x_0 \in E$ pontban folytonos, ha $\forall\ K_Y(f(x_0), \varepsilon)$-hoz $\exists\ K_X(x_0, \delta(\varepsilon))$, hogy $\forall\ x \in E,\ x \in K_X(x_0, \delta(\varepsilon)) \implies f(x) \in K_Y(f(x_0), \varepsilon)$.

3. A folytonosság pontbeli (lokális) tulajdonság, amely globálissá tehető.

**1. Tétel (átviteli elv).** *Az $f : E \subseteq (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ függvény akkor, és csak akkor folytonos az $x_0 \in E$ pontban, ha minden $x_0$-hoz konvergáló $E$-beli $\langle x_n \rangle$ sorozat esetén az $\langle f(x_n) \rangle$ $(Y, d_Y)$-beli sorozat konvergens és* $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

*Bizonyítás.* Lásd Kalkulus I., V.2., 1. tétel bizonyítása.

**Megjegyzés:** A folytonosság itt megadott ekvivalens megfogalmazását sorozatos vagy Heine-féle definíciójának nevezik.

**2. Tétel.** *Az $f : E \subseteq (X, d) \to \mathbb{R}^m$ $(f = (f_1, \ldots, f_m),\ f_i : E \to \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, m))$ függvény $\iff$ folytonos az $x_0 \in E$-ben ha az $f_i$ függvények mindegyike folytonos $x_0$-ban.*

*Bizonyítás.* Az átviteli elv és a sorozatoknál kimondott tétel segítségével nyilvánvaló.

**2. Definíció.** Az $f : E \subset \mathbb{R} \to (Y, d)$ függvény balról (jobbról) folytonos az $x_0 \in E$ pontban, ha az $f$ $(-\infty, x_0] \cap E$-re (illetve $[x_0, +\infty) \cap E$-re) való leszűkítése folytonos $x_0$-ban.

**Megjegyzések:**

1. A definíció adja, hogy $f \iff$ balról (illetve jobbról) folytonos $x_0$-ban, ha $\forall\ \varepsilon > 0$-hoz $\exists\ \delta(\varepsilon) > 0,\ \forall x \in E,\ x_0 - \delta(\varepsilon) < x \leq x_0$ (illetve $x_0 \leq x < x_0 + \delta(\varepsilon)$) esetén $d(f(x_0), f(x)) < \varepsilon$.

2. Megfogalmazható a sorozatos változat is.

**3. Tétel.** *Az $f : E \subset \mathbb{R} \to (Y, d)$ függvény $\iff$ folytonos az $x_0$-ban, ha ott jobbról és balról is folytonos.*

**4. Tétel (jeltartás).** *Ha az $f : E \subset (X, d) \to \mathbb{R}$ függvény folytonos az $x_0 \in E$-ben és $f(x_0) \neq 0$, akkor $\exists\ K(x_0, \delta) \subset (X, d)$, hogy*
*$\forall\ x \in K(x_0, \delta) \cap E$, akkor* $\operatorname{sign} f(x_0) = \operatorname{sign} f(x)$.

*Bizonyítás.* Lásd Kalkulus I., V.2., 3. tétel bizonyítása.

**3. Definíció.** Az $f : E \subset (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ függvény egyenletesen folytonos az $E_1 \subset E$ halmazon, ha $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta(\varepsilon) > 0$, $\forall\, x, y \in E_1$, $d_X(x, y) < \delta(\varepsilon)$ esetén $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

## 3. Folytonosság és műveletek

**1. Tétel.** *Ha az $f, g : E \subseteq (X, d) \to \mathbb{R}^n$ függvények folytonosak az $x_0 \in E$-ben, akkor az $f + g$ és $\lambda f$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ is folytonosak $x_0$-ban.*

*Bizonyítás.* Lásd Kalkulus I., V.3., 1. tétel bizonyítása.

**2. Tétel.** *Ha az $f, g : E \subseteq (X, d) \to \mathbb{R}$ függvények folytonosak az $x_0 \in E$-ben, akkor az $f \cdot g$ és $g(x) \neq 0$ $(x \in E)$ esetén $\dfrac{f}{g}$ is folytonos $x_0$-ban.*

**3. Tétel (az összetett függvény folytonossága).** *Legyenek $(X, d_X)$, $(Y, d_Y), (Z, d_Z)$ metrikus terek; $f : E \subseteq X \to Y$, $g : f(E) \subseteq Y \to Z$ adott függvények. Ha $f$ folytonos az $x_0 \in E$ pontban, $g$ folytonos az $y_0 = f(x_0)$-ban, akkor a $h = g \circ f$ függvény folytonos az $x_0$-ban.*

*Bizonyítás.* Lásd Kalkulus I., V.3., 3. tétel bizonyítása.

## 4. Folytonosság és topologikus fogalmak

**1. Tétel (a folytonosság topologikus megfelelője).**
*Az $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ függvény akkor, és csak akkor folytonos $X$-en, ha $\forall\ B \subset (Y, d_Y)$ nyílt halmazra $f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$ nyílt $(X, d_X)$-ben.*

**2. Tétel (kompaktság és folytonosság).** *Legyen $E \subset (X, d_X)$ kompakt halmaz, $f : E \to (Y, d_Y)$ folytonos függvény $E$-n, akkor $f(E)$ kompakt $(Y, d_Y)$-ban. (Röviden: kompakt halmaz folytonos képe kompakt.)*

*Bizonyítás.* Lásd Kalkulus I., V.4., 1. tétel bizonyítása.

**Következmény:**

**1.** Ha $Y = \mathbb{R}^n \implies f(E)$ korlátos és zárt.

**2.** Ha $Y = \mathbb{R}$, akkor $f$ felveszi $E$-n az abszolút minimumát és maximumát (mert $\sup f(E)$ és $\inf f(E)$ is eleme $f(E)$-nek, ha $f(E)$ zárt és természetesen korlátos).

**3. Tétel (kompaktság és egyenletes folytonosság) (Heine).** *Legyen $E \subset (X, d_X)$ kompakt halmaz, $f : E \to (Y, d_Y)$ folytonos függvény $E$-n, akkor $f$ egyenletesen folytonos $E$-n. (Röviden: kompakt halmazon folytonos függvény egyenletesen folytonos.)*

**4. Tétel (összefüggőség és folytonosság).** *Legyen $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ folytonos függvény, $E \subseteq X$ összefüggő, akkor $f(E)$ is az.*

**5. Tétel (Bolzano).** *Legyen $E \subseteq (X, d)$ összefüggő, $f : E \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ha $c, d \in f(E)$, $c < d$, akkor $(c, d) \subset f(E)$ (azaz $f$ két érték között minden közbenső értéket felvesz).*

## 5. A határérték fogalma

**1. Definíció.** Az $f : E \subseteq (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ függvénynek az $x_0 \in E'$ pontban $\exists$ határértéke, ha $\exists\, A \in Y$, hogy $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta(\varepsilon) > 0$,

$$\forall\, x \in E,\ 0 < d_X(x, x_0) < \delta(\varepsilon) \quad \implies \quad d_Y(f(x), A) < \varepsilon\ .$$

$A$-t az $f$ függvény $x_0$-beli határértékének nevezzük, és $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ vagy $f(x) \to A$, ha $x \to x_0$ jelöléseket használjuk.

**Megjegyzések:**

**1.** Speciálisan az $f : E \subseteq (\mathbb{R}^n, d) \to (\mathbb{R}^m, d)$ függvénynél $\|x - x_0\|_{\mathbb{R}^n} \wedge \|f(x) - A\|_{\mathbb{R}^m}$ írható.

**2.** Megfogalmazható a környezetes változat is:
Az $f : E \subseteq (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ függvénynek az $x_0 \in E'$ pontban $\exists$ határértéke, ha $\exists\ A \in Y$, hogy $\forall\ K_Y(A, \varepsilon)$-hoz $\exists\ K_X(x_0, \delta(\varepsilon))$, $\forall\ x \in K_X(x_0, \delta(\varepsilon))\backslash\{x_0\},\ x \in E$ esetén $f(x) \in K_Y(A, \varepsilon)$.

**3.** A határérték létezése pontbeli tulajdonság.

**4.** Az $f : E \subseteq (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ függvénynek az $x_0 \in (X, d_X)$-ben nem létezik határértéke, ha $x_0 \notin E'$, vagy $x_0 \in E'$ és $\forall\ A \in Y,\ \exists \varepsilon > 0$, $\forall\ \delta(\varepsilon) > 0$ esetén $\exists\ x \in E,\ x \in K_X(x_0, \delta(\varepsilon))\backslash\{x_0\},\ f(x) \notin K_Y(A, \varepsilon)$.

**5.** A határérték (ha létezik) egyértelműen meghatározott (ez indirekt bizonyítással – hasonlóan, mint a sorozatoknál – egyszerűen belátható).

**2. Definíció.** Legyen $f : E \subseteq \mathbb{R} \to (Y, d)$ adott függvény és az $x_0$ torlódási pontja $[x_0, +\infty) \cap E$ $(\vee(-\infty, x_0] \cap E))$-nek. Az $f$ függvénynek az $x_0$-ban $\exists$ jobb- (vagy bal-) oldali határértéke, ha
$\exists\ A \in Y,\ \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta(\varepsilon) > 0,\ \forall\ x \in E,\ x_0 < x < x_0 + \delta(\varepsilon)$ (vagy $x_0 - \delta(\varepsilon) < x < x_0$) $\Longrightarrow\ d_Y(f(x), A) < \varepsilon$.
$A$-t $f$ jobb (illetve bal) oldali határértékének nevezzük $x_0$-ban, és a

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = A = f(x_0 + 0) \quad \text{vagy} \quad \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = A = f(x_0 - 0)$$

jelölést használjuk.

**Megjegyzések:**

**1.** A definíció a leszűkítés fogalmának használatával is megfogalmazható (hasonlóan a folytonossághoz).

**2.** A környezetes átfogalmazás is megadható.

**3.** Könnyen belátható a következő:
Legyen $f : E \subseteq \mathbb{R} \to (Y, d)$ adott függvény és az $x_0$ torlódási pontja $[x_0, +\infty) \cap E \wedge (-\infty, x_0] \cap E$-nek. Az $f$ függvénynek $x_0$-ban akkor, és csak akkor létezik határértéke, ha létezik $f(x_0 - 0)$ és $f(x_0 + 0)$ és $f(x_0 - 0) = = f(x_0 + 0) = A$ ($f$ határértéke $x_0$-ban).

**3. Definíció.** Az $f : E \subseteq (X, d_X) \to \mathbb{R}$ függvények $x_0 \in E'$-ben a határértéke $+\infty$ (vagy $-\infty$), ha $\forall$ $K$-hoz $\exists$ $\delta(K) > 0$, $\forall$ $x \in E$, $0 < d(x, x_0) < \delta(K)$ esetén $f(x) > K$ (vagy $f(x) < K$).

**Megjegyzések:**

**1.** A definíció környezetekkel is megfogalmazható.

**2.** A $+\infty$ (vagy $-\infty$) egyoldali határértékként is megfogalmazható.

**4. Definíció.** Legyen $E \subseteq \mathbb{R}$ felülről (alulról) nem korlátos halmaz, $f : E \to (Y, d)$ adott függvény. Az $f$ függvénynek $+\infty$ (vagy $-\infty$)-ben létezik határértéke, ha $\exists$ $A \in Y$, $\forall$ $\varepsilon > 0$ $\exists$ $M \in \mathbb{R}$, $\forall$ $x \in E \wedge x > M$ ($\vee x < M$) esetén $d(f(x), A) < \varepsilon$. Ekkor $A$-t $f$ $+\infty$ (vagy $-\infty$)-beli határértékének nevezzük, és rá a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A \vee \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$ jelölést használjuk.

**2. Tétel (átviteli elv).** *Az $f : E \subseteq (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ függvénynek az $x_0 \in E'$ pontban akkor, és csak akkor $\exists$ határértéke, ha $\forall$ $x_0$-hoz konvergáló $\langle x_n \rangle : \mathbb{N} \to E \backslash \{x_0\}$ sorozat esetén $\exists$ $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = A$.*

*Bizonyítás.* Úgy, mint a folytonosságnál, csak az ottani $K_Y(f(x_0), \varepsilon)$ helyett $K_Y(A, \varepsilon)$-t és az $x_0$-beli folytonosság helyett $x_0$-beli határértéket kell mondani.

**3. Tétel.** *Az $f : E \subseteq (X, d) \to \mathbb{R}^n$ ($f = (f_1, \ldots, f_n)$, $f_i : E \to \mathbb{R}$) függvénynek, akkor és csak akkor létezik határértéke az $x_0 \in E'$-ben, ha az $f_i$ függvényeknek létezik határértéke $x_0$-ban.*

*Bizonyítás.*
Az átviteli elv és az $\mathbb{R}^n$-beli sorozatokra vonatkozó tételek alapján.

## 6. Határérték és műveletek illetve egyenlőtlenségek

**1. Tétel.** *Legyenek* $f, g : E \subseteq (X,d) \to \mathbb{R}$ *adott függvények, hogy az* $x_0 \in E'$*-ben* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \ \wedge \ \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$*, akkor*

$$a) \quad \lim_{x\to x_0} (f+g)(x) = \lim_{x\to x_0} [f(x)+g(x)] = A + B \ ;$$

$$b) \quad \lim_{x\to x_0} (\lambda f)(x) = \lim_{x\to x_0} \lambda f(x) = \lambda A \ , \quad (\lambda \in \mathbb{R} \vee \mathbb{C}) \ ;$$

$$c) \quad \lim_{x\to x_0} (f\cdot g)(x) = \lim_{x\to x_0} [f(x)\cdot g(x)] = A \cdot B \ ;$$

$$d) \quad \lim_{x\to x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} \ , \ \ \text{ha } g \neq 0, \ B \neq 0 \ .$$

*Bizonyítás.* Az átviteli elv és a sorozatokra vonatkozó megfelelő tételek alapján.

**Megjegyzés:** a) és b) $\mathbb{R}^n$-beli értékű függvényrekre is megfogalmazható és bizonyítható.

**2. Tétel.** *Ha* $f : E \subseteq (X,d) \to \mathbb{R}$ *és* $x_0 \in E'$*, akkor ha*

$$a) \quad \exists \lim_{x\to x_0} |f(x)| = +\infty \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0 \quad (f \neq 0) \ ;$$

$$b) \quad \exists \lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to x_0} \frac{1}{|f(x)|} = +\infty \quad (f \neq 0) \ ;$$

*Bizonyítás.* Az átviteli elv és a sorozatokra vonatkozó megfelelő tételek alapján.

**3. Tétel.** *Legyenek* $f, g, h : E \subseteq (X,d) \to \mathbb{R}$ *adott függvények és* $x_0 \in E'$*, akkor, ha*

$$a) \quad \exists \lim_{x\to x_0} f(x) = A \wedge \lim_{x\to x_0} g(x) = B \wedge \exists \, K(x_0,\delta), \ f(x) \leq g(x)$$
$$\forall \, x \in [K(x_0,\delta)\backslash\{x_0\}] \cap E \implies A \leq B \ ;$$

$$b) \quad \exists \lim_{x\to x_0} f(x) = A \wedge \lim_{x\to x_0} g(x) = B \wedge A < B \implies \exists \, K(x_0,\delta),$$
$$f(x) < g(x) \ \forall \, x \in [K(x_0,\delta)\backslash\{x_0\}] \cap E \ ;$$

$$c) \quad \exists \, K(x_0,\delta), \ f(x) \leq h(x) \leq g(x) \ \forall \, x \in [K(x_0,\delta)\backslash\{x_0\}] \cap E$$
$$\wedge \exists \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = A \implies \exists \lim_{x\to x_0} h(x) = A \ .$$

*Bizonyítás.* Az átviteli elv és a sorozatokra vonatkozó megfelelő tételek alapján.

**4. Tétel (az összetett függvény határértéke).** *Legyenek adottak az* $(X, d_X)$, $(Y, d_Y)$ *és* $(Z, d_Z)$ *metrikus terek,* $x_0 \in X'$ *és* $y_0 \in Y'$, *továbbá* $f : X\backslash\{x_0\} \to Y\backslash\{y_0\}$, $g : Y\backslash\{y_0\} \to Z$ *függvények, hogy*

$$\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = y_0 \ \wedge \lim_{y\to y_0} g(y) = A \quad \Longrightarrow \quad \exists \lim_{x\to x_0} (g \circ f)(x) = A \ .$$

*Bizonyítás.* Lásd Kalkulus I., VI.2., 4. tétel bizonyítása.

## 7. A határérték és a folytonosság kapcsolata

**Tétel.** *Legyen* $f : E \subset (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ *adott függvény és* $x_0 \in X$, $x_0 \in X'$. $f \iff$ *folytonos* $x_0$*-ban, ha* $\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

*Bizonyítás.* Lásd Kalkulus I., VI.3. fejezet tételének bizonyítása.

**Definíció.** Ha az $f : E \subset (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ függvény nem folytonos az $x_0 \in E$ pontban, akkor azt mondjuk, hogy $x_0$ $f$-nek szakadási helye, vagy hogy $f$-nek $x_0$-ban szakadása van.
Ha $f : E \subset \mathbb{R} \to (Y, d_Y)$ adott függvény és $x_0 \in E^0$ ($x_0$ belső pont $E$-ben), és $x_0$ szakadási helye $f$-nek, továbbá $\exists \lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0 + 0) \wedge \lim_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0 - 0)$, akkor azt mondjuk, $f$-nek $x_0$-ban elsőfajú szakadása van. Ha még $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$, akkor azt mondjuk, hogy a szakadás megszüntethető.
Ha $f$-nek $x_0$-ban szakadása van és az nem elsőfajú, akkor azt másodfajú szakadásnak nevezzük.

# V. A TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

## 1. További lineáris algebrai előismeretek

A „Vektorterek, euklideszi terek, metrikus terek” című fejezetében definiáltuk a vektorteret, a skaláris szorzatot, vektorok euklideszi normáját, vektorok euklideszi távolságát, illetve ezekhez kapcsolódva, speciálisan az $\mathbb{R}^n$ euklideszi teret.

**1. Definíció.** $n$-szer $m$ szám egy

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{n\times m}$$

alakú elrendezését $n \times m$-es mátrixnak, az $a_{ij}$ számokat a mátrix elemeinek nevezzük. Ha $n = m$, akkor négyzetes (kvadratikus) mátrixról beszélünk.

Az $n \times m$ típusú mátrixban a számokat $n$ sorba és $m$ oszlopba helyeztük el. Azt a tényt, hogy egy szám az $A$ mátrix $i$-edik sorában és $j$-edik oszlopában van az indexei fejezik ki, így $a_{ij}$ jelöli (az első a sor-, a második az oszolpindex).

Két mátrix azonos típusú, ha soraik és oszlopaik száma is megegyezik.

Két mátrix egyenlő, ha azonos típusúak és az egymásnak megfelelő helyen lévő elemeik egyenlőek.

**Megjegyzések:**

**1.** Az

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

mátrixot null-mátrixnak nevezzük (azaz, ha $\forall\ a_{ij} = 0$).

**2.** Az

$$A^\top = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

mátrixot az $A$ mátrix transzponált mátrixának nevezzük. ($A^\top$ oszlopai az $A$ sorai, $A^\top$ sorai $A$ oszlopai.)

**3.** Ha $A$ kvadtratikus mátrix, akkor az $a_{11}, \dots, a_{nn}$ számok $A$ fődiagonálisát alkotják.

**4.** Ha a kvadratikus mátrix fődiagonálisában csupa 1 áll, a többi eleme pedig nulla, akkor egységmátrixról beszélünk:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

**2. Definíció.** Ha $A = (a_{ij})_{n\times m}$, $B = (b_{ij})_{n\times m}$ adott mátrixok, akkor összegük az a $C$ $n \times n$-es mátrix, melyre

$$C \doteq A + B \doteq (a_{ij} + b_{ij})_{n\times m} = (c_{ij})_{n\times m} \ .$$

Az $A = (a_{ij})_{n\times m}$ mátrix $\lambda \in \mathbb{R}$ skalárral való szorzata a

$$\lambda A \doteq (\lambda a_{ij})_{n\times m}$$

mátrix.

Az $n \times m$-es mátrixok e két műveletre nézve vektorteret alkotnak.

**3. Definíció.** Az $A = (a_{ik})_{n\times m}$ és a $B = (b_{kj})_{m\times p}$ mátrixok szorzata az a $C$ $n \times p$ típusú mátrix, melyben

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj},$$

azaz

$$A \cdot B \doteq C \doteq (c_{ij})_{n\times p} \doteq \left( \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj} \right)_{n\times p} \ .$$

**1. Tétel.** *A mátrixszorzás fontosabb tulajdonságai:*

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C,$$
$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C, \qquad (A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C,$$
$$(\lambda A) \cdot B = \lambda (A \cdot B) = A \cdot (\lambda B),$$

*(általában: $A \cdot B \neq B \cdot A$).*

Az $1 \times n$ típusú mátrixot sormátrixnak, míg az $n \times 1$ típusút oszlopmátrixnak nevezzük. Az

$$(x_1, \ldots, x_n) \to (x_1 \ \ldots \ x_n)$$

és

$$(x_1, \ldots, x_n) \to \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

kölcsönösen egyértelmű megfeleltetések lineáris izomorfiát adnak $\mathbb{R}^n$ valamint az $1 \times n$, illetve $n \times 1$ típusú mátrixok vektorterei között. A következőkben $\mathbb{R}^n$ elemeit, ha mást nem mondunk, oszlopmátrixokkal reprezentáljuk.

**4. Definíció.** Az $A$ kvadratikus mátrix invertálható, ha létezik olyan $X$ mátrix, melyre

$$A\,X = X\,A = E$$

(ha $A$ $n \times n$ típusú, akkor létezik $n \times n$ típusú egységmátrix). $X$-et az $A$ inverz mátrixának nevezzük.

**2. Tétel.** *Ha $A$ invertálható, akkor csak egy inverze van. (Ha $A$ invertálható, úgy inverzét $A^{-1}$ jelöli, erre $AA^{-1} = A^{-1}A = E$ teljesül.) Ha $A$ invertálható, úgy inverze is az és $(A^{-1})^{-1} = A$. Ha $A$ és $B$ invertálható, akkor $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. Ha $A$ invertálható, úgy $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$.*

**5. Definíció.** Egy $A = (a_{ij})_{n \times n}$ kvadratikus mátrixhoz rendeljünk hozzá egy valós számot úgy, hogy:

- minden sorból kiválasztunk pontosan egy elemet úgy, hogy minden oszlopból is ki legyen választva pontosan egy elem,
- ezen elemeket összeszorozzuk és pozitív vagy negatív előjellel látjuk el aszerint, hogy a kiválasztott elemek (amennyiben sorindexeik természetes sorrendben vannak) oszlopindexeinek permutációjában az inverziók (felcserélt elemek) száma páros vagy páratlan.
- a tagokat minden lehetséges módon képezve összeadjuk.

Az így kapott $D$ számot az $(a_{ij})_{n \times n}$ mátrix determinánsának nevezzük és

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = |A|$$

jelöljük ($n$-edrendű determináns).

**Megjegyzések:**

**1.** $D = \sum_{k_1,\ldots,k_n} (-1)^{\mathfrak{I}} a_{1k_1} \cdot \ldots \cdot a_{nk_n}$, ahol $\mathfrak{I}$ a $k_1, \ldots, k_n$ permutációban lévő inverziók száma. Az összeg $n!$ tagot tartalmaz.

**2.** Példák:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{12} - a_{12}a_{21} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = ?$$

**3.** Egy determináns $a_{ik}$ eleméhez tartozó aldeterminánson azt az $A_{ik}$ $n-1$-edrendű determinánst értjük, mely az eredetiből az $i$-edik sor és a $k$-adik oszlop elhagyásával adódik, ellátva a $(-1)^{i+k}$ előjellel.

**3. Tétel.** *Egy $A = (a_{ij})_{n\times n}$ mátrix determinánsa rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:*

1) *Ha valamelyik sorában (oszlopában) csupa 0 van, akkor $D = 0$.*

2)
$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{i1} & \ldots & \lambda a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

3)
$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + b_{i1} & \ldots & a_{in} + b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \ldots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & \ldots & b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

4) *Ha két sorát felcseréljük értéke $(-1)$-szeresére változik.*

5) *Ha két sor megegyezik, értéke 0.*

6) *Értéke nem változik, ha egyik sorához hozzáadjuk egy máik sorát, vagy annak többszörösét.*

7) *Értéke nem változik, ha sorait és oszolpait felcseréljük.*

8) $D = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}$ *(kifejtési tétel).*

*Mindezek megfogalmazhatók sorok helyett oszlopokra is.*

*Bizonyítás.* A definíció alapján.

**4. Tétel (determinánsok szorzástétele).** *Két ugyanolyan rendű kvadratikus mátrix determinánsának szorzata egyenlő a szorzatmátrix determinánsával:*

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$$

**5. Tétel.** *Ha az $A$ kvadratikus mátrix invetálható, akkor a determinánsa nem 0 (azaz $A$ reguláris mátrix).*

*Bizonyítás.* $A$ invertálható, így létezik az $A^{-1}$ inverze, melyre $A \cdot A^{-1} = E$. Így a szorzástétel miatt

$$1 = |E| = |A \cdot A^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}| \ ,$$

amiből $|A| \neq 0$ következik.

**6. Tétel.** *Ha $|A| \neq 0$ (azaz $A$ reguláris), akkor invertálható és $A^{-1}$ inverzére:*

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|}(A_{ji})_{n\times n}$$

*teljesül, ahol $A_{ij}$ az $A = (a_{ij})_{n\times n}$ mátrix $a_{ij}$ eleméhez tartozó adjungált aldeterminánsa.*

*Bizonyítás.* Könnyen belátható, hogy

$$\sum_{s=1}^{n} a_{js}A_{is} = \delta_{ij}|A| \ , \qquad \text{ahol} \ \ \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & j = i \ , \\ 0 & j \neq i \ . \end{cases}$$

Ezután már

$$AA^{-1} = \frac{1}{|A|}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj}\right)_{n\times n} = \frac{1}{|A|}(\delta_{ik}|A|) = (\delta_{ik})_{n\times n} = E$$

következik, azaz $A^{-1}$ az $A$ inverze.

**6. Definíció.** Az $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ leképezést (transzformációt) lineárisnak nevezzük, ha

$$A(x+y) = A(x) + A(y), \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n,$$
$$A(\lambda x) = \lambda A(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n,\ \lambda \in \mathbb{R}$$

teljesül.
Az $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineáris leképezések összességét szokás $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$-mel jelölni.

Legyen $A$ $m \times n$-es mátrix, úgy az

$$A(x) \doteq A \cdot x \qquad (x \in \mathbb{R}^n)$$

szerint értelmezett leképezés (transzformáció) $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ típusú lineáris leképezés (transzformáció).
Másrészt bármely $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineáris leképezés

$$A(x) = A \cdot x \qquad (x \in \mathbb{R}^n,\ A\ m \times n\text{-es mátrix})$$

alakba írható.
Így bármely $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineáris leképezés azonosítható egy $A$ $m \times n$-es mátrixszal.

**7. Definíció.** Ha $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, akkor az

$$\|A\| \doteq \sup_{\|x\| \le 1} \{\|Ax\|\}$$

számot az $A$ lineáris leképezés normájának nevezzük.

**7. Tétel.** *A norma fontosabb tulajdonságai:*

$$\|Ax\| \le \|A\|\ \|x\|; \qquad \|A\| < +\infty;$$
$$\|A + B\| \le \|A\| + \|B\|; \qquad \|\lambda A\| = |\lambda|\ \|A\|;$$
$$\|BA\| \le \|B\|\ \|A\|; \qquad (A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m),\ B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k)).$$

## 2. A differenciálhatóság

A továbbiakban olyan $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ típusú függvényekkel foglalkozunk, ahol $D$ nyílt halmaz $\mathbb{R}^n$-ben és $f = (f_1, \ldots, f_m)$, ahol $f_1, \ldots, f_m$ az $f$ komponens függvényei. $\mathbb{R}^n$ és $\mathbb{R}^m$ elemeit is oszlopmátrixokkal reprezentáljuk (ha mást nem mondunk).

**1. Definíció.** Azt mondjuk, hogy az $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény differenciálható az $x_0 \in D$ pontban, ha létezik egy $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ lineáris leképezés, hogy

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)\|_{\mathbb{R}^m}}{\|x - x_0\|_{\mathbb{R}^n}} = 0 \, . \tag{1}$$

Ekkor $f'(x_0) \doteq A$ az $f$ függvény $x_0$-beli differenciálhányadosa, míg

$$df(x_0, x - x_0) \doteq f'(x_0)(x - x_0)$$

az $f$ $x_0$-beli első differenciálja.

**Megjegyzés:** Ha $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ típusú függvény, úgy $f'(x) = A = (a_1 \ \ldots \ a_n)$ $1 \times n$-es sormátrix, míg az első differenciál a

$$d\, f(x_0, x - x_0) = \sum_{i=1}^{n} a_i (x_i - x_{0i})$$

szám.

**1. Tétel.** *Ha az 1. definícióban* (1) *az $A = A_1$ és $A = A_2$ esetén is teljesül, úgy $A_1 = A_2$ (azaz a differenciálhányados egyértelműen meghatározott).*

**2. Tétel.** *Az $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény $\Longleftrightarrow$ differenciálható az $x_0 \in D$ pontban, ha*

a) *létezik $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ lineáris leképezés és $\omega : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény, hogy*

$$f(x) - f(x_0) = A(x - x_0) + \omega(x) \tag{2}$$

*és* $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\omega(x)}{\|x - x_0\|} = 0.$

*vagy*

b) *létezik* $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ *lineáris leképezés és* $\omega : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *függvény, hogy*

$$f(x) - f(x_0) = A(x - x_0) + \omega(x)\|x - x_0\| \tag{3}$$

*és* $\lim\limits_{x \to x_0} \omega(x) = \omega(x_0) = 0.$

*Bizonyítás.*

A) Rendezés és abszolútérték képzése után (2) és (3) is adja (1) teljesülését.

B) (1)-ből a határérték definíciója és tulajdonságai miatt kapjuk a) és b) és így (2) és (3) teljesülését.

**3. Tétel.** *Ha az* $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *függvény differenciálható az* $x_0 \in D$ *pontban, akkor ott folytonos is.*

*Bizonyítás.* Elegendő megmutatni, hogy

$$\lim_{x \to x_0} \|f(x) - f(x_0)\| = 0. \tag{$*$}$$

Az előző tétel b) része adja, hogy létezik $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ lineáris leképezés, és $\omega : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény, hogy $\lim\limits_{x \to x_0} \omega(x) = \omega(x_0) = 0$ és

$$\|f(x) - f(x_0)\| = \big\|A(x - x_0) + \omega(x)\|x - x_0\|\big\| \leq$$
$$\leq \|A(x - x_0)\| + \|\omega(x)\|\,\|x - x_0\| \leq \|A\|\,\|x - x_0\| + \|\omega(x)\|\,\|x - x_0\|.$$

A kapott egyenlőtlenségből $x \to x_0$ határátmenettel kapjuk $(*)$-ot.

**Megjegyzés:** A tétel megfordítása általában nem igaz. Például az

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

függvény folytonos a $(0, 0)$ pontban, de nem differenciálható.

**4. Tétel.** *Az* $f = (f_1, \ldots, f_m) : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *függvény* $\Longleftrightarrow$ *differenciálható az* $x_0 \in D$ *pontban, ha az* $f_i$ $(i = 1, \ldots, m)$ *függvények differenciálhatók* $x_0$*-ban, továbbá* $f'(x_0)_i = f_i'(x_0)$.

## 3. Iránymenti és parciális derivált

**1. Definíció.** Legyen $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $x_0 \in D$ és $e \in \mathbb{R}^n$ $(\|e\| = 1)$ adott. A

$$D_e f(x_0) \doteq \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + te) - f(x_0)}{t}$$

értéket, ha létezik, az $f$ függvény $x_0$-beli $e$ iránymenti differenciálhányadosának nevezzük.

**1. Tétel.** *Ha az $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény differenciálható az $x_0 \in D$ pontban, akkor $\forall\, e \in \mathbb{R}^n$ iránymenti deriváltja létezik és*

$$D_e f(x_0) = f'(x_0) \cdot e \ .$$

*Bizonyítás.* Az előző paragrafus 2. tételének b) részét $x = x_0 + te$, $A = f'(x_0)$ mellet használva

$$\frac{f(x_0 + te) - f(x_0)}{t} = \frac{1}{t}[f'(x_0)(x_0 + te - x_0) + \omega(x_0 + te)|t|] =$$
$$= f'(x_0) \cdot e + \omega(x_0 + te)\frac{|t|}{t}$$

következik ($|t| < \delta$ esetén – alkalmas $\delta$ mellett), ami $t \to 0$ határátmenettel adja az állítást.

**Megjegyzés:** A tétel megfordítása általában nem igaz.

**2. Definíció.** Ha $f = (f_1, \ldots, f_m) : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $x_0 \in D$ és $e_i = (0, \ldots, 0, \overset{i}{1}, 0, \ldots, 0)$, akkor a

$$D_i f_j(x_0) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x_0) \doteq D_{e_i} f_j(x_0)$$

$(i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m)$ számokat, ha léteznek az $f$ $j$-edik komponensfüggvénye $i$-edik változója szerinti parciális deriváltjainak nevezzük $x_0$-ban.

**Megjegyzés:** Ha $\varphi_j(t) \doteq f_j(x_{01}, \ldots, x_{0i-1}, t, x_{0i+1}, \ldots, x_{0n})$ $(|t| < \delta)$, akkor

$$D_i f_j(x_0) = \varphi_j'(x_{0i}) \ .$$

**2. Tétel.** *Ha az* $f = (f_1, \dots, f_m) : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *függvény az* $x_0 \in D$ *pontban differenciálható, akkor* $\forall\ D_i f_j$ *parciális derivált létezik és*

$$f'(x_0) = (D_i f_j(x_0))_{m \times n}$$

*Bizonyítás.*
Az előző paragrafus 4. tétele adja, hogy bármelyik $f_j$ differenciálható $x_0$-ban és akkor az előző tétel szerint $\forall\ e$-re, így $\forall\ e_i$-re is $\exists\ D_{e_i} f_j(x_0) \doteq D_i f_j(x_0)$. Továbbá:

$$f'(x_0) = (f_j'(x_0))_{m \times 1} \quad \text{és} \quad [f_j'(x_0)]_i \doteq f_j'(x_0) \cdot e_i = D_{e_i} f_j(x_0) \doteq D_i f_j(x_0)$$

miatt kapjuk $f'(x_0)$ előállítását is.

**3. Tétel.** *Ha az* $f = (f_1, \dots, f_m) : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *függvény bármely parciális deriváltja létezik az* $x_0 \in D$ *egy* $K(x_0, \delta)$ *környezetében és folytonosak* $x_0$*-ban, akkor* $f$ *differenciálható* $x_0$*-ban.*

A 2. és 3. tétel felhasználásával egyszerűen bizonyítható a következő:

**4. Tétel.** *Ha* $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *adott függvény, akkor a következő állítások ekvivalensek:*

a) $\forall\ D_i f_j\ (i = 1, \dots, n,\ j = 1, \dots, m)$ *létezik és folytonos* $D$*-n.*
b) $f$ *differenciálható* $D$*-n és* $f' : D \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ *folytonos* $D$*-n.*

Az egyváltozós függvények differenciálhatóságának fogalma és az előbbi tétel alapján természetes a következő:

**3. Definíció.** Azt mondjuk, hogy az $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény folytonosan differenciálható $D$-n, ha

a) $f$ differenciálható és $f'$ folytonos $D$-n,

vagy

b) $\forall\ D_i f_j$ létezik és folytonos $D$-n

teljesül.

## 4. Differenciálási szabályok

**1. Tétel.** *Ha az* $f, g : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\lambda : D \to \mathbb{R}$ *függvények differenciálhatók* $x_0 \in D$*-ben, akkor az* $f+g$, $\lambda f$, $\dfrac{f}{\lambda}$ $(\lambda \neq 0)$ *függvények is differenciálhatók és*

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0),$$
$$(\lambda f)'(x_0) = f(x_0)\lambda'(x_0) + \lambda(x_0)f'(x_0),$$
$$\left(\frac{f}{\lambda}\right)'(x_0) = \frac{\lambda(x_0)f'(x_0) - f(x_0)\lambda'(x_0)}{\lambda^2(x_0)}$$

*teljesül.*

*Bizonyítás.* A definíció alapján például az első esetben az

$$\frac{\big\|(f+g)(x) - (f+g)(x_0) - (f'(x_0) + g'(x_0))(x - x_0)\big\|}{\|x - x_0\|} \leq$$
$$\leq \frac{\big\|f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)\big\|}{\|x - x_0\|} + \frac{\big\|g(x) - g(x_0) - g'(x_0)(x - x_0)\big\|}{\|x - x_0\|}$$

egyenlőtlenségből, $x \to x_0$ határátmenettel jön az állítás.

**2. Tétel (az összetett függvény differenciálhatósága).**
*Ha* $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g : E \subset f(D) \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ *olyan, hogy* $f$ *differenciálható* $x_0 \in D$*-ben és* $g$ *differenciálható* $f(x_0)$*-ban, akkor az* $F = g \circ f : D \to \mathbb{R}^k$ *függvény differenciálható* $x_0$*-ban és*

(ÖD) $$F'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)\ .$$

*(*$D$ *és* $E$ *nyílt halmazok és* (ÖD)*-ben mátrixok szorzása szerepel.)*

**Megjegyzések:**

**1)** Ha $k = 1$, akkor (ÖD) alakja

$$F'(x_0) = (D_1F(x_0)\ \ldots\ D_nF(x_0)) =$$
$$= \Big(D_1g\big(f(x_0)\big)\ \ldots\ D_mg\big(f(x_0)\big)\Big) \begin{pmatrix} D_1f_1(x_0) & \ldots & D_nf_1(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ D_1f_m(x_0) & \ldots & D_nf_m(x_0) \end{pmatrix}$$

és akkor pédául

$$D_j F(x_0) = \sum_{k=1}^{m} D_k g\big(f(x_0)\big) \cdot D_j f_k(x_0) \ .$$

**2)** Ha $k = 1,\ n = 1$, akkor $F(t) = g(f_1(t), \ldots, f_m(t))$,

$$F'(x_0) = \frac{\partial F}{\partial t}(x_0) = \sum_{j=1}^{m} D_j g\big(f(x_0)\big) f_j'(x_0) \ .$$

**3. Tétel.** *Legyen $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x_0 \in D$, $f(x_0) = y_0$. Tegyük fel, hogy $g$ az $y_0$ egy környezetét $\mathbb{R}^n$-be képező függvény, hogy $g(y_0) = x_0$ és $g(f(x)) = \mathrm{id}(x)\ \forall\ x \in K(x_0, \delta)$. Ha $f$ differenciálható $x_0$-ban és $g$ differenciálható $y_0$-ban, akkor*

$$g'(y_0) = (f'(x_0))^{-1}$$

*(Itt $(f'(x_0))^{-1}$ az $f'(x_0)$ mátrix inverzét jelöli.)*

**Megjegyzés:** Ha egy $f$ differenciálható függvénynek létezik differenciálható inverze, akkor szükségképpen $f'(x)$ nem szinguláris mátrix.

## 5. Középértéktételek és következményeik

A következőkben az egyváltozós függvényekre ismert Lagrange-féle középértéktétel felhasználásával mondunk ki, illetve bizonyítunk be hasonló típusú tételeket.

**1. Tétel.** *Ha az $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható a $D$ (nyílt) halmazon és $D$ tartalmazza az $x_0$ és $x_0 + h$ végpontú $[x_0, x_0 + h]$-val jelölt szakaszt, akkor létezik $c = x_0 + t_0 h$ $(0 < t_0 < 1)$ pont ezen a szakaszon, hogy*

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(c) \cdot h \ .$$

*Bizonyítás.* A

$$\Phi(t) \doteq f(x_0 + th) \qquad (t \in [0, 1])$$

szerint definiált függvény az összetett függvény differenciálhatóságára vonatkozó tétel miatt differenciálható és

$$\Phi'(t) = f'(x_0 + th) \cdot h \qquad (t \in [0, 1])$$

Továbbá $\Phi$ teljesíti az egyváltozós Lagrange-tétel feltételeit a $[0,1]$ intervallumon, így $\exists\ t_0 \in (0,1)$ (és így $c = x_0 + t_0 h$), hogy

$$f(x_0+h) - f(x_0) = \Phi(1) - \Phi(0) = \Phi'(t_0)\cdot 1 = f'(c)\cdot h\ .$$

**2. Tétel.** *Legyen $D \subset \mathbb{R}^n$ nyílt és konvex halmaz (azaz $\forall\ x_1, x_2 \in D \implies [x_1, x_2] \subset D$). Ha $f : D \to \mathbb{R}$ differenciálható $D$-n és $\exists\ M \in \mathbb{R}$, hogy $\|f'(x)\| \le M$ $(\forall\ x \in D)$, akkor*

$$|f(x) - f(y)| \le M\|x - y\| \qquad (\forall\ x, y \in D)$$

*teljesül.*

*Bizonyítás.* Legyen $x, y \in D$ (konvex) $\implies [x, y] \subset D$, így az 1. tétel miatt ($x = x_0$ és $y = x_0 + h$ mellett) $\exists\ c \in (x, y)$, hogy

$$f(x) - f(y) = f'(c)(x - y)\ ,$$

melyből

$$|f(x) - f(y)| = |f'(c)(x-y)| \le \|f'(c)\|\,\|x - y\| \le M\|x - y\|$$

következik tetszőleges $x, y \in D$ esetén, amit bizonyítani kellett.

**Következmény:** Ha a 2. tétel feltételei mellett még $f'(x) = 0$ $(x \in D)$ is teljesül, akkor $f(x) = c$ $(x \in D)$.

**3. Tétel.** *Ha az $f : K(x_0, \delta) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény $\forall\ D_i f$ $(i = 1, \dots, n)$ parciális deriváltja létezik, akkor $\forall\ h \in \mathbb{R}^n,\ 0 < \|h\| < \delta$ esetén léteznek $c_1, \dots, c_n \in K(x_0, \delta)$ vektorok, hogy*

$$(*) \qquad f(x_0+h) - f(x_0) = \sum_{i=1}^{n} D_i f(c_i) h_i \qquad (h = (h_1, \dots, h_n)).$$

**Következmény.** *Ha az $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény $\forall\ D_i f$ parciális deriváltja létezik és korlátos valamely $K(x_0, \delta) \subset D$ környezetben, akkor $f$ folytonos $x_0$-ban.*

*Bizonyítás.* A 3. tétel miatt $(*)$ teljesül, melyből

$$|f(x_0+h) - f(x_0)| = \left|\sum_{i=1}^{n} D_i f(c_i) h_i\right| \le M \sum_{i=1}^{n} |h_i| \qquad \big(\|h\| < \delta\big)$$

következik (ha $|D_i f(c_i)| \le M\ \forall\ i = 1, \dots, n$).

Ebből pedig, felhasználva, hogy $h \to 0$-ból $h_i \to 0$ is következik ($\forall\ i$-re) kapjuk, hogy

$$\lim_{h\to 0} |f(x_0+h) - f(x_0)| = 0\ ,$$

ami adja, hogy

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

és így (mivel $x_0$ torlódási pontja és pontja is $D$-nek) $f$ folytonos $x_0$-ban.

**Megjegyzés:** A következmény igaz $f = (f_1, \ldots, f_m) : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ típusú függvényekre is, ha $\forall\ D_i f_j$ létezik és korlátos valamely $K(x_0, \delta) \subset D$-ben. Ekkor $\forall\ f_j$ folytonossága teljesül $x_0$-ban (a következmény miatt). Ugyanakkor az $f_j$-k $x_0$-beli folytonossága adja az $f = (f_1, \ldots, f_m)$ függvény folytonosságát is $x_0$-ban.

## 6. Magasabbrendű deriváltak, Young és Taylor tétele

**1. Definíció.** Akkor mondjuk, hogy az $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény kétszer differenciálható az $x_0 \in D$-ben, ha

- $\exists\ \delta > 0$, hogy $f$ differenciálható $K(x_0, \delta) \subset D$-n,
- a $D_i f$ $(i = 1, \ldots, n)$ függvények differenciálhatók $x_0$-ban.

Ekkor (a korábbiak szerint) léteznek a $D_j(D_i f)$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ parciális deriváltak $x_0$-ban és a

$$D_j(D_i f)(x_0)\Big(= D_j D_i f(x_0) = D_{ij} f(x_0) = \\ = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0) = f_{x_i x_j}(x_0)\Big)$$

számokat az $f$ függvény $x_0$-beli másodrendű, $i$-edik és $j$-edik változó szerinti parciális deriváltjainak nevezzük.

Ha $D_1 \subseteq D$ jelöli azon $x$-ek halmazát, ahol $\exists\ D_j D_i f(x)$, akkor $D_j D_i f : D_1 \to \mathbb{R}$ az $f$ $i$-edik és $j$-edik változó szerinti másodrendű parciális derivált függvénye $D_1$-en.

**Megjegyzések:**

**1)** Definiálhatók a magasabbrendű parciális deriváltak is:
Ha adott $i_1, \dots, i_{r-1}$-re $\exists\, D_{i_1} \dots D_{i_{r-1}} f$ $(= D_{i_1 \dots i_{r-1}} f)$ $K(x_0, \delta)$-n, akkor

$$D_{i_1 \dots i_r} f(x_0) \doteq D_{i_r}(D_{i_1 \dots i_{r-1}} f)(x_0)$$

az $f$ függvény $i_1, \dots, i_r$ változók szerinti $r$-edrendű parciális deriváltja $x_0$-ban. Ha $i_1 = i_2 = \dots = i_r = k$, úgy

$$D_k^r f \doteq D_k \dots D_k f$$

a $k$-adik változó szerinti $r$-edrendű „tiszta" parciális deriváltat jelöli.

**2)** Mivel $f' = (D_1 f, \dots, D_n f)$, így a kétszeri differenciálhatóság fogalma ekvivalens a következővel:

- $\exists\, \delta > 0$, hogy $f$ differenciálható $K(x_0, \delta)$-n,
- $f'$ differenciálható $x_0$-ban.

$f''(x_0) \doteq (f')'(x_0)$-t $f$ $x_0$-beli második deriváltjának nevezzük.

**2. Definíció.** Azt mondjuk, hogy az
$f = (f_1, \dots, f_m) : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény kétszer differenciálható az $x_0 \in D$ pontban, ha az $f_1, \dots, f_m$ függvények kétszer differenciálhatók $x_0$-ban és

$$f''(x_0) = (f_1''(x_0), \dots, f_m''(x_0)).$$

**3. Definíció.** Azt mondjuk, hogy az $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény $r$-szer $(r \geq 2)$ differenciálható $x_0$-ban, ha

- $\exists\, \delta > 0$, hogy $f$ $r-1$-szer differenciálható $K(x_0, \delta)$-n,
- a $D_{i_1} \dots D_{i_{r-1}} f$ $(1 \leq i_1, \dots, i_{r-1} \leq n)$ $r-1$-edrendű parciális derivált függvények differenciálhatók $x_0$-ban.

Ez ekvivalens azzal, hogy $\exists\, f^{(r-1)}$ $x_0$ egy környezetében és ez differenciálható $x_0$-ban.

**4. Definíció.** Azt mondjuk, hogy az $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény kétszer folytonosan differenciálható $x_0 \in D$-ben, ha a $D_1 f, \dots, D_n f$ függvények differenciálhatók az $x_0$ valamely $K(x_0, \delta) \subset D$ környezetében és a

$$(D_i f)' = (D_1 D_i f \ \dots \ D_n D_i f) \qquad (i = 1, \dots, n)$$

függvények folytonosak $x_0$-ban.

Ez pontosan azt jelenti, hogy $f$ differenciálható $K(x_0, \delta)$-ban és $f'$ differenciálható és deriváltja folytonos $x_0$-ban.
(Hasonlóan definiálható a függvény $r$-szer folytonos differenciálhatósága is.)

„Gyakran" igaz adott függvényre, hogy $D_k D_j f = D_j D_k f$, vagyis az úgynevezett vegyes parciálisok megegyeznek, de van ellenpélda is.
Most egy elegendő feltételt adunk a vegyes parciálisok egyenlőségére.

**1. Tétel (Young).** *Legyen $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ az $a \in D$ pontban kétszer differenciálható, akkor*

$$D_k D_j f(a) = D_j D_k f(a)$$

$\forall\ 1 \leq k, j \leq n$ *esetén.*

**Megjegyzés:** A tétel általánosítható $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ x_0 \in D$-ben $r$-szer differenciálható függvényekre, ekkor

$$D_{i_1 \ldots i_r} f(x_0) = D_{j_1 \ldots j_r} f(x_0)$$

$\forall\ (i_1, \ldots, i_r)\ \wedge\ (j_1, \ldots, j_r)$ $r$-tagú, természetes számokból álló sorozatra, melyek egymásból átrendezéssel keletkeznek $(1 \leq i_k, j_s \leq n)$.

**5. Definíció.** Az $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ x_0 \in D$-ben differenciálható függvény $x_0$-beli, az $x - x_0$ megváltozáshoz tartozó első differenciálján a

$$df(x_0, x - x_0) \doteq f'(x_0)(x - x_0) \qquad (x - x_0 \in D)$$

függvényt értjük. Ha $h \doteq x - x_0$, úgy

$$df(x_0, h) \doteq f'(x_0)h$$

az $x_0$-beli, $h$ megváltozáshoz tartozó első differenciálja $f$-nek. Ez minden olyan $x$-re értelmezhető, ahol $\exists\ f'(x)$, ekkor

$$df(x, h) = f'(x)h$$

$f$ $x$-beli, $h$-hoz tartozó első differenciálja.

Ha $m = 1,\ x - x_0 = h = (h_1, \ldots, h_n)$, akkor $f$ $x$-beli, $h$-hoz tartozó első differenciálja

$$df(x, h) \doteq \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(x) h_i$$

alakú, ha $\exists\ f'(x) = (f_{x_1}(x)\ \ldots\ f_{x_n}(x))$.

**6. Definíció.** Legyen $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ olyan, hogy $\exists\ f^{(r)}(x_0)$ ($f$ $r$-szer differenciálható $x_0$-ban). Ekkor $d^1 f(x,h) \doteq df(x,h)$ $f$ $x$-beli, $h$-hoz tartozó első differenciálja. Ha $d^{r-1}f(x,h)$ az $f$ $x$-beli, $h$-hoz tartozó $(r-1)$-edik differenciálja értelmezett valamely $K(x_0,\delta)$-n, akkor $f$ $x_0$-beli, $h$-hoz tartozó $r$-edik differenciálján a rögzített $h$ mellett $x$ függvényeként tekintett $d^{r-1}f$ függvény első differenciálját értjük $x_0$-ban, azaz

$$d^r f(x_0,h) \doteq \sum_{i=1}^{n} (d^{r-1}f)_{x_i}(x_0)h_i\ .$$

**2. Tétel.** *Legyen $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $r$-szer differenciálható az $x_0 \in D$ pontban, akkor*

$$d^r f(x_0,h) = \sum_{i_1,\dots,i_r=1}^{n} f_{x_{i_1}\dots x_{i_r}}(x_0)h_{i_1}\dots h_{i_r}$$

*(ami $r$-edrendű forma az $f_{x_{i_1}\dots x_{i_r}}(x_0)$ együtthatókkal).*

**3. Tétel.** *Ha $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $r$-szer differenciálható $D$-n, akkor az $F(t) = f(x+th)$ függvény minden olyan $t \in \mathbb{R}$-re, amelyre $x+th \in D$, $r$-szer differenciálható és*

$$F^{(r)}(t) = d^r f(x+th,h).$$

**4. Tétel (Taylor-formula).** *Legyen $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \in D$ és $f$ $(r+1)$-szer differenciálható az $[x, x+h] \subset D$ szakaszon, akkor $\exists\ \theta \in (0,1)$, hogy*

$$\text{(TF)} \quad f(x+h) = f(x) + \frac{df(x,h)}{1!} + \dots + \frac{d^r f(x,h)}{r!} + \frac{d^{r+1}f(x+\theta h,h)}{(r+1)!}$$

*Bizonyítás.* Tekintsük az

$$F : [0,1] \to \mathbb{R}\ , \qquad F(t) = f(x+th)$$

függvényt. $F$ a $f$ $(r+1)$-szeri differenciálhatósága miatt $(r+1)$-szer differenciálható és az előbbi tétel miatt

$$(*) \qquad F^{(i)}(t) = d^i f(x+th,h) \qquad (i = 1,\dots,r+1)$$

$\forall\ t \in [0,1]$-re.

Így $F$ teljesíti az egyváltozós Taylor-tétel feltételeit, ezért $t_0 = 0 \wedge t = 1$ esetén $\exists\ \theta \in (0,1)$, hogy

$$F(1) = F(0) + \frac{F'(0)}{1!}1 + \dots + \frac{F^{(r)}(0)}{r!}1^r + \frac{F^{(r+1)}(\theta)}{(r+1)!}1^{r+1}\ ,$$

ami $(*)$ miatt adja a (TF)-et.

## 7. Lokális szélsőérték

Ismeretes a következő: akkor mondjuk, hogy az $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvénynek az $x_0 \in D$ pontban lokális maximuma (minimuma) van, ha $\exists\, \delta > 0$, hogy

$$\forall\, x \in K(x_0, \delta) \implies f(x) \leq f(x_0)\ (f(x) \geq f(x_0)).$$

Az egyváltozós esethez hasonlóan igaz a következő:

**1. Tétel (a lokális szélsőérték 1. szükséges feltétele).**
*Ha $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ (nyílt), $f$ differenciálható $x_0$-ban és $f$-nek lokális szélsőértéke van $x_0$-ban, akkor $f'(x_0) = 0$.*

*Bizonyítás.* Ha $f$-nek lokális szélsőértéke van $x_0$-ban, akkor $\exists K(x_0, \delta) \subset D$, hogy

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (f(x) \geq f(x_0)) \qquad \forall\, x \in K(x_0, \delta),$$

így ha $e$ $(\|e\| = 1)$ tetszőleges $\mathbb{R}^n$-ben és $|t| < \delta$, akkor

$$f(x_0 + te) - f(x_0) \leq 0\ (\geq 0),$$

így $f$ $x_0$-beli differenciálhatósága miatt a 3.1. tétel adja, hogy

$$f'(x_0)e = D_e f(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + te) - f(x_0)}{t} \begin{cases} \leq 0\ (\geq 0), & \text{ha } t \to 0 + 0 \\ \geq 0\ (\leq 0), & \text{ha } t \to 0 - 0\ , \end{cases}$$

ami csak úgy lehetséges, ha $f'(x_0)e = 0$, melyből $e$ tetszőleges volta miatt jön, hogy $f'(x_0) = 0$.

**2. Tétel (a lokális szélsőérték 2. szükséges feltétele).**
*Ha az $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvénynek lokális szélsőértéke van $x_0 \in D$-ben és $\exists\, f_{x_i}(x_0)$, akkor $f_{x_i}(x_0) = 0$.*

*Bizonyítás.* Ha $f$-nek $x_0$-ban lokális szélsőértéke van, úgy a

$$\varphi(t) = f(x_{01}, \ldots, x_{0i-1}, t, x_{0i+1}, \ldots, x_{0n})$$

függvénynek is $t = x_{0i}$-ben, így $f_{x_i}(x_0) = \varphi'(x_{0i}) = 0$.

A 6. fejezet 2. tétele $r = 2$ esetén adja, hogy az $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény $x_0$-beli $h = (h_1, \dots, h_n)$-hez tartozó 2. differenciálja, ha $\exists\ f''(x_0)$

$$d^2 f(x_0, h) = \sum_{i,j=1}^{n} f_{x_i x_j}(x_0) h_i h_j \ ,$$

ahol a Young-tétel miatt $f_{x_i x_j}(x_0) = f_{x_j x_i}(x_0)$ is teljesül. A második differenciál tehát ekkor a $h_i$-k kvadratikus formája. Lineáris algebrából ismert, hogy egy

$$q(h_1, \dots, h_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} h_i h_j \qquad (a_{ij} = a_{ji})$$

kvadratikus forma

- pozitív definit, ha $q > 0\ \forall\ h = (h_1, \dots, h_n) \neq (0, \dots, 0)$ ,
- negatív definit, ha $q < 0\ \forall\ h = (h_1, \dots, h_n) \neq (0, \dots, 0)$ ,
- indefinit, ha felvesz pozitív és negatív értékeket is.

Továbbá – Sylvester tétele szerint – egy kvadratikus forma $\iff$ pozitív, illetve negatív definit, ha a

$$\Delta_1 = a_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ \dots \ , \ \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

úgynevezett bal felső sarokdeterminánsok pozitívak, illetve váltakozva negatívak és pozitívak.

Ezen fogalmak, a Taylor-tétel és a differenciálhatóság definíciója alapján bizonyítható a következő:

**3. Tétel (a lokális szélsőérték elegendő feltétele).**
*Ha az $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény kétszer differenciálható az $x_0 \in D$ pontban, továbbá $f'(x_0) = 0$ és $d^2 f(x_0, h)$ pozitív (negatív) definit, akkor $x_0$-ban $f$-nek szigorú lokális minimuma (maximuma) van.*

**Megjegyzések:**

**1)** A tétel feltételei mellett $\Delta_i > 0$ $(i = 1, \dots, n)$ esetén szigorú lokális minimuma, $(-1)^i \Delta_i > 0$ $(i = 1, \dots, n)$ esetén szigorú lokális maximuma van $f$-nek $x_0$-ban.

**2)** Ha $d^2 f$ indefinit, akkor az előbbi bizonyítás mutatja, hogy $f$-nek nincs szélsőértéke $x_0$-ban (az adott feltételek mellett).

## 8. Inverzfüggvény-tételek

A 4. fejezet 3. tétele után megjegyeztük, hogy egy differenciálható $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ($D$ nyílt) függvény differenciálható inverzének létezéséhez szükséges, hogy $f'(x)$ mátrixa nem szinguláris, ami a lineáris algebrából tanultak szerint azt is adja, hogy $\det f'(x) \neq 0$.

Megmutatjuk, hogy folytonosan differenciálható függvények esetén a feltétel – legalábbis lokálisan – elégséges is.

**1. Definíció.** Az $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ leképezést (függvényt) regulárisnak nevezzük, ha folytonosan differenciálható és

$$\det f'(x) = \begin{vmatrix} D_1 f_1(x) & \dots & D_n f_1(x) \\ \vdots & & \vdots \\ D_1 f_n(x) & \dots & D_n f_n(x) \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (x \in D) \ .$$

**2. Definíció.** Az $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ leképezést (függvényt) lokálisan invertálhatónak nevezzük $D$-n, ha $\forall\ x_0 \in D$ esetén $\exists\ K(x_0, r) \subset D$, hogy $f|_{K(x_0,r)}$ ($f$ leszűkítése $K(x_0, r)$-re) invertálható függvény.

**1. Tétel (a lokális invertálhatóság elegendő feltétele).**
*Legyen $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ reguláris leképezés (függvény), akkor lokálisan invertálható $D$-n*

**2. Tétel (az inverz függvény folytonossága).** *Ha az $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ függvény ($D$ nyílt) reguláris és kölcsönösen egyértelmű $D$-n, akkor*

a) *$f(D)$ nyílt $\mathbb{R}^n$-ben;*
b) *az $f$ függvény $g : f(D) \to D$ inverz függvénye folytonos.*

**3. Tétel (az inverz függvény regularitása).** *Ha az $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ függvény ($D$ nyílt) reguláris és kölcsönösen egyértelmű $D$-n, akkor a $g : f(D) \to D$ inverz függvénye reguláris.*

Az előző három tétel eredményeinek összefoglalása a következő:

**4. Tétel (inverzfüggvény-tétel).** *Ha az $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ függvény a $D$ nyílt halmazon reguláris, akkor lokálisan invertálható és a lokális inverzek regulárisak, azaz $\forall\, x_0 \in D$ esetén $\exists\, U$ és $V$ nyílt részhalmaza $\mathbb{R}^n$-nek, hogy $x_0 \in U \subset D$, $f(U) = V$, továbbá $f$ kölcsönösen egyértelmű $U$-n, a $g = f^{-1}$ függvény folytonosan differenciálható $V$-n, és $\det g' \neq 0$ $V$-n.*

*Bizonyítás.*
Az 1. tétel adja $f$ lokális invertálhatóságát $D$-n, így $\forall\, x_0 \in D$ esetén létezik $K(x_0, \delta) = U \subset D$ nyílt halmaz, hogy $f$ kölcsönösen egyértelmű $U$-n. A 2. tétel miatt az $f(U) = V$ halmaz nyílt $\mathbb{R}^n$-ben, míg 3. tétel miatt a $g = f^{-1}$ lokális inverz reguláris $V$-n.

**Megjegyzés:** Az $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ függvény lokális invertálhatóságát úgy is fogalmazhatjuk, hogy az $y = f(x)$ egyenlet, illetve az

$$y = (y_1, \ldots, y_n) = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n)) = f(x)$$

miatt adódó

$$y_i = f_i(x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

egyenletrendszer megoldható $x_1, \ldots, x_n$-re az $y_1, \ldots, y_n$ függvényében (ha $\forall\, x_0 \in D$-re $x$ és $y$ az $x_0$ és $y_0 = f(x_0)$ elég kis környezetében vannak).

## 9. Implicit függvények

**Definíció.** Legyenek $D_1 \subset \mathbb{R}^k$ és $D_2 \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmazok és

$$f = (f_1, \ldots, f_n) : D = D_1 \times D_2 \subset \mathbb{R}^{k+n} \to \mathbb{R}^n$$

adott függvény (függvényrendszer).
A $g = (g_1, \ldots, g_n) : D_1 \to \mathbb{R}^n$ függvényt (függvényrendszert) az

(1) $$f(x, y) = 0 \qquad (x = (x_1, \ldots, x_k),\ y = (y_1, \ldots, y_n))$$

egyenlet (illetve az

(1') $$f_i(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_n) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

egyenletrendszer) megoldásának nevezzük, ha

(2) $$f(x, g(x)) = 0 \qquad (x \in D_1)$$

teljesül. Ekkor a $g = (g_1, \dots, g_n)$ függvényt (függvényrendszert) az (1) egyenlet által adott implicit függvénynek (függvényrendszernek) szokás nevezni.
(Ha $k = n = 1$, úgy az $f$ és a $g$ függvény $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, illetve $g : D_1 \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ típusú.)

Fontos kérdések:

- Mikor létezik implicit függvény?
- Mit mondhatunk (alkalmas feltételek mellett) az implicit függvény differenciálhatóságáról?

Jelölések:

- Ha $f = (f_1, \dots, f_n) : D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ differenciálható, úgy
$$f' \doteq \frac{\partial f}{\partial x} \doteq \frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_m)}.$$
- Ha $f : D \subset \mathbb{R}^{k+n} \to \mathbb{R}^n$ ($D = D_1 \times D_2$ nyílt), akkor
$$f' \doteq \left[\frac{\partial f}{\partial x}\ \frac{\partial f}{\partial y}\right] \qquad (x = (x_1, \dots, x_k),\ y = (y_1, \dots, y_n)).$$

**Megjegyzés:** Az implicit függvény meghatározásánál egy $n$ egyenletből álló $k + n$ ismeretlenes egyenletrendszert oldunk meg úgy, hogy az utolsó $n$ ismeretlent fejezzük ki az első $k$-val (az egyszerűség kedvéért).

**1. Tétel.** *Legyen $f : D = D_1 \times D_2 \subset \mathbb{R}^{k+n} \to \mathbb{R}^n$ ($D_1$ és $D_2$ nyílt) differenciálható függvény. Tegyük fel, hogy létezik az (1) egyenlet által adott (2)-t teljesítő $g : D_1 \to \mathbb{R}^n$ differenciálható implicit függvény. Akkor*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x)) \cdot g'(x) = 0, \tag{ID1}$$

*illetve ha a $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ $n \times n$-es mátrix nem szinguláris az $(x, g(x))$ pontban, akkor*

$$g'(x) = -\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))\right]^{-1} \frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x)) \tag{ID2}$$

*teljesül.*

*Bizonyítás.* Ha létezik differenciálható $g$, úgy legyen

$$h, H : D_1 \to \mathbb{R}^{k+n}, \qquad h(x) \doteq (x, g(x)), \qquad H(x) \doteq f(h(x)) = f(x, g(x)),$$

akkor egyrészt $H(x) = 0$ $(x \in D_1)$ másrészt (az összetett függvény differenciálási szabálya miatt):

$$0 = H'(x) = f'(h(x)) \cdot h'(x) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(h(x)) \ \frac{\partial f}{\partial y}(h(x))\right] \cdot \begin{bmatrix} I_k \\ g'(x) \end{bmatrix} =$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x)) \cdot g'(x)$$

azaz (ID1) teljesül. Ha pedig $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))$ nem szinguláris, úgy (ID1)-et $\left[\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))\right]^{-1}$-gyel balról szorozva, rendezés után kapjuk (ID2)-t is.

**2. Tétel (implicitfüggvény-tétel).** *Legyen $f : D \subset \mathbb{R}^{k+n} \to \mathbb{R}^n$ olyan folytonosan differenciálható függvény, hogy $\exists\ (a, b) \in D$, $\det \dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0$ (azaz $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ nem szinguláris). Akkor $\exists\ K(a, r) \subset \mathbb{R}^k$ és egy egyértelműen meghatározott, folytonos $g : K(a, r) \to \mathbb{R}^n$ függvény, hogy $g(a) = b$ és $f(x, g(x)) = 0$ $(x \in K(a, r))$ (azaz az (1) által meghatározott, (2)-t teljesítő implicit függvény $K(a, r)$-en). Továbbá $g$ folytonosan differenciálható.*

## 10. Feltételes szélsőérték

**Definíció.** Legyen $f : D \subset \mathbb{R}^{k+n} \to \mathbb{R},\ h = (h_1, \ldots, h_n) : D \to \mathbb{R}^n$. Az $f$ függvénynek az $x_0 \in D$ ($D$ nyílt) pontban a

$$h(x) = 0 \qquad (h_1(x) = \cdots = h_n(x) = 0)$$

feltétel mellett feltételes lokális szélsőértéke van, ha

– $h(x_0) = 0 \quad (h_1(x_0) = \cdots = h_n(x_0) = 0)$

és

– $\exists\ \delta > 0,\ \forall\ x \in K(x_0, \delta)\ \wedge\ h(x) = 0 \quad f(x) \leq f(x_0)\ (f(x) \geq f(x_0))$

teljesül.

**Tétel (a feltételes lokális szélsőérték szükséges feltétele).** *Legyen $f : D \subset \mathbb{R}^{k+n} \to \mathbb{R},\ h = (h_1, \ldots, h_n) : D \to \mathbb{R}^n$. Ha az $f$ függvénynek*

*az $x_0 \in D$ ($D$ nyílt) pontban a $h(x) = 0$ feltétel mellett feltételes lokális szélsőértéke van, továbbá $f$ és $h$ folytonosan differenciálhatók az $x_0$ egy környezetében, akkor*

- *vagy a $\Big(D_j h_i(x_0)\Big)_{n\times(k+n)}$ mátrix minden $n$-edrendű aldeterminánsa zérus*
- *vagy $\exists\ \lambda_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, \dots, n)$ számok, hogy a*

$$F : D \to \mathbb{R}, \qquad F(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i h_i(x)$$

*függvény minden parciális deriváltja zérus $x_0$-ban, azaz*

$$D_j F(x_0) = 0 \qquad (j = 1, \dots, k+n).$$

**Megjegyzés:** A tétel szerint a lehetséges feltételes szélsőérték helyek meghatározásához a

$$\begin{cases} D_j f(x) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i D_j h_i(x) = 0 & j = 1, \dots, k+n \\ h_i(x) = 0 & i = 1, \dots, n \end{cases}$$

$k+2n$ egyenletből álló $k+2n$ ismeretlenes $(x_1, \dots, x_{k+n}, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$ egyenletrendszert kell megoldani.

## Feladatsor

1) Számítsa ki az alábbi függvények parciális deriváltjait:

$$f_1(x,y) = x^4 + y^4 - 4x^2y^2 \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2);$$

$$f_2(x,y) = \log(x^2+y^2) \qquad (x^2+y^2 \neq 0);$$

$$f_3(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) \qquad ((x,y) \in D = ?);$$

$$f_4(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy} \qquad ((x,y) \in D = ?);$$

$$f_5(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad (x^2+y^2 \neq 0);$$

$$f_6(x,y) = x \cdot \sin(x+y) \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2);$$

$$f_7(x,y) = \frac{\cos x^2}{y} \qquad (y \neq 0);$$

$$f_8(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \qquad (x^2+y^2+z^2 \neq 0);$$

$$f_9(x,y,z) = \left(\frac{x}{y}\right)^z \qquad (x,y,z > 0);$$

$$f_{10}(x,y,z) = x^{y^z} \qquad (x,y,z > 0);$$

$$f_{11}(x,y,z) = x^{\frac{y}{x}} \qquad (x,y,z > 0).$$

2) Bizonyítsa be, hogy az

$$f(0,0) = 0, \quad f(x,y) = (x^2+y^2) \cdot \sin\frac{1}{x^2+y^2} \qquad (x,y \in \mathbb{R})$$

szerint értelmezett függvény a $(0,0)$ pontban parciálisan differenciálható, illetve differenciálható.

3) Számítsa ki az $f(x,y) = x^2+y^2$ $((x,y) \in \mathbb{R}^2)$ függvény $e = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ iránymenti deriváltját.

4) Milyen $e$ irányhoz létezik az $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$ $((x,y) \in \mathbb{R}^2)$ függvénynek a $(0,0)$-ban iránymenti deriváltja?

5) Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1,x_2) = x_1x_2$, számítsa ki $f$ iránymenti deriváltját az $a = (a_1,a_2)$ pontban az $e = (1,0)$ vektor szerint.

6) Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f(x) = B \cdot x + b$, ahol $B$ egy $m \times n$-es mátrix és $b \in \mathbb{R}^m$. Bizonyítsa be, hogy $f$ differenciálható és $f'(x) = B$.

7) Legyen

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2} & (x,y \neq (0,0)) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$

Bizonyítsa be, hogy $f$-nek $(0,0)$-ban létezik bármely iránymenti deriváltja, de nem differenciálható.

8) Milyen $e$-re létezik $Def(0,0)$? Létezik-e $D_1 f(0,0)$ és $D_2 f(0,0)$? Differenciálható-e $f$ $(0,0)$-ban? Folytonos-e $f$ $(0,0)$-ban? Ha:

- $f(0,0) = 0, \quad f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}, \quad (x,y) \neq (0,0);$
- $f(x,y) = |xy|^{\frac{1}{2}}$ .

9) Mely pontban differenciálható az

$$f(x_1,x_2,x_3) = \sqrt{x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2} \qquad ((x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3)$$

függvény?

10) Bizonyítsa be, hogy az $f(x,y) = |xy|$ függvény differenciálható $(0,0)$-ban, de nem folytonosan differenciálható $(0,0)$ bármely környezetében.

11) Létezik-e $D_{xy} f(0,0)$ ha

$$f(0,0) = 0, \qquad f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}, \qquad (x,y) \neq (0,0) .$$

12) Bizonyítsa be, hogy $D_{xy} f = D_{yx} f$, ha $f$-et a következő képletek valamelyike értelmezi:

$$f(x,y) = x^2 - 2xy - 3y^2 \ ; \qquad f(x,y) = \arccos \sqrt{\frac{x}{y}} .$$

13) Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \ f(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$
   a) számítsa ki $f'$-t és $\det f'$-t,
   b) számítsa ki az $S = [1,2] \times [0,\pi]$ képét $f$-re.

14) Legyen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \ f(\varrho,\varphi,\theta) = (\varrho\cos\theta\sin\varphi, \varrho\sin\theta\sin\varphi, \varrho\cos\varphi)$
   a) számítsa ki $f'$-t és $\det f'$-t,
   b) határozza meg az $S = [1,2] \times [0,\dfrac{\pi}{2}] \times [0,\dfrac{\pi}{2}]$ halmaz képét $f$-re.

15) Írja fel az alábbi függvényekre vonatkozó Taylor-formulát (adott $a$ pontban, adott $r \in \mathbb{N}$ rendig):
   - $f(x_1,x_2) = x_1^{x_2} \quad ((x_1,x_2) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}), \quad a = (1,1), \ r = 2;$

– $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^3+x_2^3+x_3^3-3x_1x_2x_3 \quad ((x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3)$
$a=(1,1,1),\ r=4.$

16) Írja fel $x-1$ és $y-2$ polinomjaként az

$$x^3+3x^2y^2+2xy^2+y^3 \quad \text{illetve} \quad x^2y^2-2xy^3+3x^2y$$

polinomokat.

17) Vizsgálja a lokális szélsőértéket az alábbi függvényekre:

$$\begin{aligned}
&f(x,y)=x^2+xy+y^2-3ax-3by \ , && (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ a,b\in\mathbb{R}\ ;\\
&f(x,y)=x^3+y^3-3axy \ , && (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ a>0\ ;\\
&f(x_1,x_2)=x_1^2-x_2^2 \ , && (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2\ ;\\
&f(x_1,x_2)=x_1^3-3x_1x_2^2 \ , && (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2\ ;\\
&f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_2x_3 \ , && (x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3\ .
\end{aligned}$$

18) Legyen $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3,\ g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2,$

$$f(x_1,x_2)=(e^{2x_1+x_2},3x_2-\cos x_1,x_1^2+x_2+2),$$
$$g(y_1,y_2,y_3)=(3y_1+2y_2+y_3^2,y_1^2-y_3+1).$$

a) Ha $F(x)=g(f(x))$, úgy határozza meg $F'(0)$-t.
b) Ha $G(y)=f(g(y))$, úgy határozza meg $G'(0)$-t.

19) Legyen $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\ f(r,\varphi)=(r\cos\varphi,r\sin\varphi)$.
Bizonyítsa be, hogy ha $D=(0,1)\times(0,b)\subset\mathbb{R}^2$, akkor $f'$ nem szinguláris $D$-n, de $f \iff$ kölcsönösen egyértelmű $D$-n, ha $b<2\pi$.

20) Legyen $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x,y)=x^2+y^2-5$.
a) Az $(a,b)=(1,2)$ pont teljesíti az $f(x,y)=0$ egyenletet, $D_1f(1,2)\neq 0$, $D_2f(1,2)\neq 0$, így az egyenlet lokálisan megoldható bármelyik változóra (a másik függvényében). Keressen olyan $y=g(x)$ megoldást, mely egyértelmű és olyat, mely nem egyértelmű az $x=1$ egy környezetében.
b) A $(\sqrt{5},0)$ pont is teljesíti az $f(x,y)=0$ egyenletet. Létezik-e a $\sqrt{5}$-nek egy környezete, melyre az $f(x,y)=0$ egyenlet megoldható $y$-ra $x$ függvényében?

21) Legyen $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x,y)=x^2-y^3$, akkor $f(0,0)=0$. Létezik-e a 0-nak olyan környezete, melyen $f(x,y)=0$ megoldható $y$-ra $x$ függvényében? Differenciálható-e a kapott függvény $x=0$-ban?

22) Megoldható-e az

$$x_1^2 - x_2 x_3 = 0$$
$$3x_1^3 - x_2 - 2x_3 = 0$$

egyenletrendszer $x_2$-re és $x_3$-ra az $x_1$ függvényében az $x_1 = 1$ pont egy környezetében?

23) Keresse meg $f$ szélsőértékhelyeit a $h = 0$ feltételre, ha

a) $f(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2$ , $h(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1$ ;

b) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 - x_2 + 2x_3$ , $h(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - 2$ ;

c) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2$ , $h(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1$ ;

e) $f(x, y, z) = xyz$ , $h(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 3$ ;

f) $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ , $h_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ ;
$h_2(x, y, z) = x + 2y + 3z$ .

24) Határozza meg az alábbi függvények maximumát és minimumát:

a) $f(x, y) = x^4 - y^4$ , $(x, y) \in D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$;

b) $f(x, y) = (x + 3)^2 + y^2$ , $(x, y) \in D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$.

# VI. RIEMANN-INTEGRÁL $\mathbb{R}^k$-BAN

## 1. Riemann-integrál téglán

### a) Riemann-integrál fogalma téglán

A Riemann-integrál fogalma (és ebből eredően tulajdonságai is) az $\mathbb{R}^n$ tégláin (intervallumain) szoros analógiát mutat az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ típusú függvényekre felépített Riemann-integrállal.

A továbbiakban legyen $Q = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ egy tégla, vagy $n$-dimenziós intervallum (ahol az $[a_i, b_i] \subset \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, n)$ intervallumokat $Q$ komponens-intervallumainak nevezzük), míg $f : Q \to \mathbb{R}$ korlátos függvény.

**1. Definíció.** A $Q = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ tégla mértékén (térfogatán) a

$$V(Q) \doteq (b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_n - a_n)$$

valós számot értjük. (Speciálisan ez $n = 1$-re egy valós intervallum hossza, $n = 2$-re egy téglalap területe.)

**2. Definíció.** Ha $Q = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ adott tégla, úgy a $P = P_1 \times \cdots \times P_n$ halmazt $Q$ egy felosztásának nevezzük, ha $\forall\, j = 1, \ldots, n$-re $P_j$ az $[a_j, b_j]$ intervallum egy (korábban már definiált) felosztása, azaz

$$P_j = \{x_{ji} \mid a_j = x_{j0} < x_{j1} < \cdots < x_{jk_j} = b_j\} \ .$$

Ha $\forall\ j$-re $I_{ji} = [x_{ji-1}, x_{ji}]$ $(i = 1, \ldots, k_j)$ jelöli az $[a_j, b_j]$ komponens-intervallum $P_j$ által meghatározott részintervallumait, akkor a $T_{i_1 \ldots i_n} = I_{1i_1} \times \cdots \times I_{ni_n}$ téglákat (ahol $i_1 = 1, \ldots, k_1;\ \ldots\ ; i_n = 1, \ldots, k_n$) a $Q$ tégla $P$ felosztás által meghatározott résztégláinak (részintervallumainak), míg a

$$\|P\| = \sup_{i_1, \ldots, i_n} \{\operatorname{diam} T_{i_1 \ldots i_n}\}$$

számot (ahol $\operatorname{diam} T_{i_1 \ldots i_n}$ a $T_{i_1 \ldots i_n}$ tégla átmérője) a $P$ felosztás finomságának nevezzük.

**3. Definíció.** Legyen $P^1$ és $P^2$ $Q$ két felosztása. $P^2$ finomítása (továbbosztása) $P^1$-nek, ha $P^1 \subset P^2$. A $P = P^1 \cup P^2$ halmazt a $P^1$ és $P^2$ felosztások egyesítésének (illetve $P^1 \subset P^1 \cup P^2$ és $P^2 \subset P^1 \cup P^2$ miatt közös finomításának) nevezzük.

**4. Definíció.** $\langle P^k \rangle$ normális felosztássorozata $Q$-nak, ha $\lim\limits_{k\to\infty} \|P^k\| = 0$ teljesül.

**Megjegyzések:**

**1)** Ha $P = P_1 \times \cdots \times P_n \implies \|P\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} \|P_k\|^2, \quad \|P_k\| \le \|P\|.$

**2)** Ha $\langle P^k \rangle = \langle P_1^k \times \cdots \times P_n^k \rangle$, úgy $\langle P^k \rangle \iff$ normális, ha $\langle P_i^k \rangle$ $(i = 1, \ldots, n)$ normális.

**3)** $P^1 \subset P^2 \iff P_i^1 \subset P_i^2$ $(i = 1, \ldots, n)$.

**4)** $Q = \bigcup\limits_{i_1,\ldots,i_n} T_{i_1\ldots i_n}$.

**5. Definíció.** Legyen $Q \subset \mathbb{R}^n$ tégla, $f : Q \to \mathbb{R}$ korlátos függvény, $P$ a $Q$ egy felosztása és $T_{i_1\ldots i_n}$ e felosztás résztéglái, továbbá

$$m_{i_1\ldots i_n} \doteq \inf_{x\in T_{i_1\ldots i_n}} \{f(x)\} \qquad M_{i_1\ldots i_n} \doteq \sup_{x\in T_{i_1\ldots i_n}} \{f(x)\}$$

(ezek $f$ korlátossága miatt léteznek).
A

$$s(f,P) \doteq \sum m_{i_1\ldots i_n} V(T_{i_1\ldots i_n}) \ , \qquad S(f,P) \doteq \sum M_{i_1\ldots i_n} V(T_{i_1\ldots i_n}) \ ,$$
$$\mathcal{O}(f,P) \doteq S(f,P) - s(f,P) = \sum (M_{i_1\ldots i_n} - m_{i_1\ldots i_n}) V(T_{i_1\ldots i_n})$$

számokat az $f$ függvény $P$ felosztáshoz tartozó alsó, felső, illetve oszcillációs összegeinek, míg tetszőleges $t_{i_1\ldots i_n} \in T_{i_1\ldots i_n}$ pontokra a

$$\sigma(f,P) \doteq \sum f(t_{i_1\ldots i_n}) V(T_{i_1\ldots i_n})$$

számot az $f$ függvény $P$ felosztáshoz és $t_{i_1\ldots i_n}$ pontokhoz tartozó integrálközelítő összegének nevezzük, ahol az összegzés kiterjed a $Q$ tégla $P$ által meghatározott összes résztéglájára.

**1. Tétel.** *Ha $f : Q \to \mathbb{R}$ korlátos függvény, akkor*

a) $\forall\ P$ *és* $\forall\ \sigma(f,P)$*-re:* $s(f,P) \le \sigma(f,P) \le S(f,P)$*;*
b) $\forall\ P^1 \subset P^2$*-re:* $s(f,P^1) \le s(f,P^2), \quad S(f,P^1) \ge S(f,P^2)$*;*
c) $\forall\ P^1, P^2$*-re:* $s(f,P^1) \le S(f,P^2)$.

**6. Definíció.** Legyen $f : Q \to \mathbb{R}$ korlátos függvény. Az

$$\underline{I} \doteq \underline{\int}_Q f \doteq \sup_P \{s(f,P)\} \qquad \bar{I} \doteq \bar{\int}_Q f \doteq \inf_P \{S(f,P)\}$$

(létező) számokat az $f$ függvény $Q$ feletti alsó, illetve felső Darboux-integráljának nevezzük.

**2. Tétel.** *Legyen $f : Q \to \mathbb{R}$ korlátos függvény, akkor*

$$\underline{I}, \bar{I} \in \mathbb{R} \quad \text{és} \quad \underline{I} \le \bar{I}, \quad 0 \le \bar{I} - \underline{I} \le \mathcal{O}(f,P).$$

*Bizonyítás.* Lásd Kalkulus I., IX.2., 2. tétel bizonyítása.

**Példák:**

1) Ha $f(x) = k$ $(x \in Q) \implies \underline{I} = \bar{I}$.
2) Ha

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \ x \in Q \wedge x \ \forall \text{ koordinátája racionális.} \\ 0 & , \ x \in Q \text{ egyébként,} \end{cases}$$

akkor $\underline{I} \neq \bar{I}$.

**7. Definíció.** Az $f : Q \to \mathbb{R}$ korlátos függvény Riemann-integrálható $Q$-n, ha $\underline{I} = \bar{I}$ és ezt a közös értéket az $f$ függvény $Q$ tégla feletti Riemann-integráljának nevezzük, és rá az $I$, $\int\limits_Q f$, vagy $\int\limits_Q f(x)dx$ jelöléseket használjuk.

**Megjegyzések:**

**1)** Az előző 1. példa függvénye Riemann-integrálható.

**2)** Létezik nem Riemann-integrálható függvény (a 2. példa függvénye).

## b) A Darboux-tétel és következményei

**Darboux-tétel.** *Ha $f : Q \to \mathbb{R}$ ($Q \subset \mathbb{R}^n$ tégla) korlátos függvény, akkor $\forall\, \varepsilon > 0$-hoz $\exists\, \delta(\varepsilon) > 0$, hogy $Q$ $\forall$ $P$ felosztására, melyre $\|P\| < \delta(\varepsilon)$,*

$$S(f,P) - \bar{I} < \varepsilon \qquad \text{és} \qquad \underline{I} - s(f,P) < \varepsilon$$

*teljesül.*

**A Darboux-tétel következménye.** *Ha $f : Q \to \mathbb{R}$ korlátos függvény, akkor*

a) *$Q$ $\forall \langle P^k \rangle$ normális felosztássorozatára*

$$\exists \quad \lim_{k\to\infty} s(f,P^k) = \underline{I}\,, \quad \lim_{k\to\infty} S(f,P^k) = \bar{I}\,, \quad \lim_{k\to\infty} \mathcal{O}(f,P^k) = \bar{I} - \underline{I}\,;$$

b) *$Q$ $\forall \langle P^k \rangle$ normális felosztássorozatára $\exists$ $\langle \sigma^1(f,P^k)\rangle$ és $\langle \sigma^2(f,P^k)\rangle$ integrálközelítő összegsorozatok, hogy*

$$\lim_{k\to\infty} \sigma^1(f,P^k) = \underline{I}\,, \qquad \lim_{k\to\infty} \sigma^2(f,P^k) = \bar{I}\,.$$

## c) A Riemann-integrálhatóság kritériumai és elegendő feltételei

**1. Tétel.** *Az $f : Q \to \mathbb{R}$ függvény akkor és csak akkor Riemann-integrálható $Q$-n, ha $\exists\, I \in \mathbb{R}$, hogy $\forall\, \varepsilon > 0$-hoz $\exists\, \delta(\varepsilon) > 0$, hogy $\forall$ olyan $P$ felosztására $Q$-nak, melyre $\|P\| < \delta(\varepsilon)$, $|\sigma(f,P) - I| < \varepsilon$ teljesül $\forall\, \sigma(f,P)$-re.*

**2. Tétel.** *Az $f : Q \to \mathbb{R}$ korlátos függvény akkor és csak akkor Riemann-integrálható $Q$-n, ha $\forall\, \langle P^k \rangle$ normális felosztássorozathoz tartozó $\forall\, \langle \sigma(f,P^k)\rangle$ integrálközelítő összegsorozat konvergens.*

**3. Tétel (Riemann-kritérium).** *Az $f : Q \to \mathbb{R}$ korlátos függvény akkor és csak akkor Riemann-integrálható $Q$-n, ha $\forall\, \varepsilon > 0$ esetén $\exists\, P$ felosztása $Q$-nak, hogy*

$$\mathcal{O}(f,P) = S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon\,.$$

*Bizonyítás.* Mint valósban, csak $[a,b]$ helyett $Q$-t írunk. (Lásd Kalkulus I., IX.4., 3. tétel bizonyítása.)

**4. Tétel.** *Az $f : Q \to \mathbb{R}$ korlátos függvény akkor és csak akkor Riemann-integrálható $Q$-n, ha $Q$ $\forall\, \langle P^k \rangle$ normális felosztássorozata esetén $\langle \mathcal{O}(f,P^k)\rangle$ nullsorozat.*

**5. Tétel.** *$f : Q \to \mathbb{R}$ folytonos függvény Riemann-integrálható.*

*Bizonyítás.* Mint valósban, csak $\dfrac{\varepsilon}{b-a}$ helyett $\dfrac{\varepsilon}{V(Q)}$-t használunk. (Lásd Kalkulus I., IX.4., 5. tétel bizonyítása.)

**Definíció.** Az $A \subset \mathbb{R}^n$ halmazt Lebesgue szerint nullmértékűnek nevezzük $\mathbb{R}^n$-ben, ha $\forall\, \varepsilon > 0$-ra $\exists$ megszámlálható sok $Q_1, \dots, Q_n, \dots$ tégla, hogy

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n \qquad \text{és} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} V(Q_n) < \varepsilon.$$

**6. Tétel (Lebesgue-kritérium).** *Az $f : Q \to \mathbb{R}$ korlátos függvény akkor és csak akkor Riemann-integrálható, ha egy Lebesgue szerint nullmértékű $\mathbb{R}^n$-beli halmaztól eltekintve folytonos.*

**7. Tétel.** *Ha az $f : Q_1 \to \mathbb{R}$ függvény Riemann-integrálható és $Q_2 \subset Q_1$ $(\subset \mathbb{R}^n)$ is tégla, úgy $f\big|_{Q_2}$ Riemann-integrálható $Q_2$-n.*

**8. Tétel (az integrál additivitása téglára).** *Legyenek $Q_1, Q_2 \subset \mathbb{R}^n$ olyan téglák, hogy nincs közös belső pontjuk és $Q = Q_1 \cup Q_2$ is tégla (azaz van közös lapjuk). Ha az $f : Q \to \mathbb{R}$ korlátos függvény Riemann-integrálható $Q_1$-en és $Q_2$-n, akkor $Q$-n is és*

$$\int_Q f = \int_{Q_1} f + \int_{Q_2} f.$$

**Megjegyzés:** A tételből következik, hogy ha egy $Q$ téglát közös belső pont nélküli $Q_1, \dots, Q_k$ résztéglákra bontunk, hogy $Q = \bigcup_{i=1}^{k} Q_i$ és az $f : Q \to \mathbb{R}$ függvény Riemann-integrálható $\forall\, Q_k$-n, akkor Riemann-integrálható $Q$-n is és

$$\int_Q f = \sum_{i=1}^{k} \int_{Q_i} f\ .$$

Utóbbi igaz alsó, illetve felső Darboux-integrálokra is.

## d) A Riemann-integrál műveleti tulajdonságai, egyenlőtlenségek, középértéktételek

**1. Tétel.** *Ha az $f, g : Q \to \mathbb{R}$ korlátos függvények Riemann-integrálhatók, $p, q \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstansok, akkor a $(p \cdot f + q \cdot g) : Q \to \mathbb{R}$ függvény is Riemann-integrálható és*

$$\int_Q (p \cdot f + q \cdot g) = p \cdot \int_Q f + q \cdot \int_Q g$$

*Bizonyítás.* Lásd Kalkulus I., IX.6., 1. tétel bizonyítása.

**2. Tétel.** *Ha $f : Q \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható, akkor $f^2$ is, továbbá ha $\exists\, c > 0$, hogy $|f(x)| \geq c \quad \forall\, x \in Q$, akkor $\dfrac{1}{f}$ is Riemann-integrálható.*

**3. Tétel.** *Ha az $f, g : Q \to \mathbb{R}$ függvények Riemann-integrálhatók, akkor $f \cdot g$ is, továbbá ha $\exists\, c > 0$, hogy $|g(x)| > c\ \forall\, x \in Q$-ra, úgy $\dfrac{f}{g}$ is Riemann-integrálható.*

*Bizonyítás.* Lásd Kalkulus I., IX.6., 3. tétel bizonyítása.

**4. Tétel.** *Ha $f : Q \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható függvény, akkor $|f|$ is Riemann-integrálható.*

**5. Tétel.** *Ha $f, g : Q \to \mathbb{R}$ korlátos függvények és $f \leq g$, akkor*

$$\underline{\int}_Q f \leq \underline{\int}_Q g \ \wedge\ \bar{\int}_Q f \leq \bar{\int}_Q g\ .$$

*Ha továbbá $f, g$ Riemann-integrálhatók, akkor $\int\limits_Q f \leq \int\limits_Q g$.*

*Bizonyítás.* Lásd Kalkulus I., IX.7., 1. tétel bizonyítása.

**6. Tétel.** *Legyen $f : Q \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható, akkor*

$$\left|\int_Q f\right| \leq \int_Q |f|\ .$$

*Bizonyítás.* Lásd Kalkulus I., IX.7., 2. tétel bizonyítása.

**7. Tétel (középértéktétel).** *Legyenek $f, g : Q \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálhatók, továbbá*

$$m \le f(x) \le M \ , \quad 0 \le g(x) \qquad (x \in Q),$$

*akkor*

$$m \int_Q g \le \int_Q f \cdot g \le M \int_Q g \ .$$

*Bizonyítás.* Lásd Kalkulus I., IX.7., 3. tétel bizonyítása.

**Következmények:**

**1.** *Legyen $f : Q \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható, $m \le f \le M$, akkor*

$$m \le \frac{1}{V(Q)} \int_Q f \le M \ .$$

*Bizonyítás.* A 7. tételből $g \equiv 1$ választással, $\int_Q 1 = V(Q)$ miatt jön az állítás.

**2.** *Ha $f : Q \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, akkor $\exists\, c \in Q$, hogy*

$$f(c) = \frac{1}{V(Q)} \int_Q f \ .$$

## e) Az integrál kiszámítása (a Fubini-tétel)

*Cél*: Az $n$-dimenziós tégla feletti integrál kiszámításának visszavezetése alacsonyabb dimenziójú integrálokra, az úgynevezett ismétléses (szukcesszív) integrálással.

**Tétel (Fubini).** *Legyen $Q \doteq A \times B \subset \mathbb{R}^n$, ahol $A \subset \mathbb{R}^k$, $B \subset \mathbb{R}^m$ téglák. Legyen $f : Q \to \mathbb{R}$ korlátos függvény, melyet $f(x, y)$ alakban írunk, ha $x \in A \ \wedge \ y \in B$. $\forall\, x \in A$ esetén tekintsük az*

$$\underline{I}(x) \doteq \underline{\int}_{y \in B} f(x, y) \qquad \text{és} \qquad \bar{I}(x) \doteq \bar{\int}_{y \in B} f(x, y)$$

*alsó és felső integrálokat.*
*Ha* $\exists \int\limits_Q f$, *akkor az* $\underline{I}, \bar{I} : A \to \mathbb{R}$ *függvények Riemann-integrálhatók és*

$$\int\limits_Q f = \int\limits_{x\in A} \left[ \underline{\int}_{y\in B} f(x,y) \right] = \int\limits_{x\in A} \left[ \bar{\int}_{y\in B} f(x,y) \right].$$

**A Fubini-tétel következményei:**

**1)** Legyen $Q = A \times B$ ($A \subset \mathbb{R}^k$, $B \subset \mathbb{R}^m$ téglák), $f : Q \to \mathbb{R}$ korlátos függvény.
Ha $\exists \int\limits_Q f$ és $\forall\, x \in A$-ra $\exists \int\limits_{y\in B} f(x,y)$, vagy $\forall\, y \in B$-re $\exists \int\limits_{x\in A} f(x,y)$, akkor

$$\int\limits_Q f = \int\limits_{x\in A} \left[ \int\limits_{y\in B} f(x,y) \right] \qquad \text{vagy} \qquad \int\limits_Q f = \int\limits_{y\in B} \left[ \int\limits_{x\in A} f(x,y) \right].$$

teljesül.

**2)** Ha $A = [a,b] \subset \mathbb{R}$, $B = [c,d] \subset \mathbb{R}$, $f : Q = [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény, hogy

$$\exists \int\limits_Q f \doteq \int\limits_a^b \int\limits_c^d f(x,y)\, dxdy$$

és

$$\forall\, x \in [a,b] \quad \exists \int\limits_c^d f(x,y)\, dy$$

vagy

$$\forall\, y \in [c,d] \quad \exists \int\limits_a^b f(x,y)\, dx$$

akkor

$$\int\limits_a^b \int\limits_c^d f(x,y)\, dxdy = \int\limits_a^b \left[ \int\limits_c^d f(x,y)\, dy \right] dx$$

vagy

$$\int\limits_a^b \int\limits_c^d f(x,y)\, dxdy = \int\limits_c^d \left[ \int\limits_a^b f(x,y)\, dx \right] dy$$

teljesül, azaz a kettős integrál kétszeres ismételt (valós Riemann) integrállal számítható.

**3)** Legyen $Q = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ tégla, $f : Q \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, akkor

$$\int_Q f = \int_{a_1}^{b_1} \left( \int_{a_2}^{b_2} \cdots \left( \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \ldots, x_n) dx_n \right) \cdots \right) dx_1$$

## 2. Riemann-integrál korlátos $\mathbb{R}^n$-beli halmazon

**Definíció.** Legyen $S \subset \mathbb{R}^n$ korlátos halmaz, $f : S \to \mathbb{R}$ korlátos függvény, továbbá $f_S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ olyan, hogy

$$f_S(x) = \begin{cases} f(x) & , \ x \in S \\ 0 & , \ x \in CS \ . \end{cases}$$

Legyen $Q \subset \mathbb{R}^n$ olyan tégla, hogy $S \subset Q$.
Az $f$ függvényt Riemann-integrálhatónak mondjuk $S$ felett, ha $\exists \int_Q f_S$ és az

$$\int_S f \doteq \int_Q f_S$$

számot az $f$ függvény $S$ feletti Riemann-integráljának nevezzük.

**Megjegyzés:** *Az itt definiált integrál független $Q$ megválasztásától.*

**Tétel (az integrál tulajdonságai).** *Legyen $S \subset \mathbb{R}^n$ korlátos halmaz, $f, g : S \to \mathbb{R}$ korlátos függvények.*

a) *Ha $f$ és $g$ Riemann-integrálható $S$ felett, akkor $\lambda f + \mu g$ is, és*

$$\int_S (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_S f + \mu \int_S g \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}).$$

b) *Ha $f$ és $g$ Riemann-integrálható $S$ felett és $f(x) \leq g(x)$ $(x \in S) \implies \int_S f \leq \int_S g$.*

c) *Ha $f$ Riemann-integrálható $S$ felett, akkor $|f|$ is Riemann-integrálható és $\left| \int_S f \right| \leq \int_S |f|$.*

d) *Legyen $T \subset S$. Ha $f \geq 0$ $S$-en és Riemann-integrálható $T$-n és $S$-en, akkor $\int_T f \leq \int_S f$.*

e) *Ha $f$ Riemann-integrálható az $S_1$ és $S_2$ felett, akkor Riemann-integrálható $S_1 \cup S_2$ és $S_1 \cap S_2$ felett is és*

$$\int\limits_{S_1 \cup S_2} f = \int\limits_{S_1} f + \int\limits_{S_2} f - \int\limits_{S_1 \cap S_2} f$$

*Bizonyítás.* Például:

a) Mivel $(\lambda f + \mu g)_S = \lambda f_S + \mu g_S$, így a 1/d, 1. tétel és a definíció miatt

$$\int\limits_S (\lambda f + \mu g) \doteq \int\limits_Q (\lambda f + \mu g)_S = \int\limits_Q (\lambda f_S + \mu g_S) =$$
$$= \lambda \int\limits_Q f_S + \mu \int\limits_Q g_S \doteq \lambda \int\limits_S f + \mu \int\limits_S g.$$

b) $f_S \leq g_S$ és az 1/d, 5. tétel miatt

$$\int\limits_S f \doteq \int\limits_Q f_S \leq \int\limits_Q g_S \doteq \int\limits_S g$$

**Következmények:**

**1.** *Ha $S \subset \mathbb{R}^n$, $f_i : S \to \mathbb{R}$, $(i = 1, \ldots, k)$ korlátos függvények, melyek Riemann-integrálhatók $S$ felett, akkor $\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i f_i$ $(\lambda_i \in \mathbb{R})$ is Riemann-integrálható és*

$$\int\limits_S \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \int\limits_S f_i \ .$$

**2.** *Legyenek $S_i \subset \mathbb{R}^n$ $(i = 1, \ldots, k)$ korlátos halmazok, továbbá $f : \bigcup\limits_{i=1}^{k} S_i \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható $\forall$ $S_i$-n, akkor $f$ Riemann-integrálható az $S = \bigcup\limits_{i=1}^{k} S_i$ halmazon. Ha még az is igaz, hogy $\forall$ $i \neq j$-re $S_i \cap S_j$ Lebesgue szerint nullmértékű $\mathbb{R}^n$-ben, akkor*

$$\int\limits_S f = \sum_{i=1}^{k} \int\limits_{S_i} f \ .$$

*Bizonyítás.* Ha $k = 2$, akkor az állítás jön e)-ből, mert a feltétel miatt $\int\limits_{S_1 \cap S_2} f = 0$ is igaz.

Általában pedig teljes indukcióval bizonyítunk.

## 3. Jordan-mérhető halmazok $\mathbb{R}^n$-ben

**1. Definíció.** Legyen $S \subset \mathbb{R}^n$ korlátos halmaz. Ha az $f(x) = 1$ $(x \in \mathbb{R}^n)$ konstans függvény Riemann-integrálható $S$-en, akkor azt mondjuk, hogy $S$ Jordan-mérhető $\mathbb{R}^n$-ben és az

$$m_J(S) \doteq \int_S 1$$

számot $S$ Jordan-mértékének nevezzük.

**Megjegyzések:**

**1)** Ha $S = Q \subset \mathbb{R}^n$ egy tégla, akkor

$$m_J(Q) \doteq \int_Q 1 = V(Q) \ ,$$

azaz egy $Q$ tégla Jordan-mértéke éppen a korábban definiált térfogata.

**2)** A Jordan-mérhetőség és Jordan-mérték fogalmát szemléletesebbé teszi a következő gondolatmenet:

- $m_J(S) \doteq \int_S 1 \doteq \int_Q 1_S$, ahol $Q \subset \mathbb{R}^n$ tégla és $S \subset Q$. Így $S$ mérhetősége azzal ekvivalens, hogy
$$\underline{\int}_Q 1_S = \bar{\int}_Q 1_S \ ,$$
azaz az
$$1_S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad 1_S(x) = \begin{cases} 1 & , \ x \in S \\ 0 & , \ x \in CS \end{cases}$$
függvény ($S$ karakterisztikus függvénye) alsó és felső Darboux-integrálja megegyezik, továbbá $S$ Jordan-mértéke ez a közös érték.
- $\underline{\int}_Q 1_S \doteq \sup_P \{s(1_S, P)\}$ és $\bar{\int}_Q 1_S \doteq \inf_P \{S(1_S, P)\}$
ahol $P$ a $Q$ tégla egy tetszőleges felosztása.
- Ugyanakkor
$$s(1_S, P) = \sum\nolimits_* V(T_{i_1 \dots i_n}) \doteq j(S, P),$$
illetve
$$S(1_S, P) = \sum\nolimits^* V(T_{i_1 \dots i_n}) \doteq J(S, P),$$
ahol $\sum_*$ és $\sum^*$ olyan $i_1 \dots i_n$-ekre való összegzést jelent, hogy
$$\forall \ x \in T_{i_1 \dots i_n} \implies x \in S^0 \text{ (belső pont } S\text{-ben)},$$

illetve

$$T_{i_1 \dots i_n} \cap (S \cup \operatorname{Bd} S) \neq 0$$

teljesül.

Így $j(S,P)$ és $J(S,P)$ az $S$ halmazt, adott felosztás esetén belülről, illetve kívülről közelítő (egymáshoz csatlakozó és közös belső pont nélküli) téglák térfogatainak összegei.

Nyilván igaz, hogy: $0 \leq j(S,P) \leq J(S,P) \leq m(Q)$ (a $s$ és $S$ megfelelő tulajdonságai miatt).

– A korábbiak miatt

$$\underline{\int}_Q 1_S \doteq \sup_P \{s(1_S,P)\} \doteq \sup\{j(S,P)\} \doteq m_{*J}(S),$$

illetve

$$\bar{\int}_Q 1_S \doteq \inf_P \{S(1_S,P)\} \doteq \inf\{J(S,P)\} \doteq m_J^*(S)$$

is teljesül, ahol az $m_{*J}(S)$ és $m_J^*(S)$ számokat az $S$ halmaz belső és külső Jordan-mértékeinek szokás nevezni.

Továbbá $0 \leq m_{*J}(S) \leq m_J^*(S) \leq m(Q)$ és $m_{*J}(S)$ és $m_J^*(S)$ értéke nem függ a $Q$ tégla megválasztásától.

– Mindezek alapján úgy is fogalmazhatunk, hogy egy $S \subset \mathbb{R}^n$ korlátos halmaz akkor és csak akkor Jordan-mérhető, ha

$$m_{*J}(S) = m_J^*(S) \doteq m_J(S)$$

és ezt az $m_J(S)$ számot az $S$ halmaz Jordan-mértékének nevezzük.

**3)** Ha $Q^0$ a $Q \subset \mathbb{R}^n$ tégla belseje, akkor $Q^0$ Jordan-mérhető és $m_j(Q^0) = m_J(Q)$

*Bizonyítás.* Ha $Q = [a_1, a_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$ és $\forall$ (elég kicsi) $\varepsilon > 0$-ra

$$Q_\varepsilon = [a_1 + \varepsilon, b_1 - \varepsilon] \times \dots \times [a_n + \varepsilon, b_n - \varepsilon] \ ,$$

akkor

$$Q_\varepsilon \subset Q^0 \subset Q$$

teljesül, ami a korábbiak (az 1. megjegyzés, a Jordan-mérték definíciója, az integrál tulajdonságai) miatt adja, hogy

$$\prod_{i=1}^n (b_i - a_i - 2\varepsilon) = m_J(Q_\varepsilon) = \int_{Q_\varepsilon} 1_{Q_\varepsilon} \leq \underline{\int}_{Q_\varepsilon} 1_{Q_\varepsilon} \leq \underline{\int}_{Q^0} 1_{Q^0} \leq$$
$$\leq \bar{\int}_{Q^0} 1_{Q^0} \leq \bar{\int}_Q 1_Q = \int_Q 1_Q = m_J(Q).$$

Ebből pedig $\varepsilon \to 0$ határátmenettel jön, hogy

$$m_J(Q^0) = \underline{\int}_{Q^0} 1_{Q^0} = \bar{\int}_{Q^0} 1_{Q^0} = m_J(Q)$$

amit bizonyítani kellett.

**1. Tétel.** *Az $S \subset \mathbb{R}^n$ korlátos halmazra $m_J(S) = 0$ akkor és csak akkor, ha $\forall\ \varepsilon > 0$-ra $\exists$ véges sok $S$-et lefedő zárt tégla (vagy zárt kocka), hogy Jordan-mértékük összege kisebb, mint $\varepsilon$.*

**2. Tétel.** *Az $S \subset \mathbb{R}^n$ korlátos halmaz akkor és csak akkor Jordan-mérhető ha $m_J(\mathrm{Bd}\, S) = 0$.*

**3. Tétel.**

a) *Ha $S$ Jordan-mérhető, akkor $m_J(S) \geq 0$.*
b) *Ha $S_1$ és $S_2$ Jordan-mérhető, $S_1 \subset S_2$, akkor $m_J(S_1) \leq m_J(S_2)$.*
c) *Ha $S_1$ és $S_2$ Jordan-mérhető, akkor $S_1 \cup S_2$ és $S_1 \cap S_2$ is az, továbbá*

$$m_J(S_1 \cup S_2) = m_J(S_1) + m_J(S_2) - m_J(S_1 \cap S_2)$$

*teljesül.*

*Bizonyítás.* A Jordan-mérték definíciója és az integrál előző fejezetbeli b), d), e) tulajdonsága adja az állítást.

**Következmény:** Ha $S_1$ és $S_2$ Jordan-mérhető, közös belső pont nélküli halmazok, akkor $m_J(S_1 \cap S_2) = 0$, így

$$m_J(S_1 \cup S_2) = m_J(S_1) + m_J(S_2)\ ,$$

melyből teljes indukcióval a Jordan-mérték véges additivitása, azaz

$$m_J\left(\bigcup_{i=1}^{k} S_i\right) = \sum_{i=1}^{k} m_J(S_i)$$

is következik, ha $S_i$-k $(i = 1, \ldots, k)$ páronként közös belső pont nélküli halmazok.

**Megjegyzések:**

**1)** Bizonyítható, hogy a Jordan-mérték transzláció (eltolás) -invariáns, azaz egy $S$ Jordan-mérhető halmaz $S^*$ eltoltjára igaz, hogy $\exists\ m_J(S^*) = m_J(S)$.

**2)** A Jordan-mérték tehát egy nemnegatív, végesen additív, mozgásinvariáns mérték, melynél az egységkocka mértéke egy.

Egy $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ nemnegatív, Riemann-integrálható függvény Riemann-integráljának geometriai (mértékelméleti) tartalmára mutat a következő:

**4. Tétel.** *Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ nemnegatív, Riemann-integrálható függvény, akkor az*

$$S \doteq \{(x, y) \mid x \in [a, b],\ y \in [0, f(x)]\} \subset \mathbb{R}^2$$

*halmaz Jordan-mérhető és*

$$m_J(S) = \int_a^b f(x)dx$$

*(a Riemann-integrál megadja a görbe alatti halmaz Jordan-mértékét).*

**Következmények:**

**1.** *A tétel feltételei mellett az $f$ gráfja, a $\mathcal{G}r\, f$ halmaz Jordan-mérhető és Jordan-mértéke 0.*

**2.** *Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény $[a, b]$-n, akkor $\mathcal{G}r\, f$ Jordan-mérhető és $m_J \mathcal{G}r\, f = 0$.*

**2. Definíció.** Legyen $K \subset \mathbb{R}^{n-1}$ kompakt és mérhető halmaz, $\Phi, \Psi : K \to \mathbb{R}$ folytonos függvények, hogy $\Phi(x) \leq \Psi(x)$ $(x \in K)$. Az

$$S = \{(x, t) \mid x \in K,\ \Phi(x) \leq t \leq \Psi(x)\}$$

halmazt egyszerű tartománynak nevezzük $\mathbb{R}^n$-ben.

Bizonyítható a következő:

**5. Tétel.** *Az $S \subset \mathbb{R}^n$ egyszerű tartomány kompakt és Jordan-mérhető $\mathbb{R}^n$-ben.*

**6. Tétel (a Fubini tétel egyszerű tartományra).** *Legyen $S$ egyszerű tartomány, $f : S \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, akkor $f$ integrálható $S$-en és*

$$\int_S f = \int_{x \in K} \left[ \int_{t=\Phi(x)}^{t=\Psi(x)} f(x, t) \right] . \tag{F}$$

## 4. Integráltranszformáció

Az egyváltozós függvények Riemann-integráljánál ismert a helyettesítéses integrálás tétele:

Legyen $g : [a, b] \to [c, d]$ folytonosan differenciálható függvény, hogy $c = g(a),\ d = g(b),\ f : [c, d] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, akkor

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt. \tag{1}$$

Ha $g$ szigorúan monoton $[a, b]$-n (azaz a fentieken túl az is teljesül, hogy $g'(x) \neq 0,\ x \in [a, b]$), úgy $a = g^{-1}(c)$ és $b = g^{-1}(d)$ (ha $g$ növekvő), vagy $a = g^{-1}(d)$ és $b = g^{-1}(c)$ (ha $g$ csökkenő) teljesül. Így (1) írható a

$$\int_c^d f(x)dx = \int_{g^{-1}(c)}^{g^{-1}(d)} f(g(t))g'(t)dt\ ,$$

vagy

$$\int_c^d f(x)dx = -\int_{g^{-1}(c)}^{g^{-1}(d)} f(g(t))g'(t)dt$$

alakba, ami együttesen a

$$\int_c^d f(x)dx = \int_a^b f(g(t))|g'(t)|dt$$

alakba írható (és ekkor $g$ lehet növekvő vagy csökkenő is).

**Cél:** A tétel általánosítása, amikor $f$ $n$-változós valós értékű függvény, $g$ pedig $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ típusú transzformáció, elég jó tulajdonságokkal.

Kérdés:

a) milyen $g$ függvényt kell helyettesíteni a „régi" változó helyére, azaz milyen $g$ transzformációval vezessünk be új változókat,
b) az intervallumok helyett milyen részhalmazait tekinthetjük $\mathbb{R}^n$-nek,
c) s végül, hogy $f(g(x))$-et, $|g'(x)|$ helyett, mivel kell szorozni?

A korábbiaknál sokkal nehezebb és hosszadalmasabb az előbbi „kívánalmaknak" megfelelő következő általánosítás bizonyítása.

**Tétel (integráltranszformáció).**
*Legyen $G \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, $g : G \to \mathbb{R}^n$ folytonosan differenciálható, hogy $\det g'(x) \neq 0$ $(\forall\ x \in G)$ (azaz reguláris leképezés) és kölcsönösen egyértelmű leképezés. Ha $E \subset G$ összefüggő, mérhető és kompakt halmaz, míg $f : g(E) \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható függvény, akkor az $(f \circ g)|\det g'|$ függvény Riemann-integrálható az $E$ halmazon és*

(I–T) $$\int\limits_E (f \circ g)|\det g'| = \int\limits_{g(E)} f\ .$$

**Megjegyzések:**

**1)** (I–T) írható a

$$\int\limits_{g(E)} f(x)dx = \int\limits_E f(g(t))|\det g'(t)|dt$$

alakba (ahol $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $t = (t_1, \ldots, t_n)$), vagy $A = g(E)$ mellett (ahol az előző paragrafus 9. tétele és annak következménye miatt $A = g(E)$ mérhető, kompakt és összefüggő is)

$$\int\limits_A f(x)dx = \int\limits_{g^{-1}(A)} f(g(t))|\det g'(t)|dt\ .$$

**2)** A tétel akkor is igaz, ha csak $f$ Riemann-integrálhatóságát tesszük fel. Illetve e mellett csak $E$ kompaktságát és mérhetőségét követeljük meg.

**3)** Igaz az integráltranszformáció tételének következő alakja is:
Legyen $G \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, $g : G \to \mathbb{R}^n$ folytonosan differenciálható $G$-n, $E$ olyan Jordan-mérhető halmaz, hogy $E \subset \bar{E} \subset G$ és $g|_{E^0}$ injektív. Ha $f : g(E) \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható, akkor $\exists \int\limits_E (f \circ g)|\det g'|$ és

(I–T) $$\int\limits_E (f \circ g)|\det g'| = \int\limits_{g(E)} f$$

teljesül.

**4)** Ha $f = 1$ (és $g$-re az eredeti, vagy a módosított feltételek teljesülnek), akkor

$$m_J g(E) = \int\limits_E |\det g'|\ .$$

**5)** Utóbbiak adják a Jordan-mérték transzláció (illetve mozgás) invarianciáját.

**6)** A tétel adja, hogy ha $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineáris leképezés, $\det g' \neq 0$ és $E \subset \mathbb{R}^n$ kompakt és mérhető halmaz, akkor $g(E)$ szintén kompakt és mérhető, továbbá

$$m_J g(E) = |\det g'| m_J E \ .$$

**7)** Az integráltranszformáció (ahogy valósban is) az adott integrál kiszámításának egy eszköze (módszere), melynek révén esetleg „jobb" függvényt kell integrálni „alkalmasabb" $g^{-1}(A) = E$ tartományon.

Általános útmutatás nincs arra, hogy mikor milyen helyettesítést kell alkalmazni, de (az egyváltozós esethez hasonlóan) tudunk „tippeket" adni.

**Példák:**

**1)** Legyen $A = g(E) = \{(x, y \,|\, x, y > 0,\ x^2 + y^2 < a^2)\}$. Számítsuk ki a $\iint\limits_A x^2 y^2 dxdy$ integrált.

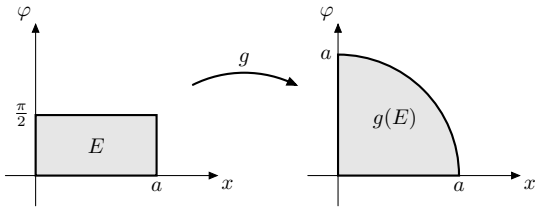
*Megoldás:* Válasszuk $g$-t a

$$g(r, \varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$$

polár-transzformációnak.

$$\det g' = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r$$

Továbbá $g$ az $E = \{(r, \varphi) \,|\, 0 < r < a,\ 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}\}$ nyílt téglalapot képezi az $A$ halmazba kölcsönösen egyértelmű módon és $\det g' = r > 0$ is teljesül $E$-n.




Így

$$\iint\limits_A x^2 y^2 dxdy = \iint\limits_E (r\cos\varphi)^2 (r\sin\varphi)^2 \cdot r\, drd\varphi =$$

$$= \iint\limits_{[0,a]\times[0,\frac{\pi}{2}]} r^3 (\cos\varphi \cdot \sin\varphi)^2 drd\varphi = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \int\limits_0^a r^3 \tfrac{\sin^2 2\varphi}{4} dr \right] d\varphi$$

Az utóbbi integrálás pedig már nem túl nehéz. Itt egy körcikk alakú tartomány helyett egy téglalapon kell integrálni és a függvény sem bonyolódott el tulságosan.

**2)** Számítsuk ki a $\iint\limits_S \sin\sqrt{x^2+y^2}dxdy$ integrált, ha

$$S = \{(x,y)\,|\,\pi^2 \le x^2+y^2 \le 4\pi^2\}\ .$$

*Megoldás:* Alkalmazzuk most is a $g(r,\varphi) = (r\sin\varphi, r\sin\varphi)$ polár-transzformációt. Ez most az

$$E = \{(r,\varphi)\,|\,\pi \le r \le 2\pi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi\}$$

zárt téglalapot képezi az $S$ halmazba, $\det g' = r > 0$ és „majdnem" kölcsönösen egyértelmű módon (hol a „baj"?), de akkor is igaz, hogy

$$\iint\limits_S \sin\sqrt{x^2+y^2}dxdy = \iint\limits_E (\sin r)\cdot r\,drd\varphi =$$

$$= \iint\limits_{[\pi,2\pi]\times[0,2\pi]} r\sin r\,drd\varphi = \int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_\pi^{2\pi} r\sin r\,dr\right)d\varphi$$

és ez utóbbi integrál „módszeresen" számítható. Most egy körgyűrű alakú tartomány helyett jött az egyszerűbb téglalap és a függvény is kedvezőbb lett számunkra.

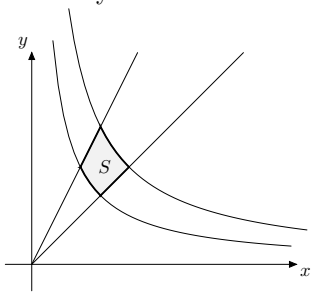
**Megjegyzés:** Ha az eredeti tartomány körgyűrűcikk, akkor gondolhatunk a polár-transzformációra.

**3)** Számítsa ki az

$$xy = a^2\ ,\quad xy = 2a^2\ ,\quad y = x\ ,\quad y = 2x \qquad (x,y>0)$$

görbékkel határolt tartomány Jordan-mértékét.

*Megoldás:* Az adott $S$ tartomány most:



A tanultak szerint $m_J(S) = \iint\limits_S 1 dydy$, ha az $\int\limits_S 1$ létezik. A határoló görbék egyenletei azt „sugallják”, hogy olyan $g$ transzformáció kell, melynek inverzét az

$$(*) \qquad t = xy\ , \qquad s = \frac{y}{x} \qquad (x, y > 0)$$

szerint $g^{-1}(x, y) = (xy, \frac{y}{x})$ $(x, y > 0)$ adja. $g$-t a $(*)$ egyenletrendszer egyértelmű

$$x = \sqrt{\frac{t}{s}}\ , \qquad y = \sqrt{ts} \qquad (t, s > 0)$$

megoldása miatt pedig a

$$g(t, s) = \left(\sqrt{\frac{t}{s}}, \sqrt{ts}\right) \qquad (t, s > 0)$$

transzformáció adja.

Könnyen ellenőrízhető, hogy ez az

$$E = \{(t, s) \,|\, a^2 \le t \le 2a^2,\ 1 \le s \le 2\}$$

téglalapot képezi $S$-re kölcsönösen egyértelmű módon és

$$\det g'(t, s) = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{2\sqrt{ts}} & -\dfrac{\sqrt{t}}{2\sqrt{s^3}} \\ \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{s}{t}} & \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{t}{s}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2s} > 0$$

teljesül $E$-n. Így

$$m_J(S) = \iint\limits_S 1\, dxdy = \iint\limits_E 1 \cdot \frac{1}{2s}\, dtds =$$
$$\int\limits_{a^2}^{2a^2} \left( \int\limits_1^2 \tfrac{1}{2s} ds \right) dt = \int\limits_{a^2}^{2a^2} \ln\sqrt{2}\, dt = a^2 \ln\sqrt{2}\ .$$

**4)** Legyen $S = \{(x, y, z) \,|\, x, y > 0,\ x^2 + y^2 + z^2 < a^2\}$. Számítsuk ki a

$$\iiint\limits_S x^2 z\, dxdydz$$

integrált.

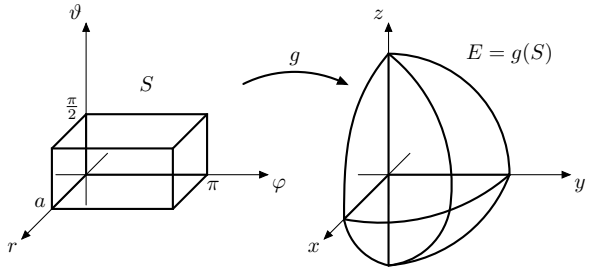
*Megoldás:* Alkalmazzuk a

$$g(r, \varphi, \vartheta) \doteq (r \sin\varphi \cos\vartheta, r \sin\varphi \sin\vartheta, r \cos\varphi)$$

térbeli polár transzformációt. Most $\det g' = r^2 \sin\varphi > 0$ (ahogy ezt már számoltuk). $g$ (ahogy ez könnyen belátható) az

$$E = \{(r, \varphi, \vartheta) \,|\, 0 < r < a,\ 0 < \varphi < \pi,\ 0 < \vartheta < \pi/2\}$$

halmazt kölcsönösen egyértelmű módon képezi le $S$-re.




Így

$$\iiint_S x^2 z \, dxdydz = \iiint_E (r\sin\varphi\cos\vartheta)^2 (r\cos\varphi)^2 r^2 \sin\varphi \, dr d\varphi d\vartheta =$$
$$= \iiint_{(0,a)\times(0,\pi)\times(0,\frac{\pi}{2})} r^6 \sin^3\varphi \cos^2\varphi \cos^2\vartheta \, dr d\varphi d\vartheta \ ,$$

ami a Fubini-tétellel számítható.

## Feladatsor

1) Legyen $\langle P^k \rangle = \langle P_1^k \times \cdots \times P_n^k \rangle$ a $Q \subset \mathbb{R}^n$ tégla egy felosztássorozata. Bizonyítsa be, hogy $\langle P^k \rangle \iff$ normális, ha $\langle P_i^k \rangle$ $(i = 1, \ldots, n)$ normális.

2) Legyenek $P^1$ és $P^2$ a $Q \subset \mathbb{R}^n$ tégla felosztásai. Bizonyítsa be, hogy $P^1 \subset P^2 \iff P_i^1 \subset P_i^2$ $(i = 1, \ldots, n)$.

3) Legyen $Q = [0,1] \times [0,1]$,

$$f: \ Q \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = xy \ .$$

Határozza meg $\underline{\int}_Q f$ és $\bar{\int}_Q f$ értékét.

4) Ha $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_i$ és $A_i \subset \mathbb{R}^n$ $(i \in \mathbb{N})$ nullmértékű halmazok $\mathbb{R}^n$-ben, akkor $A$ is nullmértékű $\mathbb{R}^n$-ben.

5) Vizsgálja meg, hogy léteznek-e az alábbi integrálok. Ha igen, úgy határozza meg értéküket.

a) $\displaystyle\iint_{[0,1]\times[0,1]} x\sqrt{y}\ dxdy$ ; b) $\displaystyle\iint_{[0,1]\times[-1,0]} xe^{xy}\ dxdy$ ;

6) Számítsa ki az alábbi integrálokat:

a) $\iint_S (x^2+y^2)\ dxdy$, ha $S$ az $y = x,\ y = x + a,\ y = 0,\ y = 3a$ egyenesekkel határolt tartomány;

b) $\iint_S (x^2+y^2)\ dxdy$, ha $S = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le a,\ a > 0\}$;

c) $\iint_S (x^2+y)\ dxdy$, ha $S = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le \sqrt{x}\}$;

f) $\iint_S e^{x^2+y^2}\ dxdy$, ha $S = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le R^2,\ R > 0\}$;

g) $\iiint_S (x^2+y^2+z^2)\ dxdydz$, ha $S = \{(x,y,z) | x^2+y^2+z^2 \le R^2, R > 0\}$.

7) Számítsa ki az alábbi görbékkel határolt tartományok Jordan-mértékét:

a) $xy = a^2\ ,\ x + y = \dfrac{5}{2}a \qquad (a > 0)$;

b) $y^2 = 2px + p^2\ ,\ y^2 = -2qx + q^2 \qquad (p, q > 0)$;

8) Számítsa ki az alábbi feltételekkel határolt testek Jordan-mértékét:

a) $z = 1 + x + y\ ,\ z = 0\ ,\ x + y = 1\ ,\ x = 0\ ,\ y = 0$;

b) $x + y + z = a\ ,\ x^2 + y^2 = R^2\ ,\ x = 0\ ,\ y = 0\ ,\ z = 0 \quad (a > R\sqrt{2})$;

# VII. DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

## 1. Differenciálegyenlet fogalma

Jelöljön $y$ a továbbiakban egy keresett függvényt, $y(x)$ ennek a helyettesítési értékét $x$-ben. Legyen $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ adott, ekkor a

$$y' = f(x, y) \qquad \big(\text{illetve } y'(x) = f(x, y(x))\big) \tag{1.1}$$

egyenlet elsőrendű közönséges explicit differenciálegyenletnek szokás nevezni.

Általánosabban:

**1. Definíció.** Legyen $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $f : D \to \mathbb{R}$ folytonos függvény (ahol $D$ egy tartomány). Az

$$y^{(n)} = f\big(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\big) \tag{1.2}$$

egyenletet $n$-edrendű közönséges explicit differenciálegyenletnek nevezzük, ennek speciális esete $n = 1$-re a (1.1) elsőrendű közönséges explicit differenciálegyenlet.
Az $y : I \to \mathbb{R}$ (ahol $I \subset \mathbb{R}$ intervallum) függvény megoldása (1.2)-nek $I$-n, ha

1) $y$ $n$-szer differenciálható,
2) $\big(x, y(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)\big) \in D, \quad \forall\, x \in I,$
3) $y^{(n)}(x) = f\big(x, y(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)\big), \quad \forall\, x \in I$ teljesül.

További általánosítás:

**2. Definíció.** Legyen $F : D \subset \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$ adott folytonos függvény. A

$$F\big(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\big) = 0 \tag{1.3}$$

egyenletet közönséges $n$-edrendű differenciálegyenletnek nevezzük.
Az $y : I \to \mathbb{R}$ függvény megoldása a (1.3) differenciálegyenletnek az $I$ intervallumon, ha

1) $y$ $n$-szer differenciálható,
2) $\big(x, y(x), \ldots, y^{(n)}(x)\big) \in D, \quad \forall\, x \in I,$
3) $F\big(x, y(x), \ldots, y^{(n)}(x)\big) = 0 \quad \forall\, x \in I$ teljesül.

**Megjegyzés:** Ha (1.2), illetve (1.3)-ban $f$, illetve $F$ az $y, y', \dots, y^{(n-1)}$, illetve $y, y', \dots, y^{(n)}$ változóinak lineáris függvénye, akkor a (1.2), illetve (1.3) differenciálegyenlet lineáris, egyébként nemlineáris.

**3. Definíció.** Legyen $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ tartomány, $f = (f_1, \dots, f_n) : D \to \mathbb{R}^n$ folytonos függvény. A

$$y' = (y_1', \dots, y_n') = f(x, y) = f(x, y_1, \dots, y_n) \tag{1.4}$$

egyenletrendszert, amely az

$$y_i' = f_i(x, y_1, \dots, y_n) \qquad (i = 1, \dots, n) \tag{1.4'}$$

alakba is írható, elsőrendű közönséges ($n$ ismeretlen függvényt tartalmazó) explicit differenciálegyenlet-rendszernek nevezzük.
Az $y = (y_1, \dots, y_n) : I \to \mathbb{R}^n$ függvény (függvényrendszer) a (1.4) (illetve (1.4')) differenciálegyenlet-rendszer megoldása $I$-n, ha

1) $y$ (illetve az $y_i$-k) differenciálható(k),
2) $\big(x, y(x)\big) = \big(x, y_1(x), \dots, y_n(x)\big) \in D \quad \forall\, x \in I$,
3) $y'(x) = f(x, y(x))$ (illetve $y_i'(x) = f_i\big(x, y_1(x), \dots, y_n(x)\big)$ $i = 1, \dots, n$) $\quad \forall\, x \in I$

teljesül.

## 2. Kezdeti érték probléma vagy Cauchy-feladat

**1. Definíció.** Legyen $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ tartomány, $f : D \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, $(x_0, y_{01}, \dots, y_{0n}) \in D$ rögzített. A

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad y^{(i)}(x_0) = y_{0i+1} \quad (i = 0, \dots, n-1) \tag{2.1}$$

problémát egy $n$-edrendű explicit közönséges differenciálegyenletre vonatkozó kezdeti érték problémának vagy Cauchy-feladatnak nevezzük (ez $n = 1$-re $y' = f(x, y),\ y(x_0) = y_0$ alakú).
Az $y^{(i)}(x_0) = y_{0i+1}$ $(i = 0, \dots, n-1)$ kikötéseket kezdeti feltételeknek nevezzük.
Az $y : I \to \mathbb{R}$ függvény megoldása (2.1) ($n$-KÉP)-nek, ha

1) $y$ $n$-szer differenciálható,
2) $\big(x, y(x), \dots, y^{(n-1)}(x)\big) \in D \quad \forall\, x \in I$,
3) $y^{(n)}(x) = f\big(x, y(x), \dots, y^{(n-1)}(x)\big) \quad \forall\, x \in I$,

4) $y^{(i)}(x_0) = y_{0i+1} \quad (i = 0, \dots, n-1)$
teljesül.

**Megjegyzés:** Hasonló a helyzet a nem explicit esetben is,
$F : D \subset \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$ függvénnyel.

**2. Definíció.** Legyen $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ tartomány, $f = (f_1, \dots, f_n) : D \to \mathbb{R}^n$ folytonos függvény, $(x_0, y_0) = (x_0, y_{01}, \dots, y_{0n}) \in D$ adott pont. A

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0 \qquad (y = (y_1, \dots, y_n)) \tag{2.2}$$

problémát egy differenciálegyenlet-rendszerre vonatkozó kezdeti érték problémának vagy Cauchy-feladatnak nevezzük.
Az $y = (y_1, \dots, y_n) : I \to \mathbb{R}^n$ függvény megoldása a (2.2) (DER-KÉP)-nek, ha
1) $y$ differenciálható,
2) $\big(x, y(x)\big) = \big(x, y_1(x), \dots, y_n(x)\big) \in D \quad \forall\, x \in I$,
3) $y'(x) = f\big(x, y(x)\big) \quad \forall\, x \in I$,
4) $y(x_0) = y_0$
teljesül.

**Tétel (átviteli elv).** *Legyen $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ tartomány, $f : D \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, $(x_0, y_{01} \dots, y_{0n}) = (x_0, y_0) \in D$ rögzített.*
*Az $y : I \to \mathbb{R}$ függvény akkor és csak akkor megoldása a (2.1) ($n$-KÉP)-nek $I$-n, ha az $\big(y, y', \dots, y^{(n-1)}\big)$ vektorfüggvény (függvény $n$-es) megoldása a*

$$(*) \quad \begin{cases} y_1' = y_2 \\ \quad \vdots \\ y_{n-1}' = y_n \\ y_n' = f(x, y_1, \dots, y_n) \end{cases} \qquad y_i(x_0) = y_{0i} \qquad (i = 1, \dots, n)$$

*(DER-KÉP)-nek $I$-n.*

**Megjegyzés:** Az átviteli elv lehetővé teszi, hogy ($n$-KÉP) feladatok megoldhatóságát (DER-KÉP) megoldhatóságára vezessük vissza.

## 3. Elemi úton megoldható differenciálegyenlet-típusok

### a) Szeparábilis differenciálegyenletek

**Definíció.** Legyenek $f : [a,b] \to \mathbb{R},\ g : [c,d] \to \mathbb{R}\ (g \neq 0)$ adott folytonos függvények. Az

(SZ) $$y' = f(x)g(y)$$

differenciálegyenletet szeparábilis (szétválasztható változójú) differenciálegyenletnek nevezzük.

**Tétel.** *Az $y : [a,b] \to [c,d]$ differenciálható függvény akkor és csak akkor megoldása (SZ)-nek, ha*

(SZMo) $$\left( \left( \int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(t)}\,dt \right) \circ y \right)(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$$

$\big(x, x_0 \in [a,b];\ y, y_0 \in [c,d]\big)$ *teljesül.*

*Bizonyítás.* $f$ és $1/g$ folytonosak, így az

$$F(x) \doteq \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt + C_1 \qquad \big(x, x_0 \in [a,b]\big),$$

$$G(y) \doteq \int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(t)}\,dt + C_2 \qquad \big(y, y_0 \in [c,d]\big)$$

szerint definiált $F : [a,b] \to \mathbb{R},\ G : [c,d] \to \mathbb{R}$ függvényekre $F' = f,\ G' = 1/g$ teljesül.

a) Ha $y$ teljesíti (SZMo)-t, akkor

$$G\big(y(x)\big) = F(x) + C \qquad \big(x \in [a,b]\big),$$

ami $y,\ F,\ G$ differenciálhatósága miatt adja, hogy

$$G'\big(y(x)\big) \cdot y'(x) = F'(x) \qquad \big(x \in [a,b]\big),$$

azaz

$$y'(x) = f(x)g\big(y(x)\big) \qquad \big(x \in [a,b]\big)$$

teljesül, tehát $y$ megoldása (SZ)-nek.

b) Ha $y$ megoldása (SZ)-nek, akkor

$$f(x) = \frac{y'(x)}{g\big(y(x)\big)} \qquad (x \in [a,b])$$

és a helyettesítéses integrálás tétele miatt $\forall\ x, x_0 \in [a,b]$ esetén

$$\int_{x_0}^{x} f(t)dt = \int_{x_0}^{x} \frac{y'(t)}{g\big(y(t)\big)}dt = \left( \left( \int_{y_0=y(x_0)}^{y} \frac{1}{g(t)}dt \right) \circ y \right)(x)$$

következik, azaz (SZMo) teljesül.

**Megjegyzések:**

**1.** A tétel szerint $y(x_0) = y_0$ is teljesül, így az $y' = f(x)g(y),\ y(x_0) = y_0$ kezdeti érték probléma megoldását kaptuk meg.

**2.** A következő formális módszert gyakran használják:

$$(\mathsf{SZ}) \quad \longrightarrow \quad \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx \quad \longrightarrow \quad \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx \quad (*),$$

amiből kapjuk (SZ) megoldását. Az $(x_0, y_0)$ ponton áthaladó megoldáshoz úgy kell megválasztani az integrációs konstansokat, hogy a $(*)$ egyenlőség teljesüljön $x = x_0,\ y = y_0$ mellett. Ez teljesül, ha

$$\int_{y_0}^{y} \frac{dt}{g(t)} = \int_{x_0}^{x} f(t)dt\ ,$$

ami adja, hogy $y$ teljesíti (SZMo)-t.

**3.** Vizsgálható olyan eset is, amikor valamilyen $y_0 \in [c,d]$-re $g(y_0) = 0$ (ekkor $y(x) = y_0$ nyilván megoldás, de lehetnek más megoldások is).

## b) Változóban homogén differenciálegyenletek

**Tétel.** *Legyen $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ adott folytonos függvény, $y : [a,b] \to \mathbb{R}$ olyan, hogy $0 \notin [a,b]$ és $\exists\ y'$ $[a,b]$-n és $y(x)/x \in [c,d]$.*

*$y$ akkor és csak akkor megoldása $[a,b]$-n a*

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{VH}$$

*változóban homogén differenciálegyenletnek, ha az*

$$u : [a,b] \to \mathbb{R} \qquad u(x) \doteq \frac{y(x)}{x}$$

*függvény megoldása $[a,b]$-n az*

$$u' = \frac{f(u) - u}{x}$$

*szeparábilis differenciálegyenletnek.*

*Bizonyítás.* Nyilvánvaló.

## c) Az $y' = f\left(\dfrac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right)$ differenciálegyenlet

– Ha $c = \gamma = 0$, akkor a címben egy (VH) típusú egyenlet szerepel, mondjuk $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ típusú adott folytonos függvény esetén.

– Ha

$$\begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = a\beta - b\alpha = 0,$$

azaz ha $\dfrac{a}{\alpha} = \dfrac{b}{\beta} = \lambda$, illetve $a = \lambda\alpha,\ b = \lambda\beta$, akkor a címben szereplő egyenlet átmegy az

$$y' = g(\alpha x + \beta y + \gamma)$$

alakba, melyet az

$$u(x) = \alpha x + \beta y(x) + \gamma$$

helyettesítéssel az

$$u' = \alpha + \beta y' = \alpha + \beta g(u)$$

alakba írhatunk, ami egy speciális (SZ) egyenlet.

– Ha

$$\begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} \neq 0\ ,$$

akkor az

$$ax + by + c = 0$$
$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0$$

lineáris egyenletrendszernek pontosan egy $\xi, \eta$ megoldása van.
Ekkor belátható (igen egyszerűen), hogy az

$$y : H \to \mathbb{R} \qquad (\xi \notin H,\ x \in H \ \Rightarrow\ \alpha x + \beta y + \gamma \neq 0)$$

függvény akkor és csakis akkor megoldása $H$-n az általános differenciálegyenletnek, ha a

$$\psi : H^* \to \mathbb{R}, \quad \psi(t) = y(t + \xi) - \eta \qquad \big(H^* = \{t \mid t + \xi \in H\}\big)$$

függvény megoldása az

$$\psi'(x) = F\left(\frac{\psi(x)}{x}\right)$$

differenciálegyenletnek, ahol

$$F(z) = f\left(\frac{a + bz}{\alpha + \beta z}\right) .$$

## d) Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek

**Definíció.** Legyenek $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ adott folytonos függvények, $y : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenciálható ismeretlen függvény. A

(LIH) $$y' = f(x)y + g(x)$$

differenciálegyenletet elsőrendű lineáris inhomogén, míg az

(LH) $$y' = f(x)y$$

differenciálegyenletet elsőrendű lineáris homogén differenciálegyenletnek nevezzük.

**Tétel.** *Az $y : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény akkor és csak akkor megoldása (LIH)-nek, ha $\exists\ c \in \mathbb{R}$, hogy*

(LIHMo) $$y(x) = cy_H(x) + y_P(x) \qquad (x \in [a, b]),$$

*ahol $y_H : [a, b] \to \mathbb{R}$ az (LH) differenciálegyenlet sehol el nem tűnő, $y_P : [a, b] \to \mathbb{R}$ pedig (LIH) egy (partikuláris) megoldása. Továbbá, ha*

$x_0 \in [a,b]$ *rögzített, akkor* $\forall\ x \in [a,b]$ *esetén*

$$(\mathsf{H}) \qquad y_H(x) = \exp\left(\int_{x_0}^{x} f(t)dt\right),$$

$$(\mathsf{P}) \qquad \begin{cases} y_P(x) = \int_{x_0}^{x} g(\tau)\exp\left(\int_{\tau}^{x} f(t)dt\right)d\tau = \\ \qquad = \left[\exp\left(\int_{x_0}^{x} f(t)dt\right)\right]\cdot \int_{x_0}^{x} g(\tau)\exp\left(-\int_{x_0}^{\tau} f(t)dt\right)d\tau\ . \end{cases}$$

## e) Egzakt differenciálegyenletek

**Definíció.** Legyen $D \subset \mathbb{R}^2$ tartomány, $P, Q : D \to \mathbb{R}$ adott függvények. Az

$$(\mathsf{E}) \qquad P(x,y) + Q(x,y)y' = 0$$

egyenletet egzaktnak nevezzük, ha az $f = (P,Q) : D \to \mathbb{R}^2$ függvénynek létezik primitív függvénye, azaz létezik $F : D \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény, hogy

$$F' = f, \quad \text{azaz} \quad D_1F = P \quad \text{és} \quad D_2F = Q$$

teljesül.

**Megjegyzés:** $(\mathsf{E})$-t szokás az

$$(\mathsf{E}') \qquad P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

alakban is írni.

**Tétel.** *Az* $(\mathsf{E})$ *egzakt differenciálegyenletnek az* $y : I \to \mathbb{R}$ *differenciálható függvény (melyre* $(x, y(x)) \in D$*, ha* $x \in I$*) akkor és csak akkor megoldása* $I$*-n, ha* $\exists\ c \in \mathbb{R}$*, hogy*

$$(\mathsf{EMo}) \qquad F(x, y(x)) = C \qquad (x \in I),$$

*ahol* $F$ *az* $f = (P,Q)$ *függvény primitív függvénye.*

*Bizonyítás.*

a) Legyen $y$ (EMo) alakú, akkor az összetett függvény differenciálási szabálya szerint

$$D_1F(x,y(x)) + D_2F(x,y(x))y'(x) = 0 \qquad (x \in I)$$

következik, ami $D_1F = P$ és $D_2F = Q$-val adja, hogy $y$ megoldása (E)-nek.

b) Ha $y$ teljesíti (E)-t $I$-n és (E) egzakt, akkor

$$0 = D_1F(x,y(x)) + D_2F(x,y(x))y' = \frac{d}{dx}F(x,y(x)) \qquad (x \in I)$$

teljesül, ami adja (EMo)-t.

**Megjegyzések:**

**1.** Ha $f = (P,Q) : D \to \mathbb{R}^2$ olyan, hogy $D$ úgynevezett csillagszerű tartomány, $f$ folytonosan differenciálható (azaz $P$ és $Q$ is), továbbá $D_2P = D_1Q$ $D$-n, akkor létezik $f = (P,Q)$-nak primitív függvénye. Ha $(x_0,y_0)$ egy csillagközéppont és $g : [a,b] \to D$ olyan szakaszonként sima görbe, mely az $(x_0,y_0)$-t $(x,y)$-nal köti össze, akkor ez a primitív függvény az

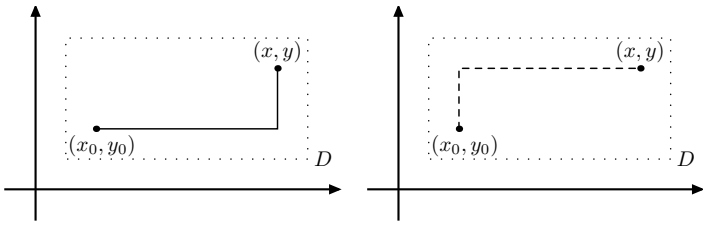
$$F(x,y) = \int\limits_g f = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} f$$

integrálfüggvény.

**2.** Az 1) megjegyzés feltételein túl teljesüljön, hogy $g(t) \doteq (x(t),y(t))$ folytonosan differenciálható ($g(a) = (x_0,y_0)$, $g(b) = (x,y)$), akkor a görbementi integrál kiszámítására vonatkozó ismert tétel alapján, ha $\exists\ g^{-1}$, úgy

$$F(x,y) = \int\limits_a^{g^{-1}(x,y)} P(x(t),y(t))x'(t)dt + \int\limits_a^{g^{-1}(x,y)} Q(x(t),y(t))y'(t)dt\ .$$

**3.** Ha $D$ téglalap vagy körlap, akkor bármely rögzített $(x_0,y_0)$-ból bármely $(x,y) \in D$ elérhető a tengelyekkel párhuzamos töröttvonal mentén, például:




A folytonos vonalra:

$$g(t) = g^1(t) \cup g^2(t) = (x^1(t), y^1(t)) \cup (x^2(t), y^2(t)) \ ,$$

ahol

$$\begin{cases} x^1(t) = t \\ y^1(t) = y_0 \end{cases} \quad t \in [x_0, x], \qquad \begin{cases} x^2(t) = x \\ y^2(t) = t \end{cases} \quad t \in [y_0, y],$$

így

$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(t, y_0)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x,t)dt \ .$$

A szaggatott vonalra (hasonlóan):

$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(t, y)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,t)dt \ .$$

**4.** $F(x,y)$ utóbbi két alakjában szokás az első integrálban $t \to x$, a másodikban $t \to y$ használata is.

**5.** Az (E) egzakt egyenlet $(x_0, y_0)$-on áthaladó megoldását $C = 0$ mellett kapjuk.

**6.** Az $y' = f(x)g(y)$ $(g \neq 0)$ szeparábilis egyenlet egzakt differenciálegyenlet.

## f) Integráló szorzó keresése

**Definíció.** Ha $y$ teljesíti (E)-t és $\exists\ \mu : D \to \mathbb{R}$ $(\mu \neq 0)$ függvény, hogy a $(\mu P, \mu Q)$ függvénynek létezik primitív függvénye, azaz a

$$(*) \qquad \mu(x,y)P(x,y)dx + \mu(x,y)Q(x,y)dy = 0$$

differenciálegyenlet egzakt, akkor $\mu$-t az (E) egyenlet integráló szorzójának (Euler-multiplikátorának) nevezzük.

**Megjegyzések:**

**1.** Ha létezik integráló szorzó, úgy ((E) és $(*)$ ekvivalenciája miatt) (E) megoldása visszavezethető a $(*)$ egzakt differenciálegyenlet megoldására.

**2.** Integráló szorzót az alábbi módon kereshetünk:

$$D_2\mu P = D_1\mu Q \qquad \Leftrightarrow \qquad Q\mu_x - P\mu_y = (P_y - Q_x)\mu \ ,$$

melyből ha $\mu = \mu(\omega(x,y))$ (pl. $\omega(x,y) = x$ vagy $y$ vagy $x+y$ $\dots$)

$$Q\frac{d\mu}{d\omega}\omega_x - P\frac{d\mu}{d\omega}\omega_y = (P_y - Q_x)\mu \ ,$$

illetve

$$\frac{\mu'(\omega)}{\mu(\omega)} = \frac{P_y - Q_x}{Q\omega_x - P\omega_y}$$

következik, ami adja, hogy

$$\mu(\omega) = \exp \int \frac{P_y - Q_x}{Q\omega_x - P\omega_y}(\omega)d\omega \ ,$$

ha $\frac{P_y - Q_x}{Q\omega_x - P\omega_y}$ az $\omega$ függvénye.

## 4. Egzisztencia-tételek Cauchy-feladatokra

### a) Egzisztencia és unicitiás tétel (DER-KÉP)-re

Igen fontos a (DER-KÉP) probléma következő átfogalmazása (visszavezetése integrálegyenlet-rendszerre):

**Lemma.** *Az $y : I \to \mathbb{R}^n$ differenciálható függvény akkor, és csak akkor megoldása az*

(DER-KÉP) $\qquad y' = f(x,y) \ , \qquad y(x_0) = y_0 \qquad (x,y) \in D \subset \mathbb{R}^{n+1}$

*problémának, ha folytonos megoldása az*

$$\text{(IER)} \qquad y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt$$

*integrálegyenlet-rendszernek. (Itt $f : D \to \mathbb{R}^n$ folytonos függvény.)*

*Bizonyítás.*

a) Ha $y : I \to \mathbb{R}^n$ megoldása (DER-KÉP)-nek, akkor

$$y'(x) = f(x, y(x)) \qquad (x \in I).$$

$f$ és $y$ folytonossága adja, hogy $f(x, y(x))$ folytonos $I$-n, így létezik az

$$\int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt$$

integrál és

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt \qquad (x \in I),$$

ahol $y(x_0) = y_0$, azaz teljesül (IER).

b) Ha $y : I \to \mathbb{R}^n$ folytonos megoldása (IER)-nek $I$-n, akkor $f(x, y(x))$ folytonossága miatt

$$\int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt$$

differenciálható és deriváltja $f(x, y(x))$, másrészt (IER) adja, hogy $y$ differenciálható és $y'(x) = f(x, y(x))$ $(x \in I)$, továbbá (IER) szerint $y(x_0) = x_0$ is igaz, ebből pedig következik, hogy $y$ megoldása (DER-KÉP)-nek.

**Megjegyzés:** A lemma miatt (DER-KÉP) megoldhatósága és a megoldás egyértelműsége (egzisztencia és unicitás) egyet jelent (IER) megoldhatóságával és a megoldás egyértelműségével.

**Tétel (Picard-Lindelöf egzisztencia és unicitás tétel).**
*Legyen $G_1 \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$, $D = I \times G_1$, $f : D \to \mathbb{R}^n$ folytonos függvény, hogy létezik $L > 0$, hogy*

$$\|f(x, y_1) - f(x.y_2)\|_{\mathbb{R}^n} < L\|y_1 - y_2\|_{\mathbb{R}^n} \qquad (\forall\ (x, y_1), (x, y_2) \in D),$$

*azaz Lipschitz-tulajdonságú $D$-n. Legyen továbbá $x_0 \in I$ és $y_0 \in G_1$ rögzített. Akkor $\exists\, \alpha > 0$, hogy az*

(DER-KÉP) $$y' = f(x,y), \qquad y(x_0) = y_0$$

*Cauchy-feladatnak az $I_1 = I \cap [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ intervallumon létezik megoldása és az egyértelmű.*

**Megjegyzések:**

**1.** A tétel feltételei mellet a (DER-KÉP) megoldását az

$$y_0(x) \doteq y_0, \quad y_k(x) \doteq y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{k-1}(t))dt \quad (k = 1, 2, \ldots; x \in I_1)$$

szerint definiált $\langle y_k \rangle$ függvénysorozat határfüggvénye adja.
Az eljárást Picard-féle szukcesszív approximációnak nevezzük.

**2.** $n = 1$ mellett az elsőrendű explicit differenciálegyenletre vonatkozó Cauchy-feladatra vonatkozó Picard-féle egzisztencia és unicitás tételt kapjuk.

**3.** Egy példa: A

(KÉP) $$y' = xy, \qquad y(0) = 1$$

Cauchy-feladatnak megfelelő integrálegyenelet:

(IE) $$y(x) = 1 + \int_0^x ty(t)dt$$

Ekkor

$$y_0(x) = 1, \qquad y_1(x) = 1 + \int_0^x tdt = 1 + \frac{x^2}{2}, \ldots$$

$$y_k(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2!}\left(\frac{x^2}{2}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{k!}\left(\frac{x^2}{2}\right)^k, \ldots,$$

és $y_k(x) \to \exp(x^2/2)$ egyenletesen, így (KÉP) megoldása:

$$y(x) = \exp\left(\frac{x^2}{2}\right) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

## b) (L-DER-KÉP) megoldhatósága

Legyenek $g_{ij},\ \varphi_i : I \to \mathbb{R}$ $(i,j = 1,\dots,n)$ adott folytonos függvények, akkor

$$y_i' = \sum_{j=1}^{n} g_{ij}(x)y_j + \varphi_i(x), \qquad y_i(x_0) = y_{0i} \qquad (i = 1,\dots,n)$$

egy lineáris differenciálegyenlet-rendszerre vonatkozó Cauchy-feladat, mely az

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \qquad \varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix}, \qquad \underline{\underline{g}} = (g_{ij})_{n\times n}$$

jelöléssel az

$$\text{(L-DER-KÉP)} \qquad y' = \underline{\underline{g}}(x)y + \varphi(x), \qquad y(x_0) = y_0$$

alakba is írható.
Ez ekvivalens az

$$\text{(L-IER)} \qquad y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} \big[\underline{\underline{g}}(t)\, y(t) + \varphi(t)\big]\, dt$$

integrálegyenlet-rendszerrel.
Legyen $D = I \times \mathbb{R}^n$, akkor az

$$f : D \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n, \qquad f(x,y) \doteq \underline{\underline{g}}(x)y + \varphi(x)$$

folytonos függvényre $\forall\ (x,y^1),(x,y^2) \in D$ esetén

$$\big\|f(x,y^1) - f(x,y^2)\big\| = \big\|\underline{\underline{g}}(x)(y^1 - y^2)\big\| =$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{n} g_{ij}(x)(y_j^1 - y_j^2)\right]^2} \le nK\big\|y^1 - y^2\big\| = L\big\|y^1 - y^2\big\|$$

teljesül, azaz Lipschitz-tulajdonságú, így az (L-DER-KÉP) megoldható és a megoldás egyértelmű $I_1 \subset I$-n.

## c) ($n$-KÉP) megoldhatósága

**Tétel (egzisztencia és unicitás tétel (n-KÉP)-re).**
*Legyen $G_1 \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$, $D = I \times G_1$, $f : D \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, hogy $\exists\, L > 0$, hogy*

$$\big|f(x,y^1) - f(x,y^2)\big| < L\big\|y^1 - y^2\big\| \qquad (\forall (x,y^1),(x,y^2) \in D),$$

*azaz Lipschitz-tulajdonságú $D$-n. Legyen továbbá $x_0 \in I$, $y_0 \in G_1$ rögzített.*
*Akkor $\exists\, \alpha > 0$, hogy az*

($n$-KÉP) $\qquad y^{(n)} = f(x, y, \dots, y^{(n-1)}), \qquad y^{(i)}(x_0) = y_{0i+1}$

*($i = 0, \dots, n-1$) Cauchy-feladatnak az $I_1 = I \cap [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ intervallumon létezik megoldása és az egyértelmű.*

**Következmény ((L-$n$-KÉP) megoldhatósága).**
*Legyenek $a_1, \dots, a_n, b : I \to \mathbb{R}$ folytonos függvények, $x_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$ rögzített. Akkor az*

(L-$n$-KÉP) $$\begin{cases} y^{(n)} = a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y + b(x) \\ y^{(i)}(x_0) = y_{0i+1} \qquad (i = 0, \dots, n) \end{cases}$$

*Cauchy-feladatnak egy és csak egy megoldása van $I$-n.*

## d) Egzisztenciatétel (DER-KÉP)-re

**Tétel (Cauchy-Peano egzisztencia tétel).** *Legyen $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ tartomány $f : D \to \mathbb{R}^n$ folytonos függvény, $(x_0, y_0) \in D$. Akkor az*

$$y' = f(x,y), \qquad y(x_0) = y_0$$

*Cauchy-feladatnak létezik megoldása.*
*(De nem feltétlenül egyértelmű, lásd például az $y' = \sqrt{|y|}$ differenciálegyenletre vonatkozó Cauchy-feladatot.)*

## 5. Magasabbrendű lineáris differenciálegyenletek

### a) Az $n$-edrendű lineáris homogén differenciálegyenletek általános elmélete

**1. Definíció.** Legyenek $a_i : I \to \mathbb{R}$ $(i = 1, \dots, n)$ adott folytonos függvények. A

$$(\mathsf{H}_n\mathsf{D}) \qquad y^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) y^{(n-i)} = 0$$

egyenletet $n$-edrendű lineáris homogén differenciálegyenletnek nevezzük. Egyszerű számolással bizonyítható a következő tétel:

**1. Tétel.** *Ha az $y_1, \dots, y_k : I \to \mathbb{R}$ függvények megoldásai ($\mathsf{H}_n\mathsf{D}$)-nek $I$-n, akkor $\forall\, c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ esetén az*

$$y = \sum_{i=1}^{k} c_i y_i$$

*függvény is megoldás $I$-n.*

**2. Definíció.** (Lineáris függőség és függetlenség)
Az $y_1, \dots, y_k : I \to \mathbb{R}$ függvények lineárisan függőek $I$-n, ha létezik $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ $(\sum_{i=1}^{k} c_i^2 > 0)$ konstansrendszer, hogy

$$(*) \qquad \sum_{i=1}^{k} c_i y_i(x) = 0 \qquad (\forall x \in I).$$

$y_1, \dots, y_k : I \to \mathbb{R}$ lineárisan függetlenek, ha $(*)$ csak úgy teljesül, ha $c_i = 0$ $(i = 1, \dots, k)$.

**3. Definíció.** Az $y_1, \dots, y_n : I \to \mathbb{R}$ $n-1$-szer differenciálható függvények Wronski-determinánsa:

$$W = W(y_1, \dots, y_n) \doteq \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & & & \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

**1. Tétel (Liouville-formula).** *Ha az* $y_1, \dots, y_n : I \to \mathbb{R}$ *függvények megoldásai* ($\mathsf{H}_n\mathsf{D}$)*-nek* $I$*-n és* $x_0 \in I$ *adott, akkor*

$$W(x) = W(y_1(x), \dots, y_n(x)) = W(x_0) \exp\left[ -\int_{x_0}^{x} a_1(t)dt \right].$$

**1. Következmény.** ($\mathsf{H}_n\mathsf{D}$) *egy* $y_1, \dots, y_n$ *megoldásrendszerének Wronski-determinánsa vagy* $\equiv 0$*, vagy sehol sem 0.*

**4. Definíció.** (Alaprendszer) Az $y_1, \dots, y_n : I \to \mathbb{R}$ függvények ($\mathsf{H}_n\mathsf{D}$) alaprendszerét alkotják, ha megoldásai annak és lineárisan függetlenek.

**3. Tétel.** $y_1, \dots, y_n : I \to \mathbb{R}$ *akkor, és csak akkor alaprendszere* ($\mathsf{H}_n\mathsf{D}$)*-nek, ha* $\forall\ y_i$ $(i = 1, \dots, n)$ *megoldás* $I$*-n, és* $W(x) \neq 0$*.*

**4. Tétel (($\mathsf{H}_n\mathsf{D}$) általános megoldása).** *Legyen* $y_1, \dots, y_n : I \to \mathbb{R}$ ($\mathsf{H}_n\mathsf{D}$) *alaprendszere* $I$*-n, akkor* ($\mathsf{H}_n\mathsf{D}$) $\forall\ y : I \to \mathbb{R}$ *megoldása*

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x) \qquad (x \in I)$$

*alakú, ahol* $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ *konstansok.*

*Bizonyítás.* Ha $y_1, \dots, y_n$ ($\mathsf{H}_n\mathsf{D}$) alaprendszere, akkor $W(x_0) \neq 0\ \forall\ x_0 \in I$. Ha $y : I \to \mathbb{R}$ egy tetszőleges megoldása ($\mathsf{H}_n\mathsf{D}$)-nek, akkor legyen $c_1, \dots, c_n$ a

$$(\circ) \qquad \sum_{i=1}^{n} c_i y_i^{(j)}(x_0) = y^{(j)}(x_0) \qquad (j = 0, \dots, n-1)$$

egyenletrendszer ($W(x_0) \neq 0$ miatt létező) megoldása, akkor a

$$\psi(x) \doteq \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x) \qquad (x \in I)$$

függvény olyan megoldása ($\mathsf{H}_n\mathsf{D}$)-nek $I$-n, melyre teljesülnek a

$$\psi^{(j)}(x_0) = y^{(j)}(x_0) \qquad (j = 0, \dots, n-1)$$

kezdeti feltételek ($\circ$) miatt.
Így $\psi$ és $y$ ugyanazon ($\mathsf{H}_n\mathsf{D}$)-re vonatkozó ($n$-KÉP) megoldásai, ezért meg-

egyeznek, azaz

$$y(x) = \psi(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x) \qquad (x \in I),$$

amit bizonyítani kellett.

**Megjegyzések:**

**1.** Az általános megoldáshoz így elég az alaprendszert meghatározni.

**2.** Belátható, hogy alaprendszer mindig létezik.

**3.** Az alaprendszer meghatározására nincs általános módszer.

**5. Tétel (D'Alembert-féle fokszámcsökkentő eljárás).**
*Legyen* $y_1 : I \to \mathbb{R}$ $(y_1 \neq 0)$ *megoldása az*

$(\mathsf{H}_2\mathsf{D})$ $$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$$

*differenciálegyenletnek. Az* $y : I \to \mathbb{R}$ *függvény akkor, és csak akkor megoldása* $(\mathsf{H}_2\mathsf{D})$*-nek, ha az*

$$u : I \to \mathbb{R} \qquad u \doteq \left(\frac{y}{y_1}\right)'$$

*függvény megoldása az*

$(\mathsf{H}_1\mathsf{D})$ $$u' + \left(a_1(x) + 2\frac{y_1'(x)}{y_1(x)}\right) u = 0$$

*differenciálegyenletnek. Így* $(\mathsf{H}_2\mathsf{D})$ *általános megoldása*

$$y = cy_1 \int \exp\left[-\int \left(a_1(x) + 2\frac{y_1'(x)}{y_1(x)}\right) dx\right] dx =$$
$$= cy_1 \int \frac{1}{y_1^2(x)} \exp\left[-\int a_1(x)dx\right] dx \ .$$

## b) Konstansegyütthatós lineáris homogén differenciálegyenletek

**Definíció.** Ha ($\mathsf{H}_n\mathsf{D}$)-ben

$$a_i(x) = a_i \in \mathbb{R} \qquad (x \in I),$$

akkor a kapott

($\mathsf{KH}_n\mathsf{D}$) $$y^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} a_i y^{(n-i)} = 0$$

egyenletet $n$-edrendű konstansegyütthatós lineáris homogén differenciálegyenletnek nevezzük.
($\mathsf{KH}_n\mathsf{D}$) karakterisztikus polinomja:

($\mathsf{KP}$) $$P(\lambda) \doteq \lambda^n + \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda^{n-i},$$

míg karakterisztikus egyenlete:

($\mathsf{KE}$) $$\lambda^n + \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda^{n-i} = 0.$$

**Tétel.** *Ha $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ $p_1, \dots, p_k$ ($\in \mathbb{N}$)-szeres (különböző) gyökei ($\mathsf{KH}_n\mathsf{D}$) karakterisztikus egyenletének, hogy $p_1 + \dots + p_k = n$, akkor*

($\mathsf{AR}$) $$\begin{cases} e^{\lambda_1 x}, & x e^{\lambda_1 x}, & \dots, & x^{p_1-1} e^{\lambda_1 x} \\ \vdots & & & \\ e^{\lambda_k x}, & x e^{\lambda_k x}, & \dots, & x^{p_k-1} e^{\lambda_k x} \end{cases}$$

*alaprendszere ($\mathsf{KH}_n\mathsf{D}$)-nek.*

Ha például $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ $\left(i \doteq \sqrt{-1}\right)$ úgynevezett konjugált komplex gyökei ($\mathsf{KE}$)-nek, hogy $p_1 = p_2 = p$-szeresek, akkor ($\mathsf{AR}$) első két sora helyett

$$\begin{array}{llll} e^{\alpha x}\cos\beta x, & x e^{\alpha x}\cos\beta x, & \dots, & x^{p-1} e^{\alpha x}\cos\beta x \\ e^{\alpha x}\sin\beta x, & x e^{\alpha x}\sin\beta x, & \dots, & x^{p-1} e^{\alpha x}\sin\beta x \end{array}$$

szerepel. (Hasonló a helyzet a további komplex gyökök esetén is.)

**Következmény.** *Az*

$$(\mathsf{KH}_2\mathsf{D}) \qquad y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$$

*karakterisztikus egyenlete a másodfokú*

$$(\mathsf{KE}_2) \qquad \lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$$

*egyenlet, így ha ennek gyökei:*

a) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},\ \lambda_1 \neq \lambda_2$, *akkor* ($\mathsf{KH}_2\mathsf{D}$) *általános megoldása*

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x};$$

b) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0 \in \mathbb{R}$, *akkor* ($\mathsf{KH}_2\mathsf{D}$) *általános megoldása*

$$y = c_1 e^{\lambda_0 x} + c_2\, x\, e^{\lambda_0 x};$$

c) $\lambda_1 = \alpha + i\beta,\ \lambda_2 = \alpha - i\beta\ (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$, *akkor* ($\mathsf{KH}_2\mathsf{D}$) *általános megoldása*

$$y = \big[c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x\big] e^{\alpha x}.$$

## c) $n$-edrendű lineáris inhomogén differenciálegyenletek

**Definíció.** Legyenek $a_i, b : [a,b] \to \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, n)$ adott folytonos függvények, akkor az

$$(\mathsf{IH}_n\mathsf{D}) \qquad y^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) y^{(n-i)} = b(x)$$

differenciálegyenletet $n$-edrendű lineáris inhomogén differenciálegyenletnek nevezzük.

**1. Tétel.** *Legyen $y_p$ partikuláris megoldása* ($\mathsf{IH}_n\mathsf{D}$)*-nek. Az $y$ akkor, és csak akkor megoldása* ($\mathsf{IH}_n\mathsf{D}$)*-nek, ha az*

$$y_H : I \to \mathbb{R}, \qquad y_H(x) = y(x) - y_p(x)$$

*szerint definiált függvény megoldása az* ($\mathsf{IH}_n\mathsf{D}$)*-ből képzett* ($\mathsf{H}_n\mathsf{D}$)*-nek.*

*Bizonyítás.*

a) Ha $y$ és $y_p$ megoldásai ($\mathsf{IH}_n\mathsf{D}$)-nek, akkor az $y$-ra és $y_p$-re felírt

($\mathsf{IH}_n\mathsf{D}$)-t kivonva egymásból

$$(y-y_p)^{(n)}+\sum_{i=1}^{n}a_i(x)(y-y_p)^{(n-i)}=0$$

adódik, azaz $y-y_p\doteq y_H$ valóban megoldása ($\mathsf{H}_n\mathsf{D}$)-nek.

b) Ha $y_p$ megoldása ($\mathsf{IH}_n\mathsf{D}$)-nek és $y_H$ megoldása ($\mathsf{H}_n\mathsf{D}$)-nek, akkor a két egyenlet összeadása adja, hogy $y\doteq y_H+y_p$ is megoldása ($\mathsf{IH}_n\mathsf{D}$)-nek.

**Következmény.** *Ha $y_p$ ($\mathsf{IH}_n\mathsf{D}$) egy partikuláris megoldása, $y_1,\dots,y_n$ pedig ($\mathsf{H}_n\mathsf{D}$) alaprendszere, akkor ($\mathsf{IH}_n\mathsf{D}$) általános megoldása*

$$y=\sum_{i=1}^{n}c_iy_i+y_p\ .$$

Hogyan határozható meg $y_p$?

**2. Tétel (a konstansvariálás módszere ($\mathsf{IH}_n\mathsf{D}$)-re).** *Ha $y_1,\dots,y_n$ az ($\mathsf{IH}_n\mathsf{D}$)-ből képzett ($\mathsf{H}_n\mathsf{D}$) alaprendszere és a $c_i:I\to\mathbb{R}$ $(i=1,\dots,n)$ függvények kielégítik a*

$$(\mathsf{C})\quad \sum_{i=1}^{n}c_i'(x)y_i^{(j)}(x)=0\quad (j=0,\dots,n-2),\qquad \sum_{i=1}^{n}c_i'(x)y_i^{(n-1)}(x)=b(x)$$

*egyenletrendszert $I$-n, akkor*

$$(\mathsf{P})\qquad y_p:I\to\mathbb{R},\qquad y_p(x)\doteq\sum_{i=1}^{n}c_i(x)y_i(x)$$

*megoldása ($\mathsf{IH}_n\mathsf{D}$)-nek.*

**Megjegyzések:**

**1.** ($\mathsf{C}$) $c_1',\dots,c_n'$-re egy inhomogén lineáris egyenletrendszer, melynek determinánsa a Wronszki-determináns, melyre $W(x)\neq 0$ ($I$-n).

**2.** ($\mathsf{IH}_2\mathsf{D}$) esetén

($\mathsf{IH}_2\mathsf{D}$) $$y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=b(x),$$

és ha $y_1,\ y_2$ alaprendszer, akkor ($\mathsf{C}$)

($\mathsf{C}'$) $$\begin{cases} c_1'(x)y_1(x)+c_2'(x)y_2(x)=0\\ c_1'(x)y_1'(x)+c_2'(x)y_2'(x)=b(x)\end{cases}$$

alakú. Ebből pedig

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ b(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}}{W(x)} = -\frac{b(x)y_2(x)}{W(y_1,y_2)}; \qquad c_2'(x) = \frac{b(x)y_1(x)}{W(y_1,y_2)},$$

illetve

$$c_1(x) = \int -\frac{b(x)y_2(x)}{W(y_1,y_2)}dx; \qquad c_2(x) = \int \frac{b(x)y_1(x)}{W(y_1,y_2)}dx$$

következik. Továbbá ezen $c_1$ és $c_2$ függvényekkel a partikuláris megoldás

$$y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) \qquad (x \in I).$$

## d) Lineáris differenciálegyenlet-rendszerek

**1. Definíció.** Legyenek $g_{ij}, \varphi_i : I \to \mathbb{R}$ $(i,j = 1,\dots,n)$ folytonos függvények. A

(LIHDER) $$y_i' + \sum_{j=1}^{n} g_{ij}y_j = \varphi_i(x) \qquad (i = 1,\dots,n),$$

illetve az $(y_1,\dots,y_n)^\top \doteq \underline{y}$, $(\varphi_1,\dots,\varphi_n)^\top \doteq \underline{\varphi}$, $(g_{ij})_{n\times n} \doteq \underline{\underline{g}}$ jelölésekkel a

(LIHDER′) $$\underline{y}' + \underline{\underline{g}}(x)\underline{y} = \underline{\varphi}$$

egyenletrendszert lineáris inhomogén differenciálegyenlet-rendszernek, míg az

(LHDER) $$\underline{y}' + \underline{\underline{g}}(x)y = 0$$

egyenletrendszert lineáris homogén differenciálegyenlet-rendszernek nevezzük.

**Megjegyzések:**

1. (LIHDER), illetve (LHDER) megoldásainak meghatározása visszavezethető az $n$-edrendű lineáris differenciálegyenletek elméletére.
2. Ugyanakkor önálló elmélet is kidolgozható, mely szoros analógiát mutat az $n$-edrendű lineáris differenciálegyenletek elméletével.

## Feladatsor

1) Adjuk meg az alábbi görbeseregek differenciálegyenletét:

$$y = e^{cx}\ ; \qquad y = (x-c)^3\ ; \qquad y = cx^3\ ; \qquad y = \sin(x+c)\ .$$

2) Oldjuk meg az alábbi szeparábilis differenciálegyeneleteket, illetve a rájuk vonatkozó kezdetiérték problémákat:

$$y' = e^{2x} - x \qquad y' = 2x\ , \quad y(1) = 4$$
$$(x+1)y' = -xy \qquad (x^2-1)y' + 2xy^2 = 0\ , \quad y(0) = 1$$
$$xyy' = \sqrt{y^2+1} \qquad y' = 3\sqrt[3]{y^2}\ , \quad y(1) = 0$$
$$y' - xy^2 = 2xy \qquad xy' + y = y^2\ , \quad y(1) = \frac{1}{2}$$
$$y' = y\cos x \qquad y' = (1+y^2)\ln x\ , \quad y(1) = 0$$

3) Oldjuk meg a következő lineáris differenciálegyenleteket:

$$xy' - 2y = 2x^4 \qquad (2x+1)y' = 4x + 2y$$
$$y' + y\,\mathrm{tg}\,x = \frac{1}{\sin x} \qquad x(y'-y) = e^x$$
$$x^2y' + xy + 1 = 0 \qquad y' = 2x(x^2+y)$$
$$xy' + (x+1)y = 3x^2e^{-x} \qquad xy' + 2y = \sin(x)$$

4) Oldjuk meg a következő egzakt differenciálegyenleteket:

$$(2x + 3x^2y)dx + (x^3 - 3y^2)dy = 0$$
$$(2x+y)dx + (x-2y)dy = 0$$
$$\frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}y' = 0$$
$$\frac{x-y}{(x+y)^3} + \frac{2x}{(x+y)^3}y' = 0$$
$$2xydx + (x^2-y^2)dy = 0$$
$$e^{-y}dx - (2y + xe^{-y})dy = 0$$
$$\frac{y}{x}dx + (y^3 + \ln x)dy = 0$$

5) A korábbiakra visszavezetéssel oldjuk meg az alábbi differenciálegyenleteket:

$$(x+2y)dx - xdy = 0$$
$$(x-y) + (x+y)y' = 0$$
$$y^2 - 2xy + x^2y' = 0$$
$$2x^3y' = y(2x^2 - y^2)$$
$$y^2 + x^2y' = xyy'$$
$$xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}$$
$$xy' - y = x\,\mathrm{tg}\,\tfrac{y}{x}$$
$$xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$$
$$2x + y + 1 + (4x + 2y - 3)y' = 0$$
$$x - y - 1 + (y - x + 2)y' = 0$$
$$2x - 4y + 6 + (x + y - 3)y' = 0$$
$$(x+4y)y' = 2x + 3y - 5$$
$$y' = 2\left(\frac{y+2}{x+y-1}\right)^2$$
$$(x^2 + y^2 + x)dx + ydy = 0$$
$$(x^2 + y^2 + y)dx - xdy = 0$$
$$xy^2(xy' + y) = 1$$
$$y^2dx - (xy + x^3)dy = 0$$
$$\left(y - \frac{1}{x}\right)dx + \frac{1}{y}dy = 0$$
$$xydx = (y^3 + x^2y + x^2)dy$$
$$(2x^2y^2 + y)dx - (x^3y - x)dy = 0$$

6) Az alábbi feladatokban vizsgálja meg, hogy a megadott függvények lineárisan függetlenek-e:

a) $f_1(x) = x + 2\ ,\qquad f_2(x) = x - 2 \qquad (x \in \mathbb{R})$;

b) $f_1(x) = \sin(x)\ ,\qquad f_2(x) = \cos(x) \qquad (x \in \mathbb{R})$;

c) $f_1(x) = 1\ ,\qquad f_2(x) = x\ ,\qquad f_3(x) = x^2 \qquad (x \in \mathbb{R})$;

d) $f_1(x) = e^x$ , $f_2(x) = e^{2x}$ , $f_3(x) = e^{3x}$ $(x \in \mathbb{R})$;

e) $f_1(x) = x$ , $f_2(x) = e^x$ , $f_3(x) = xe^x$ $(x \in \mathbb{R})$.

7) Határozza meg az alábbi differenciálegyenletek általános megoldását:

a) $(2x+1)y'' + 4xy' - 4y = 0$ , ha $y_1(x) = x$ ismert;

b) $y'' - 2(1 + \mathrm{tg}^2(x))y = 0$ , ha $y_1(x) = \mathrm{tg}(x)$ ismert;

c) $y'' - y' \,\mathrm{tg}(x) + 2y = 0$ , ha $y_1(x) = \sin(x)$ ismert;

d) $xy''' - y'' - xy' + y = 0$ , ha $y_1(x) = x$ , $y_2(x) = e^x$ ismert.

8) Adja meg az alábbi differenciálegyenletek általános megoldását:

a) $x(x-1)y'' - xy' + y = 0$ ;

b) $xy'' + 2y' - xy = 0$ ;

c) $(3x^3 + x)y'' + 2y' - 6xy = 0$ .

9) Oldja meg az alábbi differenciálegyenleteket:

$y'' + y' - 2y = 0$ ; $y'' + 4y' + 3y = 0$ ; $y'' - 2y' = 0$ ;

$y'' - 4y' + 5y = 0$ ; $y'' + 2y' + 10y = 0$ ; $y'' + 4y = 0$ ;

$y''' - 8y = 0$ ; $y^{(4)} - y = 0$ ; $y^{(6)} + 64y = 0$ ;

$y'' - 2y' + y = 0$ ; $4y'' + 4y' + y = 0$ ;

$y^{(5)} - 6y^{(4)} + 9y^{(3)} = 0$ ; $y^{(5)} - 10y^{(3)} + 9y' = 0$ ;

$y^{(4)} + 2y'' + y = 0$ ; $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$ ;

$y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0$ ; $y''' - 3y' + 2y = 0$ .

10) Oldja meg az alábbi differenciálegyenleteket:

$y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$ ; $y'' + y = 4xe^x$ ;

$y'' - y = 2e^x - x^2$ ; $y'' + y' - 2y = 3xe^x$ ;

$y'' - 3y' + 2y = \sin(x)$ ; $y'' - 5y' + 4y = 4x^2e^{2x}$ ;

$y'' - 3y' + 2y = \cos(x)$ ; $y'' - 4y' + 8y = e^{2x} + \sin(2x)$ ;

$y'' + y = x\sin(x)$ ; $\qquad y''' + y' = \sin(x) + x\cos(x)$ ;

$y'' + 4y' + 3y = \mathrm{ch}(x)$ ; $\qquad y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$ ;

$y'' + y = \dfrac{1}{\sin(x)}$ ; $\qquad y'' + 4y = 2\,\mathrm{tg}(x)$ ;

$(3x^3 + x)y'' + 2y' - 6xy = 4 - 12x^2$ .

11) Határozza meg az alábbi Cauchy-feladatok megoldását:

a) $y''' - y' = 0$ , $\quad y(0) = 3$ , $\quad y'(0) = -1$ , $\quad y''(0) = 1$ ;

b) $y'' - 2y' + y = 0$ , $\quad y(2) = 1$ , $\quad y'(2) = -2$ ;

c) $y'' + y = 4e^x$ , $\quad y(0) = 4$ , $\quad y'(0) = -3$ ;

d) $y'' - 2y' = 2e^x$ , $\quad y(1) = -1$ , $\quad y'(1) = 0$ ;

e) $y'' + y = 2x - \pi$ , $\quad y(0) = 0$ , $\quad y(\pi) = 0$ .

12) Oldja meg az alábbi differenciálegyenlet-rendszereket:

a) $\begin{cases} y_1' - y_1 + y_2 = 0 \\ y_2' + 4y_1 - y_2 = 0 \end{cases}$ , $\qquad$ b) $\begin{cases} y_1' + y_1 - 8y_2 = 0 \\ y_2' - y_1 - y_2 = 0 \end{cases}$ ,

c) $\begin{cases} y_1' - y_1 + y_2 - y_3 = 0 \\ y_2' - y_1 - y_2 + y_3 = 0 \\ y_3' - 2y_1 + y_2 = 0 \end{cases}$ , $\qquad$ d) $\begin{cases} y_1' - y_2 = e^x \\ y_2' - y_1 = x^2 \end{cases}$ .