

Analízis az időtartományban : Impulzusválasz

Jelek és rendszerek – 3

A múlt előadás összefoglalása

- **Rendszer** = egy fizikai objektum modellje, amely változókkal leírható.
- $\mathbf{x}(t)$ = gerjesztés, bemeneti jel



- $\mathbf{y}(t)$ = válasz, kimeneti jel
- $\mathbf{W}(\mathbf{x})$ = gerjesztés-válasz kapcsolat, $\mathbf{y} = \mathbf{W}(\mathbf{x})$

A múlt előadás összefoglalása (2)

- *Lineáris rendszer* = érvényes a szuperpozíció elve.

$$W \{A \cdot x + B \cdot y\} = A \cdot W \{x\} + B \cdot W \{y\}$$

- *Invariáns rendszer* = a gerjesztés időbeli eltolása csak egy ugyanekkora időbeli eltolást okoz a válaszban.

$$W \{x(t)\} = y(t) \Rightarrow W \{x(t - \tau)\} = y(t - \tau)$$

A múlt előadás összefoglalása (3)

- **Kauzális rendszer** - a válasz nem függ gerjesztésének jövőbeli értékeitől.
- **Gerjesztés-válasz stabilis** - bármely korlátos gerjesztéshez korlátos válasz tartozik.
- **Memóriamentes rendszer** - a válasza t_1 időpontban csak a gerjesztésnek ugyanezen t_1 időpontbeli értékétől függ.
- **Véges memóriájú rendszer** - a válasza t_1 időpontban a gerjesztés $[t_1-T, t_1]$ időintervallumbeli értékeitől függ.
- **Végtelen memóriájú rendszer** - a válasza t_1 időpontban a gerjesztés összes eddigi értékétől függ.



Az előadás tematikája

Ebben az előadásban az impulzusválaszról lesz szó.

1. A lineáris rendszer DI és FI impulzusválasza.
2. A válasz számítása.
3. Gerjesztés-válasz stabilitás vizsgálata az impulzusválasz alapján.
4. Feladatok – megoldások.

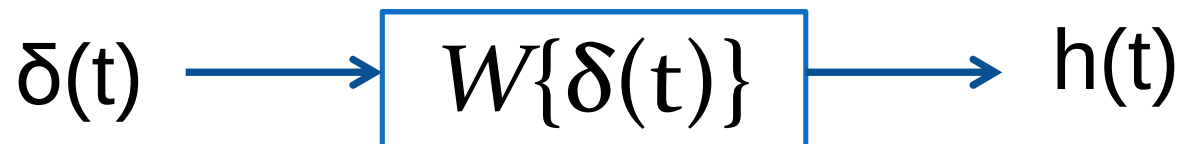
Impulzusválasz

- Egy LTI rendszer válaszát meg tudjuk határozni, ha ismerjük bármely konkrét x_1 gerjesztéshez tartozó y_1 válaszát.
- A legelterjedtebb gerjesztés az egységimpulzus.
- Az ehhez tartozó válasz az impulzusválasz.

- DI:



- FI:





Impulzusválasz (2)

- Az impulzusválaszt *súlyfüggvénynek* is nevezzük.
- Egy kauzális rendszer:
 1. **FIR** típusú, („Finite Impulse Response”) vagy **véges impulzusválaszú** rendszernek nevezünk, ha az impulzusválasza azonosan nulla egy idő után.
 2. **IIR** típusú, („Infinite Impulse Response”) vagy **végtelen impulzusválaszú** rendszernek nevezünk, ha az impulzusválasza a végtelenségig tart.
- Egy **véges impulzusválaszú** rendszer feltétlenül **GV stabilis**.



A rendszerválasz számítása

- Az LTI rendszerek esetében, az impulzusválasz alapján meghatározható a rendszerválasz egy tetszőleges gerjesztés esetében.

- DI:
$$y[k] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i] \cdot h[k-i]$$

- FI:
$$y[t] = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h(t-\tau) \cdot d\tau$$

DI rendszerválasz levezetése

$$x[k] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i] \cdot \delta[k-i]$$

Lásd a DI egységimpulzus tulajdonságait

$$y[k] = W\{x[k]\} = W\left\{\sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i] \cdot \delta[k-i]\right\}$$

Szuperpozíció elve, csakis lineáris rendszereknél működik

$$W\left\{\sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i] \cdot \delta[k-i]\right\} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} W\{x[i] \cdot \delta[k-i]\} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i] \cdot W\{\delta[k-i]\}$$

$$W\{\delta[k-i]\} = h[k-i]$$

Invariáns rendszerekre érvényes

$$y[k] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i] \cdot h[k-i]$$

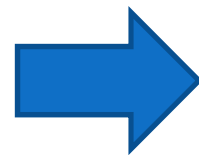
FI rendszerválasz – analógia alapján

$$y[k] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i] \cdot h[k-i]$$

$$k \rightarrow t$$

$$i \rightarrow \tau$$

$$\sum \rightarrow \int$$



$$y[t] = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h[t-\tau]$$

Konvolúció

$$y[t] = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h[t - \tau]$$

- Ezt a $x(t)$ és $h(t)$ jelek konvolúciójának nevezik.
-
- A FI konvolúció szimbolikus alakja:

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

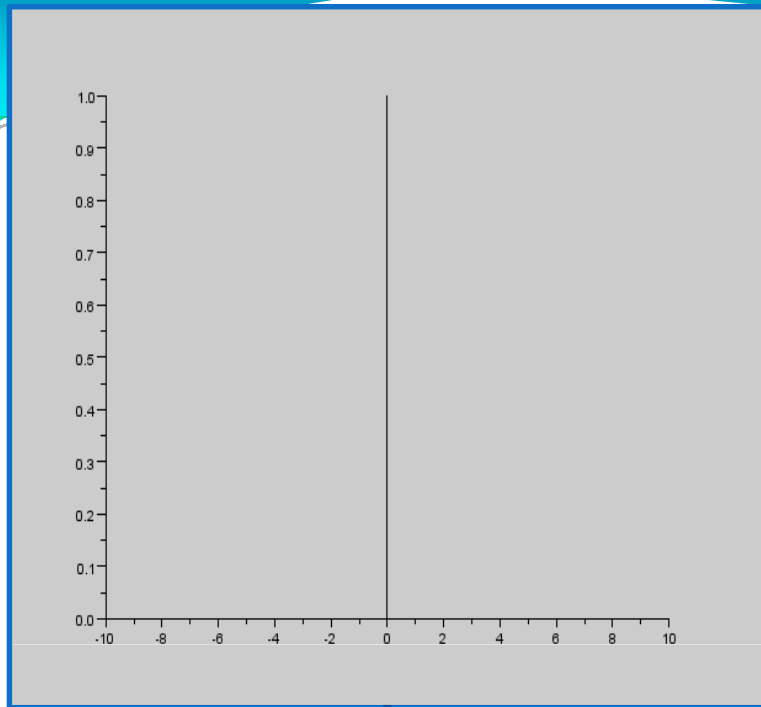
Példa (DI impulzusválasz számítása)

- Egy DI rendszer impulzusválasza:

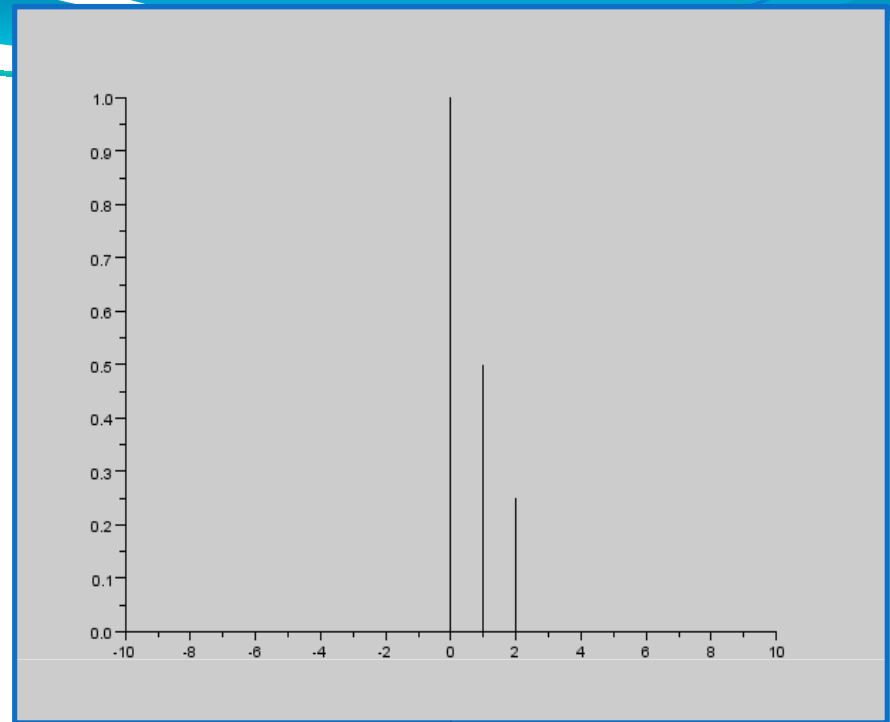
$$h(k) = \begin{cases} 2^{-k}, & k = 0, 1, 2 \\ 0 & k \in \mathbb{Z} - \{0, 1, 2\} \end{cases}$$

- Határozzuk meg a rendszer válaszát, ha gerjesztése:

$$x(k) = \begin{cases} 2^k, & k = 0, 1, 2 \\ 0 & k \in \mathbb{Z} - \{0, 1, 2\} \end{cases}$$

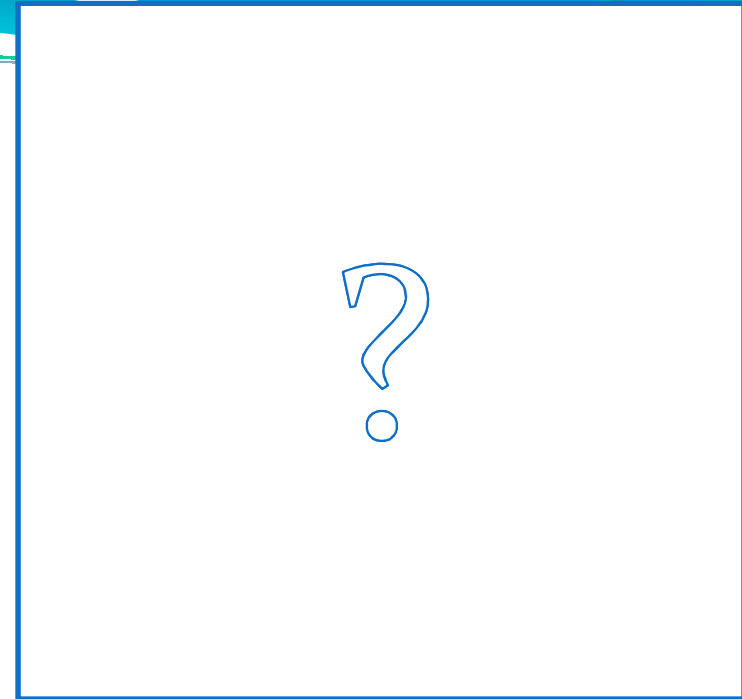
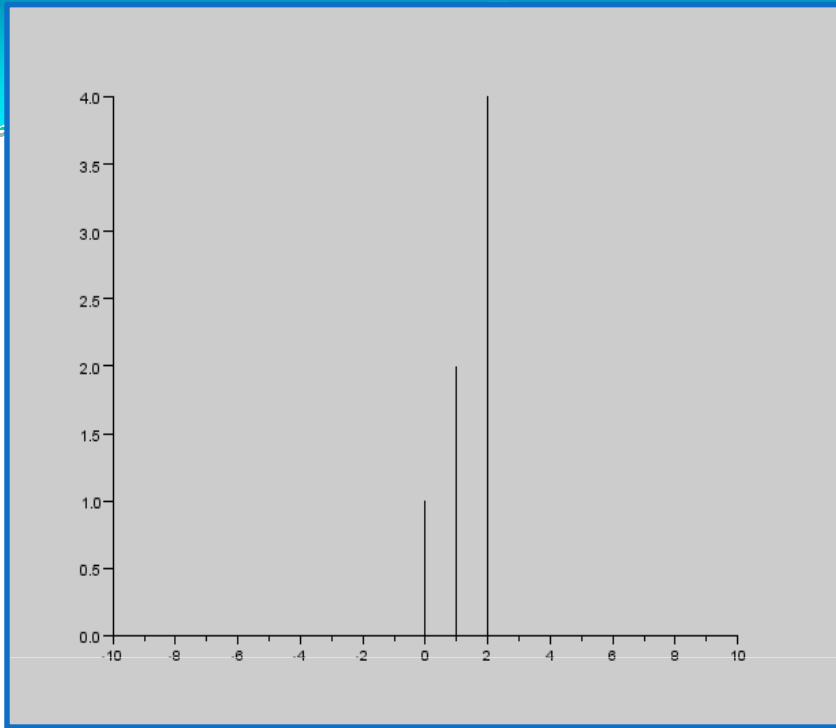


1, 0, 0, 0, 0, ...

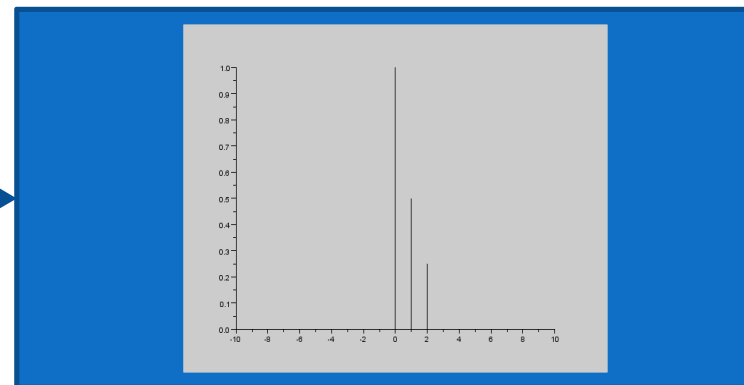


1, 1/2, 1/4, 0, 0, ...

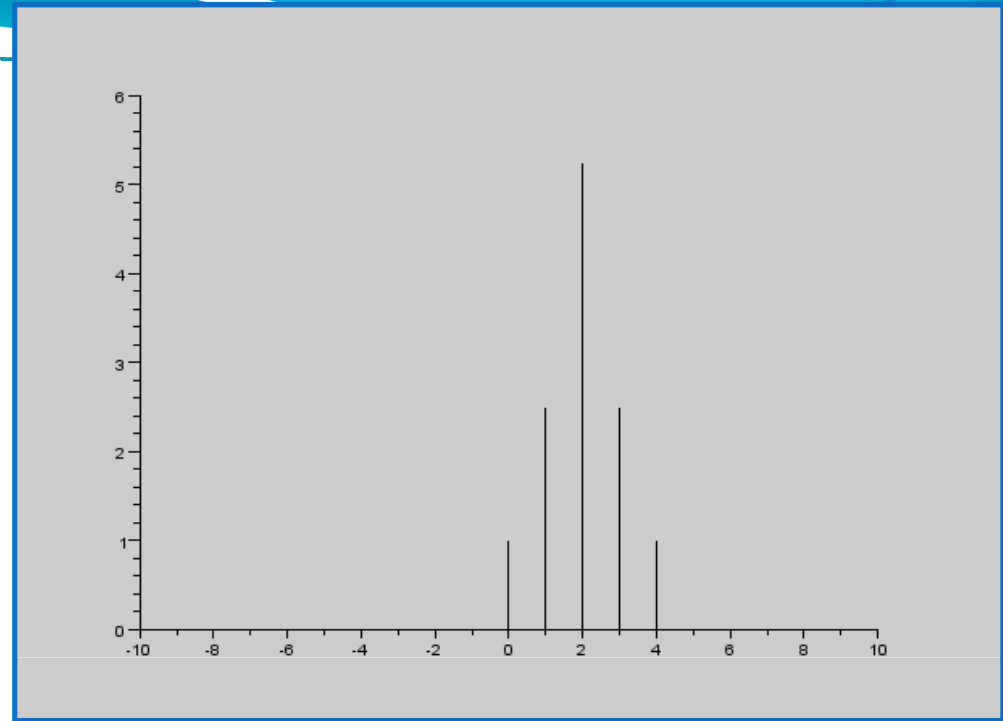
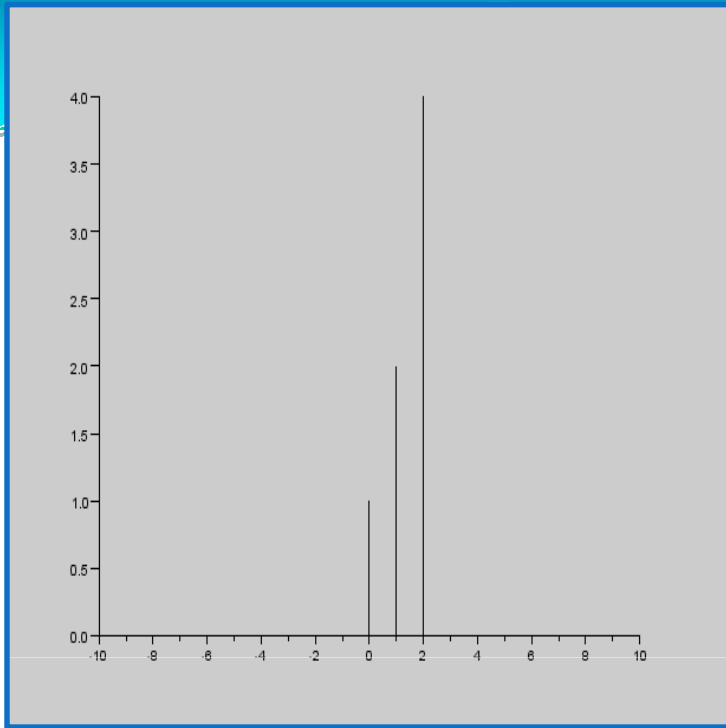




1, 2, 4, 0, 0, ...



?, ?, ?, ?, ?, ...



1, 2, 4, 0, 0, ...

$$y = \text{convol}(h, x)$$

1, 2.5, 5.25, 2.5, 1, 0, 0, ...

- SCILAB→Applications→SciNotes:

```
k=-10:10  
delta=zeros(1,21)  
delta(11)=1  
figure(1)  
plot2d3(k,delta)
```

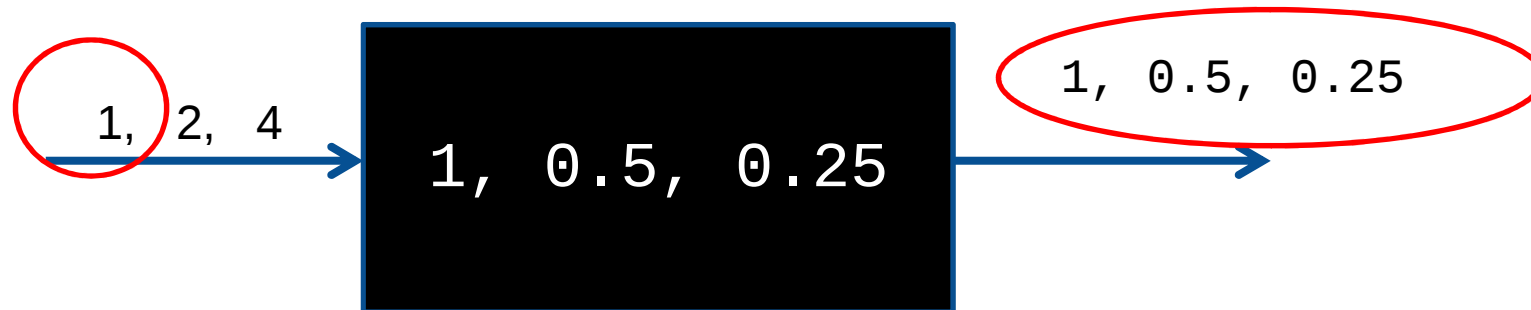
```
h=delta  
for i=11:13  
    h(i)=2^-(i-11)  
end  
figure(2)  
plot2d3(k,h)
```

```
x=delta  
for i=11:13  
    x(i)=2^(i-11)  
end  
figure(3)  
plot2d3(k,x)
```

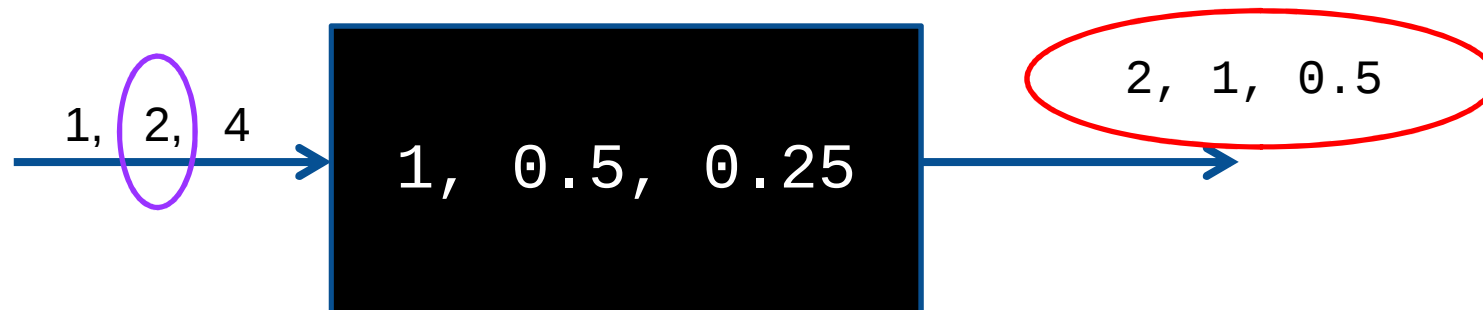
```
y=convol(h,x)  
y=y(11:31)  
figure(4)  
plot2d3(k,y)
```

Kézi számítás

- Az első három ütem (1-3):



- A második ütemtől a negyedikig (2-4):



Kézi számítás

- A harmadik ütemtől az ötödikig:



- Összegezzünk:



Kézi számítás

A definíció alkalmazása



$$y[k] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i] \cdot h[k-i]$$

$$y[0] = \sum_{i=0}^2 x[i] \cdot h[0-i] = x[0] \cdot h[0] + x[1] \cdot h[-1] + x[2] \cdot h[-2] = 1$$

$$y[1] = \sum_{i=0}^2 x[i] \cdot h[1-i] = x[0] \cdot h[1] + x[1] \cdot h[0] + x[2] \cdot h[-1] = 2.5$$

$$y[2] = \sum_{i=0}^2 x[i] \cdot h[2-i] = x[0] \cdot h[2] + x[1] \cdot h[1] + x[2] \cdot h[0] = 5.25$$

$$y[3] = \sum_{i=0}^2 x[i] \cdot h[3-i] = x[0] \cdot h[3] + x[1] \cdot h[2] + x[2] \cdot h[1] = 2.5$$

$$y[4] = \sum_{i=0}^2 x[i] \cdot h[4-i] = x[0] \cdot h[4] + x[1] \cdot h[3] + x[2] \cdot h[2] = 1$$



Gerjesztés-válasz stabilitás

- A múlt előadásban már megadtuk a gerjesztés-válasz (GV) stabilitás definícióját.
- Az impulzusválasz ismeretében adhatunk jobban használható feltételt is.
- A lineáris, invariáns rendszer akkor és csak akkor *GV stabilis ha impulzusválasza abszolút integrálható*:

$$DI : \sum_{-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty \qquad FI : \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$$



Gerjesztés-válasz stabilitás

- Ennek egy szükséges (és a gyakorlati esetek többségében elegendő) feltétele

$$DI : \quad k \rightarrow \infty \Rightarrow h[k] \rightarrow 0$$

$$FI : \quad t \rightarrow \infty \Rightarrow h(t) \rightarrow 0$$

Az ugrásválasz

- Az ugrásválasz a rendszernek az egységugrás gerjesztésre adott válasza.



- Természetesen, LTI rendszerek esetében, az impulzus válasz alapján is meghatározható.

DI LTI rendszer ugrásválasza

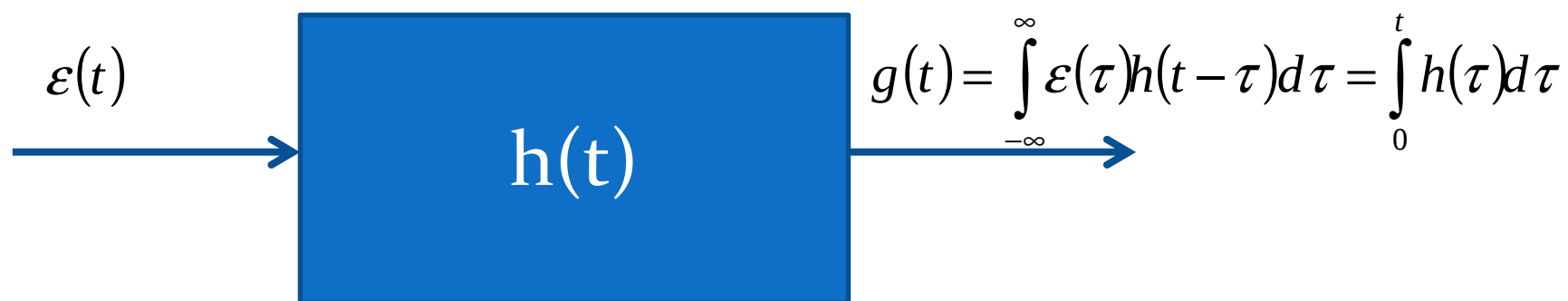
$$x[k] = \varepsilon[k]$$

$$\varepsilon[k] = \sum_{i=0} \delta[k-i]$$



FI LTI rendszer ugrásválasza

$$x(t) = \varepsilon(t) \Rightarrow y(t) = \int h(t) dt$$



Példa

- Legyen egy DI LTI rendszer impulzusválassza:

$$h[k] = 2^{-k}, \quad k \in [1, 5] \subset \mathbb{Z}$$

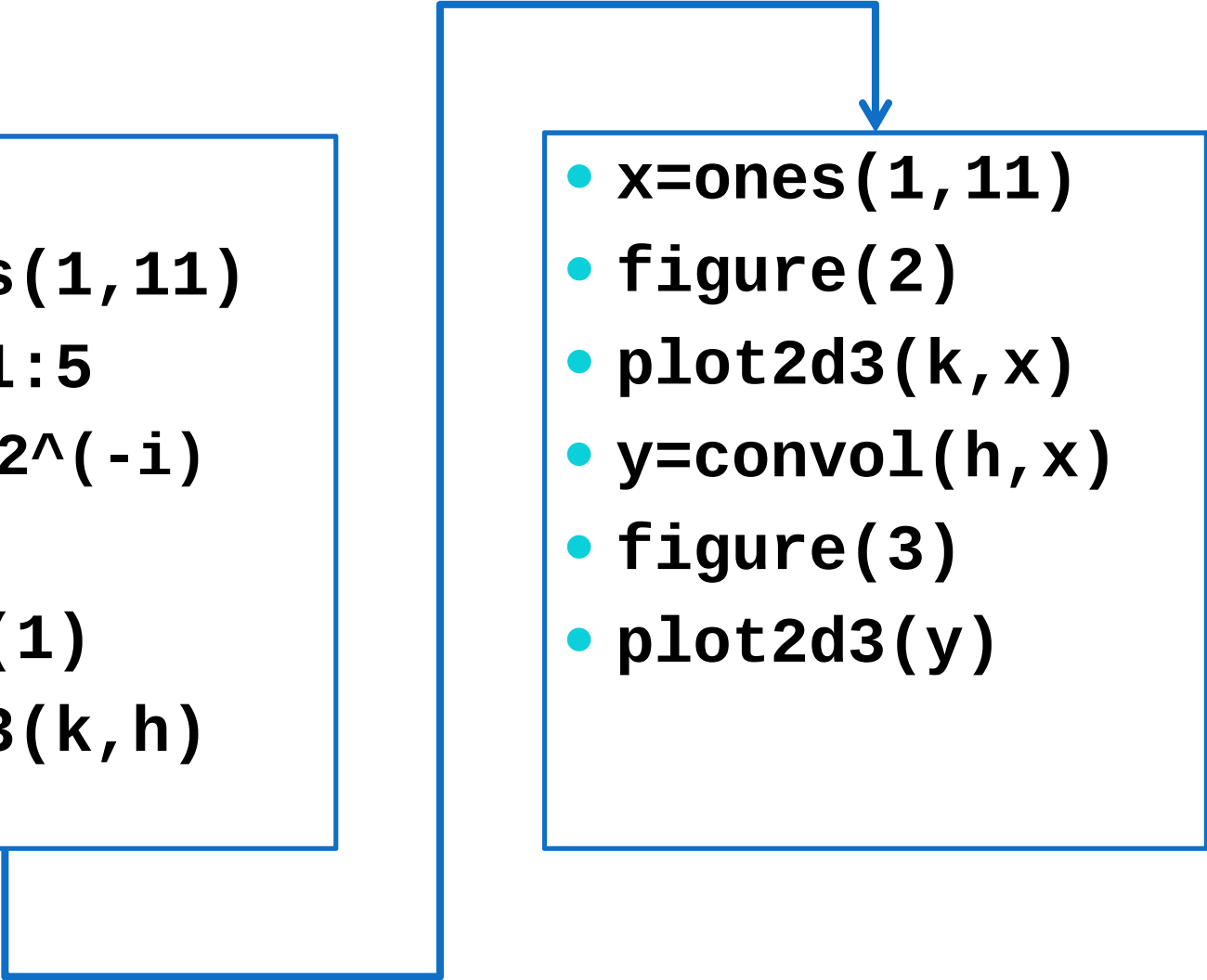
- Határozzuk meg a rendszer ugrásválaszát:

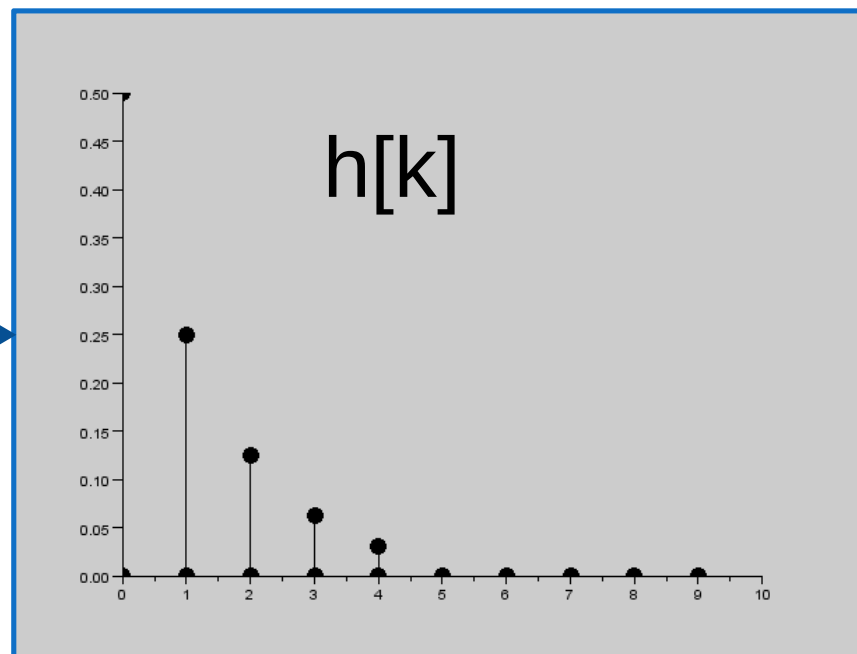
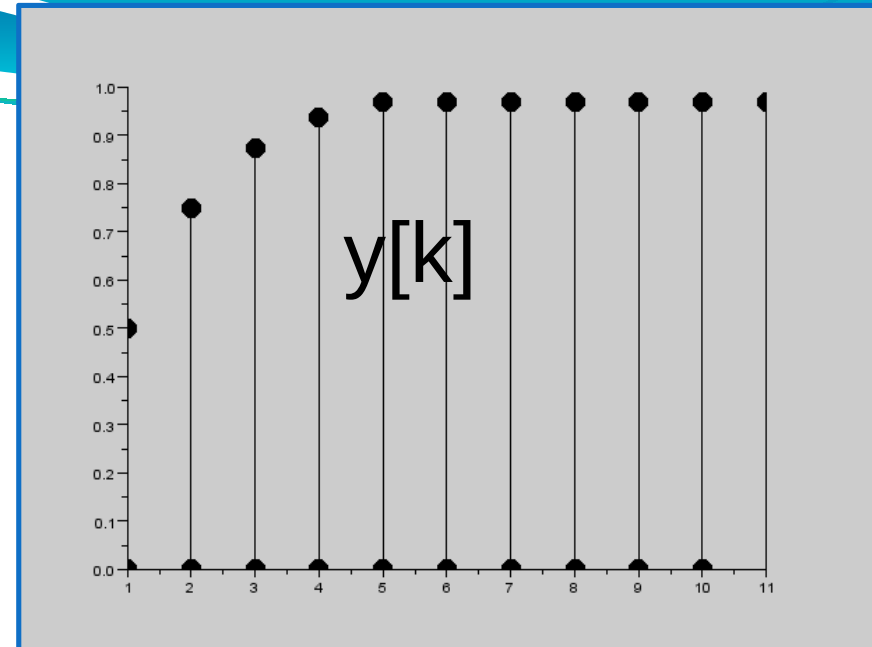
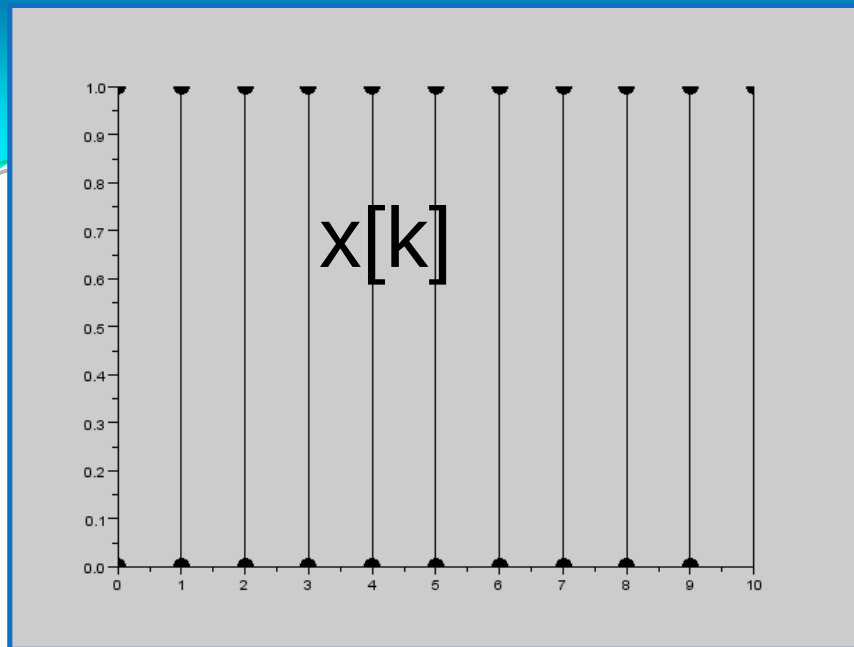
$$g[k] = ?$$

- SCILAB:

SCILAB

- `k=0:10`
- `h=zeros(1,11)`
- `for i=1:5`
 - `h(i)=2^(-i)`
- `end`
- `figure(1)`
- `plot2d3(k,h)`

- 
- `x=ones(1,11)`
 - `figure(2)`
 - `plot2d3(k,x)`
 - `y=convol(h,x)`
 - `figure(3)`
 - `plot2d3(y)`



kézi számítás

• $h[k]=0.5$	0.25	0.125	0.0625	0.03125	0.	0.
•	0.5	0.25	0.125	0.0625	0.03125	0.
•		0.5	0.25	0.125	0.0625	
•			0.5	0.25	0.125	
•				0.5	0.25	
•					0.5	
•						0.5
•	0.5	0.75	0.875	0.9375	0.96875	0.96875

