Analízis az időtartományban : A rendszeregyenlet

Jelek és rendszerek – 4

A múlt heti előadás összefoglalása

- A multi heti előadásban az impulzusválaszról volt szó.
- Az impulzusválasz (***h***) az egységimpulzus gerjesztéshez tartozó válasz.

$$\delta[k] \longrightarrow \boxed{W\{\delta\,[k]\}} \longrightarrow h\,[k]$$

A múlt heti előadás összefoglalása

- Egy kauzális rendszer lehet:
  1. ***véges impulzusválaszú*** **(FIR)**.
  2. ***végtelen impulzusválaszú*** **(IIR)**

- Egy **véges impulzusválaszú** rendszer feltétlenül **GV stabilis.**

A múlt heti előadás összefoglalása

- Az LTI rendszerek esetében, az impulzusválasz alapján meghatározható a rendszerválasz egy tetszőleges gerjesztés esetében.
- DI:

$$\boxed{y[k] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i] \cdot h[k-i]}$$

- FI:

$$\boxed{y[t] = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h(t-\tau) \cdot d\tau}$$

Az előadás tematikája

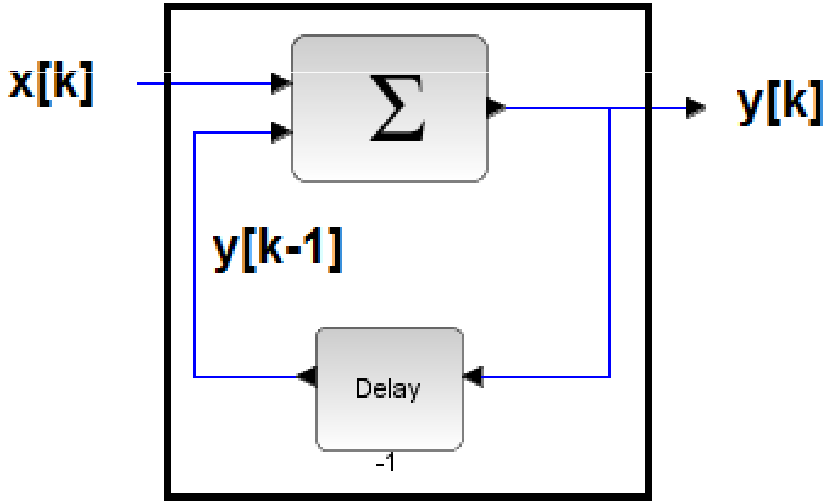
- Alapfogalmak: értelmezzük az LTI, kauzális rendszer rendszeregyenletét.
- A rendszeregyenletével leírt rendszer adott gerjesztéshez tartozó válaszának számítása
- A rendszer G-V stabilitásának vizsgálata a rendszeregyenlet ismeretében.

A rendszeregyenlet fogalma

- A rendszeregyenlet explicit alakja megadja a válasz:
  - ***y[k]*** kifejezését ***x[i], y[i], i<k*** segítségével, DI rendszerek esetében, illetve:
  - ***y(t)*** kifejezését $x^{(i)}(t)$, $y^{(i)}(t)$, $i=0,1,2,\ldots$ segítségével, FI rendszerek esetében. ($x^{(i)}(t)$, $y^{(i)}(t)$ a válasz és a gerjesztés i-edik deriváltját jelöli)

Példa: integrátor rendszeregyenlet

- DI integrátor: $y[k]=y[k-1]+x[k]$
- $y[k]-y[k-1]=x[k]$



- FI integrátor: $$\frac{dy}{dt}=x(t)$$

A diszkrét idejű rendszeregyenlet

- Egy ***x*** gerjesztésű, ***y*** válaszú, diszkrét idejű, lineáris, invariáns, kauzális rendszer rendszeregyenlete:

$$\boxed{y[k]+a_1 y[k-1]+a_2 y[k-2]+\ldots+a_n y[k-n]=b_0 x[k]+b_1 x[k-1]+b_2 x[k-2]+\ldots+b_m x[k-m]}$$

- Az ***n*** természetes szám a rendszeregyenlet rendszáma.

$$\boxed{y[k]+\sum_{i=1}^{n} a_i y[k-i]=\sum_{i=0}^{m} b_i x[k-i]}$$

Példa

- Határozzuk meg annak a DI rendszernek az impulzusválaszát néhány ütemre, amelynek rendszeregyenlete :

$$y[k]-y[k-1]+0,24y[k-2]=x[k]+0,5x[k-1]-0,2x[k-3]$$

Megoldás:

- Ha a gerjesztés x[k]=δ[k] akkor, a válasz, y[k]=h[k] :

$$h[k]-h[k-1]+0,24h[k-2]=\delta[k]+0,5\delta[k-1]-0,2\delta[k-3]$$

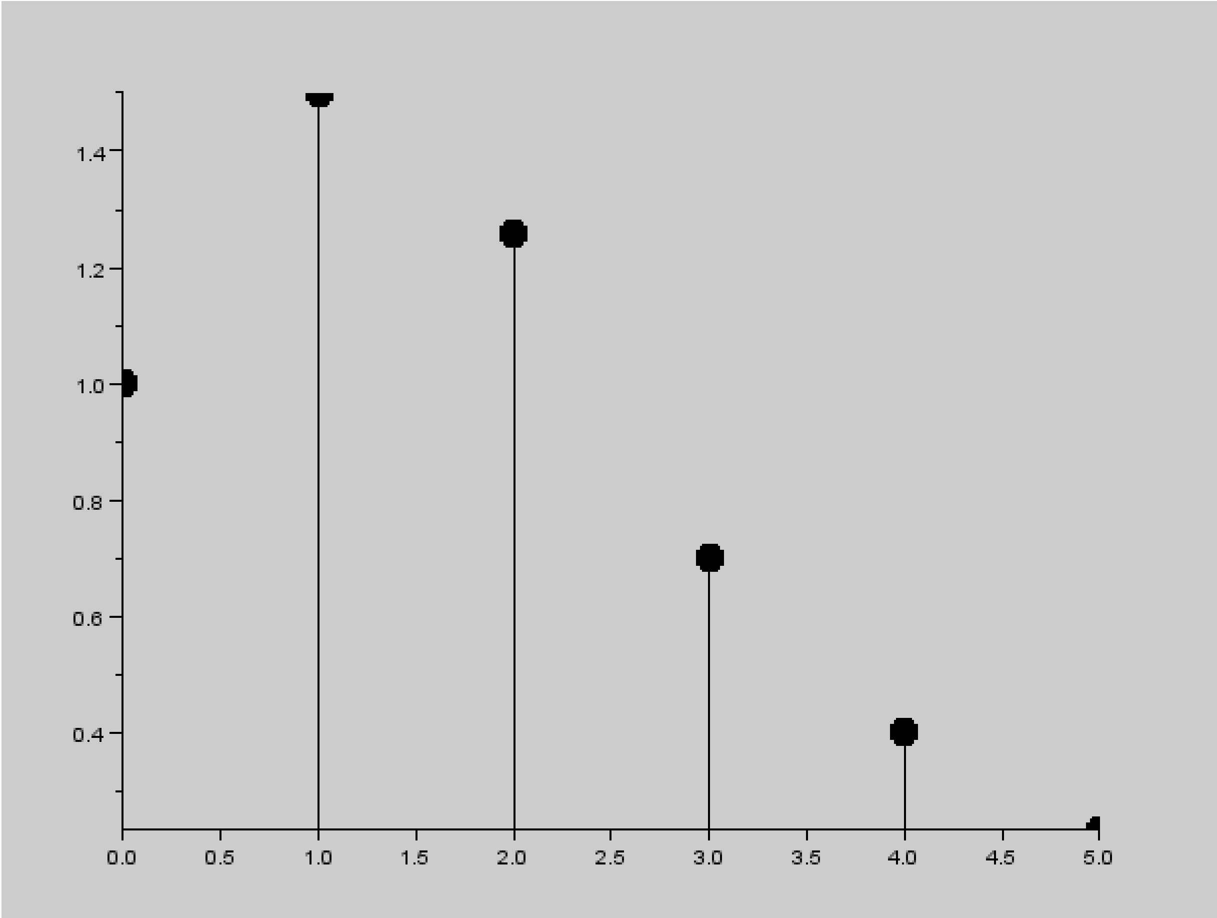
$$h[k]-h[k-1]+0{,}24h[k-2]=\delta[k]+0{,}5\delta[k-1]-0{,}2\delta[k-3]$$

$$\Downarrow$$

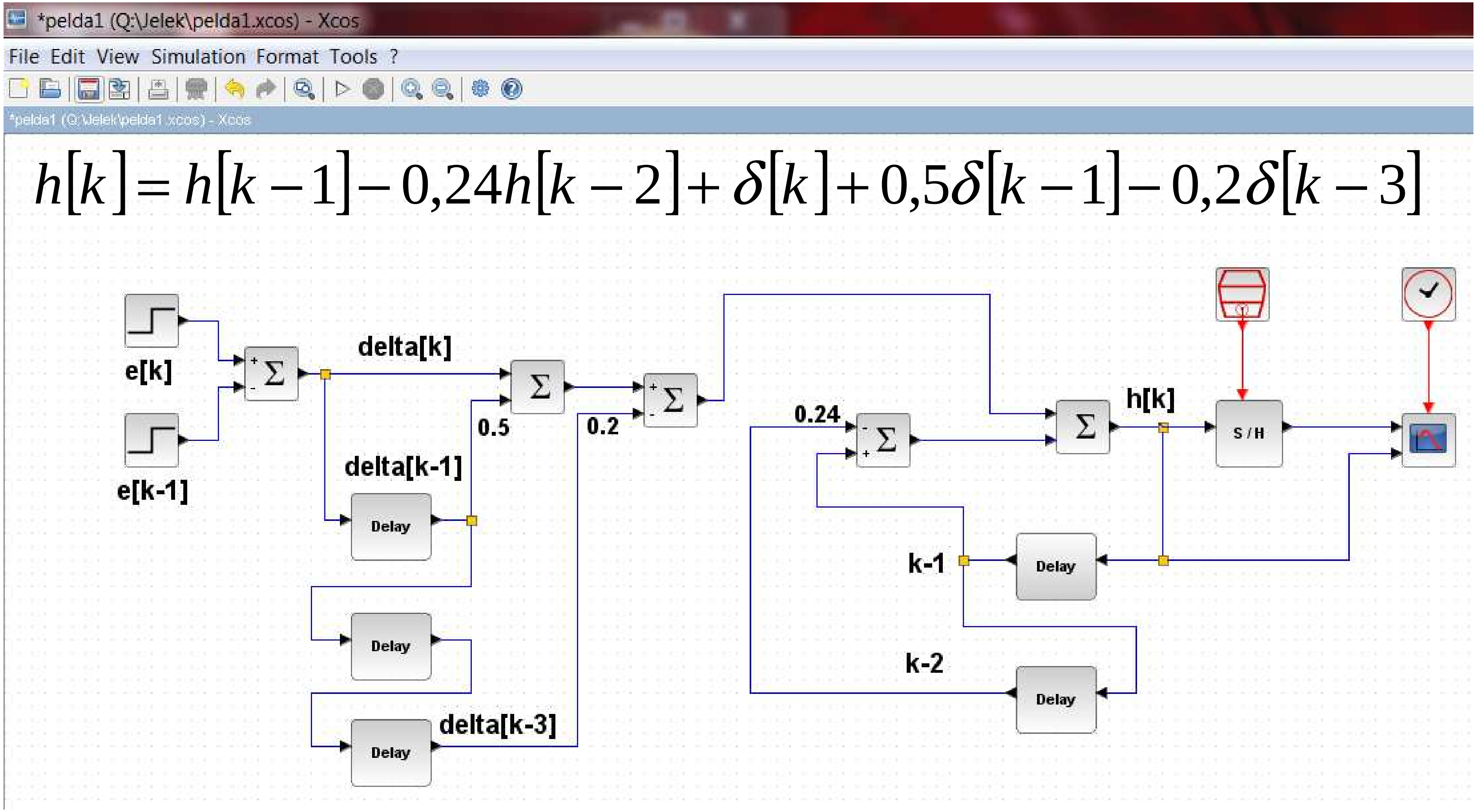
$$h[k]=h[k-1]-0{,}24h[k-2]+\delta[k]+0{,}5\delta[k-1]-0{,}2\delta[k-3]$$

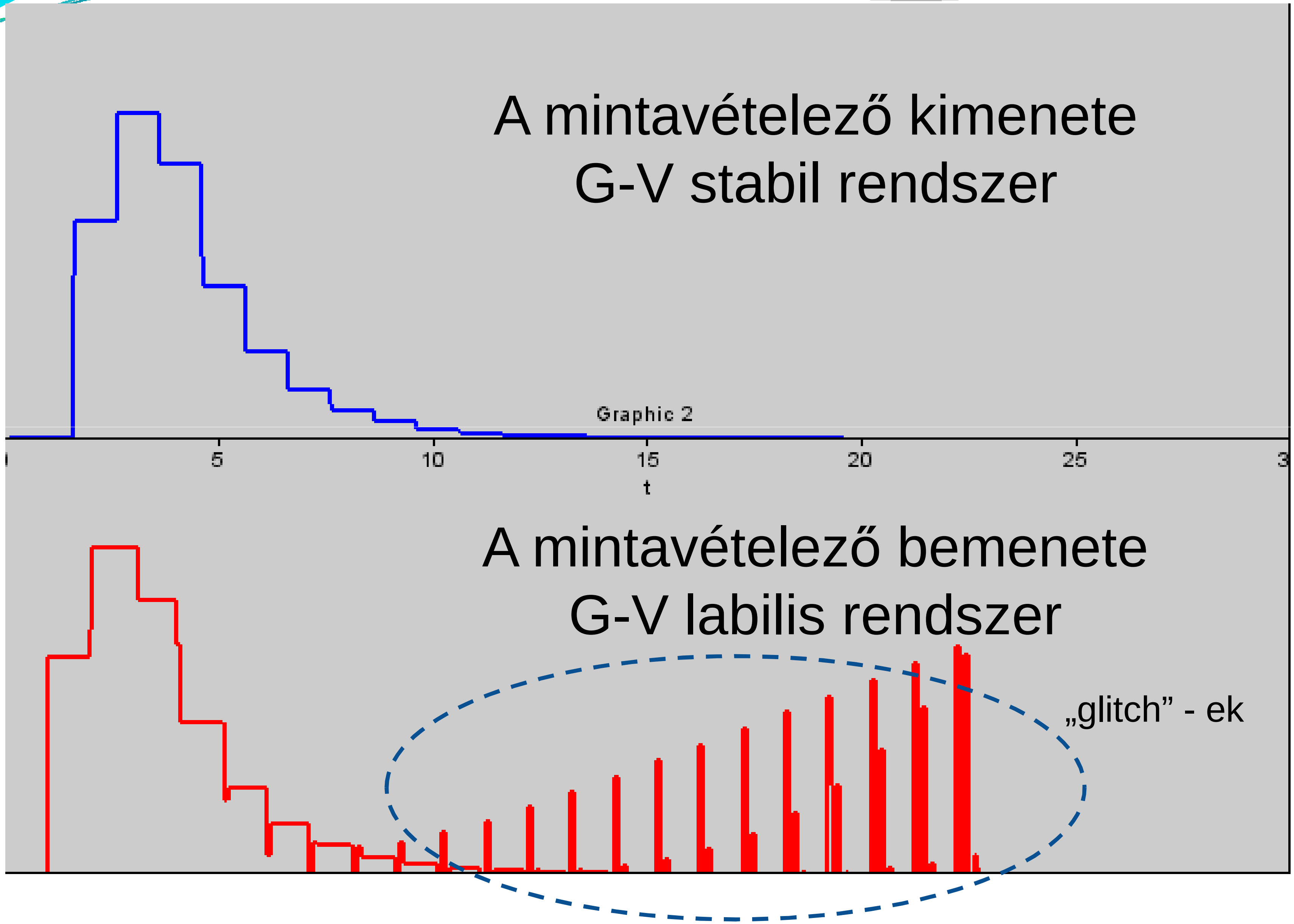
- h[0]=0-0+1+0+0=1
- h[1]=1-0+0+0,5-0=1,5
- h[2]=1,5-0,24+0+0-0=1,26
- h[3]=1,26-0,36+0+0-0,2=0,7
- h[4]=0,7-0,3+0+0-0=0,4
- h[5]=0,4-0,168+0+0-0=0,232

$$k \to \infty \Rightarrow h[k] \to 0$$ A rendszer GV stabilis



Scilab Xcos alkalmazása




A mintavételező kimenete
G-V stabil rendszer
Graphic 2
5
10
15
20
25
t
A mintavételező bemenete
G-V labilis rendszer
„glitch” - ek

A folytonos idejű rendszeregyenlet

- Az u gerjesztésű, y válaszú, folytonos idejű, lineáris, invariáns, kauzális, differenciális rendszer rendszeregyenlete a szokásos differenciális alakban:

$$\boxed{\frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots a_n y(t) = b_0 \frac{d^n x}{dt^n} + b_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \ldots b_n x(t)}$$

- Az ***n*** a rendszeregyenlet rendszáma.

A folytonos idejű rendszeregyenlet

- Egy változónak azonban legfeljebb első vagy második deriváltjának adható fizikai tartalom:
  - a változó „sebessége„
  - és „gyorsulása”
- Ez egy oka annak, hogy rendszerek leírására a FI rendszeregyenlet kettőnél nagyobb rendszám esetén ritkán használatos.

A rendszeregyenlet megoldása

- A rendszeregyenlet megoldása = egy gerjesztés válasz kapcsolat meghatározása.
- A rendszeregyenlet megoldásának egy módszere a következő:

1. Felírjuk a rendszeregyenlet karakterisztikus polinomját, $F(\lambda)$.
2. Megoldjuk a rendszeregyenlet karakterisztikus egyenletét, $F(\lambda)=0$.

A rendszeregyenlet megoldása

3. A karakterisztikus egyenlet gyökei a rendszeregyenlet sajátértékei, λ_i
4. A sajátértékek meghatározzák a sajátfüggvényeket:

- λ_i^k DI rendszerek esetében
- $e^{\lambda_i \cdot t}$ FI rendszerek esetében

5. Ezek segítségével a gerjesztés válasz kapcsolat megadható.

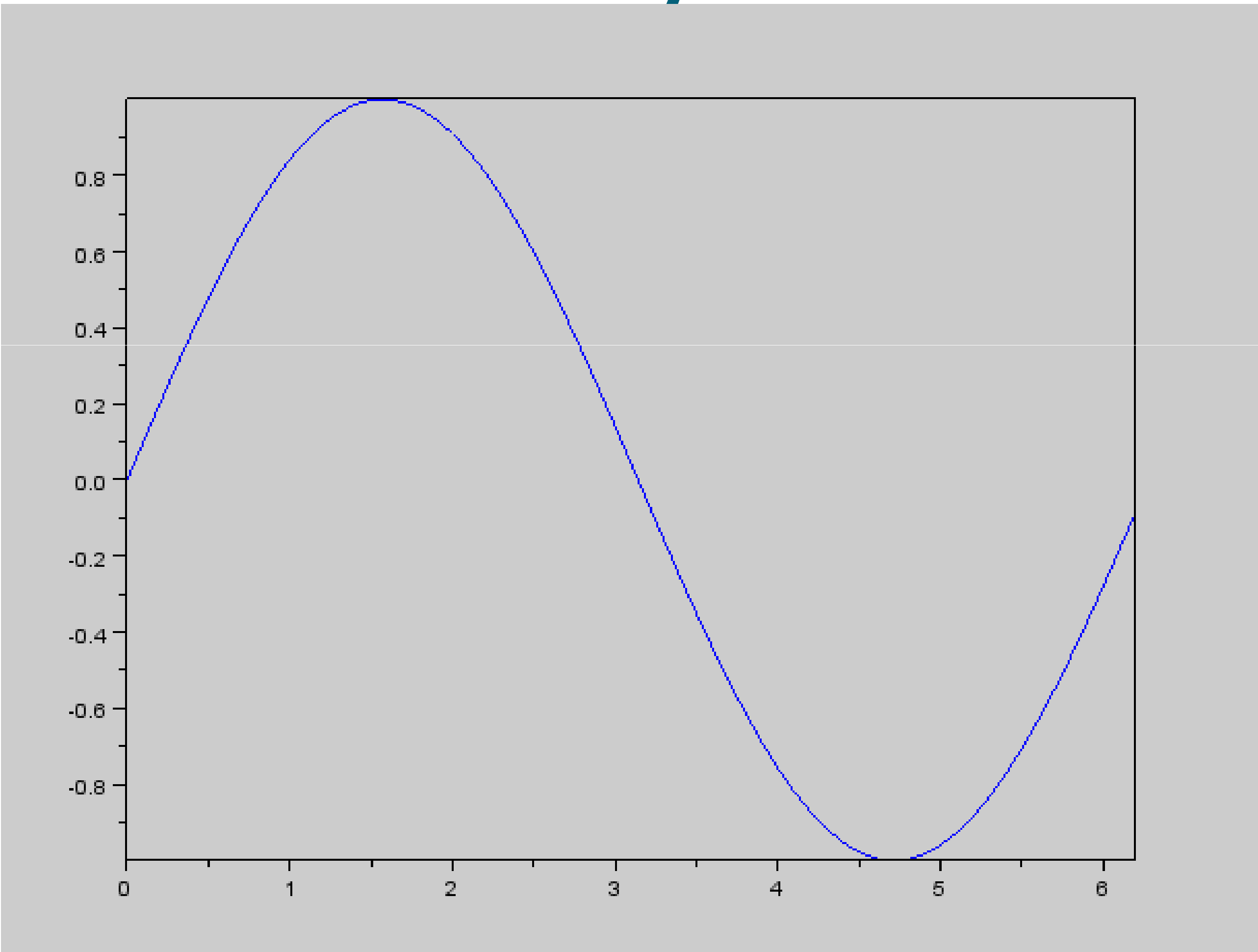
Scilab – ode alkalmazása

- Példaként oldjuk meg a kővetkező rendszeregyenletet:

$$\frac{dy}{dt} - y = \sin(t) + \cos(t)$$

```
function ydot=f(t,y),ydot=y-sin(t)+cos(t), endfunction
y0=0; t0=0; t=0:0.1:2*%pi;
y=ode(y0,t0,t,f)
plot(t,y)
```

Az eredmény



$$\boxed{y = \sin(t)}$$

A gerjesztés-válasz stabilitás

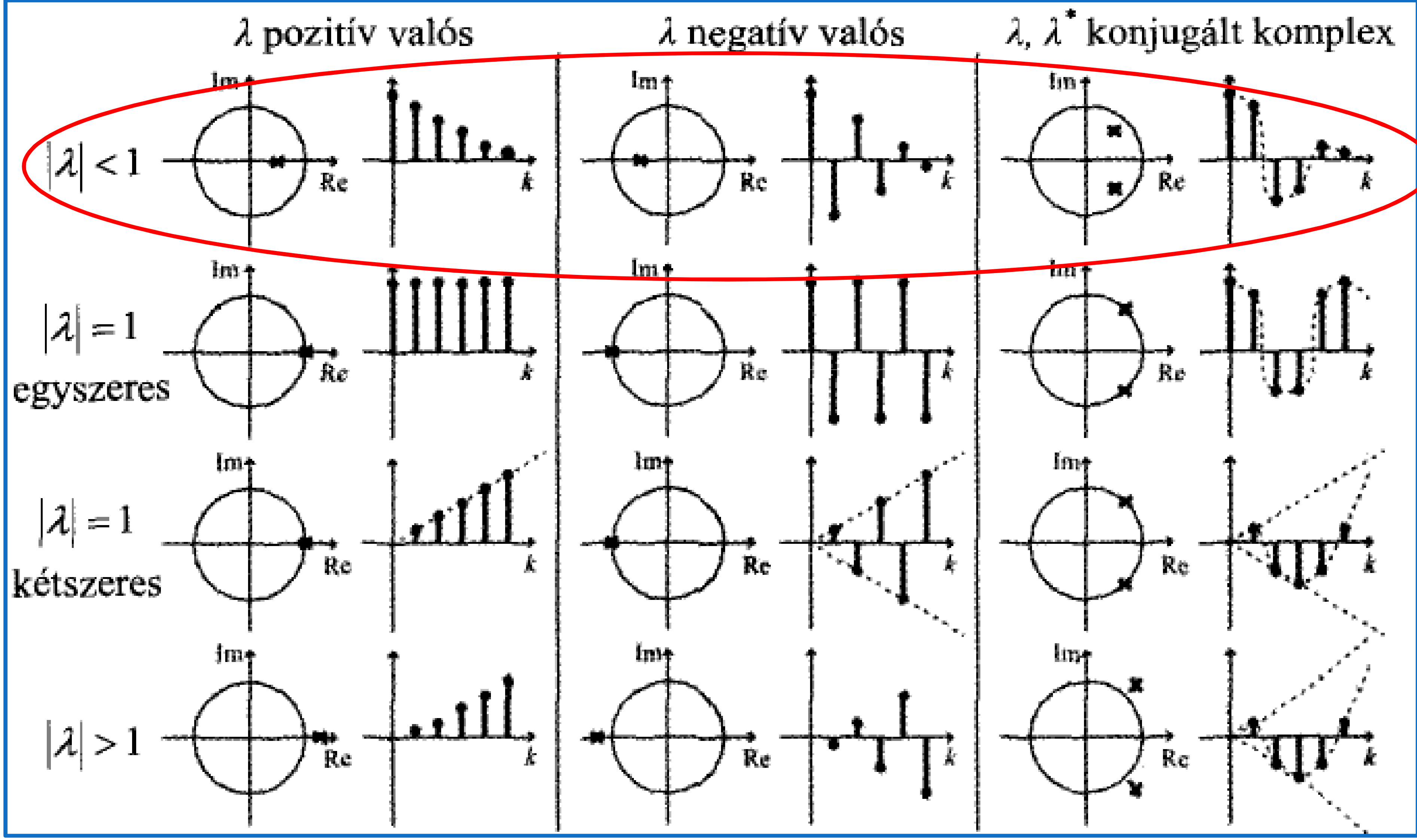
- A rendszer gerjesztés-válasz stabilis, ha bármely korlátos gerjesztéséhez korlátos válasz tartozik.
- A rendszeregyenlet ismeretében erre elegendő feltételt adunk.
- A rendszeregyenletével leírt rendszer válasza egy szabad és egy gerjesztett válasz összege.
- A gerjesztett összetevő olyan mint a gerjesztés, ezért az korlátos gerjesztés esetén biztosan korlátos.
- A válasz szabad összetevőjen múlik a rendszer stabilitása.

DI rendszer válasszanak szabad összetevője.

- DI rendszeregyenlet: $$\boxed{y[k]+\sum_{i=1}^{n} a_i y[k-i]=\sum_{i=0}^{m} b_i x[k-i]}$$
- Karakterisztikus egyenlet: $$\boxed{\lambda^n+\sum_{i=1}^{n} a_i \lambda^{n-1}=0}$$
- Sajátértékek: $\boxed{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \quad \lambda_i, \ldots \ \lambda_n}$

DI rendszer válasszanak szabad összetevőjének korlátossága.

- A rendszer válaszának szabad összetevője egyszeres sajátértékek esetén λ_i^k alakú tagok összege.
- Többszörös sajátérték esetén $\lambda_i^k, k\cdot\lambda_i^k, k^2\cdot\lambda_i^k$ alakú tagok összege.
- A szabad összetevő általános alakja akkor és csakis akkor korlátos, ha minden $\left|\lambda_i\right|<1$


λ pozitív valós
λ negatív valós
λ, λ^* konjugált komplex
$|\lambda| < 1$
$|\lambda| = 1$
egyszeres
$|\lambda| = 1$
kétszeres
$|\lambda| > 1$
Im
Re
k

FI rendszer válasszanak szabad összetevője.

- FI rendszeregyenlet:

$$\boxed{\frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots a_n y(t) = b_0 \frac{d^n x}{dt^n} + b_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots b_n x(t)}$$

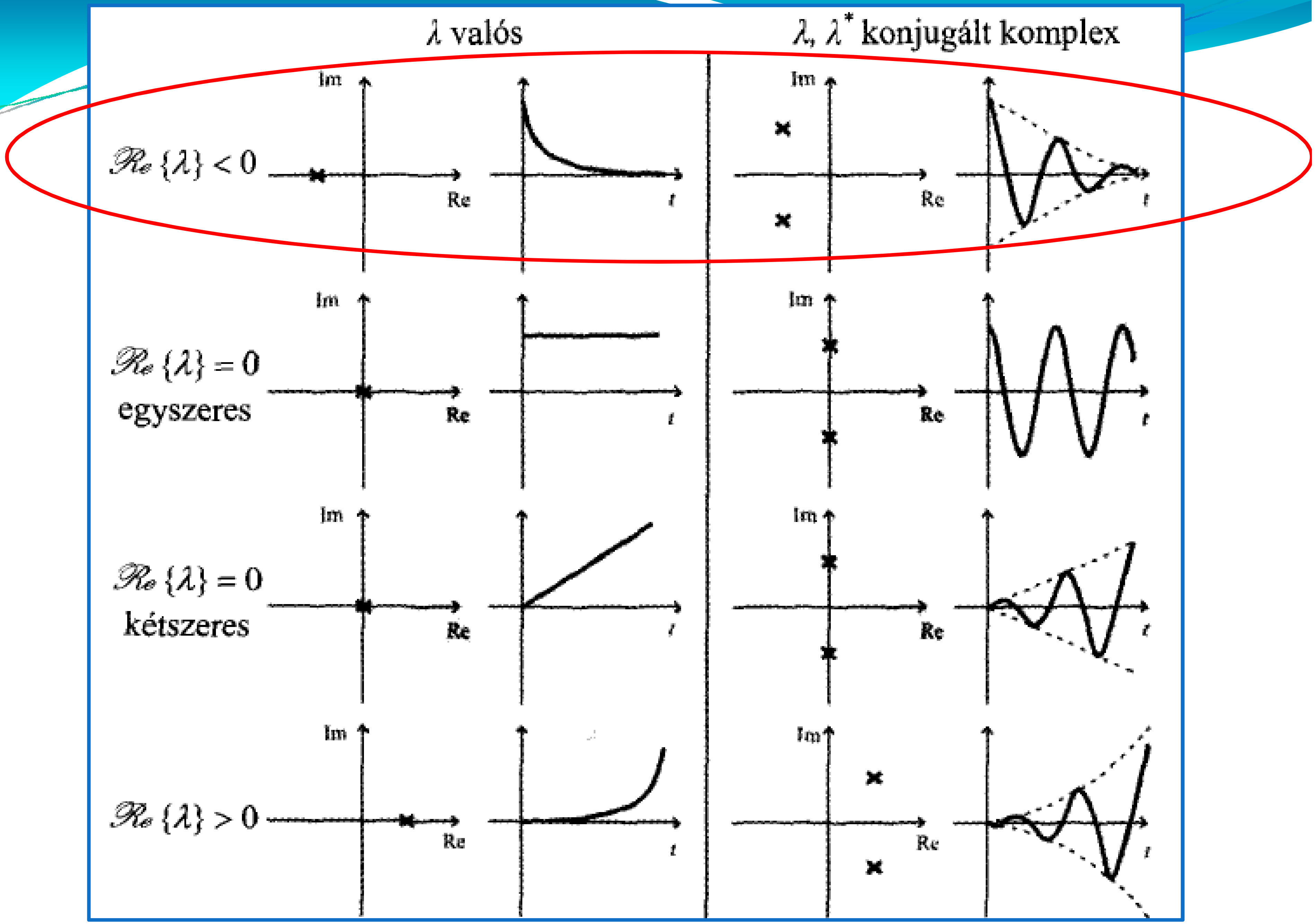
- Karakterisztikus egyenlet:

$$\boxed{\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots a_n = 0}$$

- Sajátértékek: $\boxed{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \ \lambda_i, \dots \ \lambda_n}$

FI rendszer válasszanak szabad összetevőjének korlátossága.

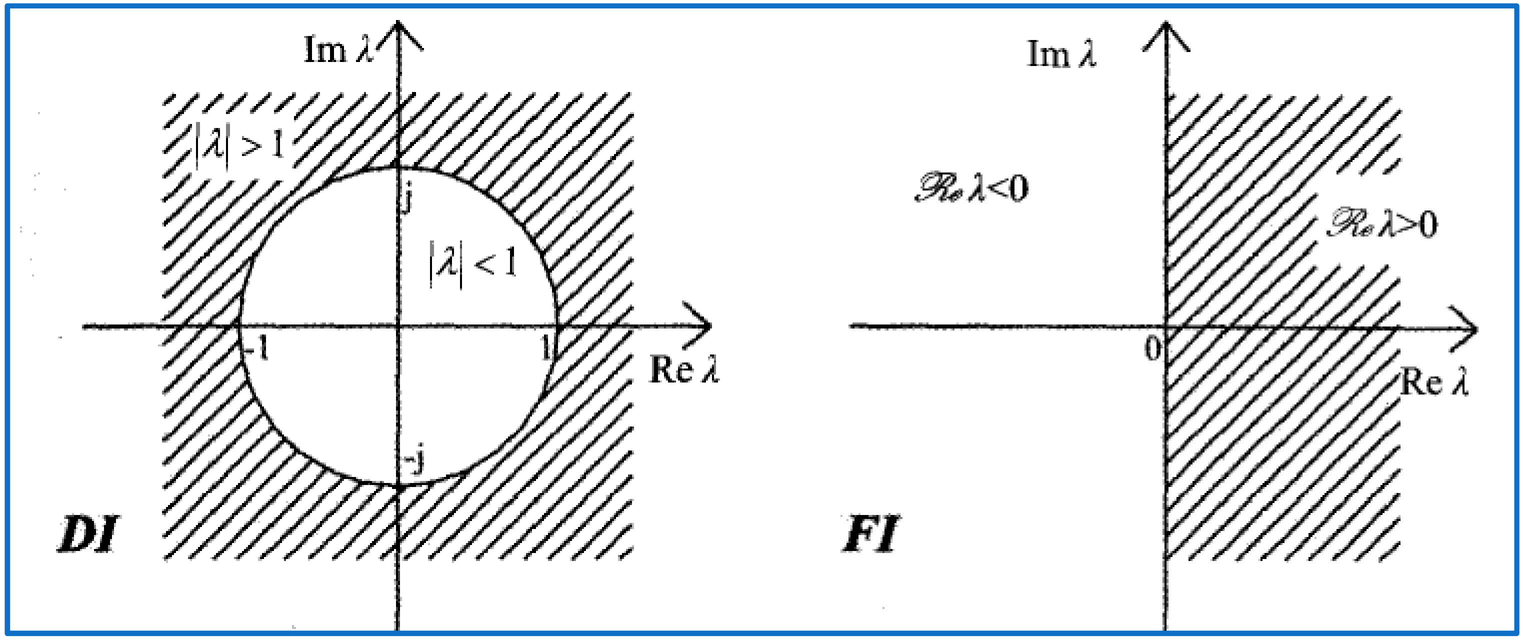
- A rendszer válaszának szabad összetevője egyszeres sajátértékek esetén $e^{\lambda_i \cdot t}$ alakú tagok összege.
- Többszörös sajátérték esetén $e^{\lambda_i \cdot t}, t \cdot e^{\lambda_i \cdot t}, t^2 \cdot e^{\lambda_i \cdot t}$ alakú tagok összege.
- A szabad összetevő általános alakja akkor és csakis akkor korlátos, ha minden $\operatorname{Re}\{\lambda_i\} < 0$



λ valós
λ, λ* konjugált komplex
Re {λ} < 0
Re {λ} = 0
egyszeres
Re {λ} = 0
kétszeres
Re {λ} > 0
Im
Re
t

G-V stabilitás kritérium

- A rendszer biztosan gerjesztés válasz stabilis, ha DI esetben minden sajátértéke a *komplex számsík egységsugarú körén belül helyezkedik el, illetve ha FI esetben minden sajátértéke a komplex számsík bal félsíkján helyezkedik el.*



Példa

Tudjuk, hogy az $$y(t) = C\int_{-\infty}^{t} u(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

explicit gerjesztés-válasz kapcsolatú FI rendszer (integrátor) nem GV stabilis.

Hogyan következik ez a rendszeregyenletre vonatkozó feltételekből?

Példa

A rendszeregyenlet:

$$y(t) = C \cdot \int_{-\infty}^{t} x(\tau) \cdot d\tau \Rightarrow \frac{dy}{dt} = C \cdot x(t)$$

Karakterisztikusegyenlet: $\lambda = 0$

Sajátérték: $\lambda = 0$

A rendszerválasz szabad összetevője: $e^{\lambda \cdot t} = e^{0} = 1$
nem korlátolt.

Példa

Tudjuk, hogy az

$$y(t) = C\int_{-\infty}^{t} u(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

explicit gerjesztés-válasz kapcsolatú FI rendszer (integrátor) nem GV stabilis.

Mit lehet mondani a DI integrátor stabilitásárol?

Példa

A rendszeregyenlet:

$$y[k]-y[k-1]=x[k]$$

Karakterisztikusegyenlet: $\lambda-1=0$

Sajátérték: $\lambda=1$

A rendszerválasz szabad összetevője: $\lambda^k=1^k=1$
nem korlátolt.

- Úgy a DI mint a FI integrátor labilis rendszer.