Analízis az időtartományban : Az állapotváltozós leírás

Jelek és rendszerek – 5

A múlt heti előadások összefoglalása

- A rendszerek időtartománybeli leírásának három lehetősége létezik:

1. ***Az impulzusválasz* (*h*)** az egységimpulzus gerjesztéshez tartozó válasz.

   Az LTI rendszerek esetében, az impulzusválasz alapján a rendszerválasz meghatározható egy tetszőleges gerjesztés esetében.

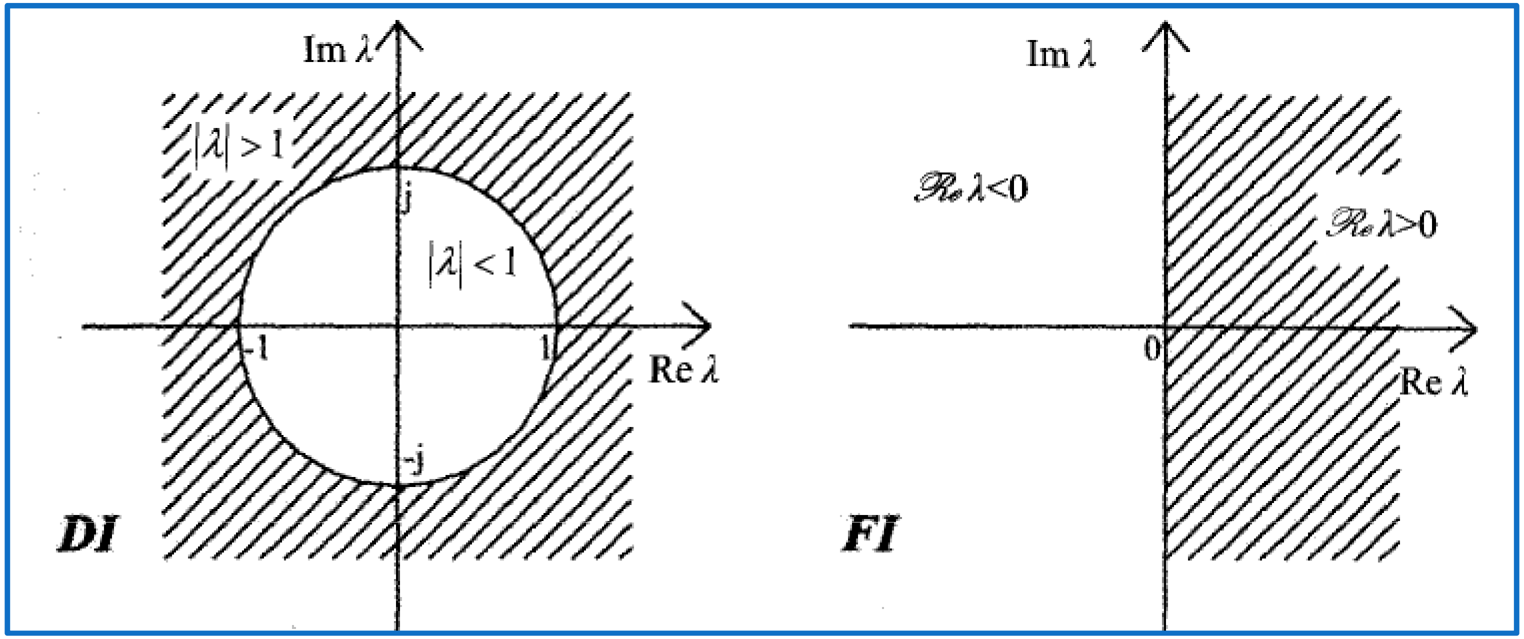
$$\boxed{y[k]=\sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i]\cdot h[k-i]}$$

A múlt heti előadások összefoglalása

2. ***A rendszeregyenlet*** megadja a rendszer kimenetét a bemeneti jel és a kimeneti jel előző értékeinek függvényében.

   A rendszeregyenlet ismeretében elegendő feltételt lehet adni a rendszer stabilitására.

   A rendszer biztosan gerjesztés válasz stabilis, ha a rendszeregyenlet saját értékei **a DI esetben** a *komplex számsík egységsugarú körén belül helyezkedik el, illetve* **a FI esetben** *minden sajátértéke a komplex számsík bal félsíkján helyezkedik el.*



A mai előadásban:

3. **Az állapotváltozós leírás**

Tematika

- Az állapotváltozó fogalma
- Diszkrét idejű rendszer állapotváltozós leírása
- Folytonos idejű rendszerek állapotváltozós leírása
- Az állapotváltozós leírás alkalmazása RLC áramkőr ők esetében
- Az állapotváltozói leírás megoldása Scilabbal és Xcossal

Az állapotváltozó fogalma

- ***Új változók*** bevezetésével megadhatjuk a rendszer gerjesztés-válasz kapcsolatának egy implicit alakját: ***az állapotváltozós*** leírást.
- Egy rendszer állapotváltozói olyan változók, amelyek a következő két tulajdonsággal rendelkeznek: Ismerve a rendszer viselkedését , a gerjesztéseket és az állapotváltozók értékét egy adott időpontban:

(1) meg tudjuk határozni bármely állapotváltozó értékét minden következő időpontban.

(2) meg tudjuk határozni bármely válasz értékét az adott időpontban.

Az állapotváltozó fogalma

DI:

- Az $s_1[k_1], s_2[k_1], s_3[k_1], \ldots s_N[k_1]$ értékek összességét a rendszernek a ***k1*** ütembeli ***állapotának*** nevezik.

FI:

- Az $s_1(t_1), s_2(t_1), s_3(t_1), \ldots s_N(t_1)$ értékek összességét a rendszernek a ***t1*** időpontbeli ***állapotának*** nevezik.
- Mindkét esetben N a rendszer rendszáma.

Az állapotváltozó fogalma

- Egy fizikai objektum állapotváltozóiként többnyire olyan fizikai változók választhatók, amelyek:
  - egy tárolt mennyiséget vagy
  - annak változási sebességét jelentik.

- Ilyenek például :
  - a tömeg vagy a tömegáram,
  - az elektromos töltés vagy áram,
  - raktározott árú mennyisége vagy napi változása.

DI rendszer állapotváltozós leírása

- Egy diszkrét idejű, MIMO, kauzális rendszer állapotváltozós leírása kifejezi az állapotváltozók ***k* +1** ütembeli és a válaszok ***k*** ütembeli értékét az állapotváltozók és a gerjesztések ***k*** ütembeli érékével.
- Lineáris rendszer esetén ezek a kifejezések lineárisak.

$$s_i[k+1] = \sum_{j=1}^{N} A_{i\,j} \cdot s_j[k] + \sum_{j=1}^{M} B_{i\,j} \cdot x_j[k]$$

$$y_i[k] = \sum_{j=1}^{N} C_{i\,j} \cdot s_j[k] + \sum_{j=1}^{M} D_{i\,j} \cdot x_j[k]$$

DI rendszer állapotváltozós leírása

- Ha ismerjük
  - az állapotváltozós leírást (vagyis az ***Aij, Bij, Cij, Dij*** együtthatókat),
  - az állapotváltozókat (***si***)és
  - a gerjesztéseket(***xj***) a ***k*** időpontban,
- akkor behelyettesítéssel meg tudjuk határozni
  - a válaszokat (***yi***)a ***k*** időpontban, továbbá
  - az állapotváltozókat a ***k+l*** időpontban,
- és így tovább.

DI rendszer állapotváltozós leírása

- Tömörebb alak előállítása érdekében vezessünk be vektorokat és mátrixokat:

$$\bar{\mathbf{s}}[k] = \begin{vmatrix} s_1[k] \\ s_2[k] \\ \vdots \\ s_N[k] \end{vmatrix} \qquad \bar{\mathbf{A}} = \begin{vmatrix} a_{11}\ a_{12}\ \ldots a_{1N} \\ a_{21}\ a_{22}\ \ldots a_{2N} \\ \vdots \\ a_{N1}\ a_{N2}\ \ldots a_{NN} \end{vmatrix} \qquad \ldots$$

- Alkalmazzuk továbbá az:
- $\bar{\mathbf{s}}[k] = \mathbf{s}\ \textit{és}\ \bar{\mathbf{s}}[k+1] = \mathbf{s}'$ jelöléseket.

DI rendszer állapotváltozós leírása

- Egy diszkrét idejű, lineáris, invariáns, kauzális rendszer állapotváltozós leírása :

$$\mathbf{s}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{s} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{x}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{s} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{x}$$

állapotegyenlet

rendszermátrix

válaszvektor

állapotvektor

FI rendszer állapotváltozós leírása

- Egy folytonos idejű, lineáris, invariáns, kauzális rendszer állapotváltozós leírása :

$$\mathbf{s}' = \mathbf{A}\cdot\mathbf{s} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{x}$$

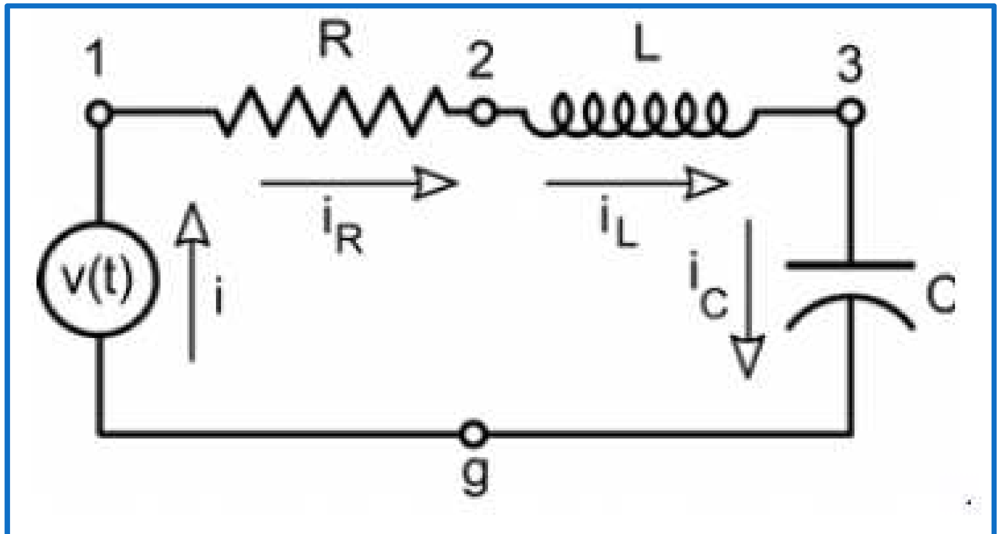
$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\cdot\mathbf{s} + \mathbf{D}\cdot\mathbf{x}$$

Állapotváltozó első deriváltja

Példa

	feszültség	áram
v	Ismert = gerjesztés	i
R	v12	i
L	v23	i = állapot változó
C	V3g = állapot változó	i

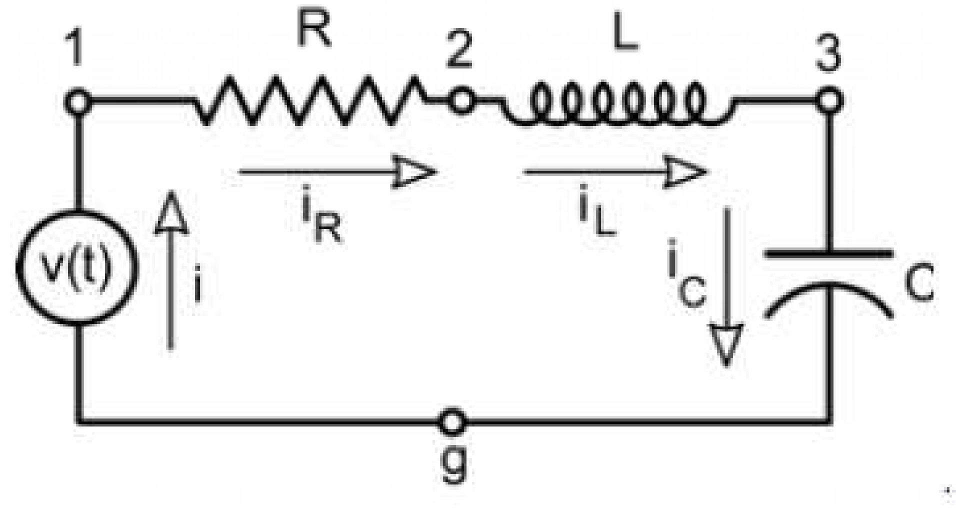
Állapot változónak az energiatároló elemek tárolt mennyiségeit tekintjük.



RLC áramkőr

Az állapotváltozós leírás

- A kiindulópont mindig egy energiatároló elem gerjesztés-válasz kapcsolata:



RLC áramkőr

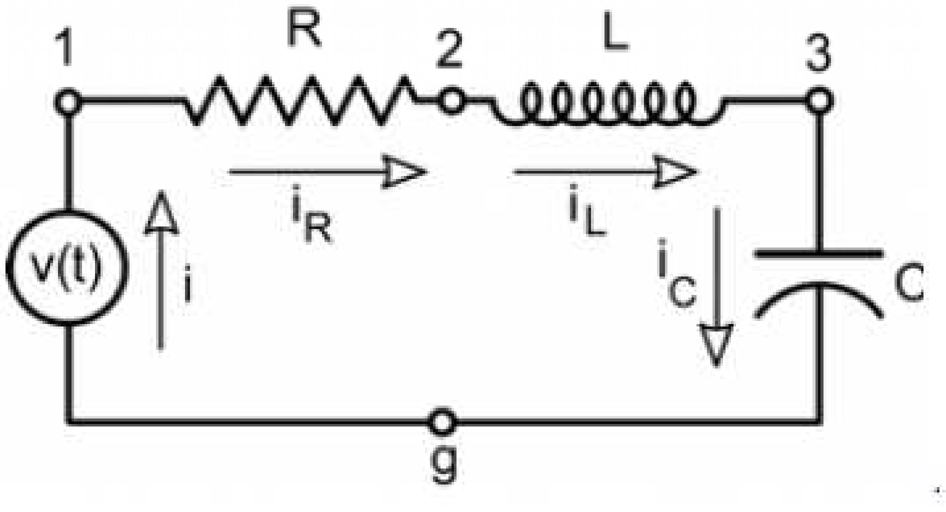
$$v_{23} = L\frac{di_L}{dt}$$

$$i_L = i_C = i_R = i$$

$$v_{23} = L\frac{di}{dt} = Li'$$

Az állapotváltozós leírás

- Az egyenletet átrendezzük úgy hogy baloldalt csak az állapotváltozó első deriváltja jelenjék meg.

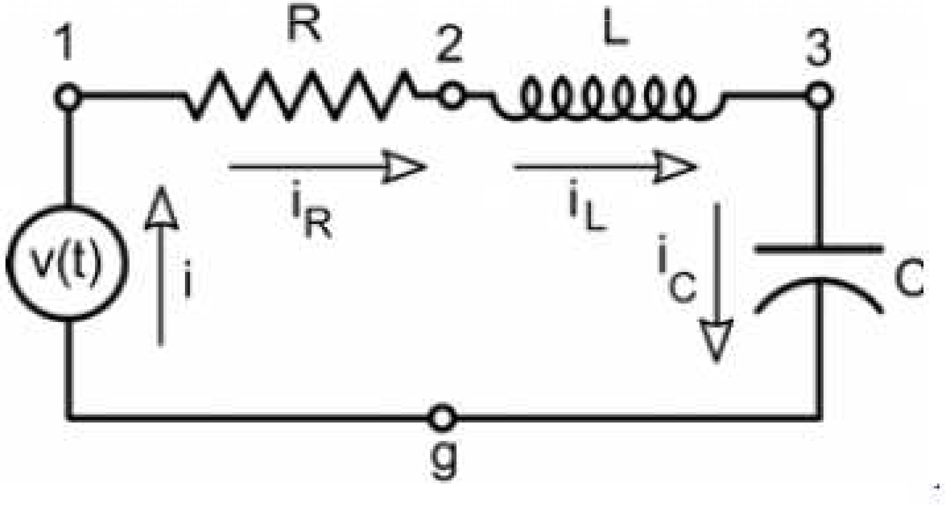


RLC áramkőr

$$i' = \frac{1}{L} v_{23}$$

Az állapotváltozós leírás

- Az egyenletet jobboldalán megjelenő változókat kifejezzük a gerjesztés és az állapotváltozók függvényében:



RLC áramkőr

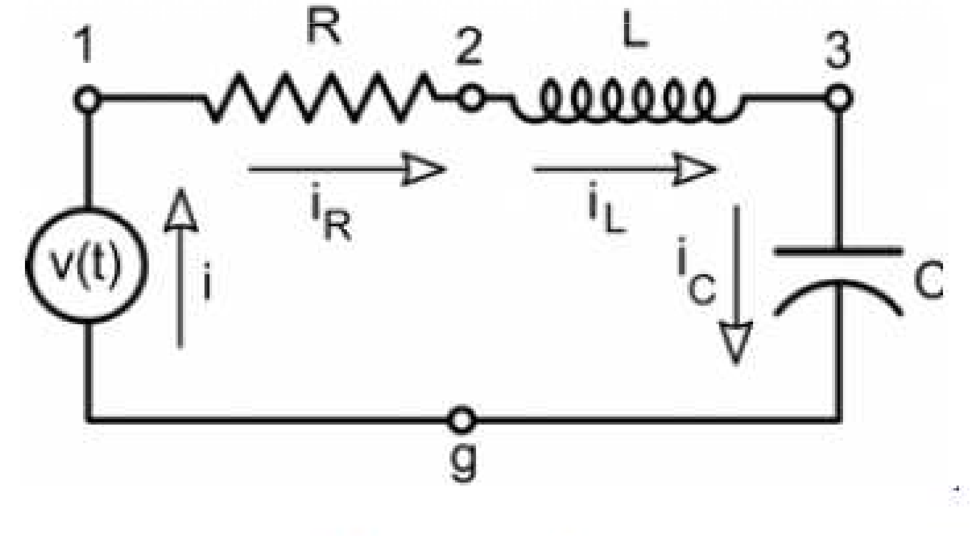
$$i' = \frac{1}{L} v_{23}$$

$$v_{23} = v - Ri - v_{3g}$$

$$i' = \frac{1}{L}\left(v - Ri - v_{3g}\right)$$

Az állapotváltozós leírás

- Folytassuk a második állapotváltozó kifejezésével:



RLC áramkőr

$$i_C = C\frac{dv_{3g}}{dt} = C \cdot v'_{3g}$$

$$i_C = i$$

$$v'_{3g} = \frac{1}{C} i$$

Az állapotegyenlet

$$(1)\quad i' = \frac{1}{L}\left(v - Ri - v_{3g}\right) = -\frac{R}{L}i - \frac{1}{L}v_{3g} + \frac{1}{L}v \qquad (2)\quad v'_{3g} = \frac{1}{C}i$$

$$(1)\; i' = -\frac{R}{L}i - \frac{1}{L}v_{3g} + \frac{1}{L}v$$

$$(2)\; v'_{3g} = \frac{1}{C}i + 0\cdot v_{3g} + 0\cdot v$$

$$\begin{vmatrix} i' \\ v'_{3g} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ +\frac{1}{C} & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} i \\ v_{3g} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{vmatrix} v$$

Rendszermátrix

$$\begin{vmatrix} i' \\ v'_{3g} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ +\frac{1}{C} & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} i \\ v_{3g} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{vmatrix} v$$

$$\mathbf{s}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{s} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{x}$$

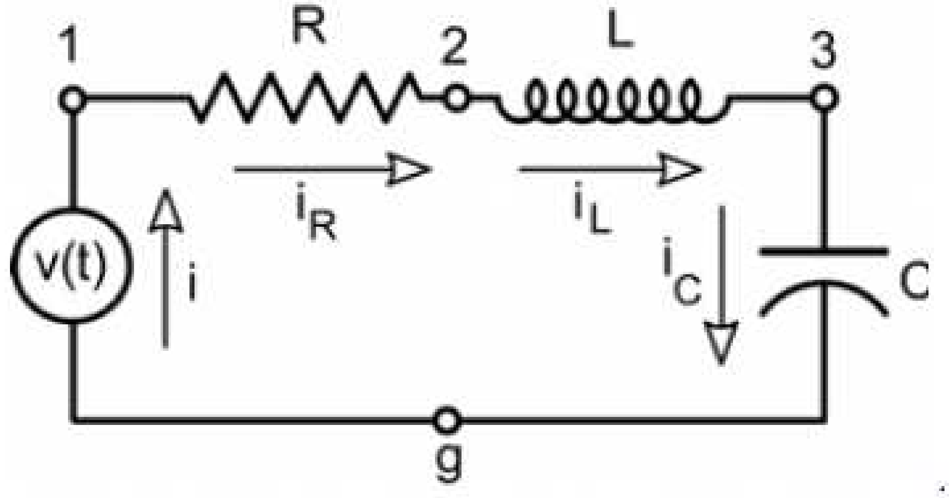
$$A = \begin{vmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ +\frac{1}{C} & 0 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{vmatrix}$$

A válaszegyenlet

	feszültség	áram
v	Ismert = gerjesztés	i
R	V12 = válasz	i
L	V23 = válasz	i = állapot változó
C	V3g = állapot változó	i

$$(1)\ v_{12} = R \cdot i + 0 \cdot v_{3g} + 0 \cdot v$$

$$(2)\ v_{23} = -Ri - v_{3g} + v$$



RLC áramkőr

A válaszegyenlet

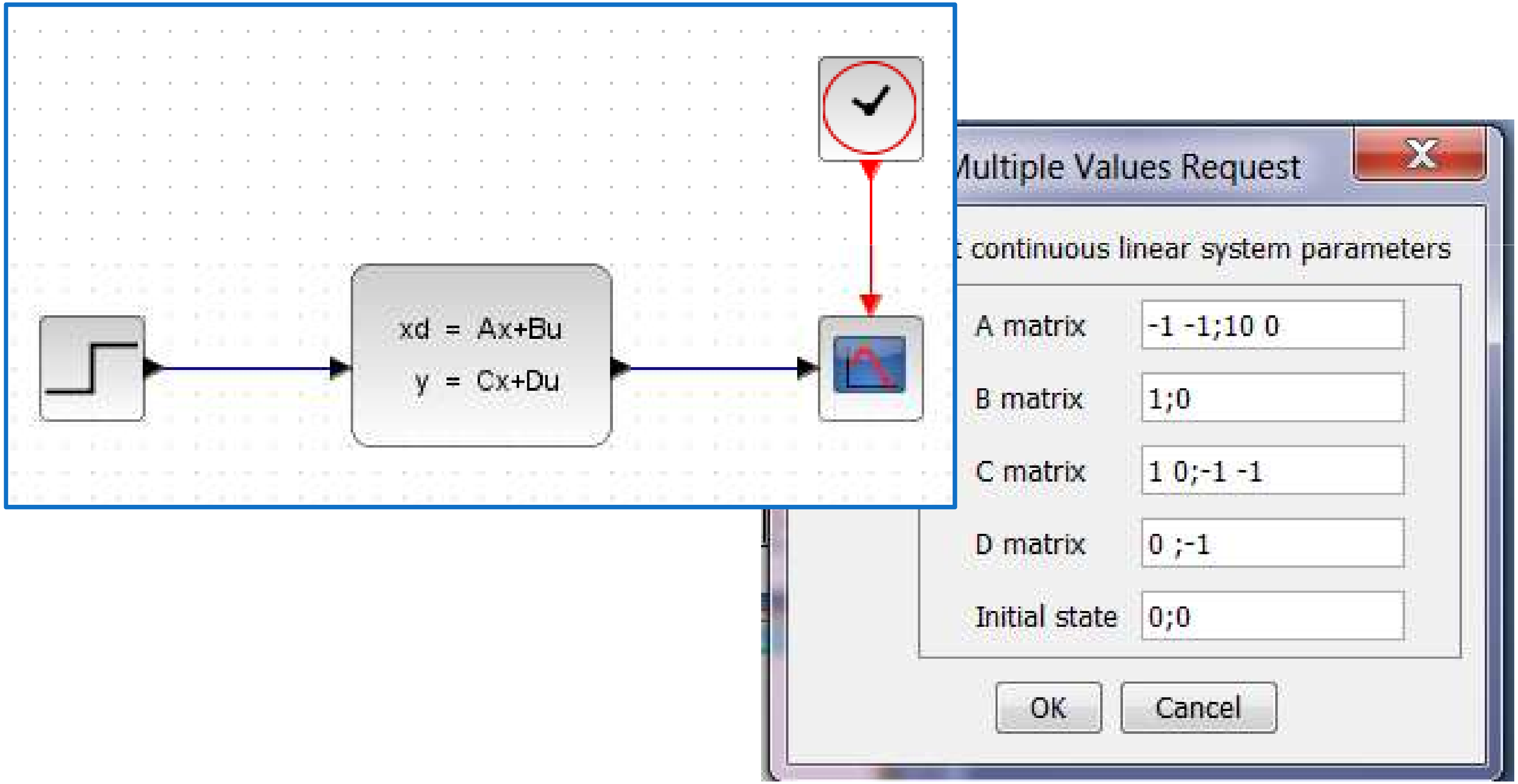
$$(1)\ v_{12} = R \cdot i + 0 \cdot v_{3g} + 0 \cdot v$$

$$(2)\ v_{23} = -Ri - v_{3g} + v$$

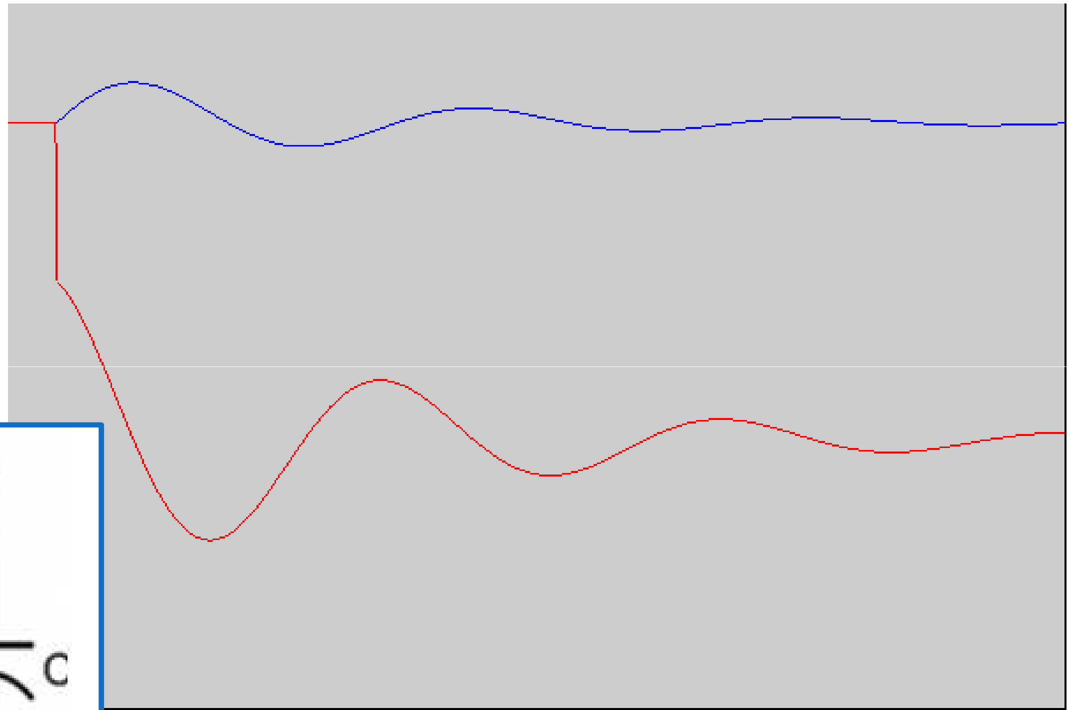
$$\begin{vmatrix} v_{12} \\ v_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R & 0 \\ -R & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} i \\ v_{3g} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} \cdot v$$

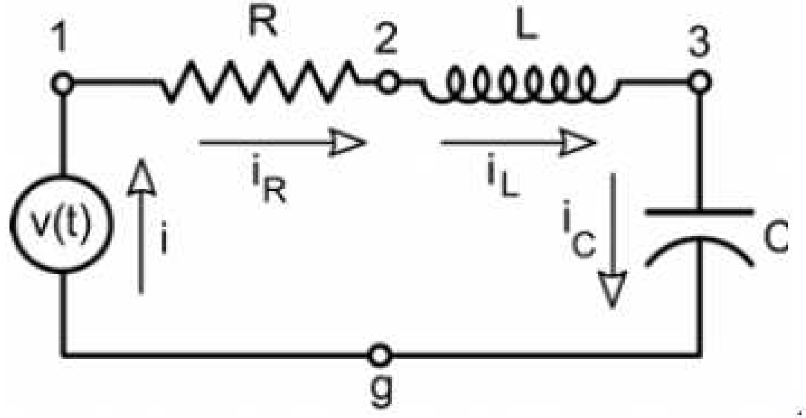
$$C = \begin{vmatrix} R & 0 \\ -R & -1 \end{vmatrix} \qquad D = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

Scilab - Xcos


xd = Ax+Bu
y = Cx+Du
Multiple Values Request
continuous linear system parameters
A matrix
-1 -1;10 0
B matrix
1;0
C matrix
1 0;-1 -1
D matrix
0 ;-1
Initial state
0;0
OK
Cancel

Egységugrás válasz - szimuláció



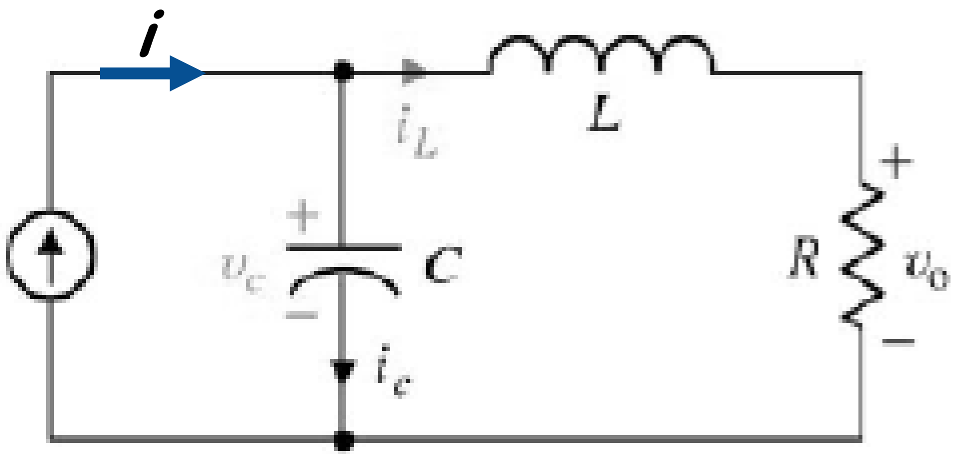


RLC áramkőr

Példa

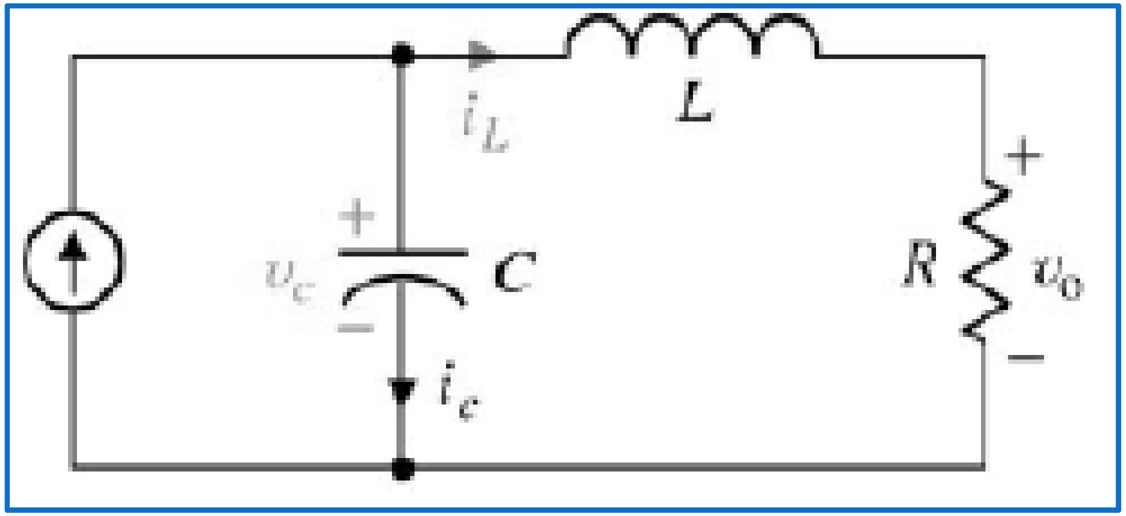
	feszültség	áram
i	u	Ismert = gerjesztés
R	Vo=válasz	i_L
L	V_L	i_L = állapot változó
C	V_C = állapot változó	i_C

Állapot változónak az energiatároló elemek tárolt mennyiségeit tekintjük.



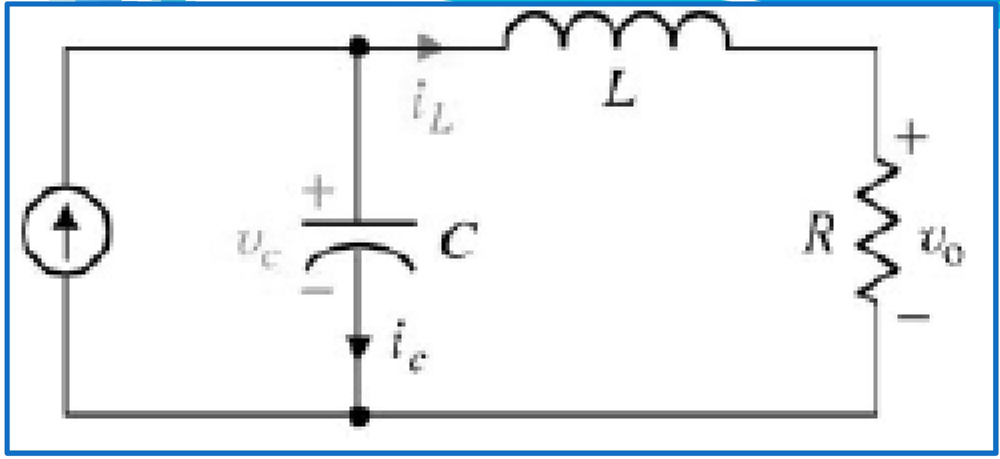
Az állapotváltozós leírás

- A kiindulópont mindig egy energiatároló elem gerjesztés-válasz kapcsolata:



$$v_L = L\frac{di_L}{dt}$$

$$i' = \frac{1}{L}\cdot v_L$$



- Az egyenletet jobboldalán megjelenő változókat kifejezzük a gerjesztés és az állapotváltozók függvényében:

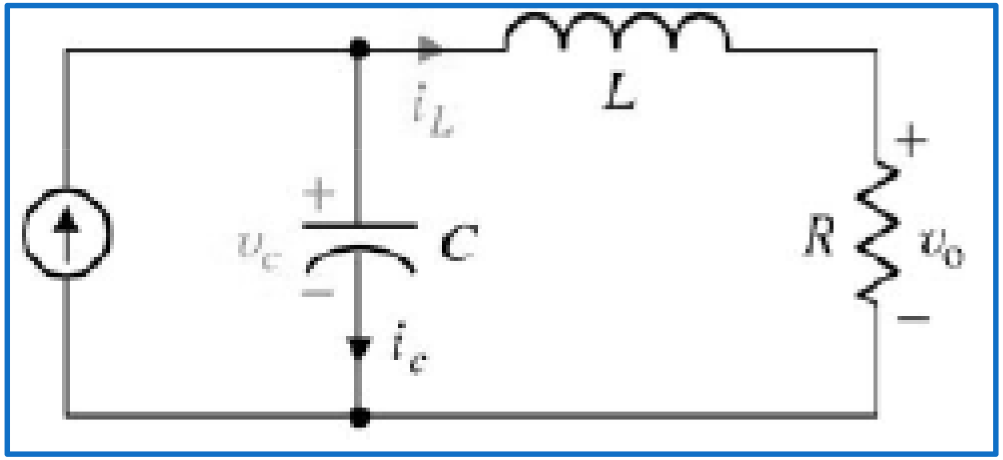
$$i' = \frac{1}{L}\cdot v_L$$

$$i' = \frac{1}{L}\cdot\left(v_C - v_O\right) = \frac{1}{L}\cdot\left(v_C - Ri_L\right)$$

$$i' = -\frac{R}{L}\cdot i_L + \frac{1}{L}\cdot v_C + 0\cdot i$$

Az állapotváltozós leírás

- Folytassuk a második állapotváltozó kifejezésével:



$$i_C = C\frac{dv_C}{dt} = C \cdot v_C'$$

$$i_C = i - i_L$$

$$v_C' = \frac{1}{C}(i - i_L) = -\frac{1}{C} \cdot i_L + 0 \cdot v_C + \frac{1}{C} \cdot i$$

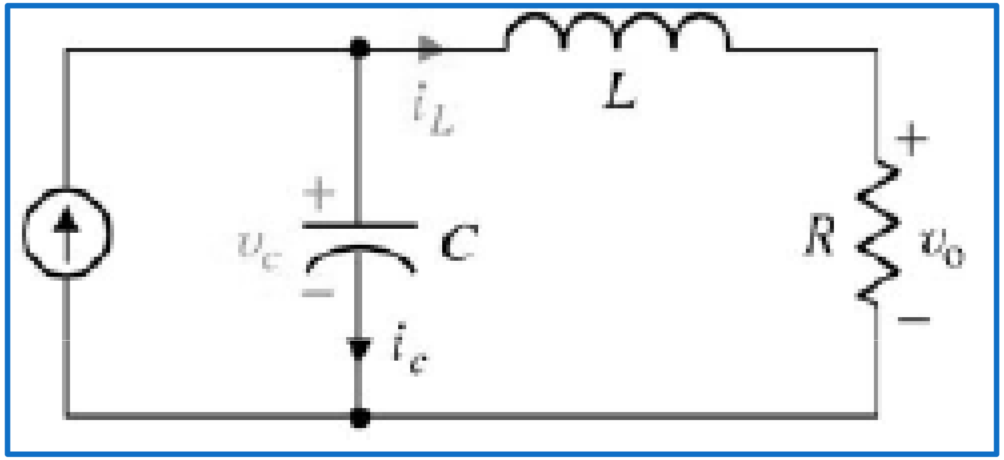
Az állapotegyenlet

$$i' = -\frac{R}{L}\cdot i_L + \frac{1}{L}\cdot v_C + 0\cdot i$$

$$v_C' = -\frac{1}{C}\cdot i_L + 0\cdot v_C + \frac{1}{C}\cdot i$$

$$\boxed{A = \begin{vmatrix} -\frac{R}{L} & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & 0 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 0 \\ \frac{1}{C} \end{vmatrix}}$$

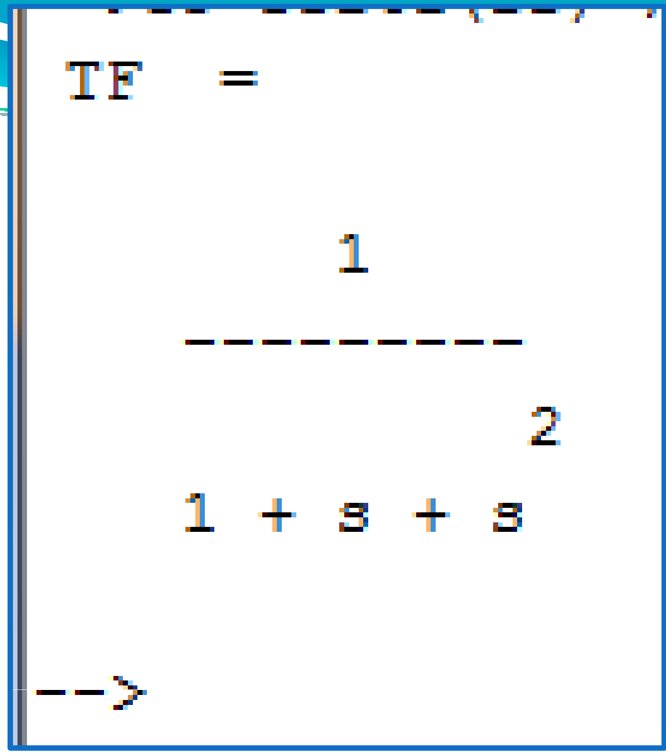
A válaszegyenlet



$$v_0 = R \cdot i_L + 0 \cdot v_C + 0 \cdot i$$

$$C = \begin{vmatrix} R & 0 \end{vmatrix} \quad D = \begin{vmatrix} 0 \end{vmatrix}$$

Scilab



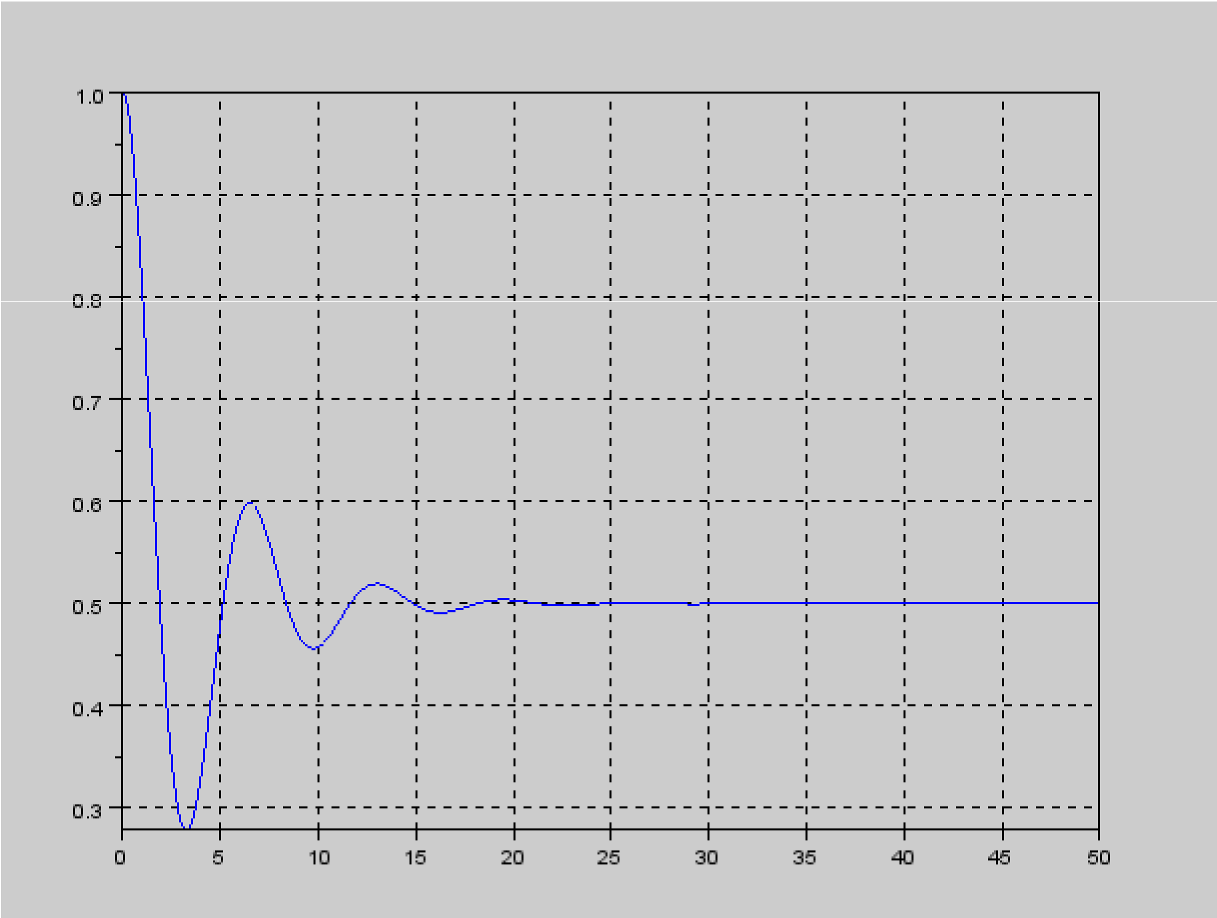
- **A=[-1,1;-1,0];**
- **B=[0;1];**
- **C=[1,0];**
- **D=[0];**
- **SS=syslin('c',A,B,C,D);** ***// ('c') FI rendszermodelt jelent***
- **TF=ss2tf(SS)** ***//a rendszer transzfer funkciója***

Scilab szimuláció

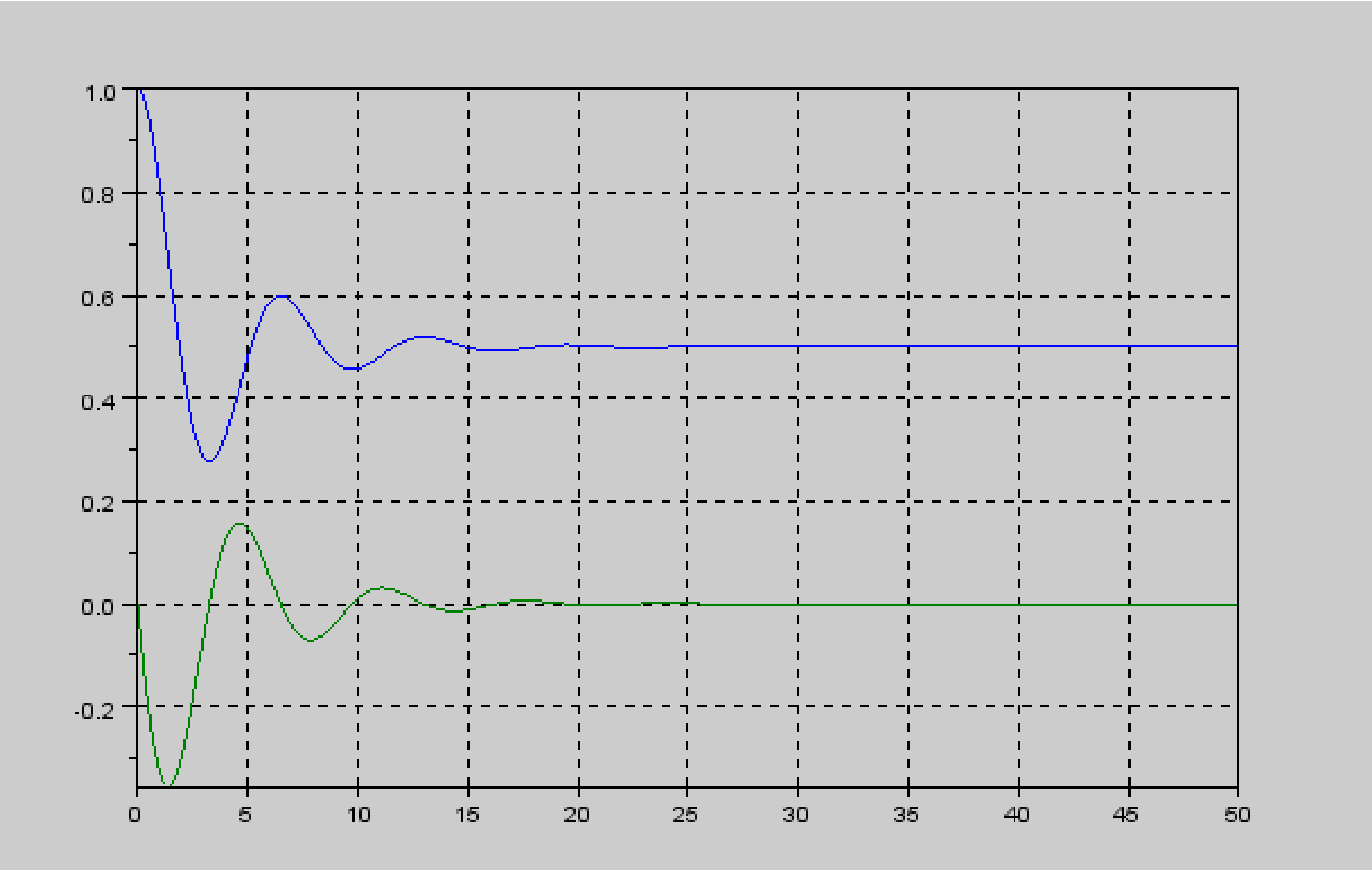
*ss_pelda.sce

```
A=[0,1;-1,-0.5];B=[0;1];C=[1,0];D=[0]; //System matrices
x0=[1;0]; //Initial state
sys=syslin('c',A,B,C,D,x0); //Creates sys as cont.-time ('c') state-space model.
t=[0:0.1:50]; //Time vector to be used in simulation
u=0.5*ones(1,length(t)); //Creates constant input signal
[y,x]=csim(u,t,sys); //Simulates sys with u as input. y is output. x are states.
scf(1);clf; //Opens and clears figure 2
plot(t,y); //Plots response in y
ax1=gca();ax1.grid=[0,0]; //Adds grid to the plot
scf(2);clf; //Opens and clears figure 2
plot(t,x); //Plots response in x
ax1=gca();ax1.grid=[0,0]; //Adds grid to the plot
```

Az egységugrás válasz



Az álapotváltozók



Scilab – impulzusválasz az álapotváltozós leírásbol

- Irjuk be a következő sorparancsokat
- -->A = [-5 -1
- --> 6 0];
- -->B = [-1; 1];
- -->C = [-1 0];
- -->D =0;
- -->Sss = syslin('c',A,B,C,D)

```
-->S=syslin('c',A,B,C,D)
 S  =


       S(1)   (state-space system:)

!lss  A  B  C  D  X0  dt  !

       S(2) = A matrix =

  - 5.  - 1.
    6.    0.

       S(3) = B matrix =

  - 1.
    1.

       S(4) = C matrix =

  - 1.    0.

       S(5) = D matrix =

    0.

       S(6) = X0 (initial state) =

[Continue display? n (no) to stop, any other key to continue]
```