

Alapfogalmak - 2: Rendszerek

Jelek és rendszerek – 2

A múlt heti előadás összefoglalója(1)

- **Jel** - egy változó azon részének matematikai leírása, amely a számunkra lényeges információt hordozza.

- **Példa** –

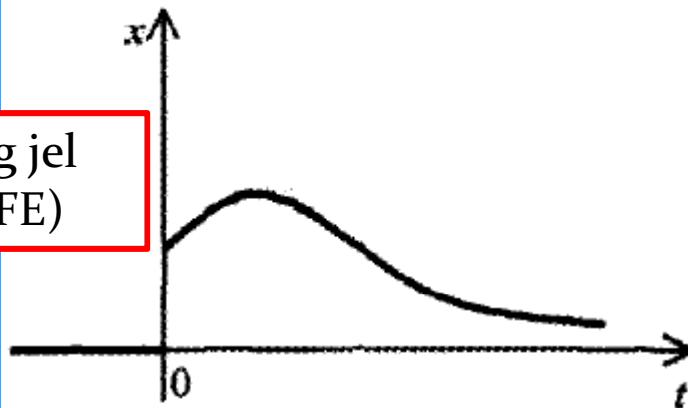
$$u(t, i) = U_{eff}(i) \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t)$$

- **Elképzeltető jelek** -

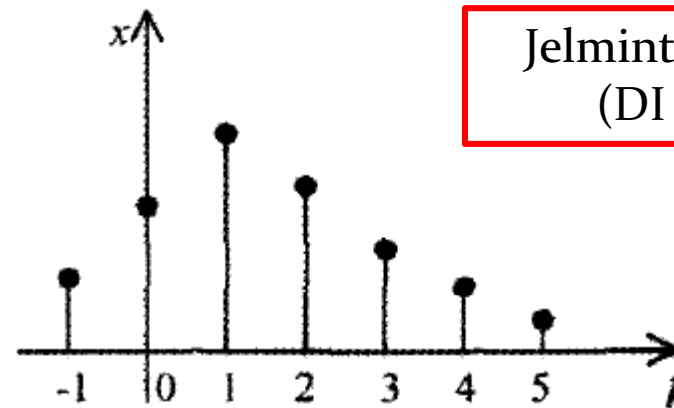
$$\begin{aligned} u(t), t &\in [0, 200ms] \\ U_{eff}(i), i &\in [0, 2000A] \end{aligned}$$

A múlt heti előadás összefoglalója(2)

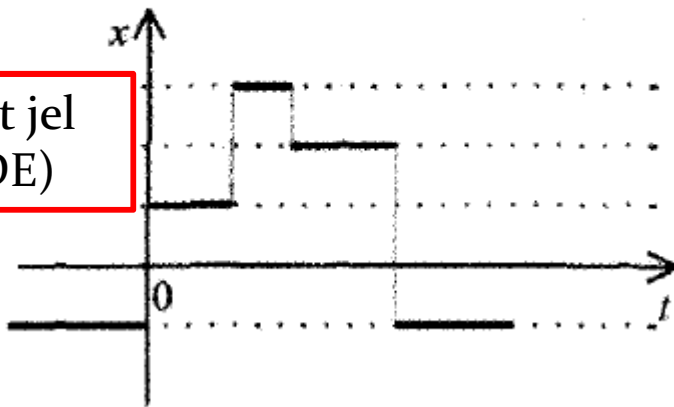
Analóg jel
(FI + FE)



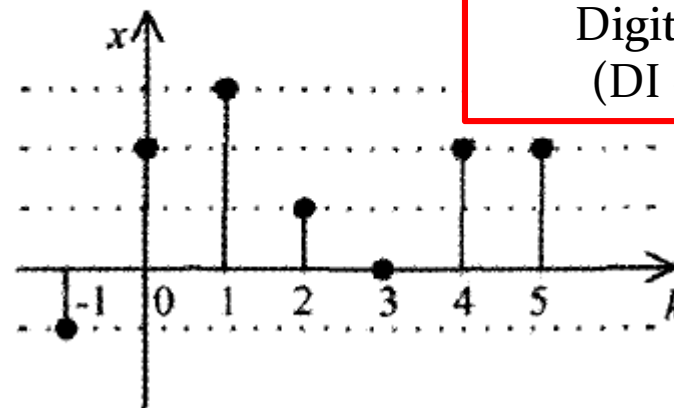
Jelminta sorozat
(DI + FE)



Kvantált jel
(FI + DE)



Digitális jel
(DI + DE)



A múlt heti előadás összefoglalója(3)

- **determinisztikus jel** - értéke minden időpontban meghatározható.
- **sztochasztikus jel** – pillanatnyi értéke véletlenszerűen változik a statisztikus tulajdonságai, meghatározhatók.
- **belépő jel** - értéke t negatív értékeire azonosan nulla.
- **páros jel** - szimmetrikus a $t=0$ tengelyre.
- **páratlan jel** – szimmetrikus az origóra.

A múlt heti előadás összefoglalója (4)

- A jel energiája $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$
- A jel teljesítménye $\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt$

A múlt heti előadás összefoglalója (5)

- Diszkrét idejű egységimpulzus $\delta(k) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \in \mathbb{Z} - \{0\} \end{cases}$
- Dirac impulzus $\delta(t) = \lim_{T \rightarrow 0} (\delta(t, T))$
- Diszkrét idejű egységugrás $\varepsilon(k) = \begin{cases} 1, & k \in \mathbb{N} \\ 0, & k \in \mathbb{Z} - \mathbb{N} \end{cases}$
- Folytonos idejű egységugrás $\varepsilon(t) = \begin{cases} 1, & t \in \mathbb{R}_+ \\ 0, & t \in \mathbb{R}_- \end{cases}$

Az előadás tematikája

Ebben az előadásban a rendszerekről lesz szó.

1. A rendszer fogalma
2. Rendszerek osztályozása
 - Lineáris rendszerek
 - Invariáns rendszerek
 - Kauzális rendszerek
 - Stabilis rendszerek
 - Memóriamentes rendszerek

1. A rendszer fogalma(1)

- **Rendszer = Célt megvalósító rendezett egész.**
- A fizikai világban megjeleníthető vagy ott hatás kifejtésére képes bármilyen rendezett egész, ami egy célt vagy feladatot lát el.
- Ez valamilyen szerkezetből áll, olyan részek felépítéséből, amelyek szintén megvalósítanak - az egész céljához illeszkedő módon - kisebb célokat.

2. A rendszer fogalma(2)

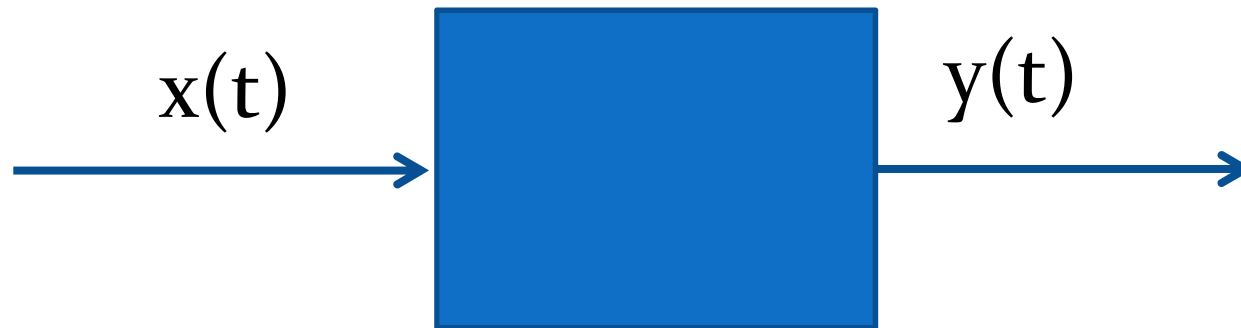
- **Rendszer** = egy fizikai objektum modellje, amely változókkal leírható.
- Egyes változó adotttnak tekinthető: ezek a **gerjesztések** (bemenetek, „inputok”).
- Mások viselkedését meg akarjuk határozni: ezek a **válaszok** (kimenetek, „outputok”).
- Minden fizikai változót az ahhoz rendelt jellel, az objektumot egy rendszerrel írjuk le.

3. A rendszer fogalma (3)

- Elméleti szempontból a rendszer egy **transzformáció**, amely adottnak tekintett gerjesztésekhez meghatározott válaszokat rendel.
- **gerjesztés-válasz kapcsolat**, $y = W(x)$
- **egy-gerjesztésű, egy-válaszú** rendszer általános rajzele.

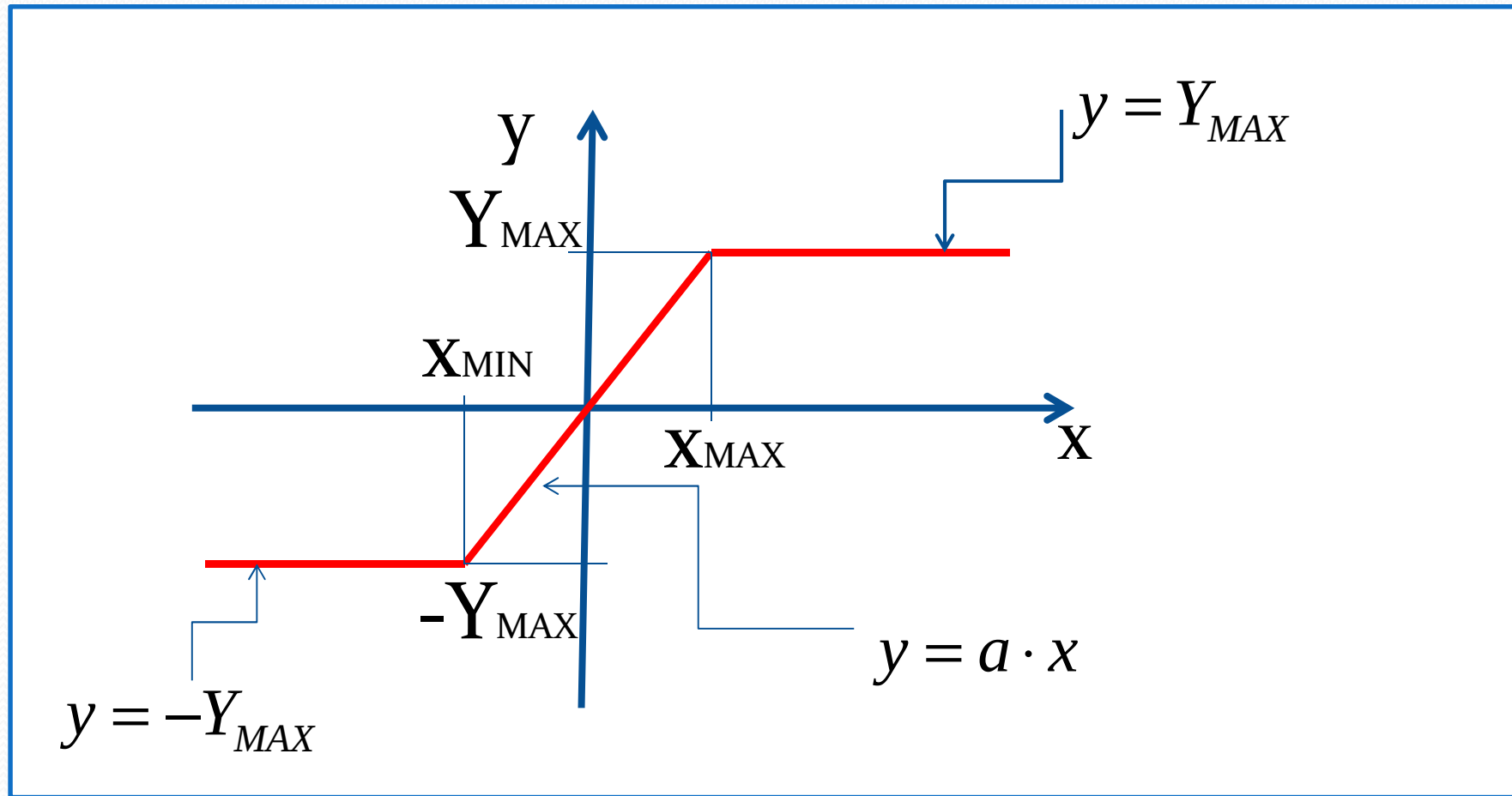


4. Példa – erősítő(1)



$$y = \begin{cases} Y_{MAX}, & x \geq X_{MAX} \\ a \cdot x, & X_{MIN} < x < X_{MAX} \\ -Y_{MAX}, & x \leq X_{MIN} \end{cases}$$

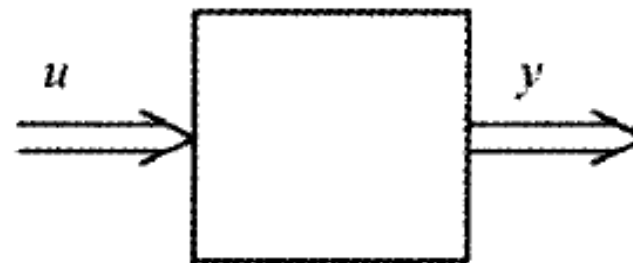
5. Példa – erősítő(2)



6. Sok-gerjesztésű, sok-válaszú rendszer



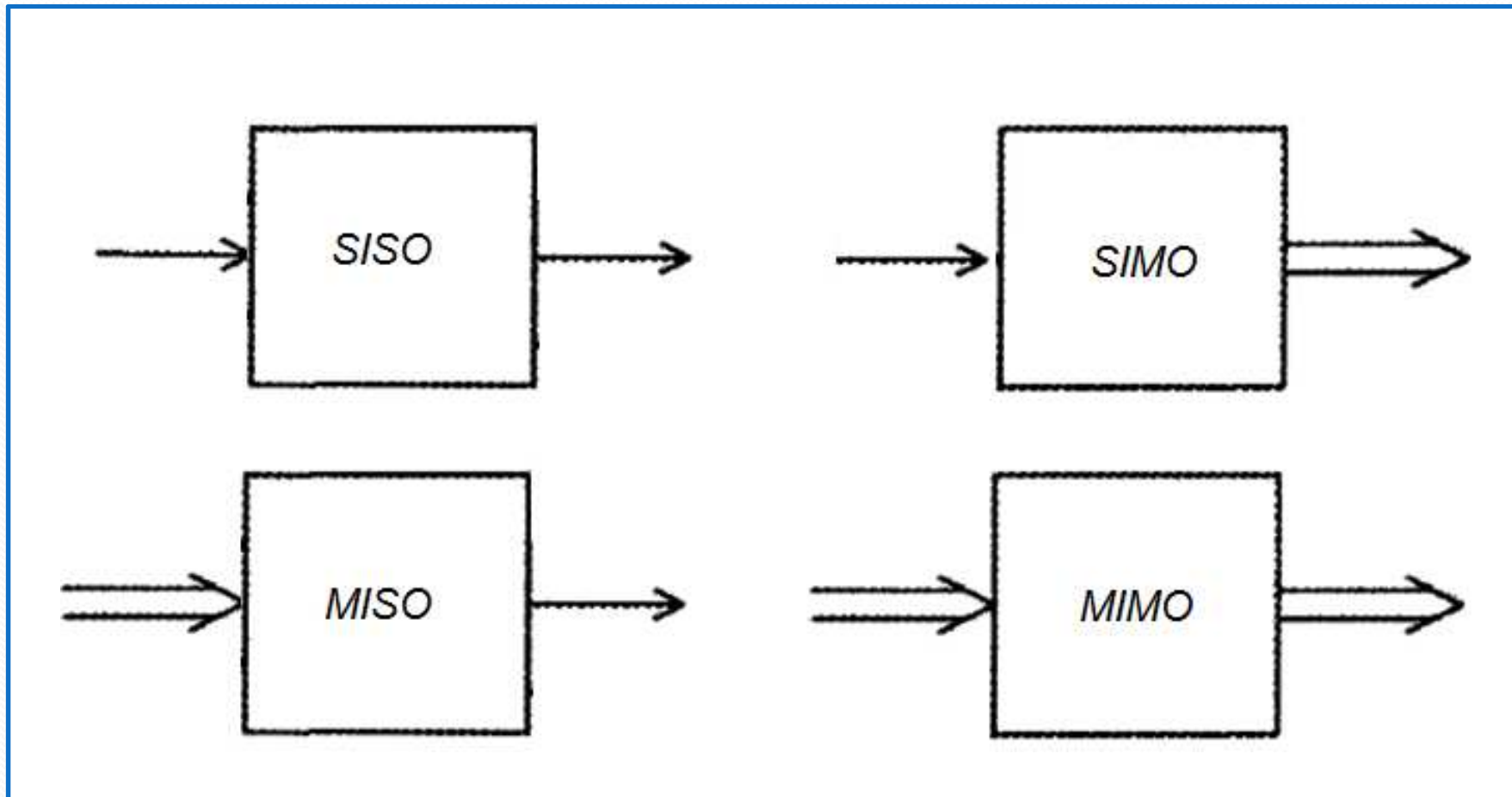
Két gerjesztés, három válasz



Általános rajzjel

$$y_i = W\{x_1, x_2, \dots, x_N\}, \quad i = 1, 2, \dots, M$$

7. SISO, SIMO, MISO, MIMO



8. Feladat (1)

Egy FI rendszer gerjesztés-válasz kapcsolata

$$y(t) = b(t) \cdot u(t) + c(t)$$

Itt $b(t)$ és $c(t)$ adott jelek.

a). Fejezze ki az $y(t)$ jelet, ha $u(t) = \varepsilon(t)$ illetve ha

b). $u(t) = \delta(t)$

c). Egy- gerjesztésű és egy-válaszú ez a rendszer?

9. Megoldás (1)

a).

$$y(t) = a(t) \cdot \varepsilon(t) + b(t)$$

$\Downarrow$

$$y(t) = \begin{cases} b(t), & t < 0 \\ a(t) + b(t), & t > 0 \end{cases}$$

b).

$$y(t) = a(t) \cdot \delta(t) + b(t)$$

$\Downarrow$

$$y(t) = \begin{cases} b(t), & t \neq 0 \\ a(0) + b(t), & t = 0 \end{cases}$$

c). A rendszernek három bemenete (a, b, u) és egy kimenete (y) van. MISO tehát nem SISO.

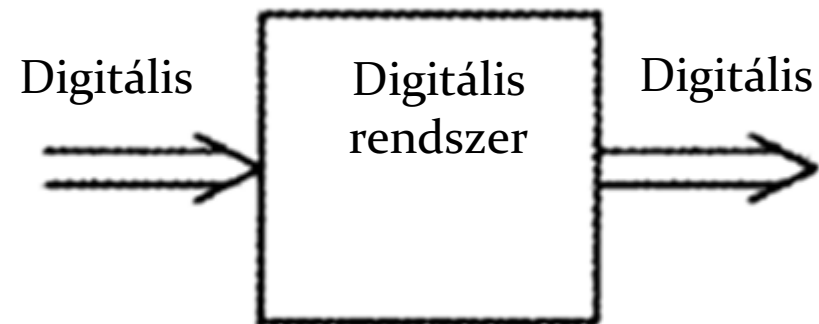
10. Analóg rendszer



- A gerjesztés és a válasz egyaránt analóg jelek
- Egy SISO rendszert ábrázoltam de minden más változat is lehetséges:
 - SIMO (például antenna elosztó erősítő)
 - MISO (például hangfrekvenciás keverő erősítő)
 - MIMO (például EEG - rendszer)

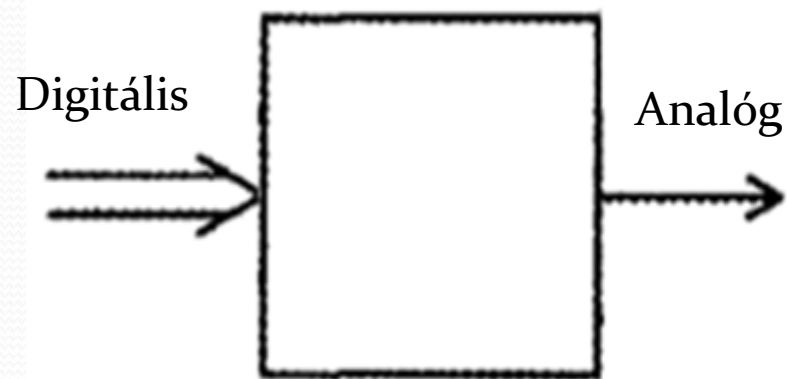
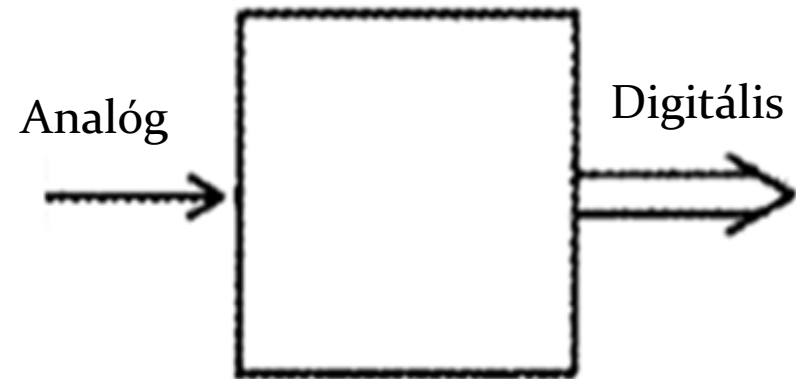
11. Digitális rendszer

- A gerjesztés és a válasz egyaránt digitális jelek
 1. MIMO ha minden bemeneti és kimeneti bit-et külön jelnek tekintjük
 2. Ha viszont a bitek által kódolt számérték a jel akkor lehet:
 - SISO
 - MISO
 - SIMO



12. Vegyes jelű rendszerek

A gerjesztés és a válasz
közül az egyik digitális
a másik analóg jel



- Példák:
 - Analóg digitális konverter
 - Digitális-analóg konverter

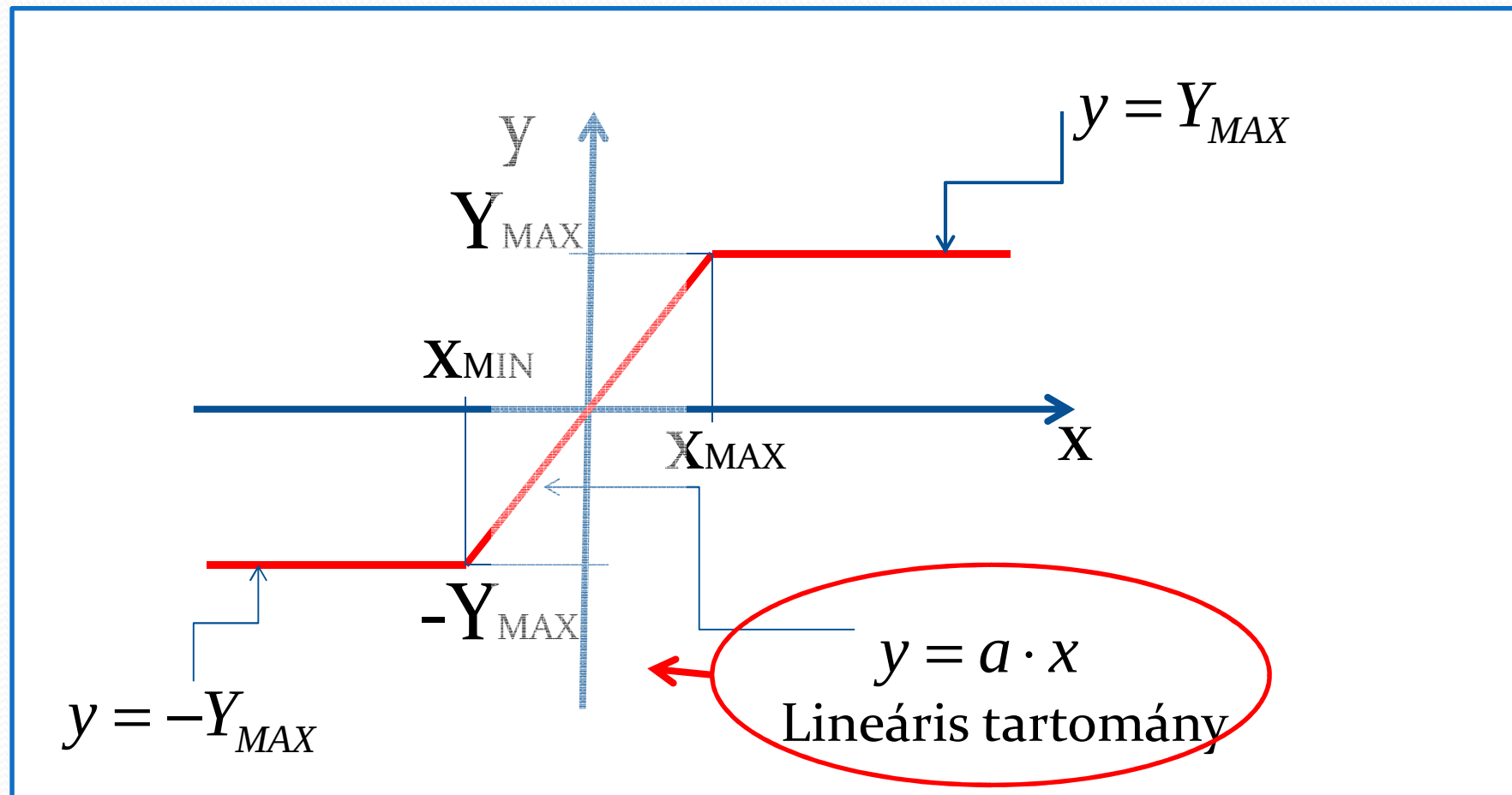
13. Lineáris rendszerek

- Egy rendszer akkor lineáris, ha a rendszerre érvényes a szuperpozíció elve.

$$W\{A \cdot x + B \cdot y\} = A \cdot W\{x\} + B \cdot W\{y\}$$

- Fizikai objektumok sohasem lineárisak.
- Ha a gerjesztés, a válasz vagy más változó túlságosan nagyra válik, akkor mindig fellépnek nemlineáris hatások.
- Eléggé „kis” változásokra a legtöbb objektum lineáris rendszerrel jól leírható.

14. Példa – nemlineáris rendszer



15. Feladat (2)

- $y = a \cdot x + b$. Lineáris ez a rendszer?

$$y(x_1) = a \cdot x_1 + b$$

$$y(C \cdot x_1) = a \cdot C \cdot x_1 + b$$

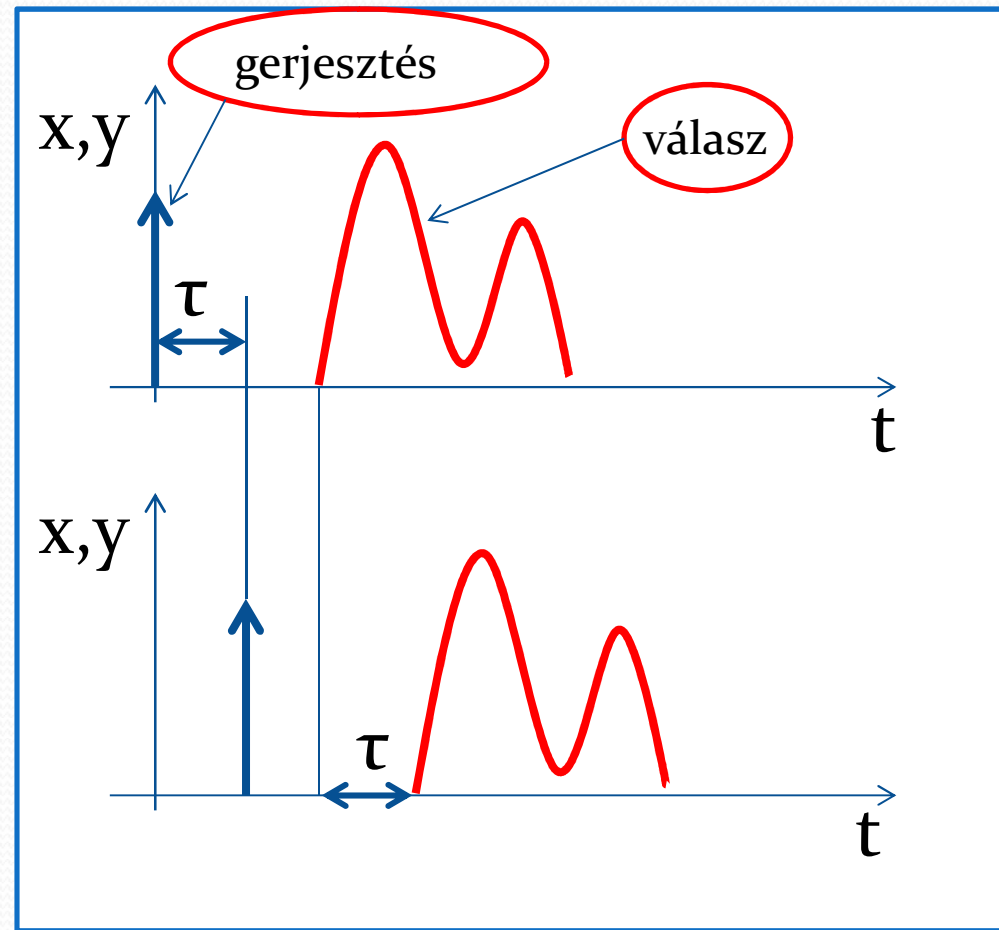
$$C \cdot y(x_1) = C \cdot a \cdot x_1 + C \cdot b$$

$$y(C \cdot x_1) \neq C \cdot y(x_1)$$

- Nem!

16. Invariáns rendszerek

Egy rendszer akkor **invariáns**, ha a gerjesztés **időbeli eltolása** csak egy ugyanekkora időbeli eltolást okoz a válaszban.



17. Invariáns rendszerek (2)

- Fizikai objektumok **sohasem invariánsak** az öregedés, a hőmérséklet-ingadozás és hasonló hatások következtében.
- Ennek ellenére az objektum invariáns modellje sokszor **jól használható** közelítést jelent ha „**rövid**” időtartamok vizsgálatára szorítkozunk.

18. Lineáris és invariáns rendszerek

- Eléggé „kis” változásokra a legtöbb objektum lineáris rendszerrel jól leírható.
- Eléggé „rövid” időtartamok esetében az objektum invariáns modellje jól használható.
- A továbbiakban lineáris, invariáns rendszerekkel (**LTI Systems**) fogunk foglalkozni.
- LTI rendszerek esetében jól kidolgozott számítási módszerek álnak rendelkezésre.

19. Kauzális rendszer

- **Kauzális rendszer** - a válasz nem függ gerjesztésének jövőbeli értékeitől.
- Egy **lineáris rendszer** akkor és csakis akkor kauzális, ha bármely **belépő gerjesztéshez belépő válasz** tartozik.
- Fizikai objektumok mindig kauzálisak.
- Nem kauzális rendszer, fizikai objektummal **nem realizálható**.

20. Stabilis rendszerek

- Bonyolult fogalom: nemlineáris rendszerekre nehéz a stabilitást értelmezni.
- Egy lineáris, invariáns rendszer akkor és csakis akkor gerjesztés-válasz stabilis (GV stabilis), ha bármely **korlátos gerjesztéshez korlátos válasz tartozik.**
- BIBO - „bounded input implies bounded output”

21. GV labilis rendszerek

- A nem GV stabilis rendszer a **stabilitás határhelyzetében van**, ha bármely véges ideig tartó gerjesztéshez **korlátos válasz tartozik**.
- A **GV labilis rendszer** olyan nem GV stabilis rendszer, amely nincs a GV stabilitás határhelyzetében.

22. Példa – az integrátor

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) \cdot d\tau$$

- **Nem stabilis!**
- $x=\varepsilon(t)$ korlátos gerjesztés esetén
- $y=t$ korlátlan válasz
- **Nem Labilis!**
- Ha t véges ($t_{\max}$) y korlátos ($t_{\max}+1$)
- **A stabilitás határhelyzetében van.**

23. Memória mentes rendszerek

- Memóriamentes rendszer - a válasza t időpontban csak a gerjesztésnek ugyanezen t időpontbeli értékétől függ. Ellenkező esetben a rendszer dinamikus (nem-memóriamentes).
- A memóriamentes rendszer a valóságban ritkaság.
- Példák:
 - Visszacsatolás nélküli erősítő
 - Összegező áramkör
 - Multiplikátor

24. Dinamikus (nem-memóriamentes) rendszerek

- A dinamikus rendszer:
 - **Véges memóriájú** ha $y(t_1)$ válasz csakis a gerjesztés $[t_1-T, t_1]$ időintervallumbeli értékeitől függ.

- Példa

$$y = \int_{t-2}^t x(\tau) \cdot d\tau$$

- **Végtelen memóriájú** ha $y(t_1)$ válasz a gerjesztés minden **múlt** értékétől függ.

- Példa

$$y = \int_{-\infty}^t x(\tau) \cdot d\tau$$

Köszönöm a figyelmet !

