

Alapfogalmak - 1: Jelek

Jelek és rendszerek – 1

Ajánlott irodalom:

FODOR GYÖRGY :

JELEK ÉS RENDSZEREK

EGYETEMI TANKÖNYV

Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2006

A tantárgy tematikája (1)

1. Alapfogalmak (1) - Jelek
2. Alapfogalmak (2) – Rendszerek
3. Időtartománybeli analízis (1) – Impulzusválasz
4. Időtartománybeli analízis (2) – A rendszeregyenlet
5. Időtartománybeli analízis (3) - Az állapotváltozós leírás
6. Feladatok megoldása
7. ZH-1

A tantárgy tematikája (2)

8. Frekvenciatartománybeli analízis (1) – Állandósult válasz
9. Frekvenciatartománybeli analízis (2) – A Fourier transzformáció
10. Analízis a komplex frekvencia tartományban (1) – Laplace transzformáció
11. Analízis a komplex frekvencia tartományban (2) – Az átviteli függvény
12. Feladatok megoldása
13. ZH-2

Jegy megajánlás

- Előfeltétel: $ZH_1 > 1 \ \& \ ZH_2 > 1$
- Megajánlott jegy számítás:

$$\frac{ZH_1 + ZH_2}{2} + \frac{\text{szakmai napok}}{\max(\text{szakmai napok})}$$

- Példa: $ZH_1 = 2$, $ZH_2 = 3$, $\text{szakmai} = 5$, $\max(\text{szakmai}) = 16$

$$\frac{2 + 3}{2} + \frac{5}{16} = 2.5 + 0.3 = 2.8 \Rightarrow 3$$

Elérhetőségeim

- Email :
buchman.attila@inf.unideb.hu
attila.buchman@gmail.com
- Fogadó óra:
csütörtök 14 – 15
péntek 13 – 14 IF015 szoba

Az előadás tematikája

Ebben az előadásban a jelekről lesz szó.

1. Jelek osztályozása
2. Néhány diszkrét idejű jel
3. Néhány folytonos idejű jel
4. Jelek néhány osztálya
5. Feladatok és megoldások

1. Jelek - definíciók

- **Fizikai mennyiségek** - a folyamatok mérhető mennyiségei
- **Változó** - egy fizikai mennyiség matematikai leírása
- **Jel** - a változó azon részének matematikai leírása, amely a számunkra lényeges információt hordozza.

2. Példa – fizikai mennyiség, változók

- **Fizikai mennyiség** - a hálózati feszültség.

- Szinuszos váltóáram
- Effektív értéke : $U_{eff}=230V \pm 23V$
- Frekvenciája : $f=50 \text{ Hz} \pm 0.5\text{Hz}$

- **Változók** :

- $U_{eff} = U_{eff}(t,x,i)$
- $f = f(t,i)$
- $u = u(t, U_{eff}, f) = \sqrt{2} \cdot U_{eff} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t)$

3. Példa – jelek(1)

- Egy adott pontban szabványos a hálózati feszültség effektív értéke?
- Az effektív értéket az adott pontban időnként mérjük.
- A jel : $U_{\text{eff}}(t)$ – egy táblázatban adható meg.

t [óra]	0	1	2	3	4	5	6	7	8
U_{eff} [V]	230.3	230.5	229.7	230	229.7	230.2	230.1	229.9	230

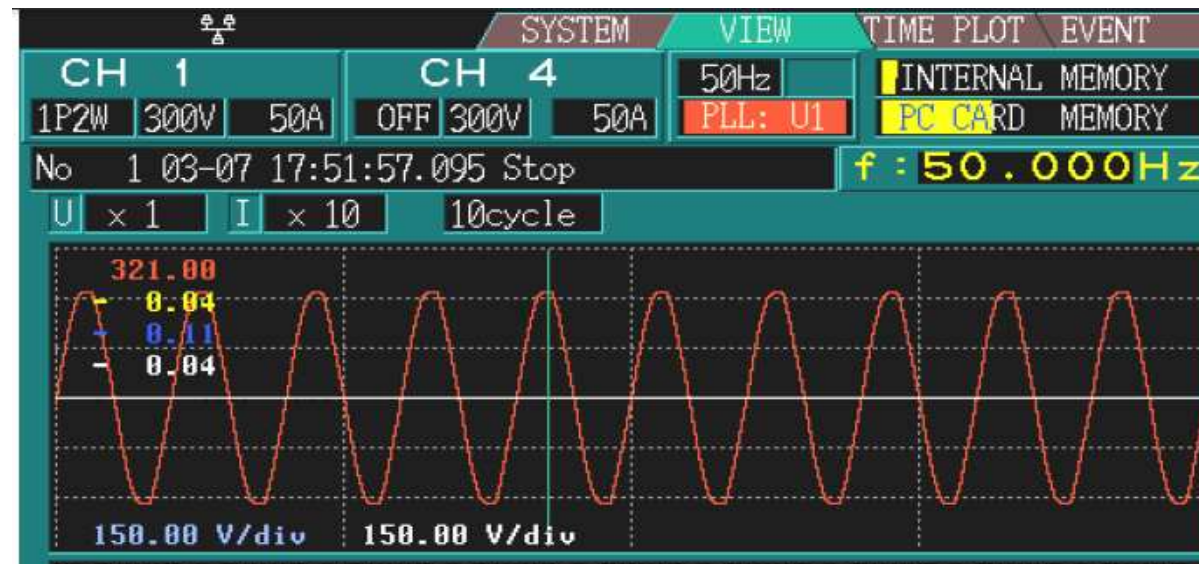
4. Példa – jelek(2)

- Hogyan változik a hálózati feszültség effektív értéke a generátortól mért távolsággal?
- Az effektív értéket egyidejűleg több pontban mérjük.
- A jel : $U_{\text{eff}}(x)$ – egy táblázatban adható meg.

x [m]	0	100	200	300	400	500	600	700	800
U_{eff} [V]	230	229.9	229.8	229.7	229.6	229.5	229.4	229.3	229.2

5. Példa – jelek(3)

- Szinuszos a feszültség a hálózat egy adott pontjában?
- A feszültség pillanatnyi értékéről veszünk mintát.
- A jel : $u(t)$, $t \in [0, 200\text{ms}]$.



6. Folytonos idejű és diszkrét idejű jelek

- **Folytonos idejű** a jel ha a t változó minden valós értékére értelmezett.

$$x = x(t), t \in \mathbb{R}$$

($\mathbb{R}$ a valós számok halmaza)

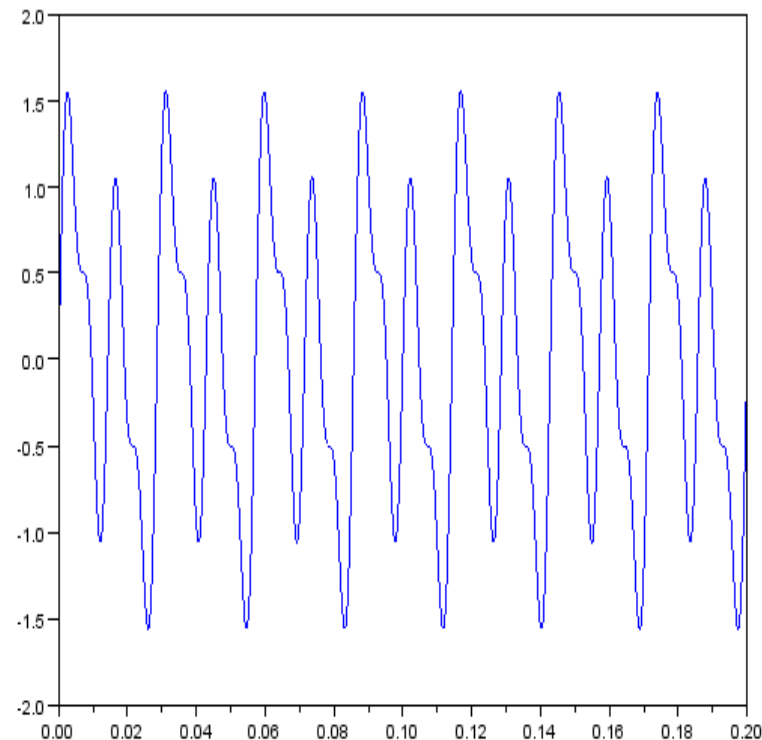
- **Diszkrét idejű** a jel ha csak a független változó diszkrét értékeire értelmezett.

$$x = x[k], k \in \mathbb{Z}$$

($\mathbb{Z}$ az egész számok halmaza)

7. Példa – folytonos idejű jelek

A mikrofon a hangkártya bemenetén folytonos idejű jelet biztosít. **Minden időpillanatban a bemeneti jelnek egy jól meghatározott értéke van.**

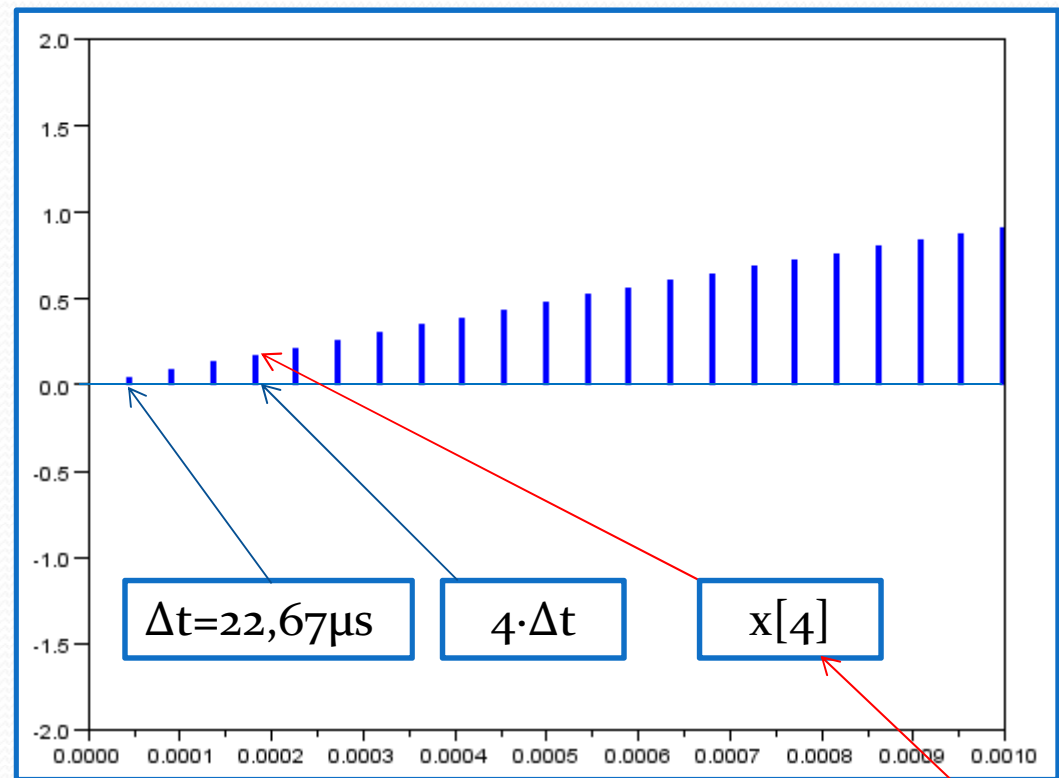


8. Példa – diszkrét idejű jelek

A hangkártya a bemeneti jelből másodpercenként 44100 mintát vesz.

$$\frac{1\text{sec}}{44100} = 22,67\mu\text{s}$$

A jelnek mindig csak **22,67 μs eltelte után** van egy meghatározott értéke.



0. 0.0448953 0.0897504 0.1345251 0.1791794

9. Folytonos értékű és diszkrét értékű jelek

- **Folytonos értékű** – x bármilyen valós vagy komplex szám lehet (bizonyos megszorításokkal).

$$x \in [X_{\min}, X_{\max}] - \text{végtelen értékkészlet}$$

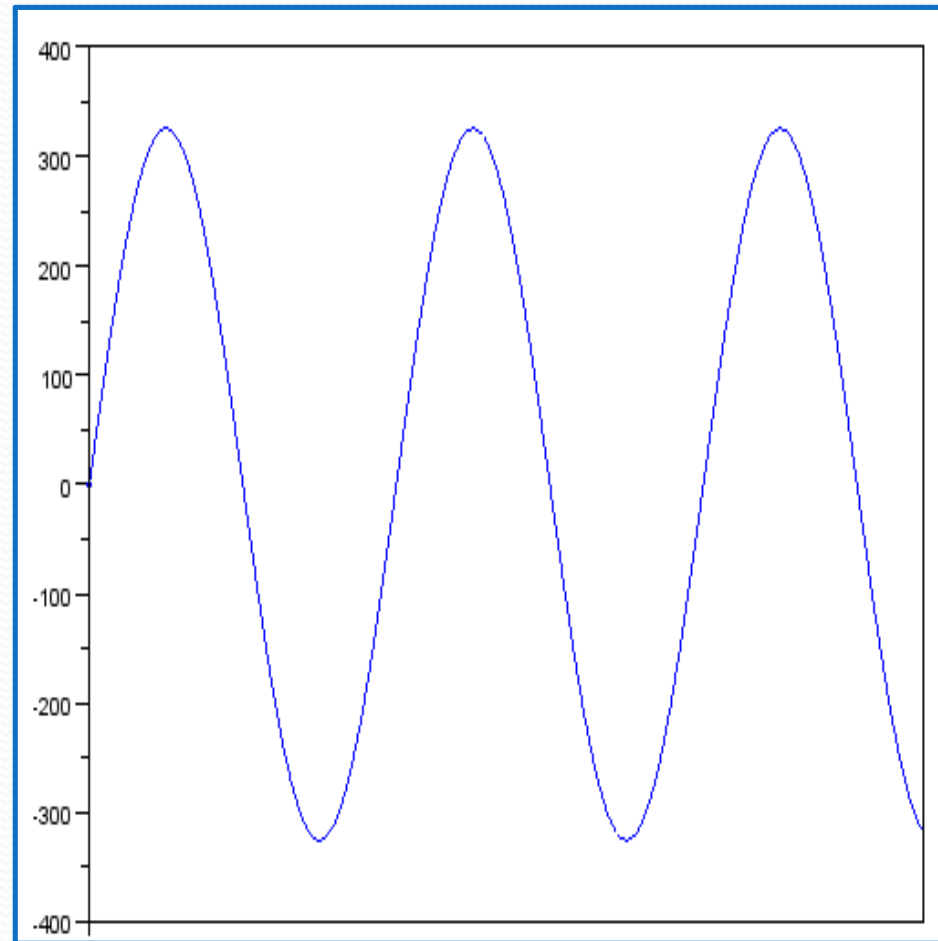
- **Diszkrét értékű (kvantált)** – x csak bizonyos $a_0, a_1, a_2, \dots$ valós vagy komplex értékeket vehet fel.

$$x \in \{a_0, a_1, \dots, a_i, \dots, a_N\} - \text{véges értékkészlet}$$

10. Példa – folytonos értékű jel

A hálózati feszültség pillanatnyi értékének az értékkészlete határolt de mégis végtelen:

$$u \in [-325\text{V}, 325\text{V}]$$



11. Példa – diszkrét értékű jel

A digitális óra
kijelzője által
mutatott idő
értékek kvantált
jelt alkotnak:

$24 \cdot 60 = 1440$
diszkrét érték az
értékkészlet

00:00, 00:01, ..., 00:59

01:00, 01:01, ..., 01:59

02:00, 02:01, ..., 02:59

▪

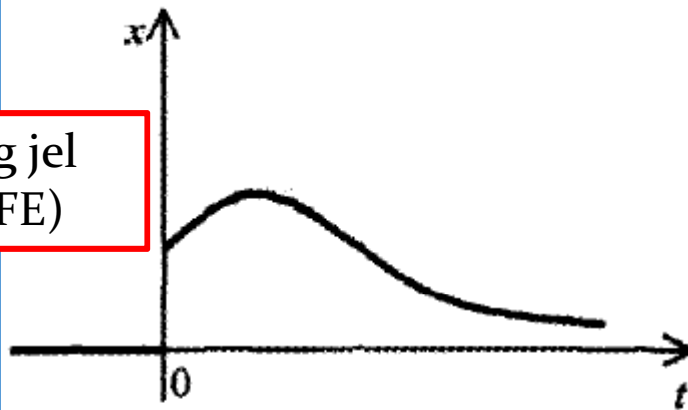
▪

▪

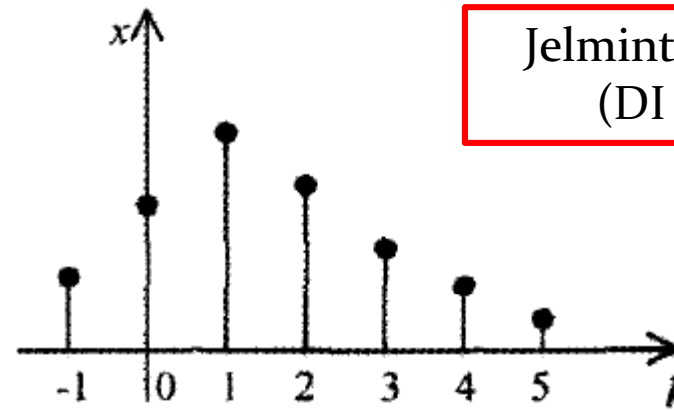
23:00, 23:01, ..., 23:59

12. A jelek négy alapvető típusa

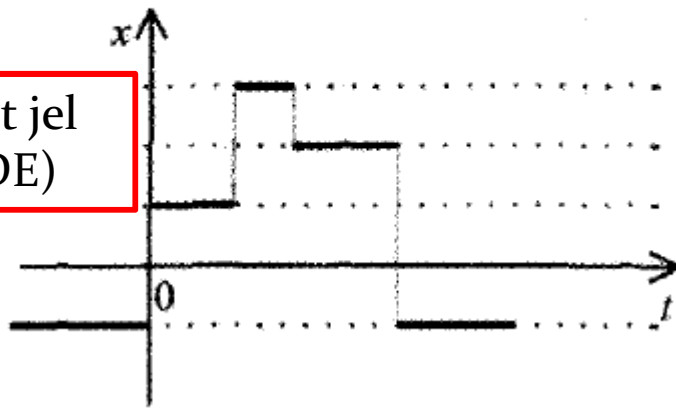
Analóg jel
(FI + FE)



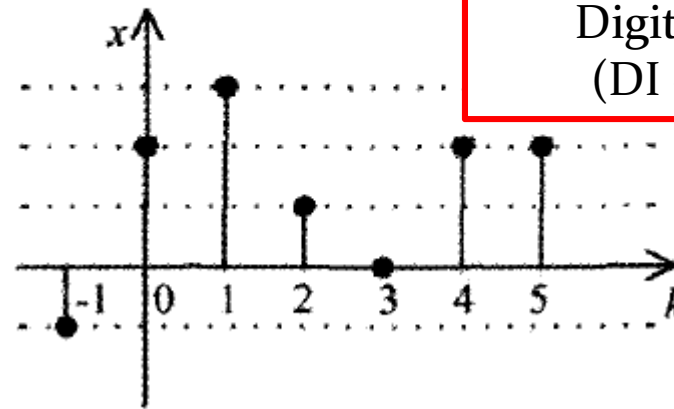
Jelminta sorozat
(DI + FE)



Kvantált jel
(FI + DE)



Digitális jel
(DI + DE)

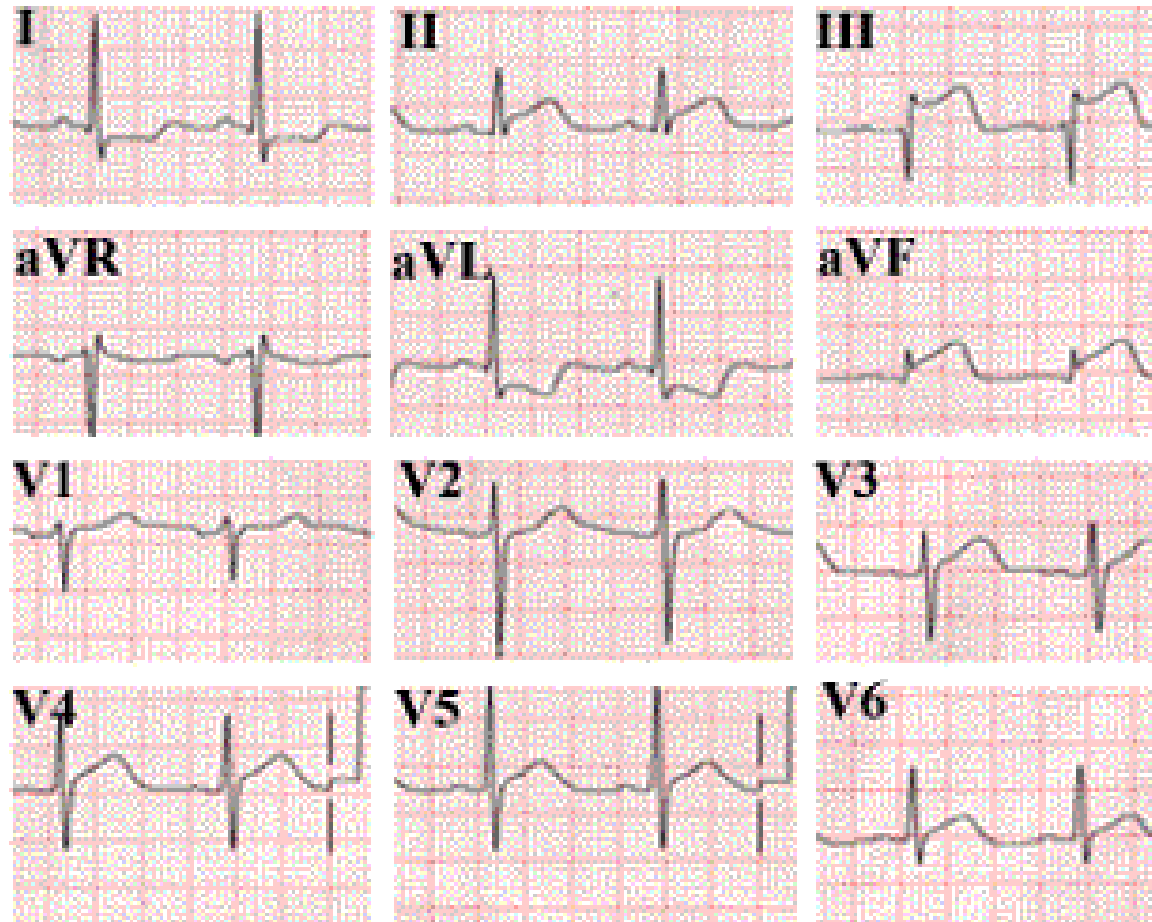


13. Determinisztikus és sztochasztikus jelek

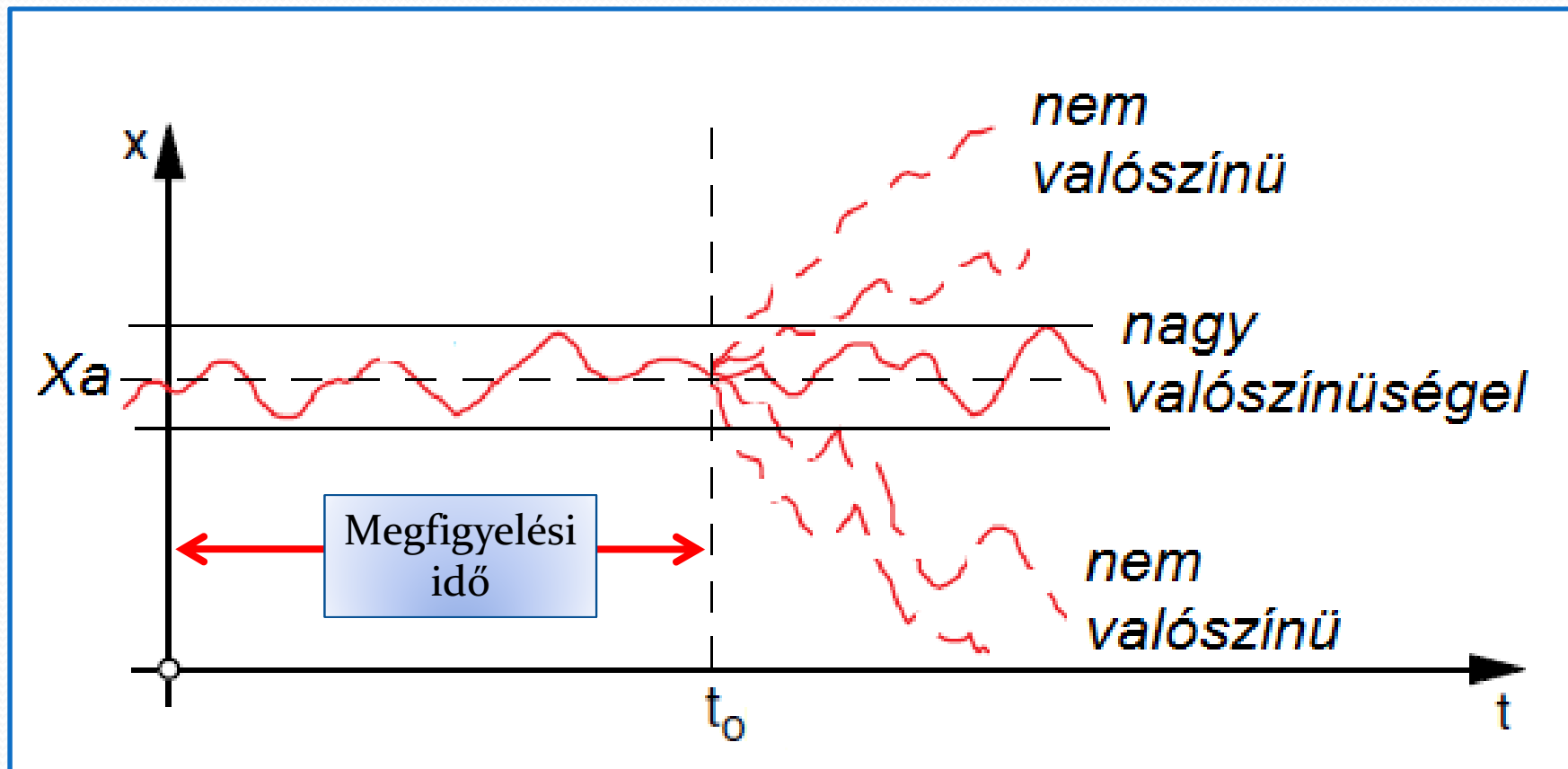
- **determinisztikus jel** - értéke minden időpontban (kielégítő pontossággal) ismert vagy meghatározható.
- **sztochasztikus jel** – pillanatnyi értéke (látszólag) véletlenszerűen változik. Ilyen esetben a jel statisztikus tulajdonságai, például az átlaga (várható értéke, középértéke) használható az elemzésre.

14. Példa – determinisztikus jel

EKG - jelek



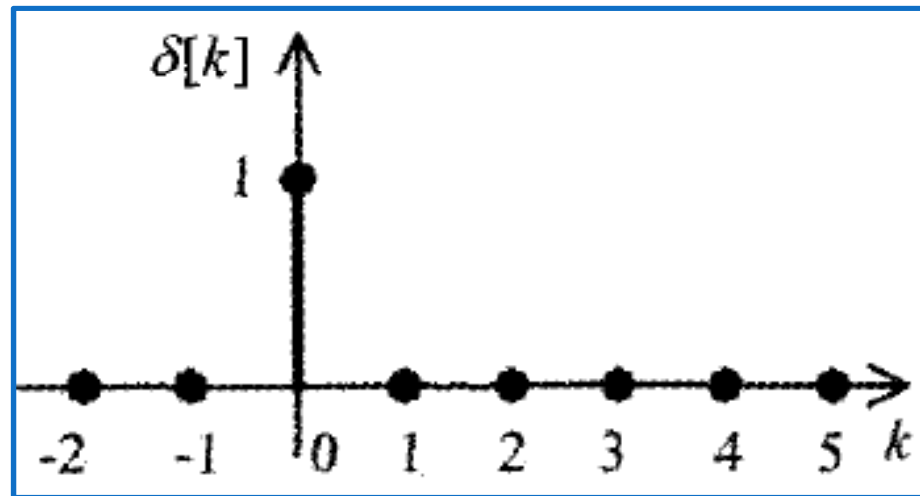
15. Példa – sztochasztikus jelek



16. Diszkrét idejű egységimpulzus

- Képlet : $\delta(k) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \in \mathbb{Z} - \{0\} \end{cases}$

- Grafikus ábrázolás :

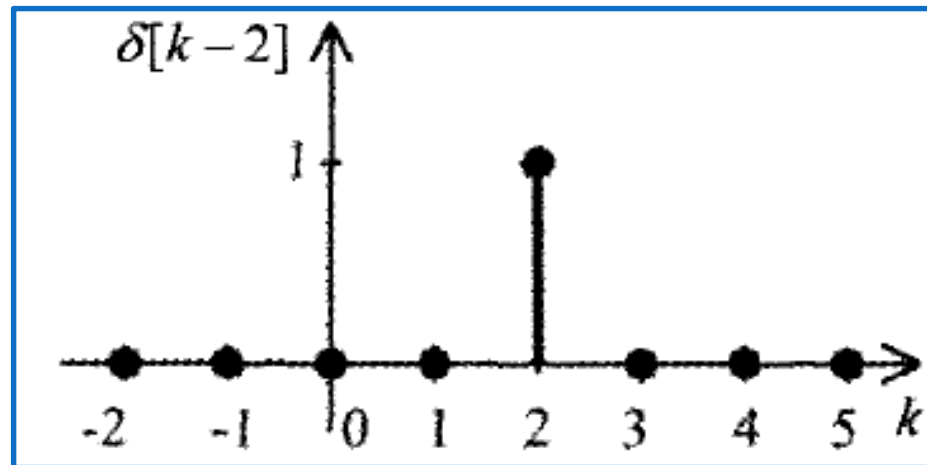


- Fontos tulajdonság : $\forall x(t), x(t) \cdot \delta(k) = x(0)$

17. i ütemmel eltolt egységimpulzus

- Képlet : $\delta(k-i) = \begin{cases} 1, & k = i \\ 0, & k \in \mathbb{Z} - \{i\} \end{cases}$

- Grafikus ábrázolás :

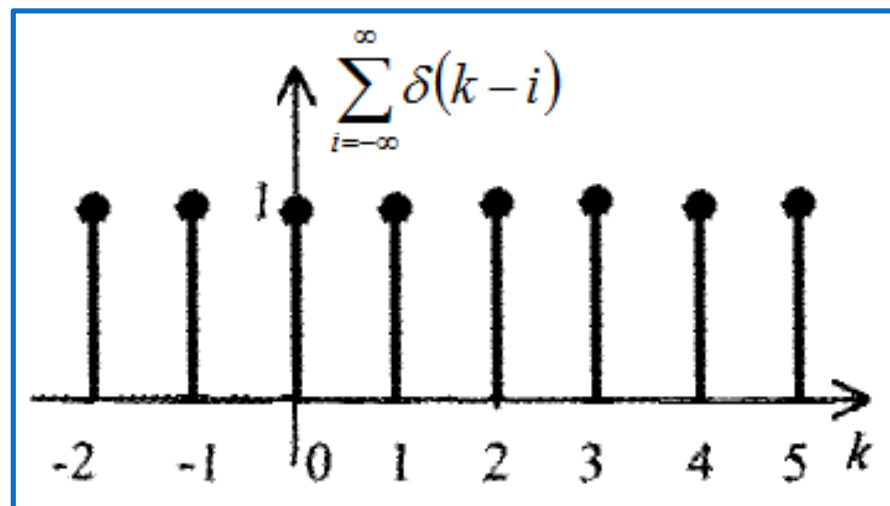


- Fontos tulajdonság : $\forall x(t), x(t) \cdot \delta(k-i) = x(i)$

18. Eltolt egységimpulzusok summája

- Képlet : $\sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(k-i) = 1, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

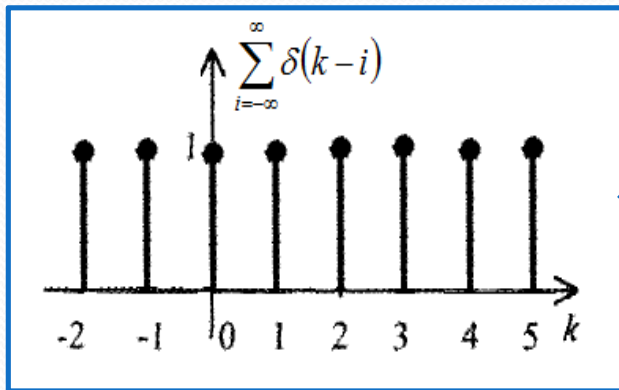
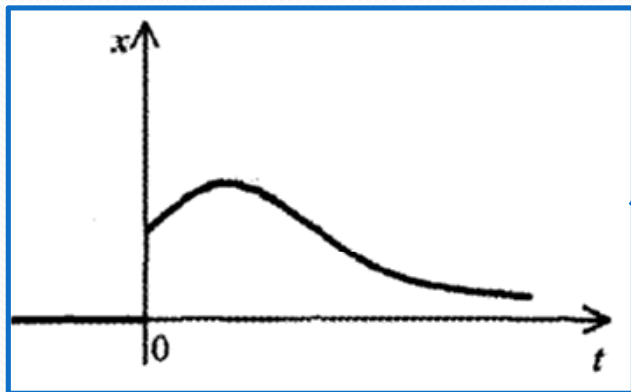
- Grafikus ábrázolás :



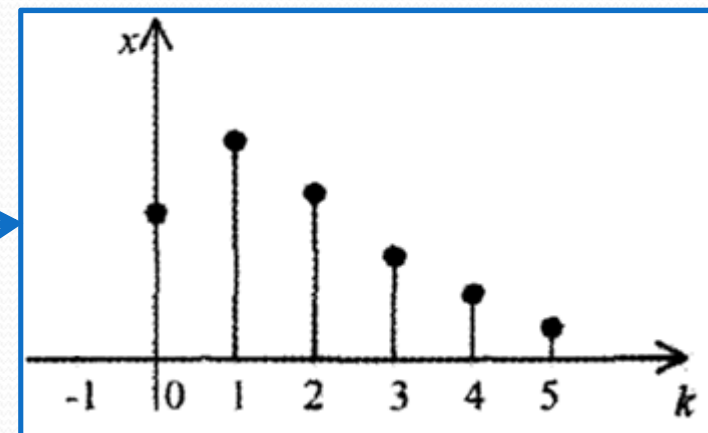
- Fontos tulajdonság : $\forall x(t), \quad x(t) \cdot \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(k-i) = x(k)$

19. Mintavételezés matematikai modellje:

$$x(k) = x(t) \cdot \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(k-i)$$



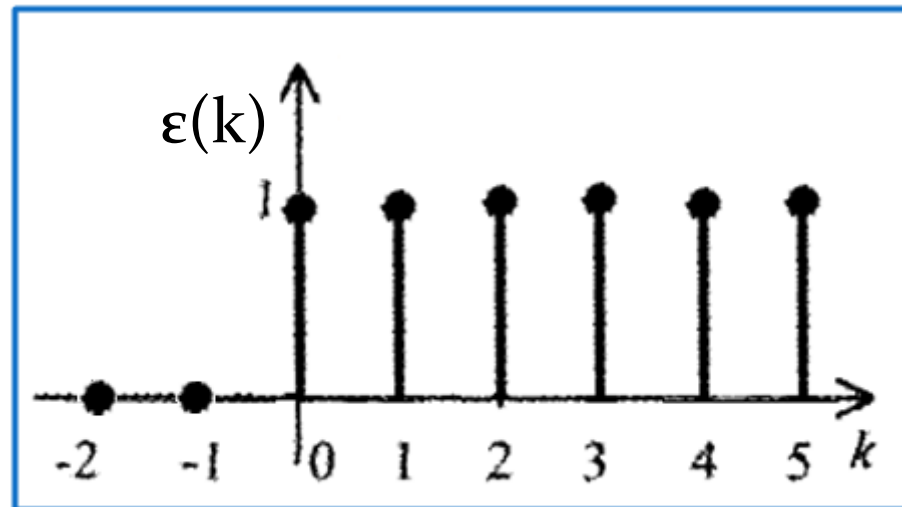
X



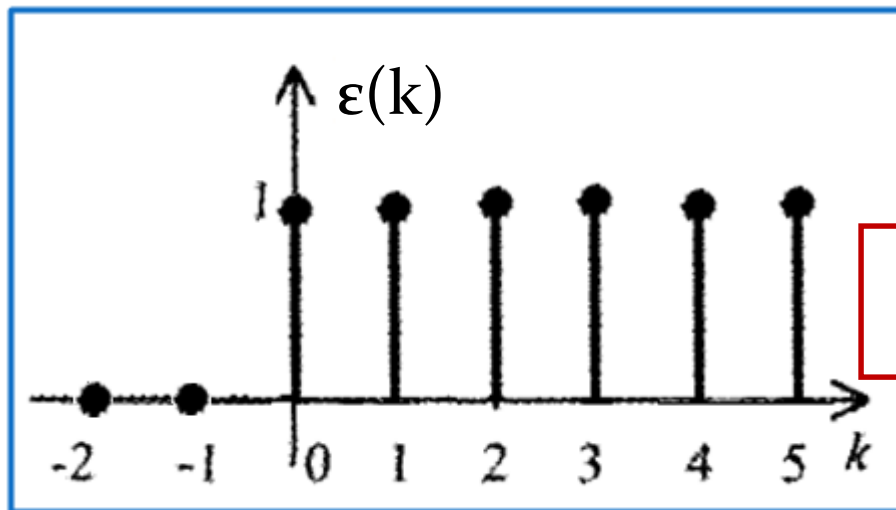
20. Diszkrét idejű egységugrás

- Képlet : $\varepsilon(k) = \begin{cases} 1, & k \in N \\ 0, & k \in Z - N \end{cases}$

- Grafikus ábrázolás :



21. Egységugrás kifejezése egységimpulzussal



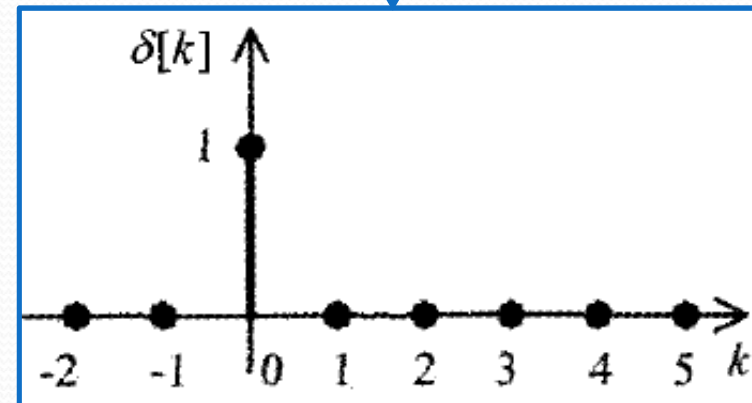
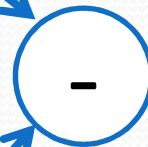
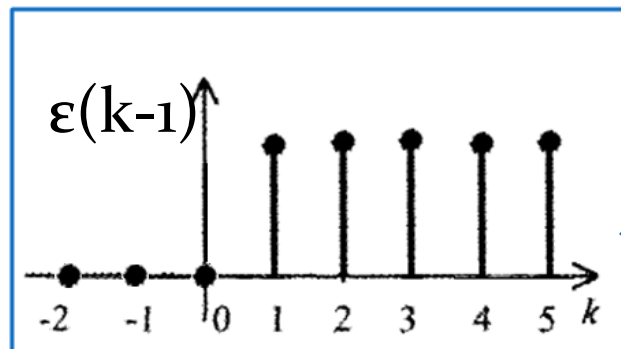
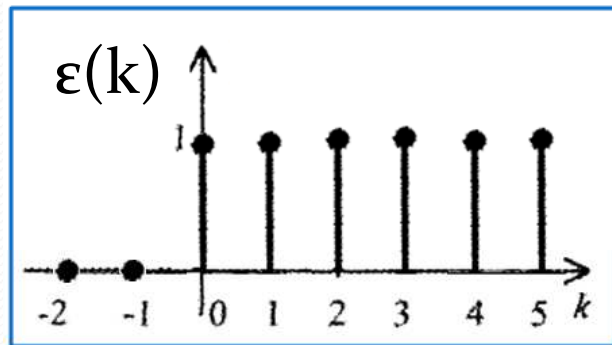
$$\varepsilon(k) = \sum_{i=0}^{\infty} \delta(k - i)$$

22. Egységimpulzus kifejezése egységugrással

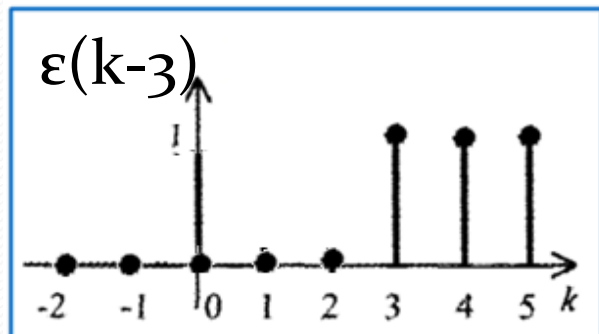
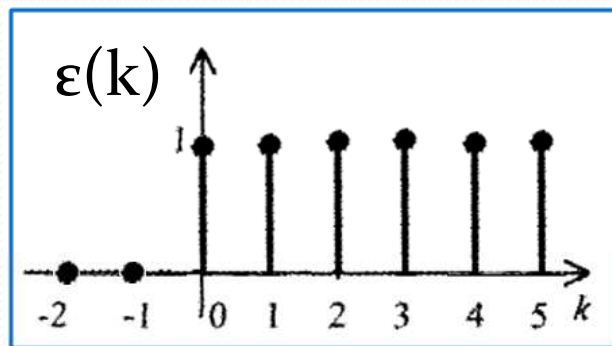
$$\varepsilon(k) = \sum_{i=0}^{\infty} \delta(k-i)$$

$$\varepsilon(k-1) = \sum_{i=1}^{\infty} \delta(k-i)$$

$$\varepsilon(k) - \varepsilon(k-1) = \delta(k)$$

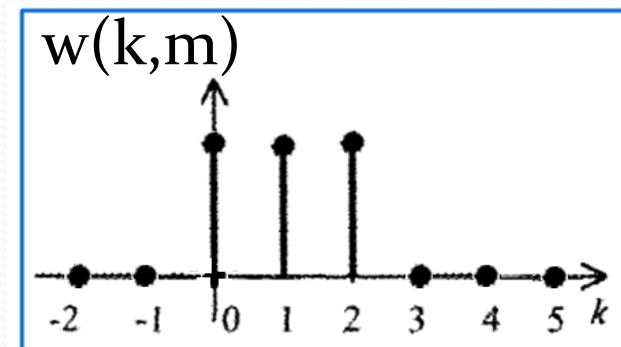
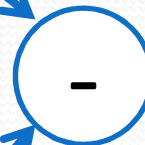


23. A derékszögű ablak



$$w(k, m) = \varepsilon(k) - \varepsilon(k - m)$$

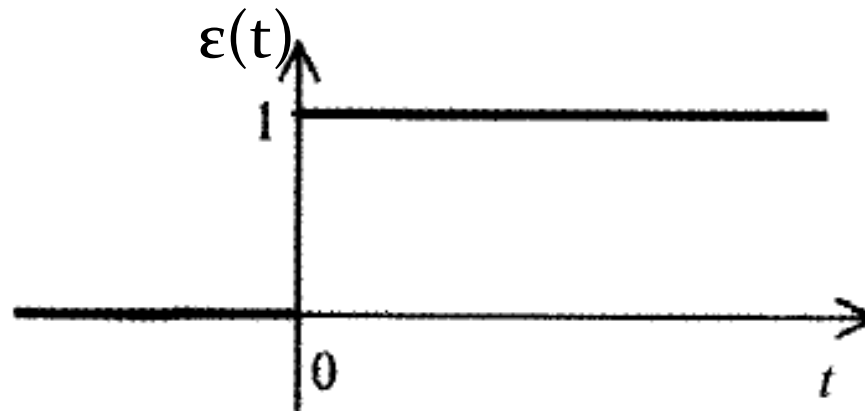
$$w(k, m) = \sum_{i=0}^{m-1} \delta(k - i)$$



24. Folytonos idejű egységugrás

- Képlet : $\varepsilon(t) = \begin{cases} 1, & t \in R_+ \\ 0, & t \in R_- \end{cases}$, $\varepsilon(0)$ – nem definiált !
(mellesleg nem érdekes)

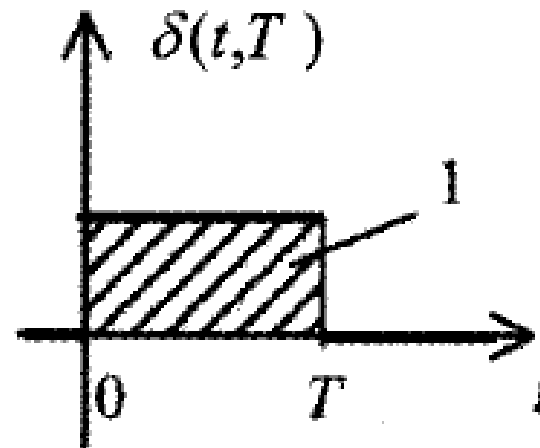
- Grafikus ábrázolás :



25. Négyyszögletes impulzus

- Képlet : $\delta(t, T) = \begin{cases} \frac{1}{T}, & t \in (0, T) \\ 0, & t \notin (0, T) \end{cases}$

- Grafikus ábrázolás :



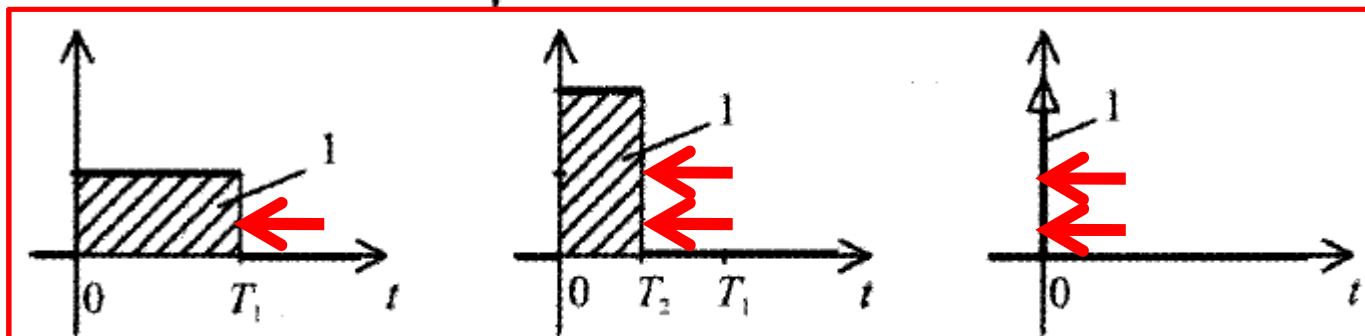
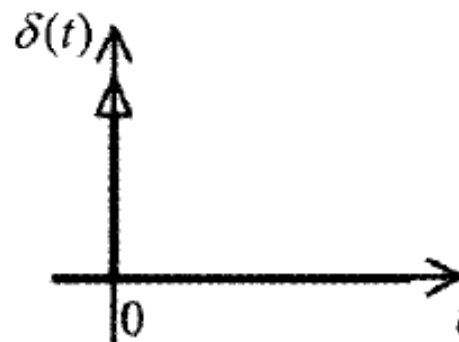
- Az impulzus
intenzitása = 1

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t, T) dt = \int_0^T \frac{1}{T} dt = \frac{1}{T} \int_0^T dt = \frac{1}{T} \cdot T = 1$$

26. Dirac impulzus

- Képlet : $\delta(t) = \lim_{T \rightarrow 0} (\delta(t, T))$

- Grafikus ábrázolás :



27. Jelek néhány osztálya

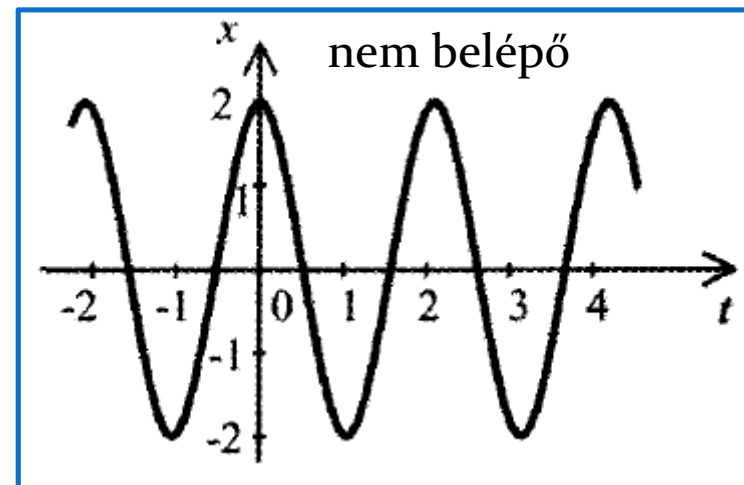
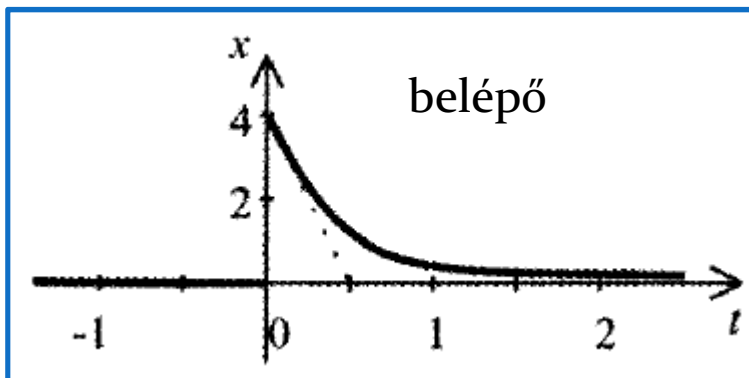
- Belépő és nem belépő jelek
- Páros és páratlan jelek
- Véges tulajdonságú jelek
 - Korlátos jelek
 - Abszolút integrálható jelek
 - Véges energiájú jelek
 - Véges teljesítményű jelek

28. Belépő jelek

- Egy jelet belépő jelnek nevezünk, ha értéke t vagy k negatív értékeire azonosan nulla:

$$x(t) = 0, \forall t < 0$$

- Például:
 - $x(t) = \sin(\omega t)$ nem belépő jel
 - $y(t) = \varepsilon(t) \cdot \sin(\omega t)$ belépő jel



29. Páros és páratlan jelek

- Egy jelet párosnak nevezünk ha szimmetrikus a $t=0$ tengelyre:

$$x(t) = x(-t), \forall t \in R$$

- Egy jelet páratlannak nevezünk ha szimmetrikus az origóra:

$$x(t) = -x(-t), \forall t \in R$$

- Például:

- $x(t) = \sin(\omega t)$ páratlan jel
- $y(t) = \cos(\omega t)$ páros jel

- Bármely x jel egyértelműen felbontható egy x^e páros jel és egy x^o páratlan jel összegére !**

30. Korlátos jelek

- Az x jel korlátos, ha létezik olyan véges M érték, amelyre teljesül:

$$|x(t)| < M, \quad \forall t \in R$$

- Példa: $x = \sin(t)$
- Nem korlátos: $x = t$

31. Abszolút integrálható jelek

- $x(t)$ jel **abszolút integrálható**, ha a jel abszolút értékének integrálja véges:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$$

- $\varepsilon(t)$ – nem abszolút integrálható
- $\delta(t)$ – abszolút integrálható

32. Véges energiájú, véges teljesítményű jelek

- A jel négyzetesen integrálható, más szóval **véges energiájú**, ha:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$$

- Az x jelnek **véges teljesítménye** van, ha:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt < \infty$$

- Ha az energia véges, akkor a teljesítmény nulla.
- Ha a teljesítmény véges, akkor az energia végtelen.

Köszönöm a figyelmet !

