

Kétváltozós függvények

Tartalomjegyzék

Többsváltozós függvények	2
Kétváltozós függvények	2
Nevezetes felületek	3
Forgásfelületek	3
Kétváltozós függvény határértéke	4
Folytonos kétváltozós függvények	6
A parciális deriváltak	7
A parciális deriváltak geometriai jelentése	7
Parciális derivált függvény	8
Kétváltozós függvény deriváltja (gradiens vektor)	8
A gradiens vektor létezésének elégséges feltétele	10
A differenciálhatóság geometriai jelentése	10
Kétváltozós függvény iránymenti deriváltja	11
Vegyes másodrendű parciális deriváltak egyenlősége	12
A kétváltozós függvény lokális szélsőértéke	13
A szélsőérték létezésének szükséges feltétele	13
A szélsőérték létezésének elégséges feltétele	13
A szélsőérték jellege	14
A kétváltozós függvény tartományi szélsőértéke	17

Többváltozós függvények

Legyen D egy n dimenziós ponthalmaz, és f egyértelmű hozzárendelés, mely minden $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$ n dimenziós ponthoz egy valós u számot rendel.

Jelölése: $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, a függvény az értelmezési tartománya D .

Ha D kétdimenziós, akkor f kétváltozós, a szokásos jelölés $z = f(x, y)$,

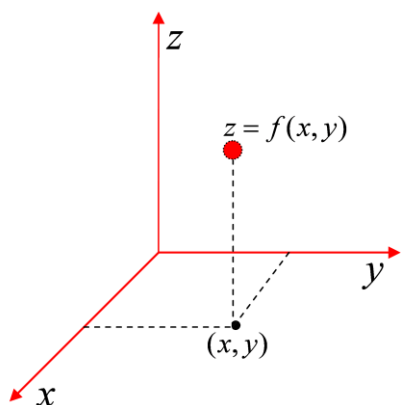
ha D három dimenziós akkor f három változós, a szokásos jelölés $u = f(x, y, z)$

Ezekkel a speciális esetekkel foglalkozunk.

Kétváltozós függvények

Geometriai interpretáció

A $z = f(x, y)$ függvény geometriai interpretációját, hasonlóan az egyváltozós függvények grafikonjához, a háromdimenziós Descartes koordináta-rendszerben úgy kapjuk, hogy az $\{x, y\}$ síkban az (x, y) koordinátájú pontokhoz az f által hozzárendelt z értéket mérjük fel merőlegesen. Az $(x, y, f(x, y))$ pontok által meghatározott alakzat a függvény geometriai megfelelője. Ha $f(x, y)$ folytonos (lásd később) akkor ezt felületnek mondjuk.



Szintvonalak

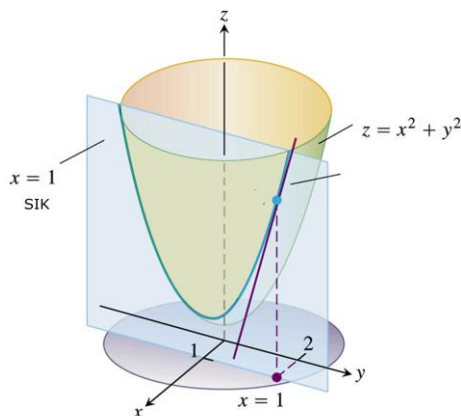
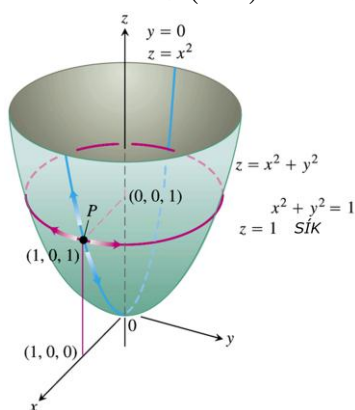
Sokszor a felületet nehéz elképzelni. Ebben segítenek a koordináta síkokkal való metszetgörbék és a szintvonalak.

Definíció: A $z = C$ egyenletű, $\{x, y\}$ síkkal párhuzamos síknak és a felületnek a metszészíkját szintvonalak nevezzük. Segítenek a függvényt elképzelni. Ha a szintvonalakat az $\{x, y\}$ síkra vetítjük, akkor két dimenzióban is ábrázolhatjuk a felületet mint a domborzati térképen szokás.

Nevezetes felületek

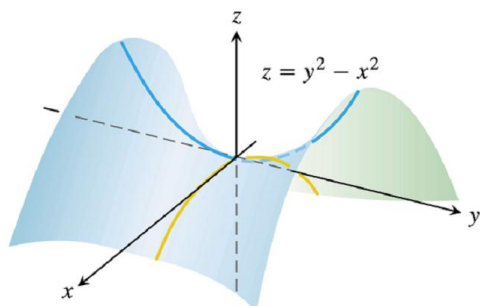
Forgásparaboloid, az $\{y, z\}$ és a $\{x, z\}$ koordinátasíkkal való metszetei parabolák, szintvonalai koncentrikus körök

Egyenlete: $f(x, y) = x^2 + y^2$



Hiperbolikus paraboloid

Egyenlete: $f(x, y) = y^2 - x^2$



Ha az $x=0$ egyenletű $\{y, z\}$ koordinátasíkkal metszük el a felületet, akkor a metszetgörbe egyenlete $z = y^2$,

ha az $y=0$ egyenletű $\{x, z\}$ koordinátasíkkal metszük el a felületet, akkor a metszetgörbe egyenlete $z = x^2$,

Ha az $z=1$ egyenletű $\{x, y\}$ síkkal párhuzamos síkkal metszük el a felületet, akkor a metszetgörbe egyenlete $z = y^2 - x^2$ egyenletű hiperbola

Forgásfelületek

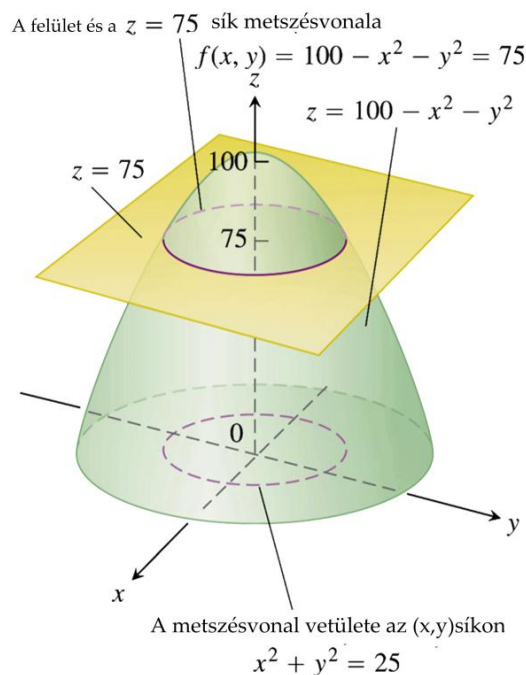
Ha az síkbeli $z = f(u)$ egyenletű görbét a z -tengely körül megforgatjuk, a kapott forgásfelület egyenlete $z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$

Nevezetes forgásfelületek

Félgömb Egyenlete: $z = \sqrt{R^2 - (y^2 + x^2)}$	Forgási hiperboloid (egy köpenyű) Egyenlete: $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$
Forgási hiperboloid (két köpenyű) Egyenlete: $z = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$	Kúp Egyenlete: $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

Példa

Ábrázoljuk a $z = 100 - x^2 - y^2$ felületet és határozzuk meg a $z = 75$ síkkal való metszésvonalát. (szintvonal)

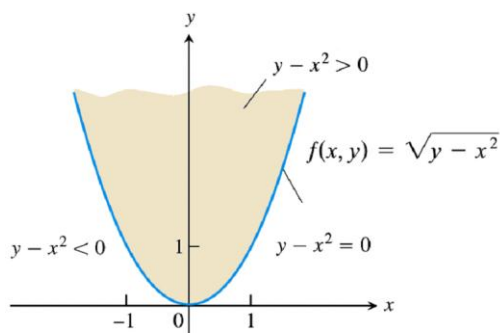


Példa

Határozzuk meg az $f(x, y) = \sqrt{y - x^2}$ értelmezési tartományát

Megoldás:

Az $f(x, y)$ értelmezési tartománya az a tartomány, ahol $y - x^2 > 0$



Kétváltozós függvény határértéke

Az egyváltozós függvények határértékére vonatkozó lehetséges definíciók közül a következőt általánosítjuk:

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, akkor és csak akkor, ha minden $x_n \rightarrow x_0$ pontsorozatra $f(x_n) \rightarrow A$

Általánosítva:

$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = A$, akkor és csak akkor, ha minden $(x_n, y_n) \rightarrow (x_0, y_0)$ pontsorozatra

$f(x_n, y_n) \rightarrow A$

A definíció közvetlen következményei

Függvények konstans-szorosának, összegének, szorzatának, hányadosának (ha a nevező nem nulla), racionális kitevős hatványának a határértéke a határértékek konstans-szorosa, összege, szorzata, hányadosa, racionális kitevős hatványa.

Példa

Létezik-e a következő függvény határértéke a $(-2,3)$ pontban és ha igen mennyi?

Megoldás

$f(x,y) = \frac{2x+3y}{4x+15y}$, ahol a nevező nem nulla, ott a létezik határértéke és

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (-2,3)} \frac{2x+3y}{4x+15y} = \frac{2(-2)+3 \cdot 3}{4(-2)+15 \cdot 3} = \frac{5}{7}$$

1. Példa

Létezik-e ugyanennek a függvénynek a határértéke a $(0,0)$ pontban, és ha igen mennyi?

Megoldás

Az $\frac{2x+3y}{4x+15y}$ függvénynek nincs határértéke $(0,0)$ pontban, mert létezik két különböző pontsorozat (röviden út), mely mentén közelítve az origóba különböző határértéket kapunk.

Pl. az x - tengelyen közelítve az origóba, azaz $(x_n, 0) \rightarrow (0,0)$ esetén $\frac{2x_n+3 \cdot 0}{4x_n+15 \cdot 0} = \frac{1}{2}$

az y - tengelyen közelítve az origóba, azaz $(0, y_n) \rightarrow (0,0)$ esetén $\frac{2 \cdot 0+3 \cdot y_n}{4 \cdot 0+15 \cdot y_n} = \frac{1}{5}$

2. Példa

Létezik-e határértéke az origóban az $f(x,y) = \frac{x \cdot y}{x^2 + y^2}$ függvénynek

Megoldás

Nem létezik, mert az x tengely mentén 0 a határértéke, hiszen

$$\lim_{(x,0) \rightarrow (0,0)} \frac{x \cdot y}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,0) \rightarrow (0,0)} \frac{x \cdot 0}{x^2 + 0} = 0,$$

de az $y = x$ egyenes mentén $\lim_{(x,x) \rightarrow (0,0)} \frac{x \cdot y}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,x) \rightarrow (0,0)} \frac{x \cdot x}{x^2 + x^2} = \frac{1}{2}$

3. Példa

Létezik-e határértéke az origóban az $f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$ függvénynek

Láthatjuk, hogy mind a tengelyek mentén, mind az $y = x$ egyenes mentén 0 a határértéke, azt sejtjük, hogy van határértéke. Ezt a következőképpen láthatjuk be:

Egy tetszőleges $(0,0)$ hoz tartó (x_n, y_n) pontsorozatot felírható polár-koordináták segítségével: $x_n = r_n \cos \varphi_n$, és $y_n = r_n \sin \varphi_n$ melynek a $(0,0)$ -hoz tartásához elegendő az $r_n \rightarrow 0$ feltétel a φ_n sorozattól függetlenül. Azaz

$$\lim_{(x_n, y_n) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = \lim_{r_n \rightarrow 0} \frac{(r_n \cos \varphi_n)^2 r_n \sin \varphi_n}{(r_n \cos \varphi_n)^2 + (r_n \sin \varphi_n)^2} = \lim_{r_n \rightarrow 0} \frac{r_n^3 \cos^2 \varphi_n \sin \varphi_n}{r_n^2} = \lim_{r_n \rightarrow 0} r_n \cos^2 \varphi_n \sin \varphi_n = 0$$

Jó tanács: ha ugyanezt a módszert megpróbáljuk alkalmazni az előző példánál, akkor

$$\lim_{(x_n, y_n) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{r_n \rightarrow 0} \frac{(r_n \cos \varphi_n) r_n \sin \varphi_n}{(r_n \cos \varphi_n)^2 + (r_n \sin \varphi_n)^2} = \lim_{r_n \rightarrow 0} \frac{r_n^2 \cos \varphi_n \sin \varphi_n}{r_n^2} = \lim_{r_n \rightarrow 0} \cos \varphi_n \sin \varphi_n \neq 0$$

mert a határérték $\cos \varphi_n \sin \varphi_n = \frac{1}{2} \sin 2\varphi_n$ függ a φ_n sorozattól. Ha $\varphi_n \rightarrow 0$ akkor a limes 0, ha $\varphi_n \rightarrow \frac{\pi}{4}$, akkor pedig $\frac{1}{2}$, stb...

Folytonos kétváltozós függvények

Ha a $z = f(x, y)$ függvénynek létezik helyettesítési értéke és határértéke egy (x_0, y_0) pontban és a kettő egyenlő, akkor ott a függvény folytonos (x_0, y_0) pontban.

azaz ha $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$.

Példa

Folytonos-e a következő függvény: $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Megoldás: Nem folytonos, hiszen nincs határértéke az origóban (lásd: 5. oldal 2. példa)

Példa

Folytonos-e a következő függvény: $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Megoldás: Igen, folytonos, mert a függvénynek van határértéke (lásd: 5. oldal 3. példa)

és az megegyezik a helyettesítési értékével.

A parciális deriváltak

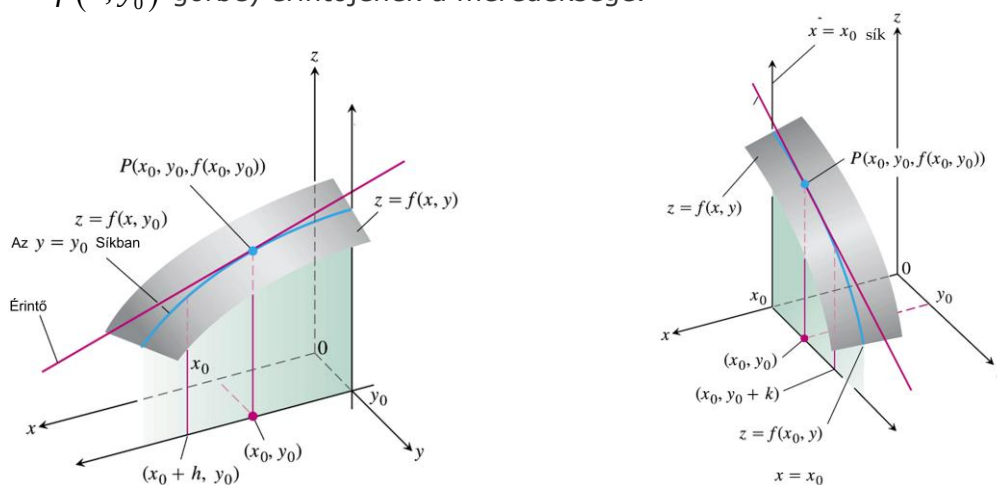
Az x szerinti parciális derivált definíciója: $f'_x(x, y) \Big|_{(x_0, y_0)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$,

Az y szerinti parciális derivált definíciója: $f'_y(x, y) \Big|_{(x_0, y_0)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$

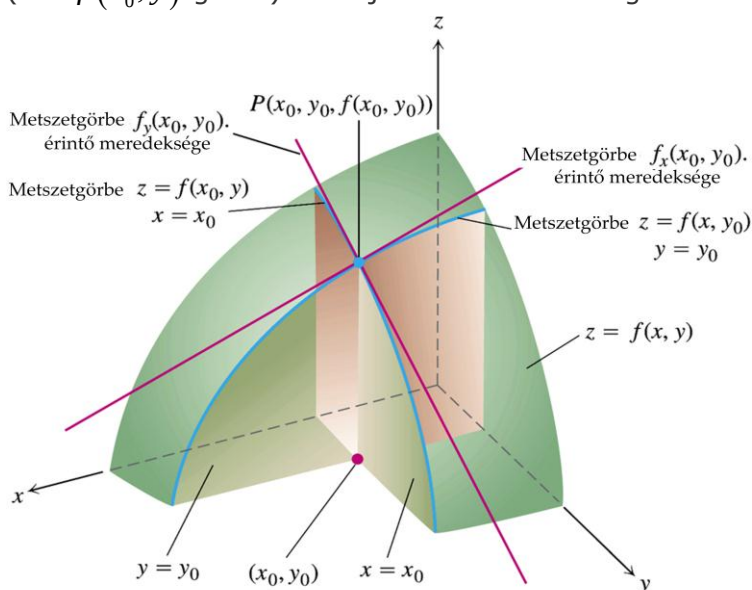
Vagyis a kétváltozós függvény egyik változóját konstansnak tekintve a másik változója szerint deriváljuk.

A parciális deriváltak geometriai jelentése

Az $f(x, y)$ függvény (x_0, y_0) pontbeli x változó szerinti parciális deriváltjának a geometriai jelentése a $z = f(x, y)$ felület és az $y = y_0$ egyenletű sík metszészvonala ($z = f(x, y_0)$ görbe) érintőjének a meredeksége.



Az $f(x, y)$ függvény (x_0, y_0) pontbeli y változó szerinti parciális deriváltjának a geometriai jelentése a $z = f(x, y)$ felület és az $x = x_0$ egyenletű sík metszészvonala ($z = f(x_0, y)$ görbe) érintőjének a meredeksége.



Parciális derivált függvény

Ha tetszőleges (x, y) pontban képezzük a $z = f(x, y)$ x változó szerinti parciális deriváltját, akkor az x változó szerinti parciális derivált függvényt kapjuk (ahol létezik)

$$f'_x(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}, \text{ szokásos jelölés még } \frac{\partial f}{\partial x}, z'_x, \text{ vagy } \frac{\partial z}{\partial x}$$

Ha tetszőleges (x, y) pontban képezzük a $z = f(x, y)$ y változó szerinti parciális deriváltját, akkor az y változó szerinti a parciális derivált függvényt kapjuk (ahol létezik)

$$f'_y(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}, \text{ szokásos jelölés még } \frac{\partial f}{\partial y}, z'_y, \text{ vagy } \frac{\partial z}{\partial y}$$

Példa

Határozzuk meg a $z = x^2 \cdot \sin y$ függvény x és y szerinti parciális derivált függvényeit!

Megoldás

$$z'_x = 2x \cdot \sin y, \quad z'_y = x^2 \cdot \cos y$$

Példa

Határozzuk meg a $z = \sin xy$ függvény x és y szerinti parciális derivált függvényeit!

Megoldás

$$z'_x = y \cdot \cos xy, \quad z'_y = x \cdot \cos xy$$

Példa

Határozzuk meg a $z = x^y$ függvény x és y szerinti parciális derivált függvényeit!

Megoldás

$$z'_x = y \cdot x^{y-1}, \text{ mert } x \text{ szerint hatványfüggvény,}$$

$$z'_y = x^y \cdot \ln x, \text{ mert } y \text{ szerint exponenciális függvény}$$

Példa

Határozzuk meg a $z = x^2 \cos xy$ függvény x és y szerinti parciális derivált függvényeit!

Megoldás

$$z'_x = 2x \cdot \cos xy + x^2 \cdot (-\sin(xy)) \cdot y, \text{ mert } x \text{ szerint szorzatfüggvény,}$$

$$z'_y = x^2 \cdot (-\sin(xy)) \cdot x, \text{ mert } y \text{ szerint nem szorzat függvény, hiszen } x \text{ konstans.}$$

Kétváltozós függvény deriváltja (gradiens vektor)

Definíció:

A függvény $z = f(x, y)$ **gradiense** egy adott pontban a parciális deriváltakból, mint koordinátákból alkotott vektor: $\underline{gradf} = (f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0))$

Definíció:

Az $f(x, y)$ kétváltozós függvény **differenciálható** az (x_0, y_0) pontban (totálisan), ha létezik a **gradiens** vektora.

Azaz

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) \approx \underline{gradf} \cdot ((x - x_0), (y - y_0)),$$

a közelítőleg egyenlő itt azt jelenti, hogy a két oldal eltérése a megváltozás hosszával osztva nullához tart.

Tétel

Ha egy kétváltozós függvény differenciálható egy pontban, akkor ott folytonos.

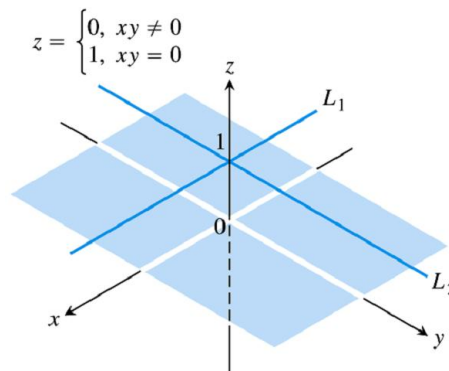
Bizonyítás vázlat

$f(x, y) - f(x_0, y_0) \approx \underline{gradf} \cdot ((x - x_0), (y - y_0))$, a jobboldal nullához tart ha $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$, mert $((x - x_0), (y - y_0)) \rightarrow (0, 0)$, miatt a baloldal is tart nullához, amiből azonnal következik a folytonosság.

Megjegyzés

Abból, hogy egy függvénynek léteznek a parciális deriváltjai, nem következik, hogy differenciálható.

Például, a következő függvénynek az origóban létezik mind x mind y szerint a parciális deriváltja és mindkettő 0, de nem differenciálható, hiszen még csak határértéke sincs az origóban.



Ez a függvény lényegében $z = 0$, vagyis az $\{x, y\}$ sík csak az x -tengely és az y -tengely mentén nem 0, hanem 1 a függvény értéke.

A gradiens vektor létezésének elégséges feltétele

Tétel (bizonyítás nélkül):

A gradiens vektor létezésének elégséges feltétele, ha az adott pontban a parciális derivált függvények folytonosak.

A differenciálhatóság geometriai jelentése

Ha az $f(x, y)$ kétváltozós függvény **differenciálható** az (x_0, y_0) pontban (totálisan), akkor a $z = f(x, y)$ felületnek létezik **érintő síkja**, melynek egyenlete

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Tehát:

Az $f(x, y)$ függvény $P_0 = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ pontbeli érintő síkjának a normál vektora

$$\underline{n} = (f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0), -1)$$

Bizonyítás vázlat

Ha a függvény differenciálható, akkor a függvény megváltozása közel lineáris, azaz

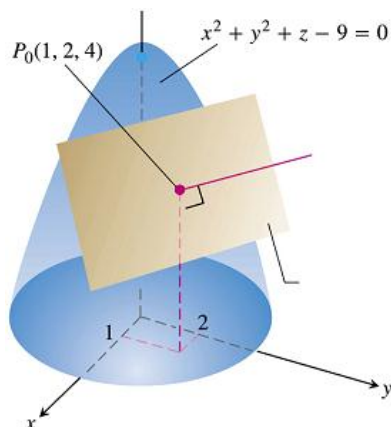
$$f(x, y) - f(x_0, y_0) \approx \underline{\text{grad}f} \cdot ((x - x_0), (y - y_0)), \text{ másképpen írva}$$

$$z - z_0 \approx f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0), \text{ ahol az érintő sík egyenlete:}$$

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Példa

Adjuk meg az $f(x, y) = 9 - (x^2 + y^2)$ függvény $(1, 2)$ pontjában az érintő sík egyenletét!



Az érintő sík normálvektora: $(f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0), -1) = (-2x, -2y, -1)|_{(1,2)} = (-2, -4, -1),$

egy pontja $P_0 = (x_0, y_0, f(x_0, y_0)) = (1, 2, 4),$ tehát az érintő sík egyenlete:

$$-2(x-1)-4(y-2)-(z-4)=0, \text{ azaz } 2x+4y+z-14=0$$

Kétváltozós függvény iránymenti deriváltja

Definíció: Az $f(x, y)$ függvény $\underline{e}$ irányba vett iránymenti deriváltjának nevezzük a

$$\text{következő határértéket: } f'_{\underline{e}}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + e_1 h, y_0 + e_2 h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Azaz az (x_0, y_0) pontból egy előre rögzített egységvektor $\underline{e} = (e_1, e_2)$ ($|\underline{e}| = 1$) irányába nézzük a függvényérték megváltozását és így képezzük a $\frac{f(x_0 + e_1 h, y_0 + e_2 h) - f(x_0, y_0)}{h}$ különbségi hányadost, majd ennek vesszük a határértékét midőn a megváltozás nullához tart.

Szokásos jelölés még: $\frac{\partial f}{\partial \underline{e}}$

Tétel

Ha létezik a függvény gradiense, akkor az iránymenti derivált a gradiens vektor és a megadott irányba mutató egységvektor skaláris szorzata: $\frac{\partial f}{\partial \underline{e}} = \underline{\text{grad}f} \cdot \underline{e}$

Példa

Határozzuk meg az $f(x, y) = x^2 y$ függvény $\underline{v} = (-3, 4)$ irányába eső iránymenti deriváltját a $P(2, 1)$ pontban!

Megoldás

Az iránymenti deriválthoz szükséges a gradiens vektor az adott pontban és egy egység hosszú vektor mely a keresett irányba mutat.

$$\underline{\text{grad}f} = (2xy, x^2), \quad \underline{\text{grad}f}|_{(2,1)} = (4, 4)$$

Tekintve, hogy $|\underline{v}| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$, az irányába mutató egységvektor $\underline{e} = \left(\frac{-3}{5}, \frac{4}{5}\right)$

$$\text{Tehát } \frac{\partial f}{\partial \underline{e}} = \underline{\text{grad}f} \cdot \underline{e}, \text{ azaz } \frac{\partial f}{\partial \underline{e}} = (4, 4) \cdot \left(\frac{-3}{5}, \frac{4}{5}\right) = \frac{-12}{5} + \frac{16}{5} = \frac{4}{5}$$

Példa

Határozzuk meg az $f(x, y) = \frac{25x^2y}{x^2 + y^3}$ függvény $x + 3y = 5$ egyenes irányába eső

iránymenti deriváltját a $P(2,1)$ pontban!

Megoldás

Az iránymenti deriválthoz szükséges a gradiens (ha létezik) az adott pontban és egy egység hosszú vektor mely a keresett irányba mutat.

$$f'_x = \frac{50xy(x^2 + y^3) - 25x^2y(2x)}{(x^2 + y^3)^2}, \quad f'_y = \frac{25x^2(x^2 + y^3) - 25x^2y(3y^2)}{(x^2 + y^3)^2}$$

$$f'_x(2,1) = \frac{100}{25} = 4, \quad f'_y(2,1) = \frac{200}{25} = 8, \quad \underline{\text{grad}f} = (4, 8)$$

Az egyenes egyenletének átalakításával $y = \frac{5}{3} - \frac{1}{3}x$ látható,

hogy az egyenes meredeksége $m = -\frac{1}{3}$ és az egyenes irányába mutató vektor $\underline{v} = (-3, 1)$,

a szükséges egységvektor $\underline{e} = \frac{\underline{v}}{|\underline{v}|} = \left(\frac{-3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}} \right)$,

az iránymenti derivált tehát :

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{e}} = \underline{\text{grad}f} \cdot \underline{e} = (4, 8) \cdot \left(\frac{-3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}} \right) = \left(\frac{-12}{\sqrt{10}} + \frac{8}{\sqrt{10}} \right) = -\frac{4}{\sqrt{10}}$$

Tétel

A gradiens a függvény legnagyobb növekedésének irányába mutat.

Ez azt jelenti, hogy az iránymenti derivált a gradiens vektor irányában a legnagyobb!

Ekkor az iránymenti derivált értéke a gradiens vektor hosszával egyenlő.

Bizonyítás

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{e}} = \underline{\text{grad}f} \cdot \underline{e}, \quad \underline{\text{grad}f} \cdot \underline{e} = |\underline{\text{grad}f}| \cdot |\underline{e}| \cdot \cos \alpha, \text{ ahol } \alpha \text{ a vektorok szöge.}$$

A skaláris szorzat akkor a legnagyobb, ha a két vektor által bezárt szög 0, hiszen ekkor a szög koszinusza 1.

$$\text{Ekkor tehát } \underline{\text{grad}f} \cdot \underline{e} = |\underline{\text{grad}f}| \cdot |\underline{e}| = |\underline{\text{grad}f}|$$

Vegyes másodrendű parciális deriváltak egyenlősége

Tétel: (Young tétele) : Ha a $z = f(x, y)$ kétváltozós függvény elsőrendű parciális derivált függvényei az $A = (a, b)$ pont I_A környezetében léteznek és a függvény az A pontban totálisan differenciálható, akkor $f''_{xy}(a, b) = f''_{yx}(a, b)$.

Megjegyzés. A parciális deriváltak folytonossága elégséges feltétele a függvény totális differenciálhatóságának.

Tehát az is igaz, hogy ha a másodrendű parciális deriváltak folytonosak, akkor a vegyes másodrendű deriváltak egyenlők, azaz értékük nem függ a deriválás sorrendjétől, vagyis $f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y)$

A kétváltozós függvény lokális szélsőértéke

Definíció

A $z = f(x, y)$ függvénynek az (x_0, y_0) pontban lokális maximuma van, ha létezik az (x_0, y_0) pontnak olyan környezete, melyben az $z_0 = f(x_0, y_0)$ a legnagyobb érték,

A $z = f(x, y)$ függvénynek az (x_0, y_0) pontban lokális minimuma van, ha létezik az (x_0, y_0) pontnak olyan környezete, melyben az $z_0 = f(x_0, y_0)$ a legkisebb érték,

A szélsőérték létezésének szükséges feltétele

A lokális szélsőérték (maximum vagy minimum) létezésének szükséges feltétele:

$$\text{grad} f = (f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0)) = (0, 0)$$

Indoklás

Ha a függvénynek lokális szélsőértéke van, (x_0, y_0) -ban, akkor minden felületi görbének is.

A parciális deriváltak geometriai jelentéséből következik, hogy ha a függvény differenciálható, azaz létezik ott az érintősíkja, akkor abban a pontban

$$\text{grad} f = (f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0)) = (0, 0), \text{ azaz az érintősík vízszintes, normálvektora}$$

párhuzamos a z-tengellyel, mivel $\underline{n} = (f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0), -1)$

(1) Minden pontban a gradiens merőleges a ponton áthaladó szintvonalra.

A szélsőérték létezésének elégséges feltétele

A lokális szélsőérték (maximum vagy minimum) létezésének elégséges feltétele:

$$\begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{yx}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix} > 0$$

Ha nem teljesül, akkor nincs szélső értéke a függvénynek, akkor nyeregpontja van.

Bizonyítás nélkül

A szélsőérték jellege

A szélsőérték jellegét (maximum vagy minimum) az $f''_{xx}(x_0, y_0)$ előjele alapján állapíthatjuk meg. (f''_{xx} és f''_{yy} előjele mindig megegyezik abban a pontban ahol fenti determináns $D > 0$)

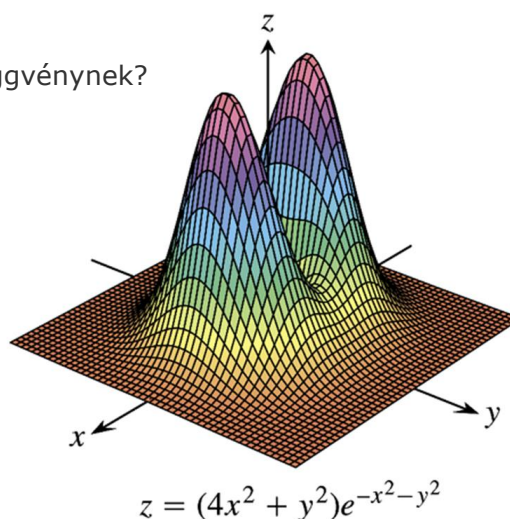
Ha $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$ akkor a függvénynek minimuma van, ha $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$ akkor maximuma van.

Megjegyzés: $f''_{xx}(x_0, y_0) \neq 0$, hiszen akkor $D \leq 0$ lenne.

Példa

Hol van lokális szélsőértéke a következő függvénynek?

$$f(x, y) = (4x^2 + y^2)e^{-x^2 - y^2}$$



Megoldás

$$f'_x = (8x)e^{-x^2 - y^2} + (4x^2 + y^2)e^{-x^2 - y^2}(-2x) = e^{-x^2 - y^2}(8x - 8x^3 - 2xy^2) = 2xe^{-x^2 - y^2}(4 - 4x^2 - y^2)$$

$$f'_y = (2y)e^{-x^2 - y^2} + (4x^2 + y^2)e^{-x^2 - y^2}(-2y) = e^{-x^2 - y^2}(2y - 8x^2y - 2y^3) = 2ye^{-x^2 - y^2}(1 - 4x^2 - y^2)$$

$$f'_x = 0, \quad 2xe^{-x^2 - y^2}(4 - 4x^2 - y^2) = 0$$

$$4 - 4x^2 - y^2 = 0, \text{ vagy } x = 0$$

$$f'_y = 0, \quad 2ye^{-x^2 - y^2}(1 - 4x^2 - y^2) = 0$$

$$(1 - 4x^2 - y^2) = 0, \text{ vagy } y = 0$$

A megoldásokra:

1. $x = 0$ és $y = 0$

2. $4 - 4x^2 - y^2 = 0$, és $y = 0$, $\Rightarrow 4 = 4x^2$, $1 = x^2$

3. $1 - 4x^2 - y^2 = 0$, és $x = 0$ $\Rightarrow 1 = y^2$

A megoldások: $(0,0), (0,1), (0,-1), (1,0), (-1,0)$

Tehát sorra kell venni ezeket a pontokat és ki kell számolni D determináns értékét.

Megnézni, hogy $D = \begin{vmatrix} f_{xx}'' & f_{xy}'' \\ f_{yx}'' & f_{yy}'' \end{vmatrix} > 0$ teljesül-e.

Ha nem, akkor nincs szélső értéke a függvénynek, akkor nyeregpontra van.

$$\begin{aligned} f_{xx}'' &= \left(2e^{-x^2-y^2} (4x-4x^3-xy^2) \right)'_x = 2e^{-x^2-y^2} (-2x)(4x-4x^3-xy^2) + 2e^{-x^2-y^2} (4-12x^2-y^2) = \\ &= 2e^{-x^2-y^2} (-20x^2+8x^4+2x^2y^2+4-y^2) \\ &= e^{-x^2-y^2} (-2x)(2y-8x^2y-2y^3) + e^{-x^2-y^2} (2-8x^2-6y^2) = e^{-x^2-y^2} (-2xy+16x^3y+4xy^3+2-8x^2-6y^2) \\ f_{yy}'' &= \left(e^{-x^2-y^2} (2y-8x^2y-2y^3) \right)'_y = e^{-x^2-y^2} (-2y)(2y-8x^2y-2y^3) + e^{-x^2-y^2} (2-8x^2-6y^2) = \\ &= e^{-x^2-y^2} (-4y^2+16x^2y^2+4y^4+2-8x^2-6y^2) = e^{-x^2-y^2} (-10y^2+16x^2y^2+4y^4+2-8x^2) \\ f_{xy}'' &= \left(e^{-x^2-y^2} (8x-8x^3-2xy^2) \right)'_y = e^{-x^2-y^2} (-2y)(8x-8x^3-2xy^2) + e^{-x^2-y^2} (-4xy) = \\ &= e^{-x^2-y^2} (-20xy+16x^3y+4xy^3) \\ f_{yx}'' &= \left(e^{-x^2-y^2} (2y-8x^2y-2y^3) \right)'_x = e^{-x^2-y^2} (-2x)(2y-8x^2y-2y^3) + e^{-x^2-y^2} (-16xy) = \\ &= e^{-x^2-y^2} (-4xy+16x^3y+4xy^3-16xy) = e^{-x^2-y^2} (-20xy+16x^3y+4xy^3) \end{aligned}$$

Az f_{yx}'' deriváltat már feleslegesen számoltuk ki, mert a Young tétele szerint megegyezik f_{xy}'' -vel.

Vizsgáljuk meg a D értékét azokban a pontokban ahol a parciális deriváltak nullák.

1. $(0,0)$

$$f_{xx}''(0,0) = 2e^{-x^2-y^2} (-20x^2+8x^4+2x^2y^2+4-y^2) \Big|_{x=0,y=0} = 8$$

$$f_{yy}''(0,0) = e^{-x^2-y^2} (-10y^2+16x^2y^2+4y^4+2-8x^2) \Big|_{x=0,y=0} = 2$$

$$f_{yx}''(0,0) = f_{xy}''(0,0) = e^{-x^2-y^2} (-20xy+16x^3y+4xy^3) \Big|_{x=0,y=0} = 0$$

Tehát $D = \begin{vmatrix} f_{xx}''(0,0) & f_{xy}''(0,0) \\ f_{yx}''(0,0) & f_{yy}''(0,0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 16 > 0$, vagyis van lokális szélsőértéke a függvénynek.

2. $(1,0)$

$$f_{xx}''(1,0) = 2e^{-x^2-y^2} (-20x^2 + 8x^4 + 2x^2y^2 + 4 - y^2) \Big|_{x=1,y=0} = 2e^{-1} (-20 + 8 + 4) = -16e^{-1}$$

$$f_{yy}''(1,0) = e^{-x^2-y^2} (-10y^2 + 16x^2y^2 + 4y^4 + 2 - 8x^2) \Big|_{x=1,y=0} = e^{-1} (2 - 8) = -6e^{-1}$$

$$f_{yx}''(1,0) = f_{xy}''(1,0) = e^{-x^2-y^2} (-20xy + 16x^3y + 4xy^3) \Big|_{x=1,y=0} = 0$$

Tehát $D = \begin{vmatrix} f_{xx}''(1,0) & f_{xy}''(1,0) \\ f_{yx}''(1,0) & f_{yy}''(1,0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -16e^{-1} & 0 \\ 0 & -6e^{-1} \end{vmatrix} > 0$, vagyis van lokális szélsőértéke a

függvénynek az $(1,0)$ pontban. Tekintettel arra, hogy $f_{xx}''(1,0) < 0$, ezért itt a függvénynek lokális maximuma van.

3. $(0,1)$

$$f_{xx}''(0,1) = 2e^{-1} (4 - 1) = 6e^{-1}$$

$$f_{yy}''(0,1) = e^{-1} (-10 + 4 + 2) = -4e^{-1}$$

$$f_{yx}''(0,1) = f_{xy}''(0,1) = 0$$

Tehát $D = \begin{vmatrix} f_{xx}''(0,1) & f_{xy}''(0,1) \\ f_{yx}''(0,1) & f_{yy}''(0,1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6e^{-1} & 0 \\ 0 & -4e^{-1} \end{vmatrix} < 0$, vagyis nincs lokális szélsőértéke a

függvénynek az $(0,1)$ pontban.

4. $(-1,0)$

$$f_{xx}''(-1,0) = 2e^{-1} (-20 + 8 + 4) = -16e^{-1}$$

$$f_{yy}''(-1,0) = -6e^{-1}$$

$$f_{yx}''(-1,0) = f_{xy}''(-1,0) = 0$$

Tehát $D = \begin{vmatrix} f_{xx}''(-1,0) & f_{xy}''(-1,0) \\ f_{yx}''(-1,0) & f_{yy}''(-1,0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -16e^{-1} & 0 \\ 0 & -6e^{-1} \end{vmatrix} > 0$, vagyis van lokális szélsőértéke a

függvénynek az $(-1,0)$ pontban. Tekintettel arra, hogy $f_{xx}''(-1,0) < 0$, ezért itt a függvénynek lokális maximuma van.

5. $(0,-1)$

$$f_{xx}''(0,-1) = 2e^{-1} (4 - 1) = 6e^{-1}$$

$$f_{yy}''(0,-1) = -4e^{-1}$$

$$f_{yx}''(0, -1) = f_{xy}''(0, -1) = 0$$

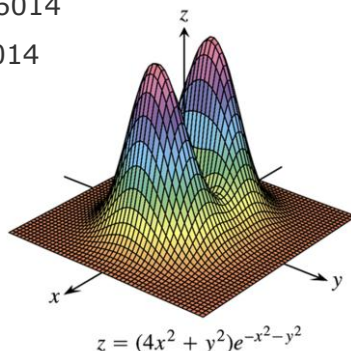
$$\text{Tehát } D = \begin{vmatrix} f_{xx}''(0, -1) & f_{xy}''(0, -1) \\ f_{yx}''(0, -1) & f_{yy}''(0, -1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6e^{-1} & 0 \\ 0 & -4e^{-1} \end{vmatrix} < 0, \text{ vagyis nincs lokális szélsőértéke a}$$

függvénynek a $(0, -1)$ pontban.

Azt kaptuk, hogy a $(-1, 0)$ és az $(1, 0)$ pontokban van lokális maximum, a $(0, 0)$ pontban pedig lokális minimum. A maximum értéket megkapjuk, ha behelyettesítünk a függvénybe. $f(-1, 0) = 4e^{-1} \approx 1,476014$

$$f(1, 0) = 4e^{-1} \approx 1,476014$$

$$f(0, 0) = 0$$



A kétváltozós függvény tartományi szélsőértéke

Definíció

A $z = f(x, y)$ függvénynek az (x_0, y_0) pontban tartományi maximuma van, ha $z_0 = f(x_0, y_0)$ a legnagyobb érték az egész tartományban,

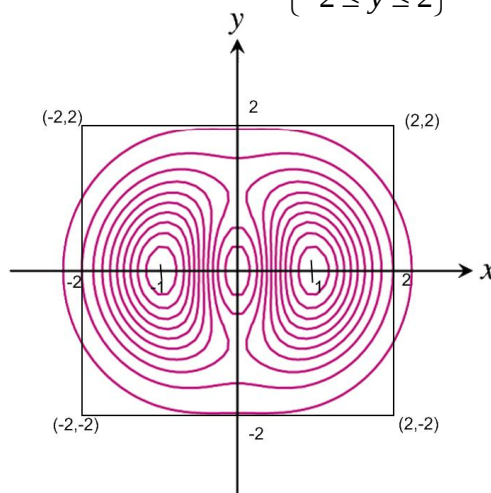
A $z = f(x, y)$ függvénynek az (x_0, y_0) pontban tartományi minimuma van, ha $z_0 = f(x_0, y_0)$ a legkisebb érték az egész tartományban.

A tartományi szélsőértéket a függvény vagy a tartomány belsejében vagy a határán veszi fel. Ha a tartomány belsejében veszi fel, akkor ott lokális szélsőértéke is van.

Példa

Határozzuk meg a következő függvény tartománybeli legnagyobb és legkisebb értékét (másképpen tartományi vagy globális szélsőértékeit) a $T = \begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ -2 \leq y \leq 2 \end{cases}$ négyzeten.

$$f(x, y) = (4x^2 + y^2)e^{-x^2 - y^2}$$



Megoldás

Két eset lehetséges: 1. A szélsőértéket a tartomány belsejében veszi fel.
2. A szélsőértéket a tartomány határán veszi fel.

Ha a globális szélsőértéke a tartomány belsejében van, akkor ott lokális szélsőértéke is van a függvénynek.

Praktikus megjegyzés: Azt azonban nem kell vizsgálni, hogy ténylegesen van-e ott szélsőértéke, mert ha nincs akkor annál kisebb vagy nagyobb értéket a határon vesz fel.

1. Vagyis meg kell nézni a függvény értékét azokon a helyeken ahol $f'_x = 0$ és $f'_y = 0$.
2. Ezeket az értékeket kell összehasonlítani a határon felvett értékekkel.

Ezek közül a legnagyobb a globális maximum, a legkisebb a globális minimum.

A parciális deriváltak nullák a $(0,0), (0,1), (0,-1), (1,0), (-1,0)$ pontokban.

$$f(1,0) = f(-1,0) = 4e^{-1} \approx 1,476014, \quad f(0,0) = 0, \quad f(0,1) = f(0,-1) = e^{-1},$$

Ezek közül a legkisebb a 0 és a legnagyobb a $4e^{-1}$. A tartomány határán is meghatározzuk a legnagyobb és a legkisebb értéket.

A tartomány határai 1. $x = 2$ egyenes. Ezen a függvény $f(2,y) = (16+y^2)e^{-4-y^2}$ kérdés, hogy ennek hol van a maximuma és a minimuma a $[-2,2]$ zárt intervallumon. Először $(-2,2)$ -n határozzuk meg az egyváltozós függvény szélsőértékét.

$$f'(2,y) = (2y)e^{-4-y^2} + (16+y^2)e^{-4-y^2}(-2y) = 2ye^{-4-y^2}(-15-y^2)$$

Ahol ez a derivált nulla, ott lehet szélsőértéke. $y = 0$ vagy $y = \sqrt{15}$. Ezek közül a

tartományba a $(2,0)$ pont esik. Itt a függvény értéke $f(2,0) = (16)e^{-4} = \frac{16}{e^4} \approx 0,296648$

Hasonlóan az $x = -2$ egyenes mentén a lehetséges szélsőérték

$$f(-2,0) = (16)e^{-4} = \frac{16}{e^4} \approx 0,296648$$

Az $y = 2$ egyenesen $f(x,2) = (4x^2+4)e^{-x^2-4}$,

$$f'(x,2) = (8x)e^{-x^2-4} + e^{-x^2-4}(-2x)(4x^2+4) = 8xe^{-x^2-4}(1-x^2-1) = 8x^3e^{-x^2-4}$$

Ez csak a $(0,2)$ pontban nulla, a függvény értéke itt $f(0,2) = 4e^{-4} = \frac{4}{e^4} \approx 0,07416$

Az $y = -2$ egyenesen $f(x,-2) = 8x^3e^{-x^2-4}$, mely csak a $(0,-2)$ pontban nulla, a függvény

értéke itt $f(0,-2) = 4e^{-4} = \frac{4}{e^4} \approx 0,07416$

Végül meg kell nézni a négyzet csúcspontjaiban

$$f(2,2) = f(-2,2) = f(2,-2) = f(-2,-2) = (16+4)e^{-8} = \frac{20}{e^8} \approx 0,006875$$

az így kapott függvényértékek közül kell kiválasztani a legkisebbet és a legnagyobbat.

A legnagyobb függvényérték a $(-1,0)$ és $(1,0)$ pontokban van $4e^{-1} \approx 1,476014$, a legkisebb az origóban van 0.