

Analízis a frekvenciatarományban

Jelek és rendszerek - 7

Bevezetés

- Egy rendszernek az időtartományban történő leírása tekinthető a természetes eljárásnak.
- Egyes esetekben ez a kézenfekvő eljárás körülményes.
- Előnyösebb lehet a rendszert a frekvenciatartományban leírni
- Az időtartományban értelmezett állapotváltozós leírás általánosítható nemlineáris és variáns rendszerekre a frekvenciatartománybeli leírás csak lineáris, invariáns rendszerekre kényelmes.
- A továbbiakban ezért lineáris, invariáns diszkrét idejű és folytonos idejű rendszerek tárgyalására szorítkozunk.

Tematika

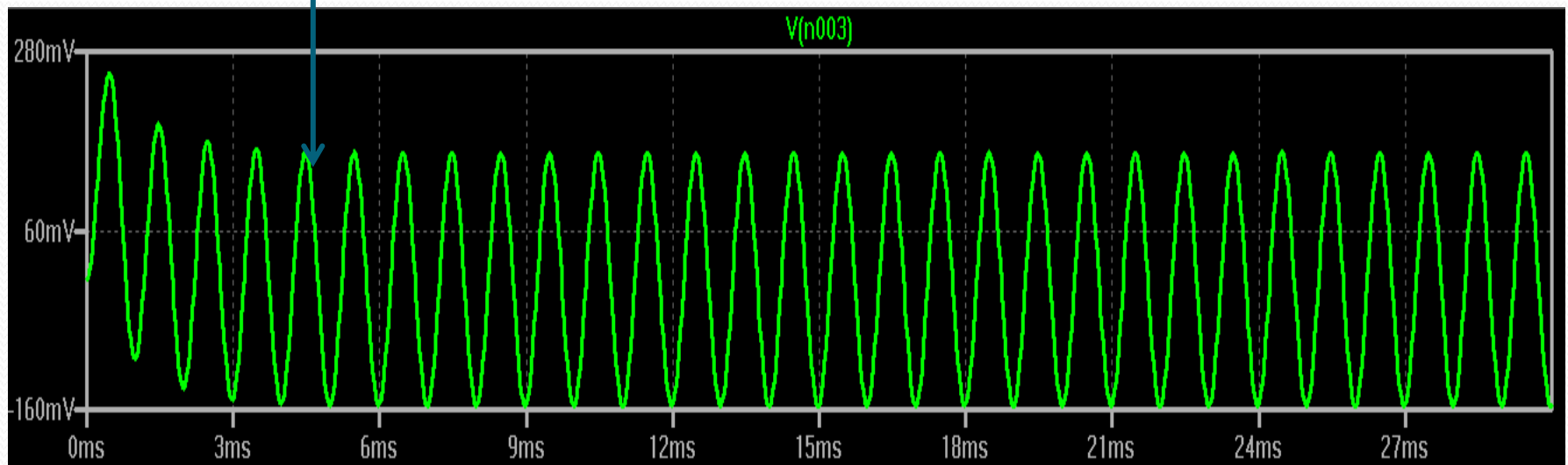
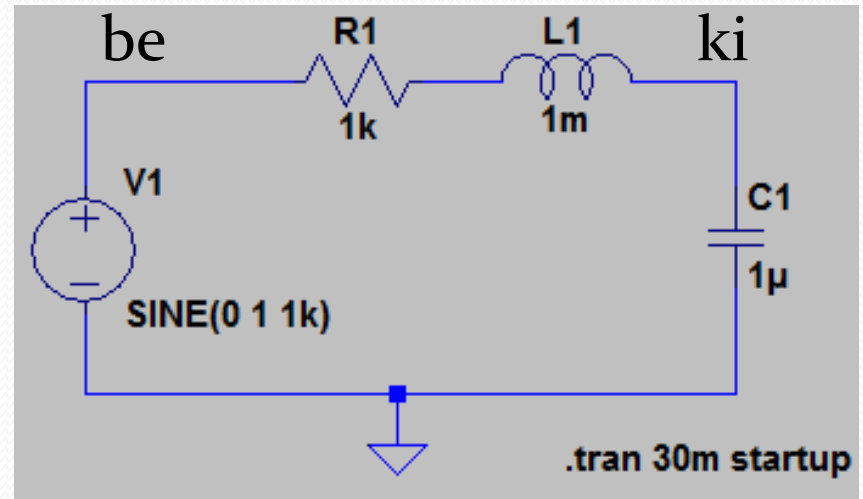
- Periodikus gerjesztő jelhez tartozó válasz számítása.
- Átviteli együttható és átviteli karakterisztika.
- Az átviteli karakterisztika ábrázolása.
- Átviteli karakterisztika és a rendszeregyenlet.
- Z - transzformáció

Állandósult válasz

- Az LTI rendszerek, szinuszos gerjesztésre szinuszos választ adnak.
- Mivel a gerjesztés belépő jellegű, az állandósult válasz csak egy bizonyos idő eltelte után mérhető a rendszer kimenetén.
- Közvetlenül a gerjesztés belépése után, a válasznak egy tranziens összetevője is van.
- A tranziens összetevőről a továbbiakban nem lesz szó.

Példa

válasz
tranzien্স állandósult



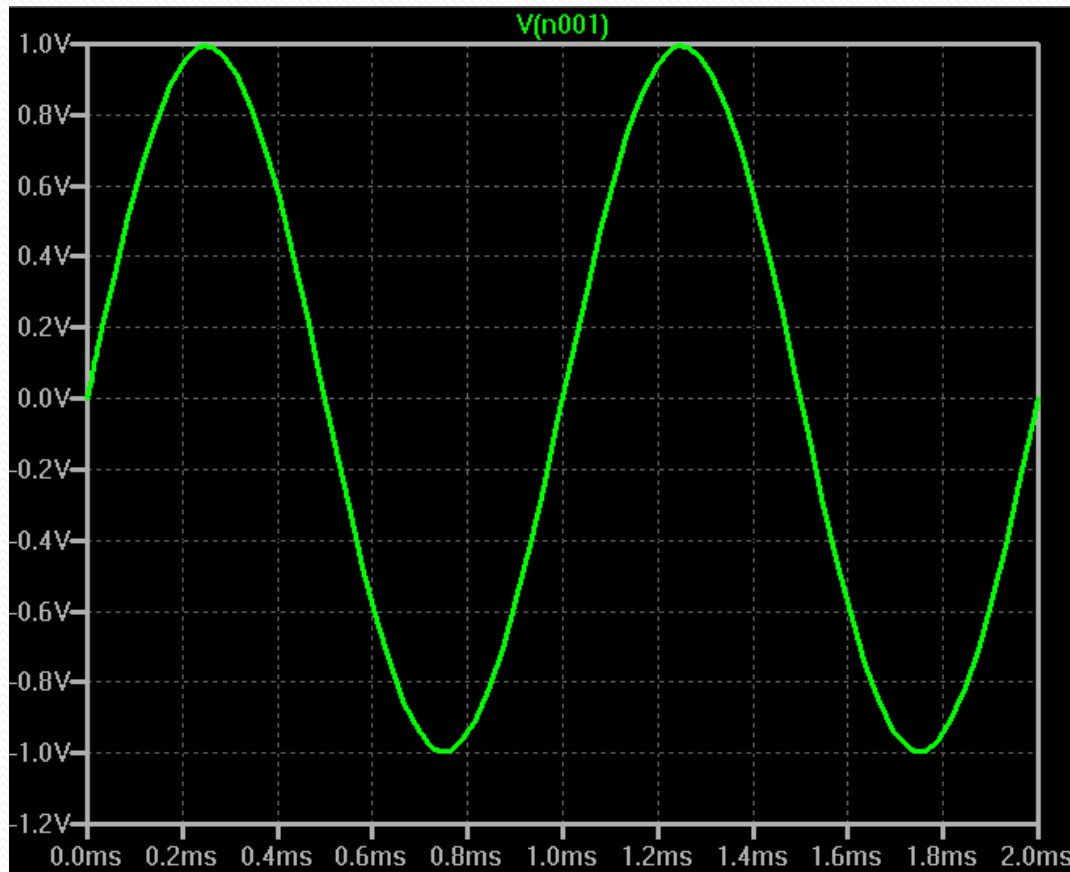
Folytonos idejű szinuszos jel

- Egy $x = x(t)$ folytonos idejű szinuszos jel három valós adattal jellemezhető. Ezek:
 - az x jel X amplitúdója vagy csúcsértéke
 - az x jel ϕ kezdőfázisa vagy fázisszöge
 - az x jel T periódusa
- A periódus heljett
 - az f frekvencia
- vagy
- az ω körfrekvencia
- használható.

$$f = \frac{1}{T}$$

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

Példa



Az ábrából:

- $X=1\text{V}$
- $\phi=0$ radián / s
- $T=1\text{ ms}$

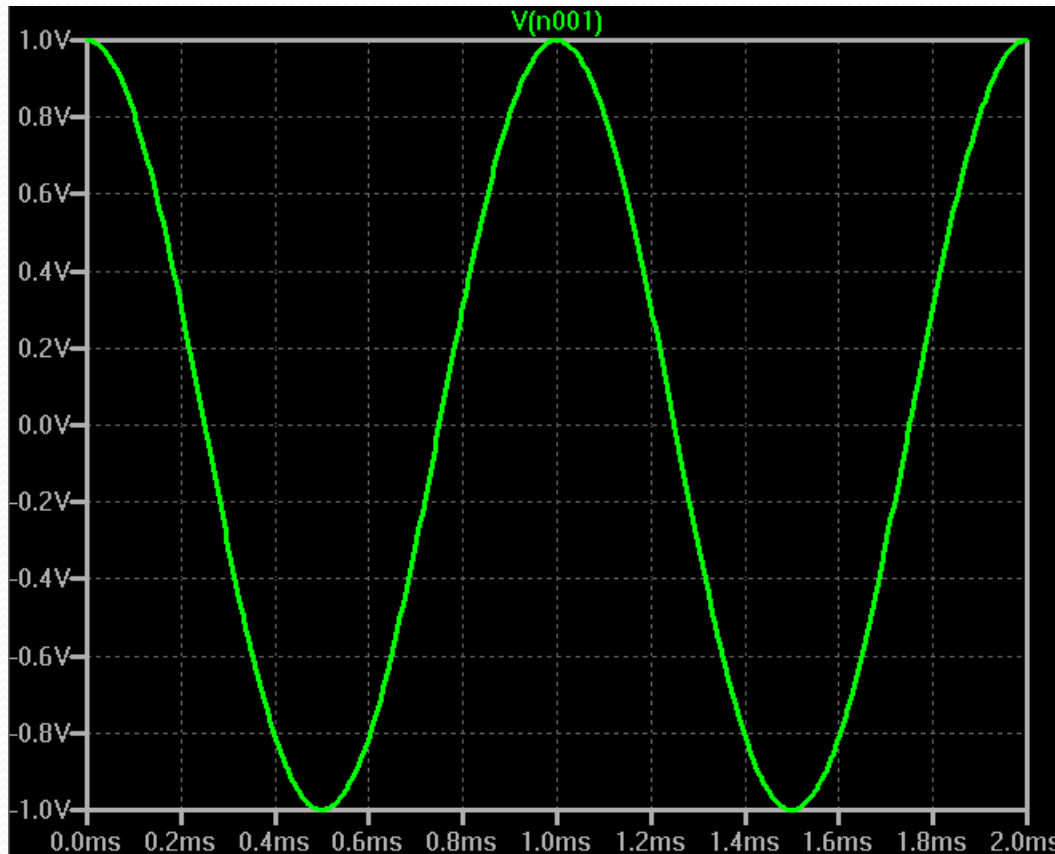
A periódusból:

- $f=1\text{ kHz}$
- $\omega=2000\pi\text{ rad / s}$

Leírás:

- $x=\sin(2000\pi t)$

Példa



Az ábrából:

- $X=1\text{V}$
- $\phi=\pi/2$ radián / s
- $T=1\text{ ms}$

A periódusból:

- $f=1\text{ kHz}$
- $\omega=2000\pi\text{ rad / s}$

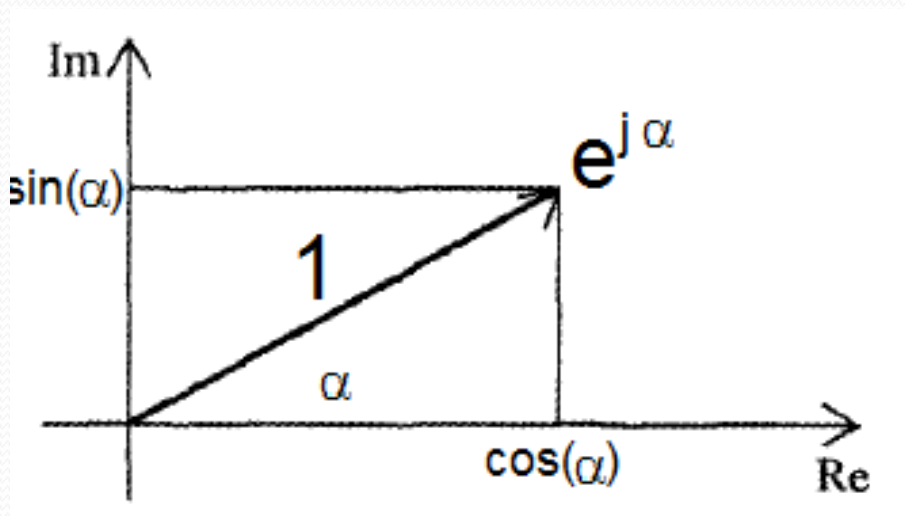
Leírás:

- $x=\sin(2000\pi t+\pi/2) = \cos(2000\pi t)$

Szinuszos jel komplex leírása

- A szinuszos jelek komplex alakú leírásának alapja az Euler-reláció:

$$e^{j\alpha} = \cos(\alpha) + j \cdot \sin(\alpha)$$



$$\cos(\alpha) = \operatorname{Re}\{e^{j\alpha}\}$$

$$\sin(\alpha) = \operatorname{Im}\{e^{j\alpha}\}$$

Komplex amplitúdó (fazor)

- Az $x(t)$ szinuszos jel, amelynek amplitúdója X , kezdőfázisa ϕ , tömören jellemezhető az X fazorral:

$$\overline{X} = X \cdot e^{j(\omega \cdot t + \phi)}$$

- A reális szinuszos jel e fazornak a valós vagy a képzetes része.

Példa

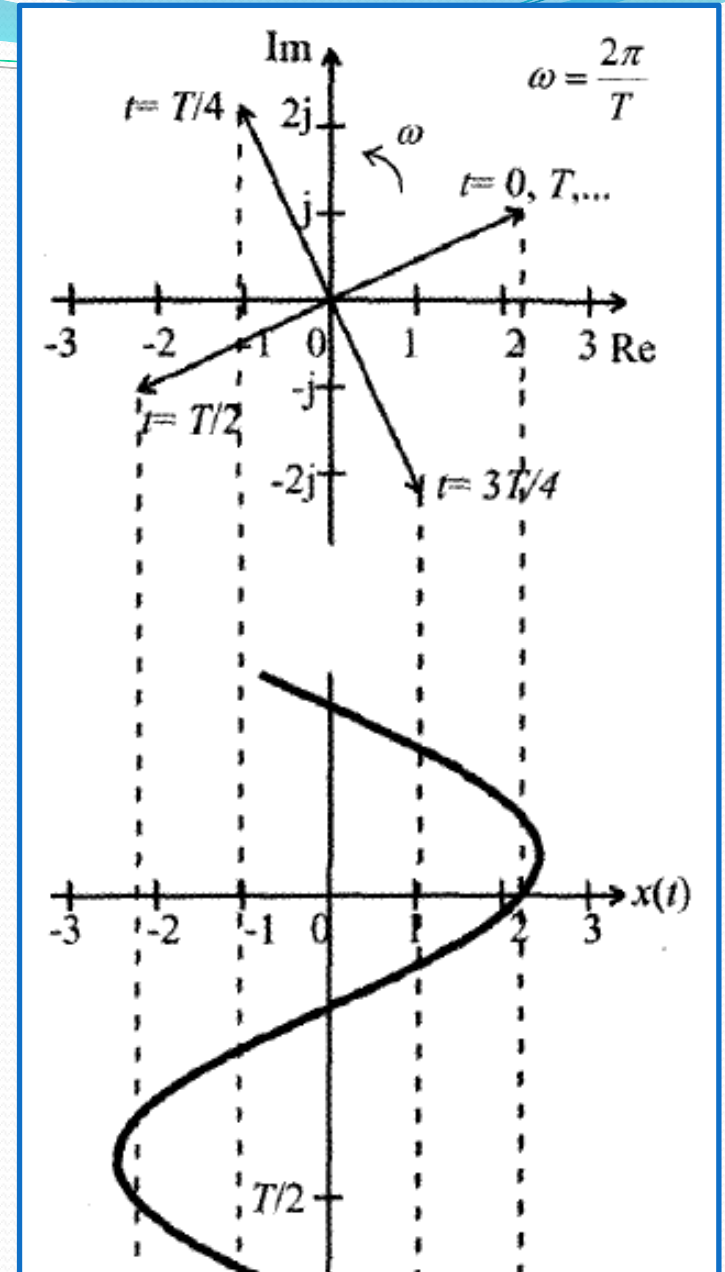
$$x(t) = 2.5 \cdot \cos(\omega t + \phi)$$

vagy:

$$x(t) = \operatorname{Re}\{2.5 \cdot e^{j \cdot (\omega t + \phi)}\}$$

vagy:

$$\overline{X} = 2.5 \cdot e^{j \cdot (\omega t + \phi)}$$



Átviteli együttható

- A lineáris, invariáns rendszer H átviteli együtthatója egy rögzített ω körfrekvencián :

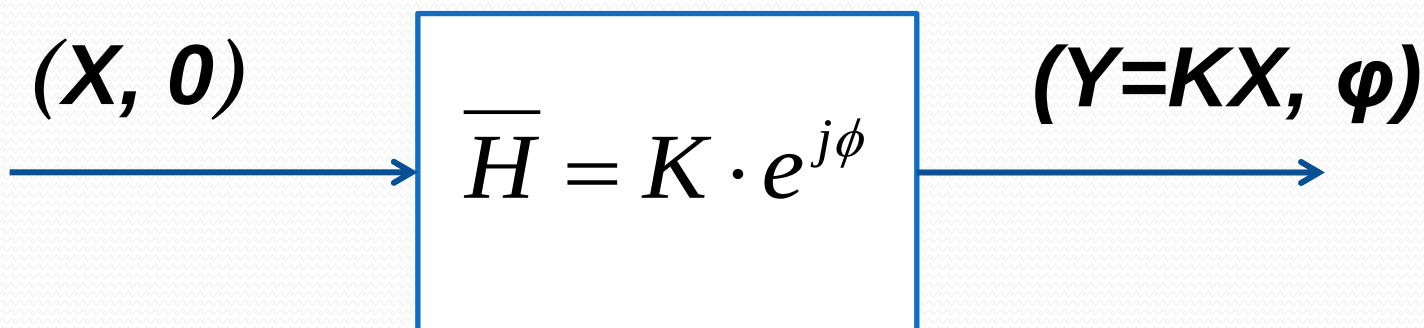
$$\overline{H} = \frac{\overline{Y}}{\overline{X}} \Big|_{\omega=\text{állandó}}$$



Frekvenciatarománybeli analízis

- x és y helyett X és Y fazorokat alkalmazzuk.

$$\overline{H} = \frac{\overline{Y}}{\overline{X}} = \frac{Y \cdot e^{j(\omega t + \phi)}}{X \cdot e^{j\omega t}} = K \cdot e^{j\phi}$$



Átviteli karakterisztika

- Az átviteli együttható általában frekvencia függő.
- A rendszer $H(j\omega)$ átviteli karakterisztikája nem más mint az átviteli együttható frekvencia függvénye.

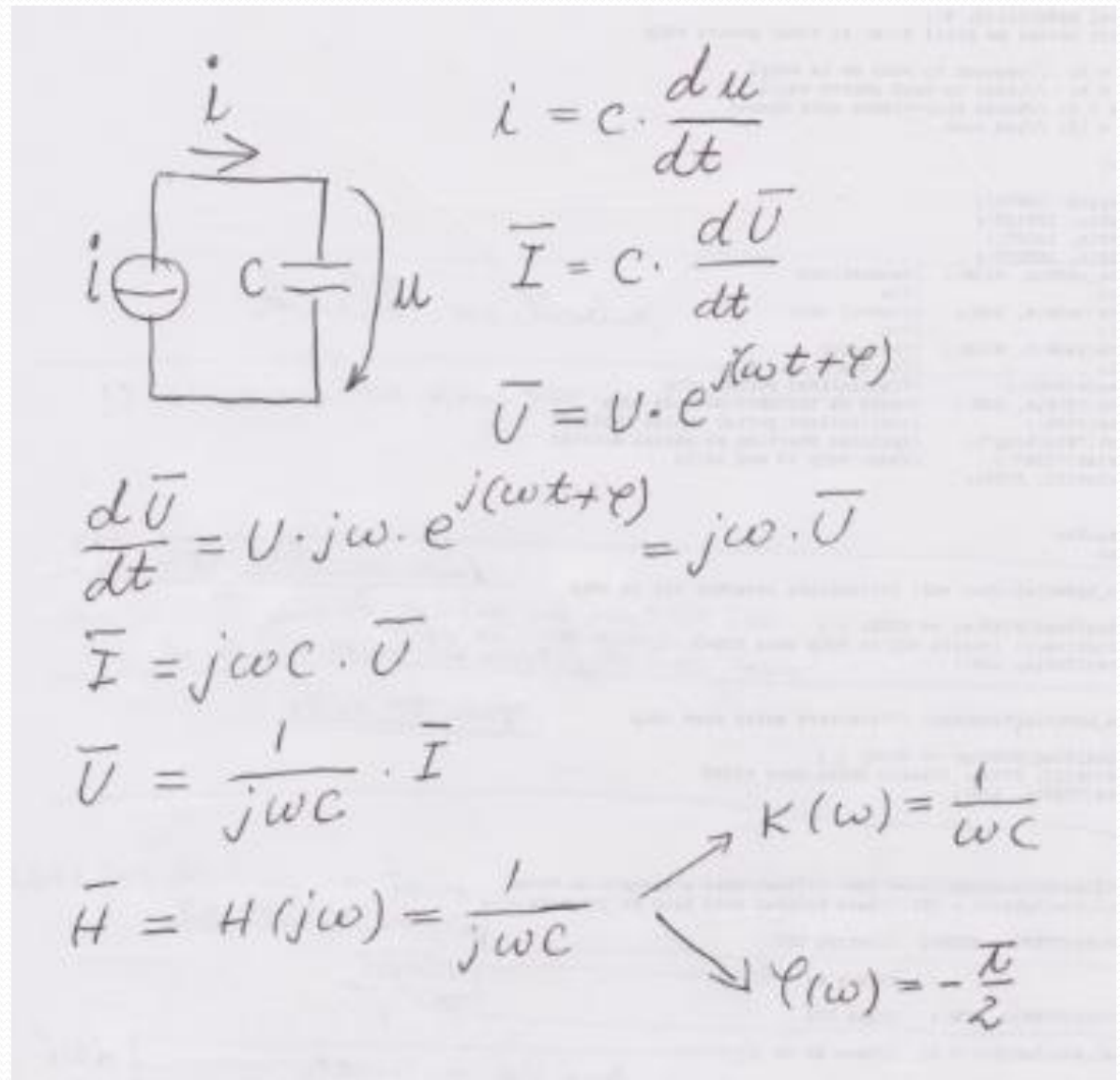
$$H(j\omega) = K(\omega) \cdot e^{j\phi(\omega)}$$

Amplitúdó karakterisztika

Fázis karakterisztika

Példa

- Egy kondenzátor átviteli karakterisztikája a rendszeregyenlet alapján:

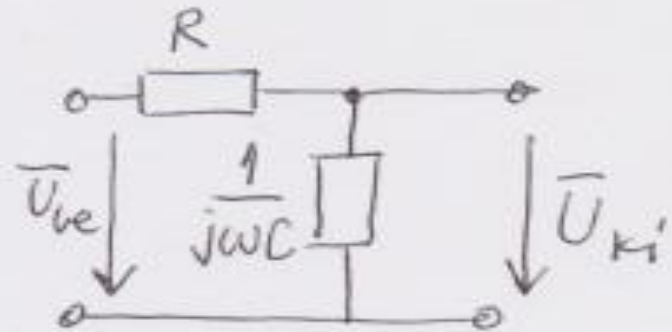
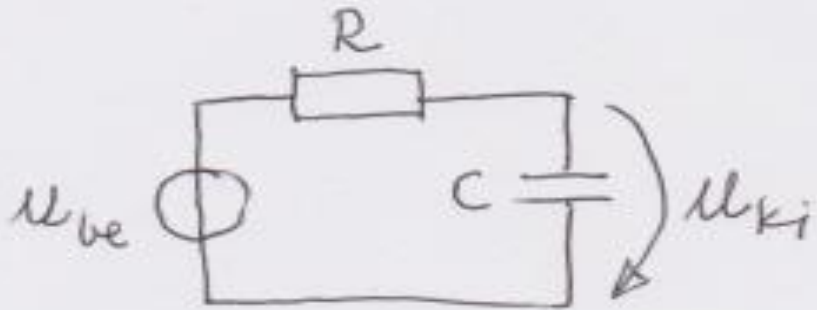


The image shows a handwritten derivation of the transfer function for a capacitor circuit. It begins with a circuit diagram of an AC voltage source i connected to a capacitor C . The voltage across the capacitor is labeled u . To the right of the diagram, the time-domain relationship is given as $i = C \cdot \frac{du}{dt}$. This is then converted to the phasor domain, resulting in $\bar{I} = C \cdot \frac{d\bar{U}}{dt}$. The voltage is expressed as $\bar{U} = U \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}$. Differentiating this with respect to time yields $\frac{d\bar{U}}{dt} = U \cdot j\omega \cdot e^{j(\omega t + \varphi)} = j\omega \cdot \bar{U}$. Substituting this into the phasor equation gives $\bar{I} = j\omega C \cdot \bar{U}$. Rearranging for voltage gives $\bar{U} = \frac{1}{j\omega C} \cdot \bar{I}$. Finally, the transfer function is identified as $\bar{H} = H(j\omega) = \frac{1}{j\omega C}$. Two arrows point from this expression to the magnitude $K(\omega) = \frac{1}{\omega C}$ and the phase $\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2}$.

$$i = C \cdot \frac{du}{dt}$$
$$\bar{I} = C \cdot \frac{d\bar{U}}{dt}$$
$$\bar{U} = U \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}$$
$$\frac{d\bar{U}}{dt} = U \cdot j\omega \cdot e^{j(\omega t + \varphi)} = j\omega \cdot \bar{U}$$
$$\bar{I} = j\omega C \cdot \bar{U}$$
$$\bar{U} = \frac{1}{j\omega C} \cdot \bar{I}$$
$$\bar{H} = H(j\omega) = \frac{1}{j\omega C}$$
$$K(\omega) = \frac{1}{\omega C}$$
$$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2}$$

Példa

- Egy aluláteresztő szűrő átviteli karakterisztikája az áramköri elemek átviteli karakterisztikája alapján:



$$\bar{H} = \frac{\bar{U}_{ki}}{\bar{U}_{be}} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{j\omega CR + 1}$$

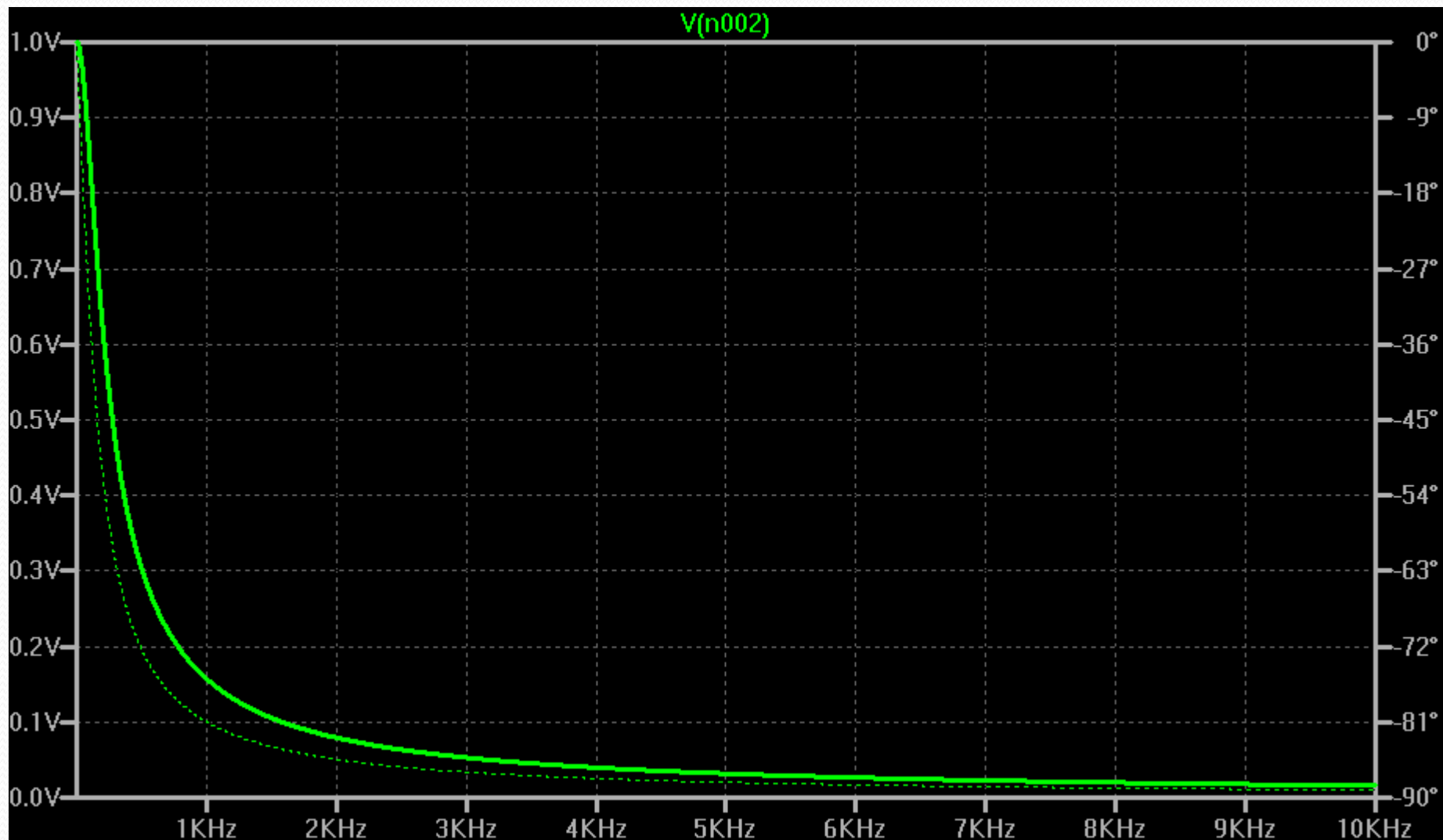
$$K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 C^2 R^2}}$$

$$\varphi = -\arctan(\omega CR)$$

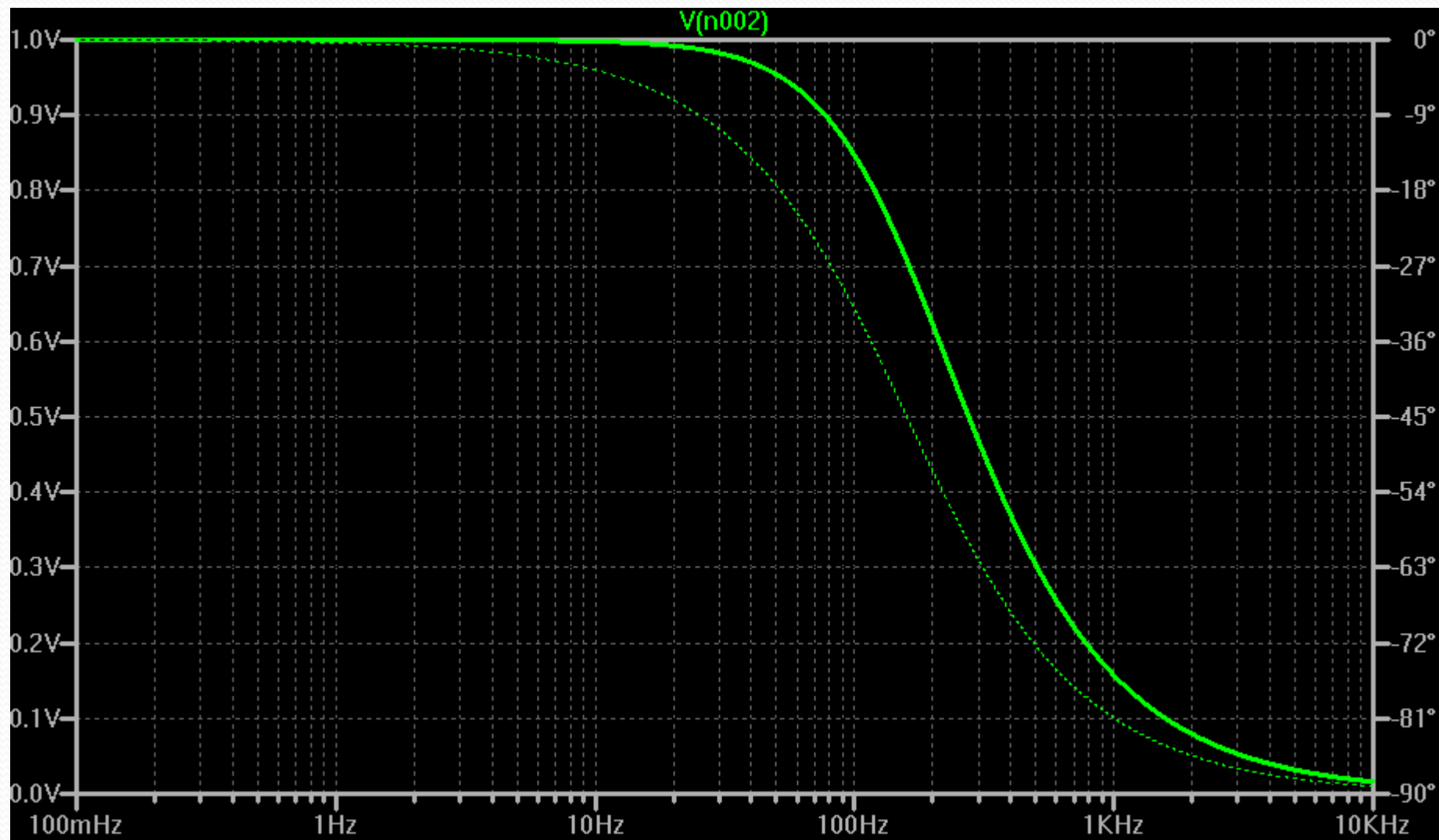
Az átviteli karakterisztika ábrázolása

1. Az amplitúdó és a fázis lineáris ábrázolása
2. A Bode-diagram
3. A Nyquist-diagram

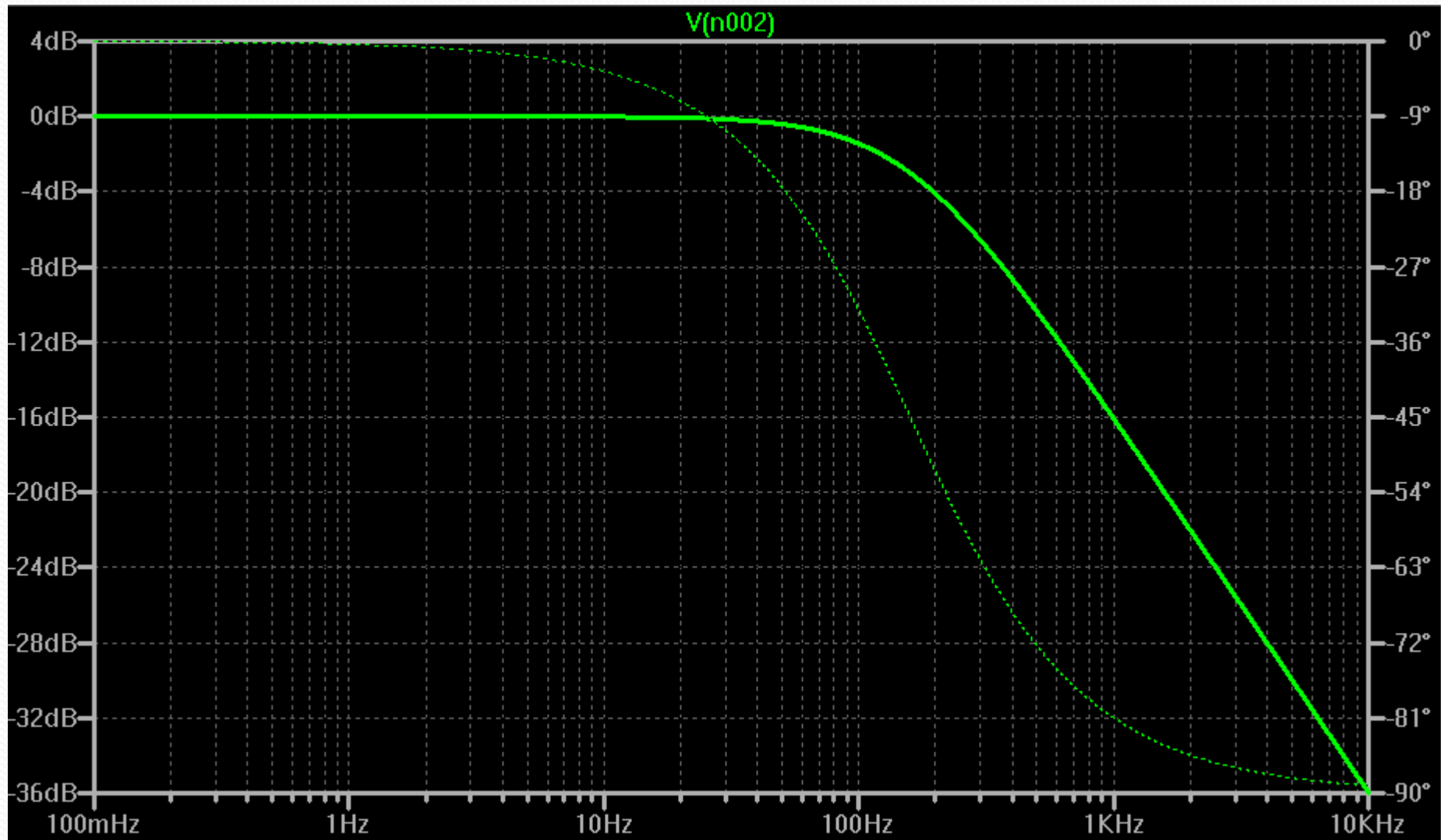
Lineáris ábrázolás ($R=1\text{k}\Omega$, $C=1\mu\text{F}$)



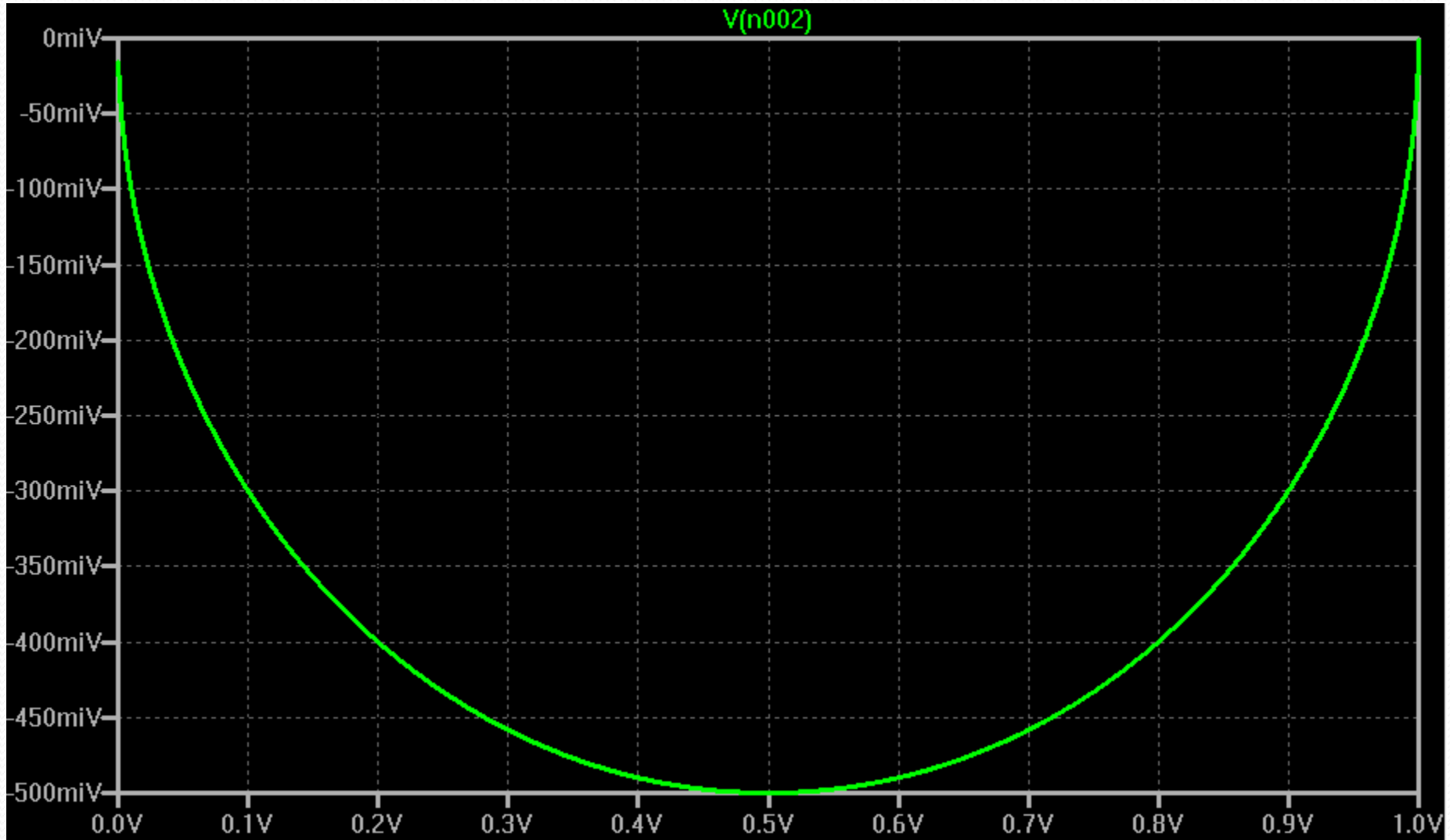
Lineáris ábrázolás logaritmikus frekvencia skálával



Bode diagram



Nyquist diagram



Az átviteli karakterisztika és a rendszeregyenlet.

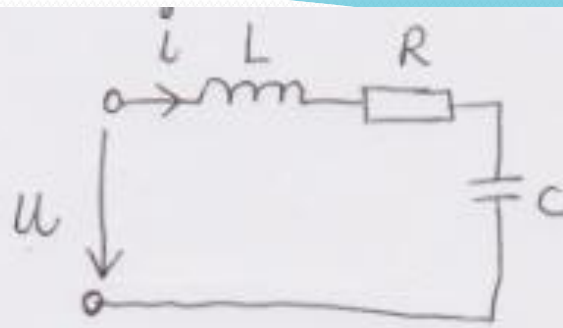
- Egy LTI, kauzális, GV stabilis, folytonos idejű, rendszer rendszeregyenlete :

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2} y}{dt^{n-2}} + \dots + a_n y = b_0 \frac{d^n x}{dt^n} + b_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + b_2 \frac{d^{n-2} x}{dt^{n-2}} + \dots + b_n x$$

- Az átviteli karakterisztika: $\frac{d^n}{dt^n} \Leftrightarrow (j\omega)^n$

$$H(j\omega) = \frac{b_0 (j\omega)^n + b_1 (j\omega)^{n-1} + b_2 (j\omega)^{n-2} + \dots + b_{n-1} (j\omega) + b_n}{(j\omega)^n + a_1 (j\omega)^{n-1} + a_2 (j\omega)^{n-2} + \dots + a_{n-1} (j\omega) + a_n}.$$

Példa



$$u = u_L + u_R + u_C =$$

$$= L \cdot \frac{di}{dt} + R \cdot i + \frac{1}{C} \int i dt$$

$$\frac{du}{dt} = L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \cdot i$$

$$L \cdot \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \cdot i = \frac{du}{dt}$$

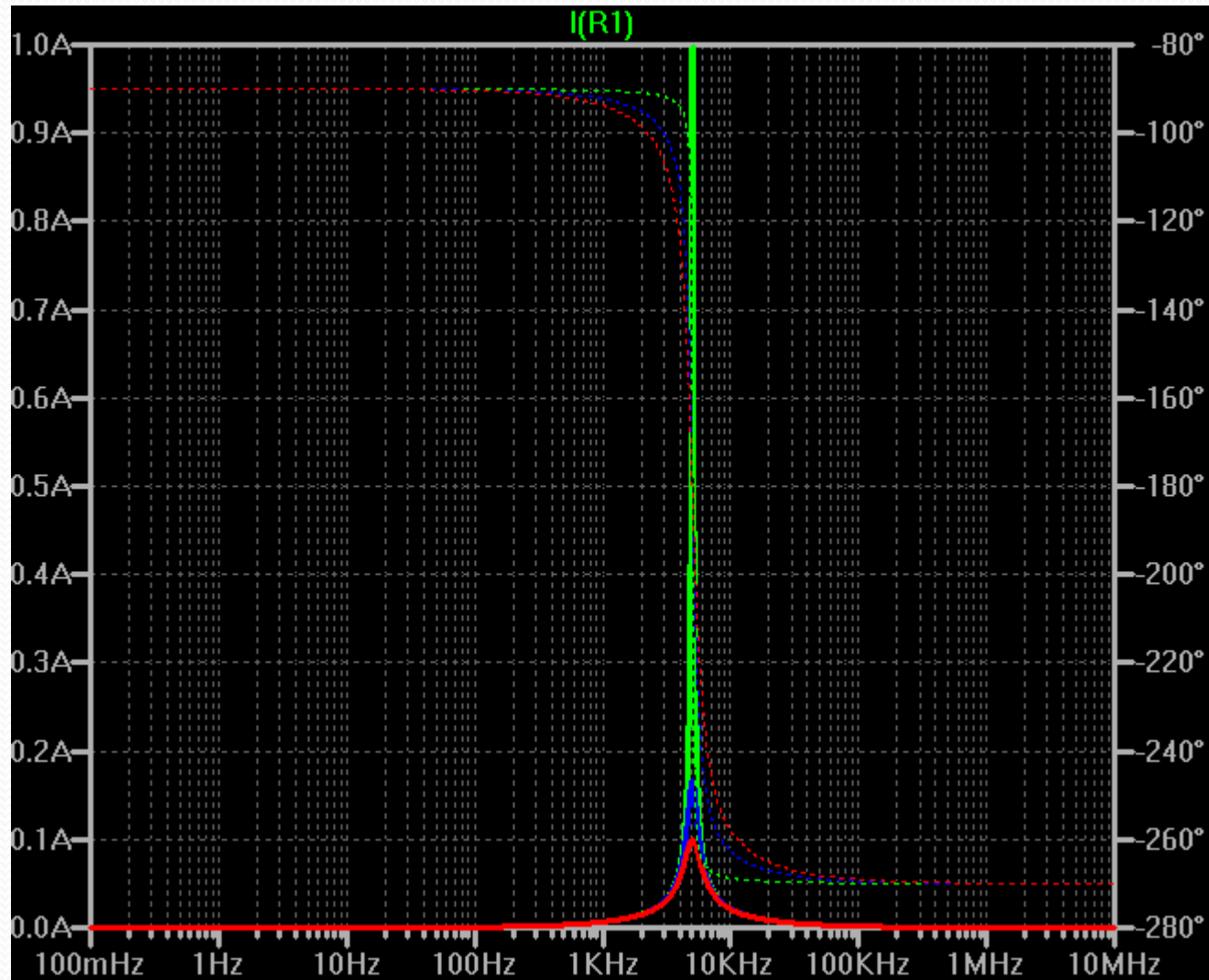
$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} \cdot i = \frac{1}{L} \frac{du}{dt} \quad (\text{rendszer egyenlete})$$

$$H(j\omega) = \frac{\frac{1}{L} \cdot j\omega}{(j\omega)^2 + \frac{R}{L} j\omega + \frac{1}{LC}} = \frac{\frac{1}{L} j\omega}{\frac{1}{LC} - \omega^2 + \frac{R}{L} j\omega}$$

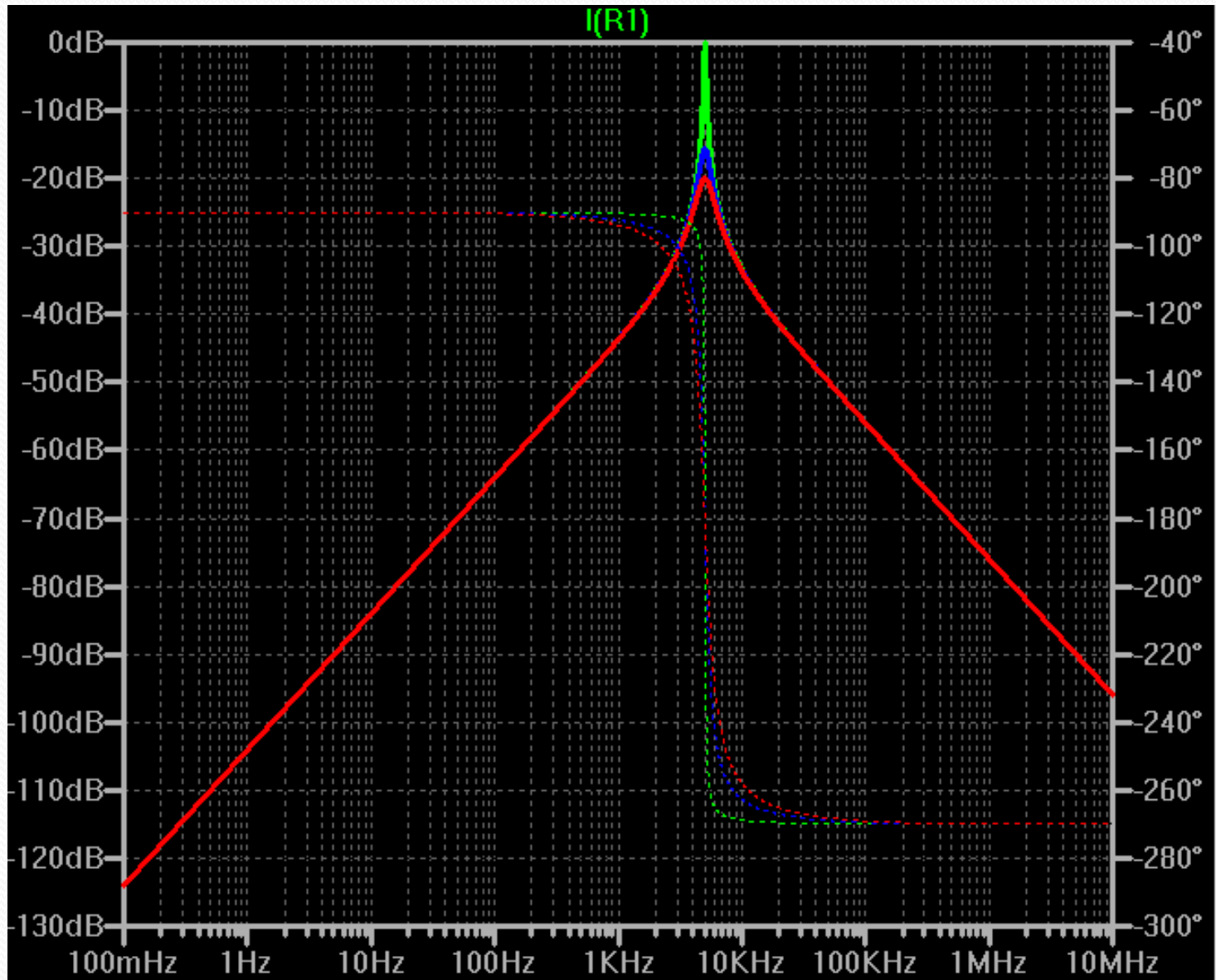
$$\text{ha } \omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$H(j\omega_0) = \frac{1}{R}$$

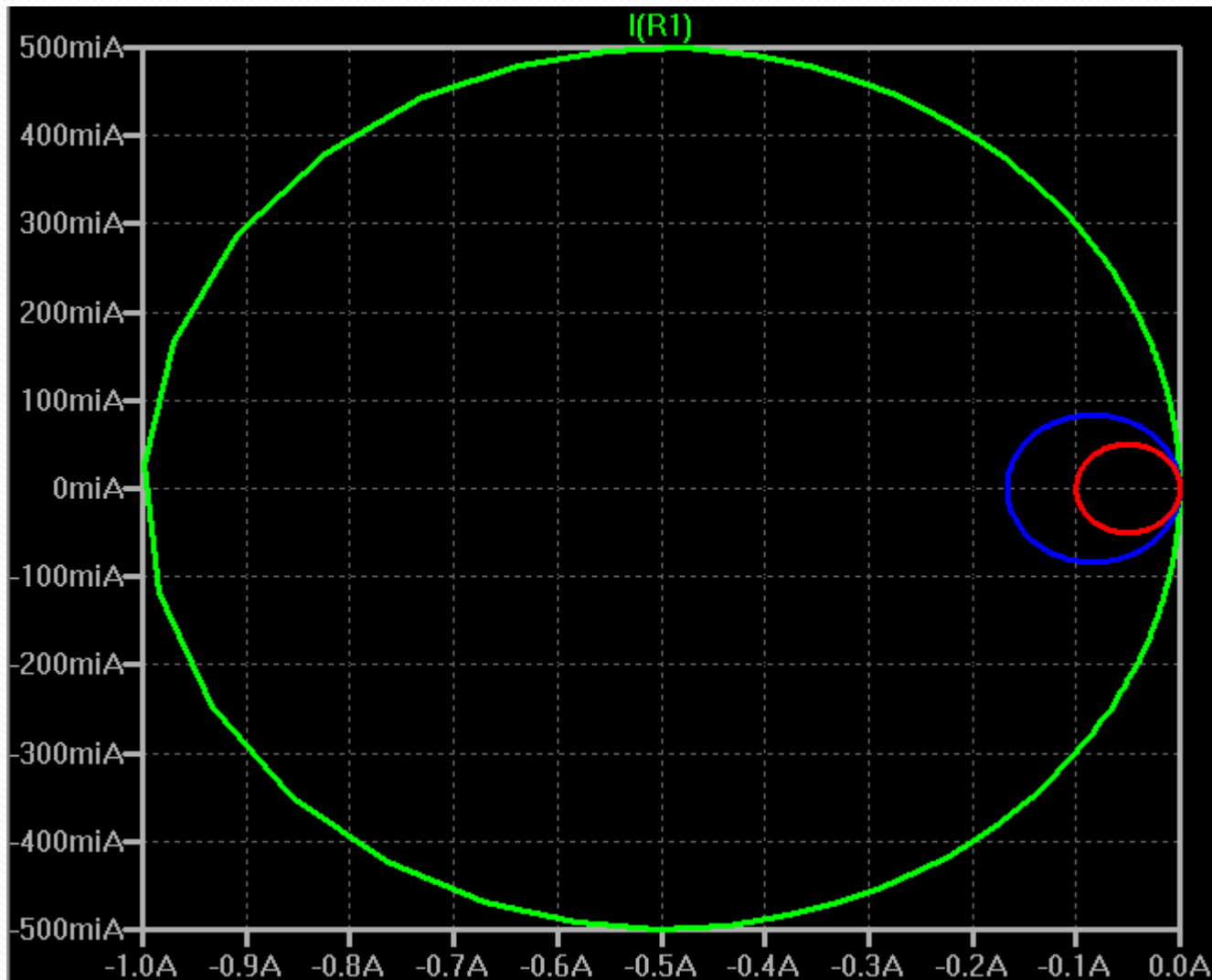
Lineáris ábrázolás logaritmikus frekvencia skála ($R=10\Omega$, $L=1\text{mH}$, $C=1\mu\text{F}$)



Bode diagram



Nyquist diagram (R=1, 6, 10)



Diszkrét idejű szinuszos jel

- Egy X amplitúdójú, T periódusú, nulla kezdeti fázisú FI szinusz:

$$x = X \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$$

- Δt időközönként mintát veszünk a jelből:

$$x_k = X \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \Delta t \cdot k\right)$$

- Egy periódusban N mintát veszünk: $\frac{T}{\Delta t} = N$

- DI szinusz: $x[k] = X \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{N} \cdot k\right)$

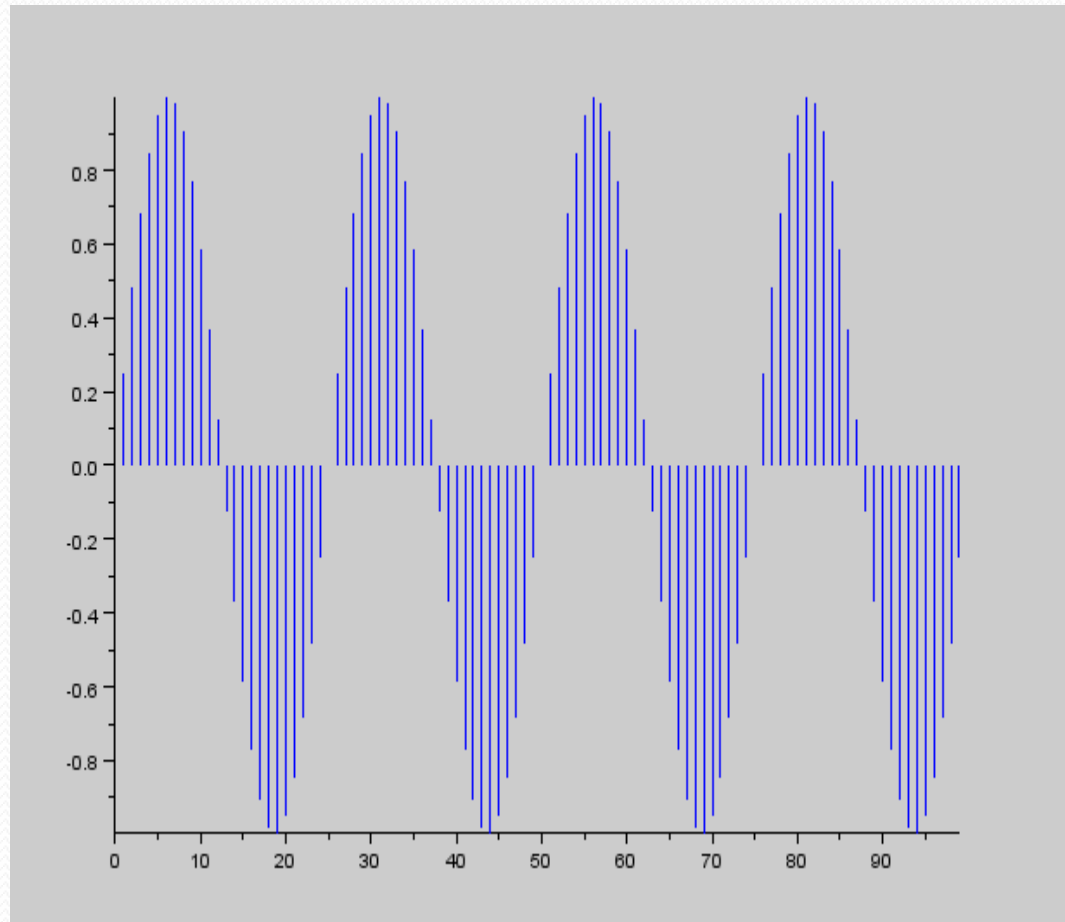
DI szinusz vs. FI szinusz

$$x(t) = X \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \quad \longleftrightarrow \quad x[k] = X \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{N} \cdot k\right)$$

- T [s] = periódus = N
- $\omega = 2\pi/T$ [rad./s] = körfrekvencia = $\Omega = 2\pi/N$ [rad.]

Scilab példa

- $k=0:99$
- $N=25$
- $x=\sin(2*\%pi*k/N)$
- $\text{plot2d3}(k,x)$



Komplex amplitúdó (fazor)

- Az $x[k]$ szinuszos jel, amelynek amplitúdója X , kezdőfázisa ϕ , tömören jellemezhető az X fazorral:

$$\overline{X} = X \cdot e^{j(\Omega \cdot k + \phi)}$$

- A reális szinuszos jel e fazornak a valós vagy a képzetes része.

Példa (N=6)

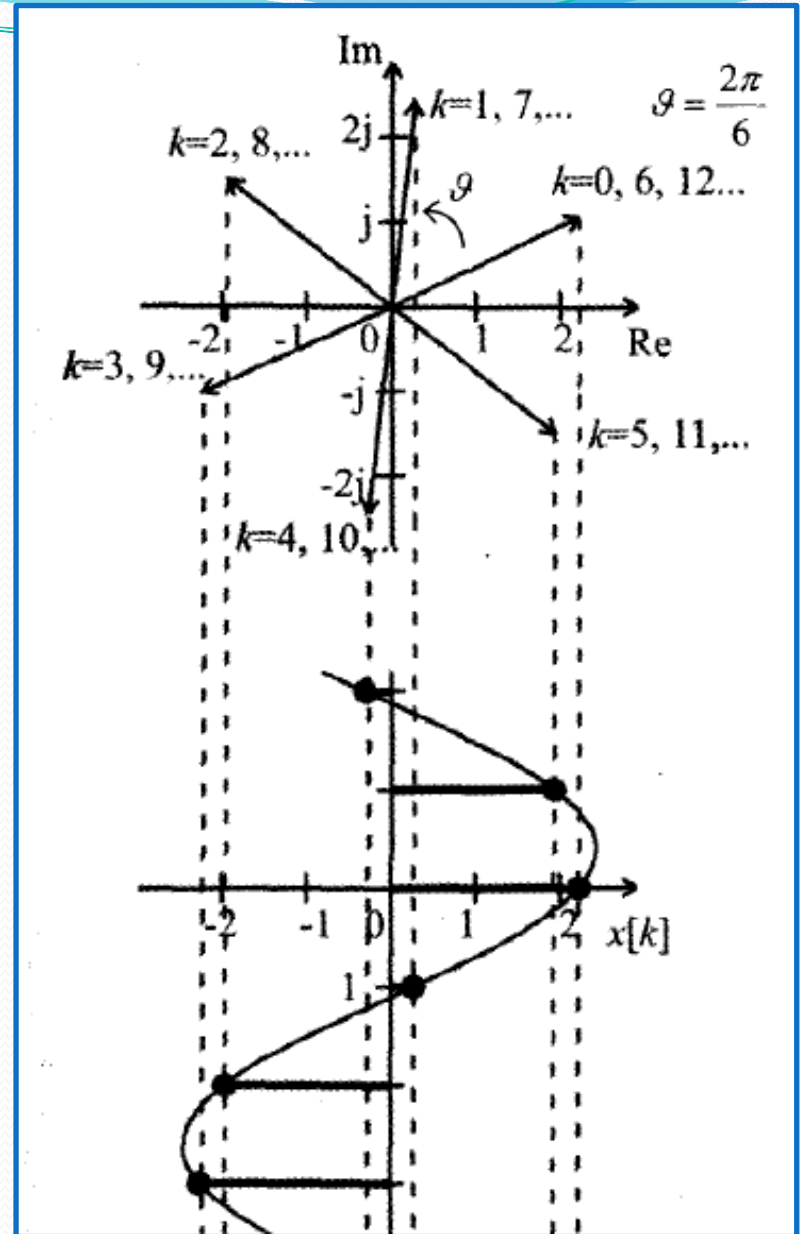
$$x(k) = 2.5 \cdot \cos(\Omega k + \phi)$$

vagy:

$$x(k) = \operatorname{Re}\{2.5 \cdot e^{j \cdot (\Omega k + \phi)}\}$$

vagy:

$$\overline{X} = 2.5 \cdot e^{j\phi} \cdot e^{j \cdot (\Omega k)}$$



A DI átviteli karakterisztika és a rendszeregyenlet.

- Egy LTI, kauzális, GV stabilis, DI rendszer rendszeregyenlete :

$$y[k] + a_1 y[k-1] + \dots + a_n y[k-n] = b_0 x[k] + b_1 x[k-1] + \dots + b_m x[k-m]$$

- Az átviteli karakterisztika: $k-m \Leftrightarrow e^{-jm\Omega}$

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{b_0 + b_1 e^{-j\Omega} + b_2 e^{-j2\Omega} \dots + b_m e^{-jm\Omega}}{1 + a_1 e^{-j\Omega} + a_2 e^{-j2\Omega} \dots + a_n e^{-jn\Omega}}$$

Z - transzformáció

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{b_0 + b_1 e^{-j\Omega} + b_2 e^{-j2\Omega} \dots + b_m e^{-jm\Omega}}{1 + a_1 e^{-j\Omega} + a_2 e^{-j2\Omega} \dots + a_n e^{-jn\Omega}}$$

$$e^{j\Omega} = z$$

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} \dots + a_n z^{-n}}$$