

A Fourier transzformáció

Jelek és rendszerek - 8

Összefoglaló

- Az időtartományban történő leírás a rendszer válasz tranziens részének megvizsgálására alkalmas.
- Az állandósult választ előnyösen egy frekvencia tartománybeli leírással megvizsgálni.
- Ennek az alapja a szinuszos jelre adott válasz.
- LTI rendszerek esetében a szinuszos gerjesztés szinuszos választ okoz.

Összefoglaló

- A szinuszos jel komplex leírása:

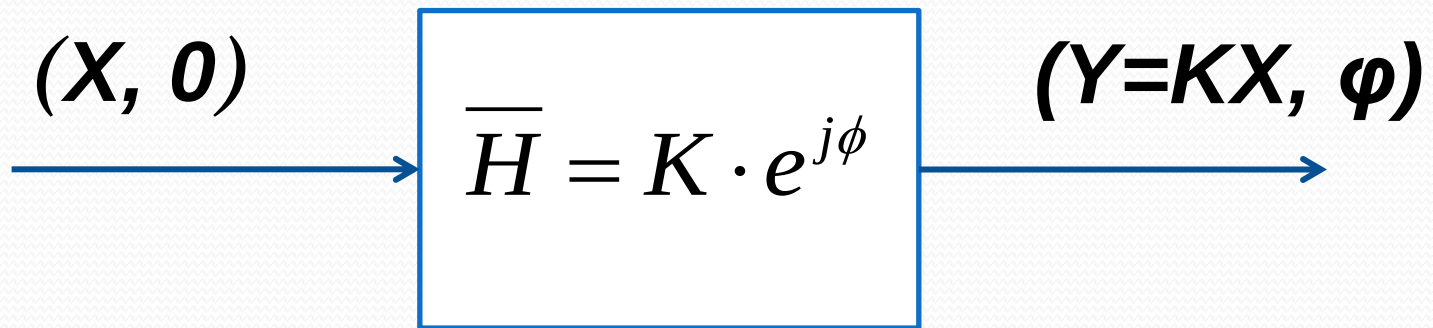
- Bemeneti jel: $\overline{X} = X \cdot e^{j(\omega \cdot t)}$

- Kimeneti jel: $\overline{Y} = Y \cdot e^{j(\omega \cdot t + \phi)}$

- A rendszer frekvencia tartománybeli leírása:

- Átviteli karakterisztika $\overline{H} = \frac{\overline{Y}}{\overline{X}} = \frac{Y \cdot e^{j(\omega t + \phi)}}{X \cdot e^{j\omega t}} = K \cdot e^{j\phi}$

Összefoglaló



$$\overline{H} = H(j\omega) = K(\omega) \cdot e^{j\phi(\omega)}$$

Amplitúdó karakterisztika

Fázis karakterisztika

Összefoglalás

- FI szinusz

vs.

- DI szinusz:

$$x(t) = X \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \longleftrightarrow x[k] = X \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{N} \cdot k\right)$$

- T [s] = periódus = N
- $\omega = 2\pi/T$ [rad./s] = körfrekvencia = $\Omega = 2\pi/N$ [rad.]

Összefoglalás

- A FI átviteli karakterisztika és a rendszeregyenlet:

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2} y}{dt^{n-2}} + \dots + a_n y = b_0 \frac{d^n x}{dt^n} + b_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + b_2 \frac{d^{n-2} x}{dt^{n-2}} + \dots + b_n x$$

$$\frac{d^n}{dt^n} \Leftrightarrow (j\omega)^n$$

$$H(j\omega) = \frac{b_0 (j\omega)^n + b_1 (j\omega)^{n-1} + b_2 (j\omega)^{n-2} + \dots + b_{n-1} (j\omega) + b_n}{(j\omega)^n + a_1 (j\omega)^{n-1} + a_2 (j\omega)^{n-2} + \dots + a_{n-1} (j\omega) + a_n}$$

Összefoglalás

- A DI átviteli karakterisztika és a rendszeregyenlet.

$$y[k] + a_1 y[k-1] + \dots + a_n y[k-n] = b_0 x[k] + b_1 x[k-1] + \dots + b_m x[k-m]$$

$$k-m \Leftrightarrow e^{-jm\Omega}$$

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{b_0 + b_1 e^{-j\Omega} + b_2 e^{-j2\Omega} \dots + b_m e^{-jm\Omega}}{1 + a_1 e^{-j\Omega} + a_2 e^{-j2\Omega} \dots + a_n e^{-jn\Omega}}$$

$$e^{j\Omega} = z$$

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} \dots + a_n z^{-n}}$$

Bevezetés

- Ha egy tetszőleges alakú periodikus jel szinuszok súlyozott összegére bontható fel, akkor, a szuperpozíció elv alapján a transzfer karakterisztika felhasználható a rendszerválasz meghatározására.
- Megválaszthatók-e szinuszos jelek úgy, hogy összegük előírt periodikus jelet szolgáltatson?

Bevezetés

- A válasz:
 - diszkrét idejű jelek esetén igenlő, és pedig véges tagszámú (minthogy $N/2$ számú) szinuszos jelre van csak szükség.
 - Folytonos idejű jel esetén csak közelítőleg lehetséges, a szinuszos jelek összege még akkor sem konvergál minden időpontban feltétlenül az eredeti jelhez, ha a tagok számát minden határon túl növeljük.

Tematika

- Diszkrét idejű jel Fourier-sora
- Folytonos idejű jel Fourier-sora
- Jelek és rendszerek spektrális leírása : a Fourier transzformáció
- Az átviteli karakterisztika és az impulzusválasz

Diszkrét idejű jel Fourier-sora

- Legyen $x = x[k]$ egy diszkrét idejű, komplex értékű, periodikus jel, L periódusidővel:

$$x[k+L] = x[k]; k \in \mathbb{Z}, L \in \mathbb{N}.$$

- A jel L számú komplex adattal jellemezhető:

$$x[0], x[1], x[2], \dots, x[L-1].$$

Diszkrét idejű jel Fourier-sora

- Az X_p komplex Fourier-együtthatók a jelet előállítják L -tagú Fourier-sor (DFS) alakjában:

$$x[k] = \sum_{p=0}^{L-1} \left(X_p \cdot e^{j \cdot p \cdot \Omega \cdot k} \right)$$

- Ez azt jelenti, hogy a komplex értékű jelet L számú, *komplex értékű, különböző frekvenciájú szinuszos jel összegeként állítjuk elő.*

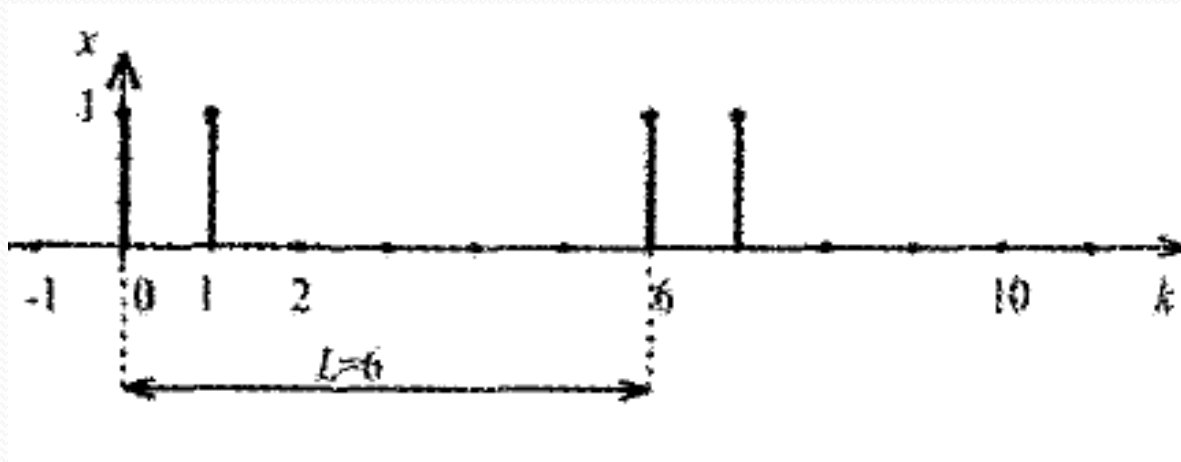
A Fourier együtthatók

- A komplex Fourier-együtthatók a következő összefüggéssel számíthatók:

$$X_p = \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} x[k] \cdot e^{-j \cdot p \cdot \Omega \cdot k}$$

Példa

- Határozzuk meg $x[k]$ Fourier-sorát, ha periódusideje $L = 6$; továbbá $x[0] = x[1] = 1$, $x[2] = x[3] = x[4] = x[5] = 0$



Megoldás

- $x[0] = x[1] = 1, x[2] = x[3] = x[4] = x[5] = 0$

$$X_P = \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} x[k] \cdot e^{-j \cdot p \cdot \Omega \cdot k}, \Omega = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

$$X_0 = \frac{1}{6} \sum_{k=0}^5 x[k] \cdot e^{-j \cdot 0 \cdot \Omega \cdot k} = \frac{1}{6} \sum_{k=0}^1 x[k] = \frac{1}{6} (1 + 1) = \frac{1}{3}$$

$$X_1 = \frac{1}{6} (e^{-j \cdot 1 \cdot \Omega \cdot 0} + e^{-j \cdot 1 \cdot \Omega \cdot 1}) = \frac{1}{6} \left(1 + e^{-j \cdot \frac{\pi}{3}} \right)$$

$$X_p = \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} x[k] \cdot e^{-j \cdot p \cdot \Omega \cdot k}, \Omega = \frac{\pi}{3}$$

$$X_2 = \frac{1}{6} \left(1 + e^{-j \cdot 2 \cdot \Omega} \right) = \frac{1}{6} \left(1 + e^{-j \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{3}} \right)$$

$$X_3 = \frac{1}{6} \left(1 + e^{-j \cdot 3 \cdot \frac{\pi}{3}} \right) = \frac{1}{6} \left(1 + e^{-j \cdot \pi} \right) = \frac{1}{6} \left(1 + e^{-j \cdot \pi} \right) = 0$$

$$X_4 = \frac{1}{6} \left(1 + e^{-j \cdot 4 \cdot \frac{\pi}{3}} \right)$$

$$X_5 = \frac{1}{6} \left(1 + e^{-j \cdot 5 \cdot \frac{\pi}{3}} \right)$$

$$X_1 = \frac{1}{6} \left(1 + \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + j \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right) = \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{2} + j\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right) =$$

$$= \frac{1}{6} \left(\frac{3}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{1}{12} (3 - j\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{12} (\sqrt{3} - j)$$

$$|X_1| = \frac{\sqrt{3}}{12} \sqrt{3+1} = \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot 2 = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$\varphi(X_1) = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}$$

$$X_2 = \frac{1}{6} \left(1 + \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + j \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) \right) = \frac{1}{6} \left(1 + \left(-\frac{1}{2}\right) + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) =$$

$$= \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{1}{12} (1 + j\sqrt{3})$$

$$|X_2| = \frac{1}{12} \sqrt{1+3} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

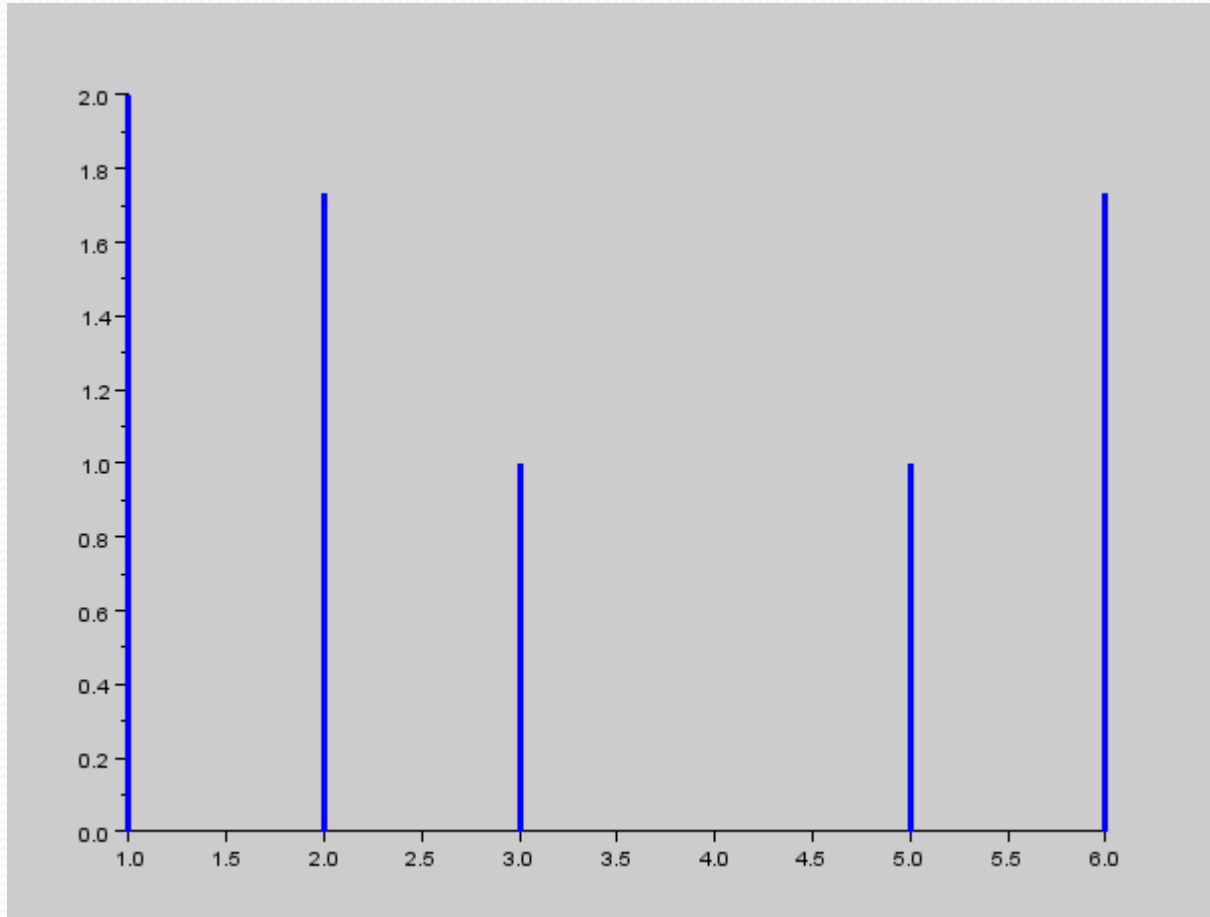
$$\varphi(X_2) = \arccos(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$$

$$X_5 = \frac{1}{6} \left(1 + e^{-j5 \cdot \frac{\pi}{3}} \right) = \frac{1}{6} \left(1 + \cos \frac{\pi}{3} + j \sin \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{6} \left(\frac{3}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = X_1$$

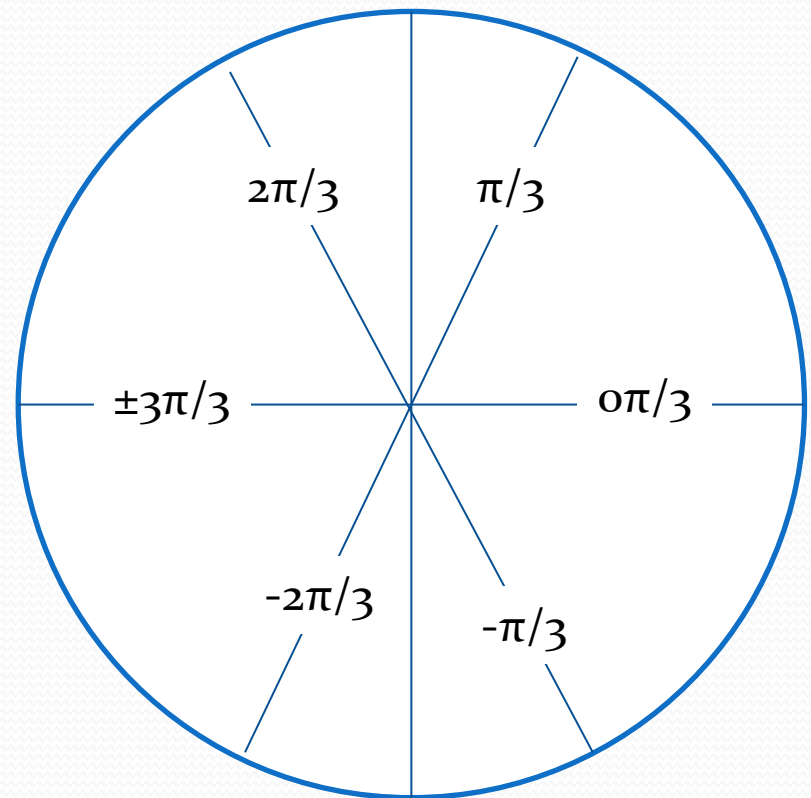
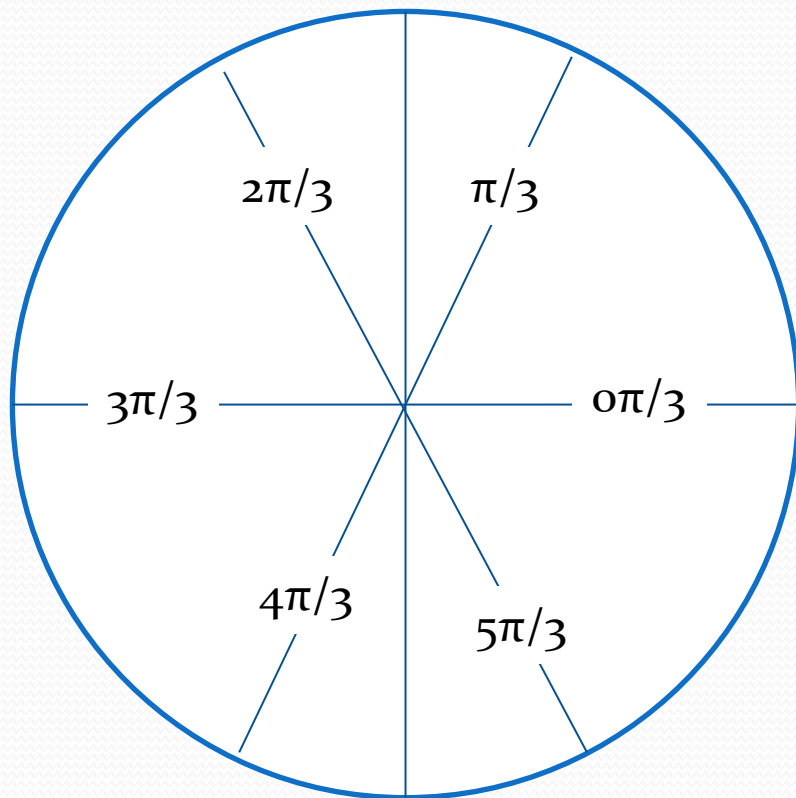
$$X_4 = \frac{1}{6} \left(1 + e^{-j4 \cdot \frac{\pi}{3}} \right) = \frac{1}{6} \left(1 + \cos \frac{\pi}{3} + j \sin \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = X_2$$

P	Amplitudó	Fázis
0	0.33333	0
1	0.28867	-30
2	0.16666	60
3	0	-
4	0.16666	60
6	0.28867	-30

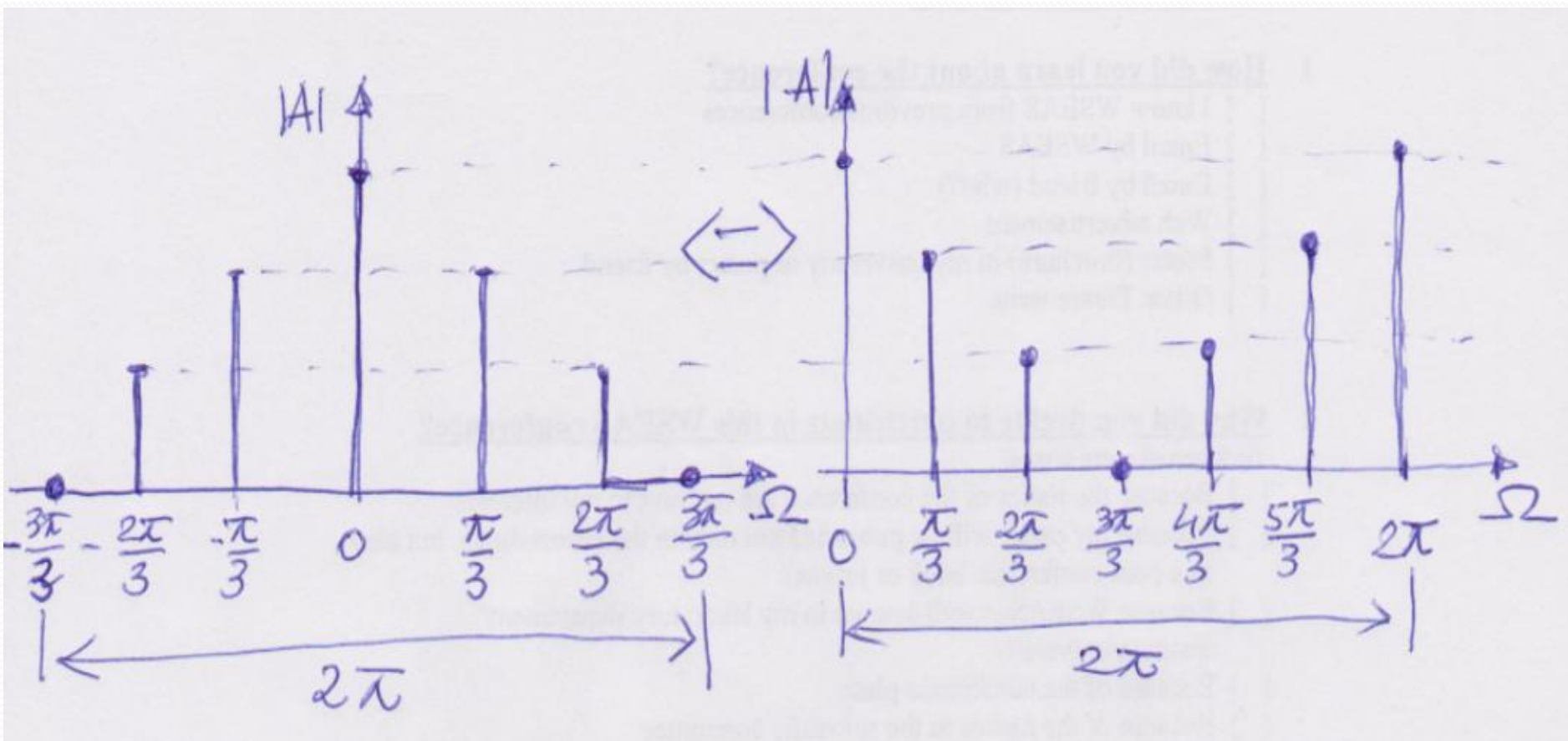
Amplitúdó spektrum



Negatív frekvenciák?



Amplitúdó spektrum negatív frekvenciákkal



Folytonos idejű jel Fourier-sora

- Egy ilyen jel közelítőleg (esetleg pontosan) előállítható $0, \omega, 2\omega, \dots, N\omega$ körfrekvenciájú szinuszos jelek szuperpozíciójával. Minél nagyobb N értéket választunk, annál kisebbé tehető a közelítés hibája.

$$x(t) \cong \sum_{p=0}^{N-1} \left(X_p \cdot e^{j \cdot p \cdot \omega \cdot t} \right)$$

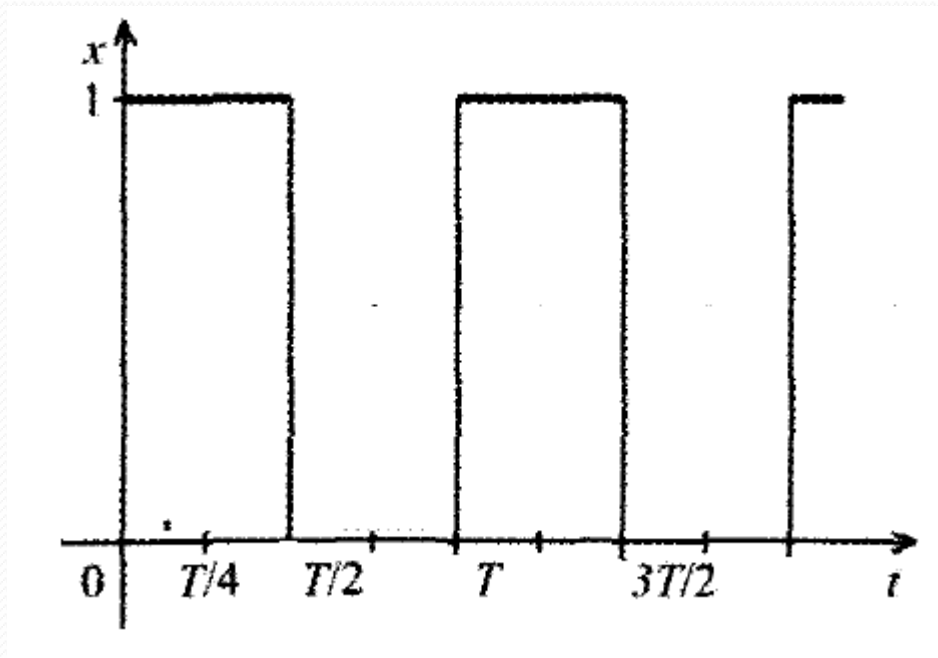
A Fourier együtthatók

- A komplex Fourier-együtthatók a következő összefüggéssel számíthatók:

$$X_p = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \cdot e^{-j \cdot p \cdot \omega \cdot t} dt; \quad p = 0, 1, 2 \dots N$$

Példa

- Határozzuk meg a következő jel Fourier-sorát:



$$x(t) = \begin{cases} 1, & t \in (0, T/2] \\ 0, & t \in (T/2, T] \end{cases}$$

Megoldás

$$X_p = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \cdot e^{-j \cdot p \cdot \omega \cdot t} dt = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} e^{-j \cdot p \cdot \omega \cdot t} dt = \frac{1}{T(-jp\omega)} e^{-j \cdot p \cdot \omega \cdot t} \Big|_0^{T/2} =$$
$$= j \frac{1}{2\pi p} (e^{-jp\pi} - 1) = -j \frac{1}{\pi p}; \quad p = 1, 3, 5, \dots$$

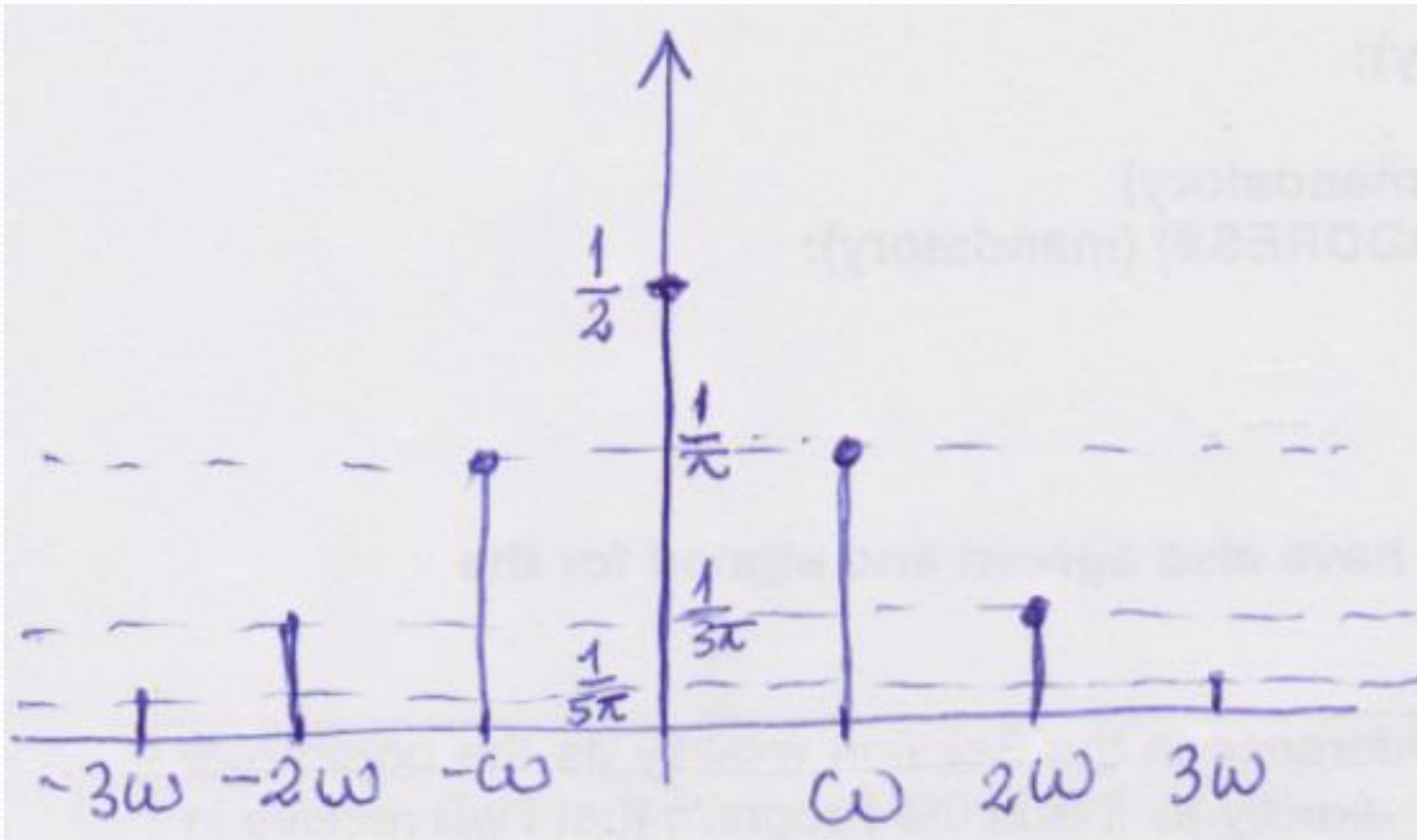
$$|X_p| = \frac{1}{\pi p}; \quad \varphi = -90; \quad p = 1, 3, 5, \dots$$

$$|X_0| = \frac{1}{2} \quad x(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \left\{ \sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \dots \right\}$$



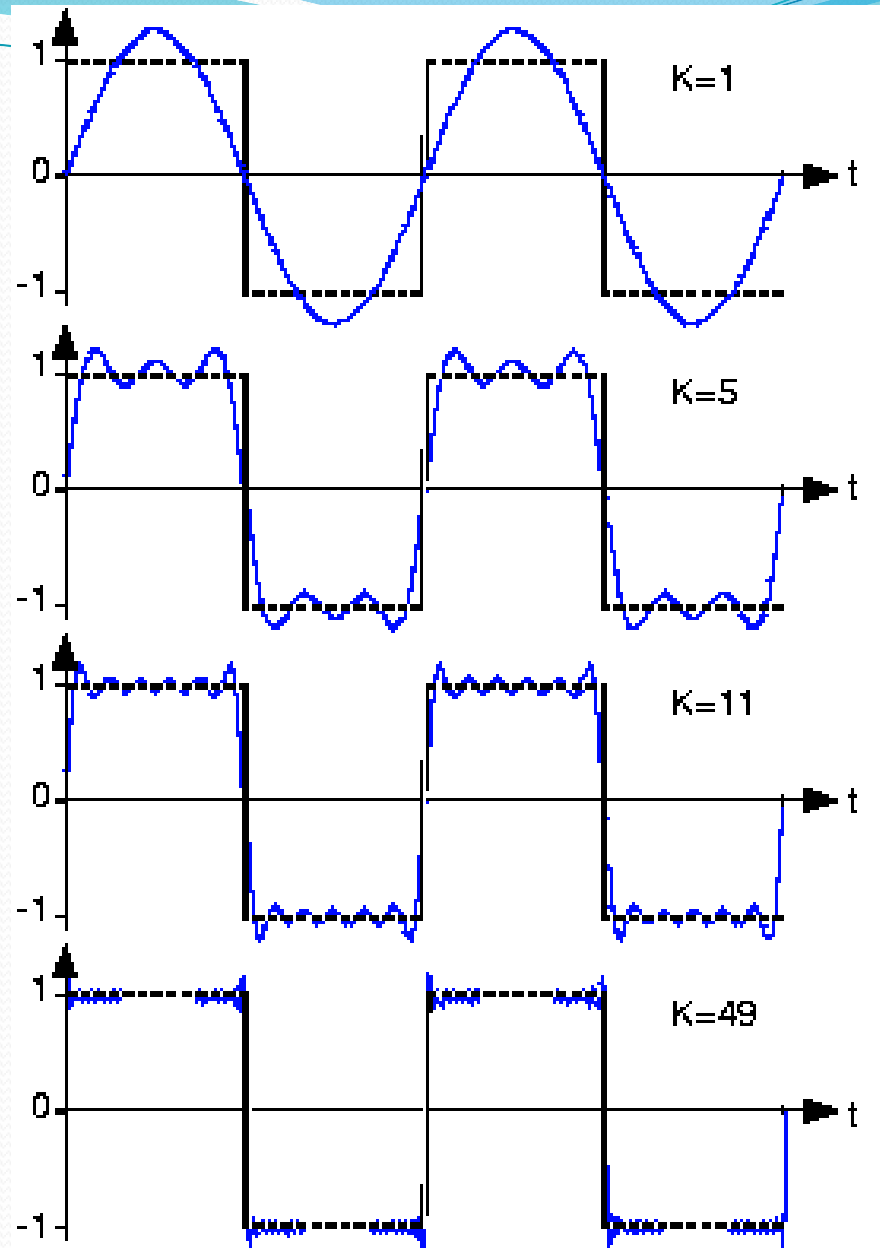
P	Amplitudó	Fázis
0	$1/2$	0
1	$1/\pi$	-90
2	0	-
3	$1/3\pi$	-90
4	0	-
5	$1/5\pi$	-90
6	0	-
7	$1/7\pi$	-90

Amplitúdó spektrum



Négyszögjel szinuszból?

A tagszám növelésével a közelítés láthatóan egyre jobb lesz, a maximum egyre jobbra tolódik és csökken, de nem szorítható a kb. 1,09 érték alá.
Ez a un. *Gibbs-jelenség*.



Összefoglalás

- Az eddigiek szerint periodikus jelek leírhatók szinuszos jelek szuperpozíciójaként.
- Az egyes szinuszos összetevők körfrekvenciája az adott jel körfrekvenciájának egész számú többszöröse.
- Meghatározva a rendszer gerjesztésének Fourier-sorát és ismerve a rendszer átviteli karakterisztikáját kiszámíthatjuk a válasz Fourier-soros alakját .

Általánosítás

- Nem csak a periodikus jelek hanem a jelek széles osztálya leírható szinuszos jelek szuperpozíciójaként, ha nem csak bizonyos diszkrét körfrekvenciákat veszünk figyelembe, hanem valamennyi körfrekvenciát.
- A műveletet Fourier-transzformációnak nevezzük és a jel spektrális leírását eredményezi.

Definíció

FI jel esetében

- A valós vagy komplex értékű $x(t)$ folytonos idejű jel

$$X(j\omega) = F\{x(t)\}$$

Fourier-transzformáltja egy olyan függvény, amelynek ismeretében a jel előállítható a következő alakban:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega$$

DI jel esetében

- A valós vagy komplex értékű $x[k]$ diszkrét idejű jel

$$X(j\Omega) = F\{x[k]\}$$

Fourier-transzformáltja egy olyan függvény, amelynek ismeretében a jel előállítható a következő alakban:

$$x[k] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(j\Omega) \cdot e^{j\Omega k} d\Omega$$

Spektrum számítása

FI jel spektruma

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

DI jel spektruma

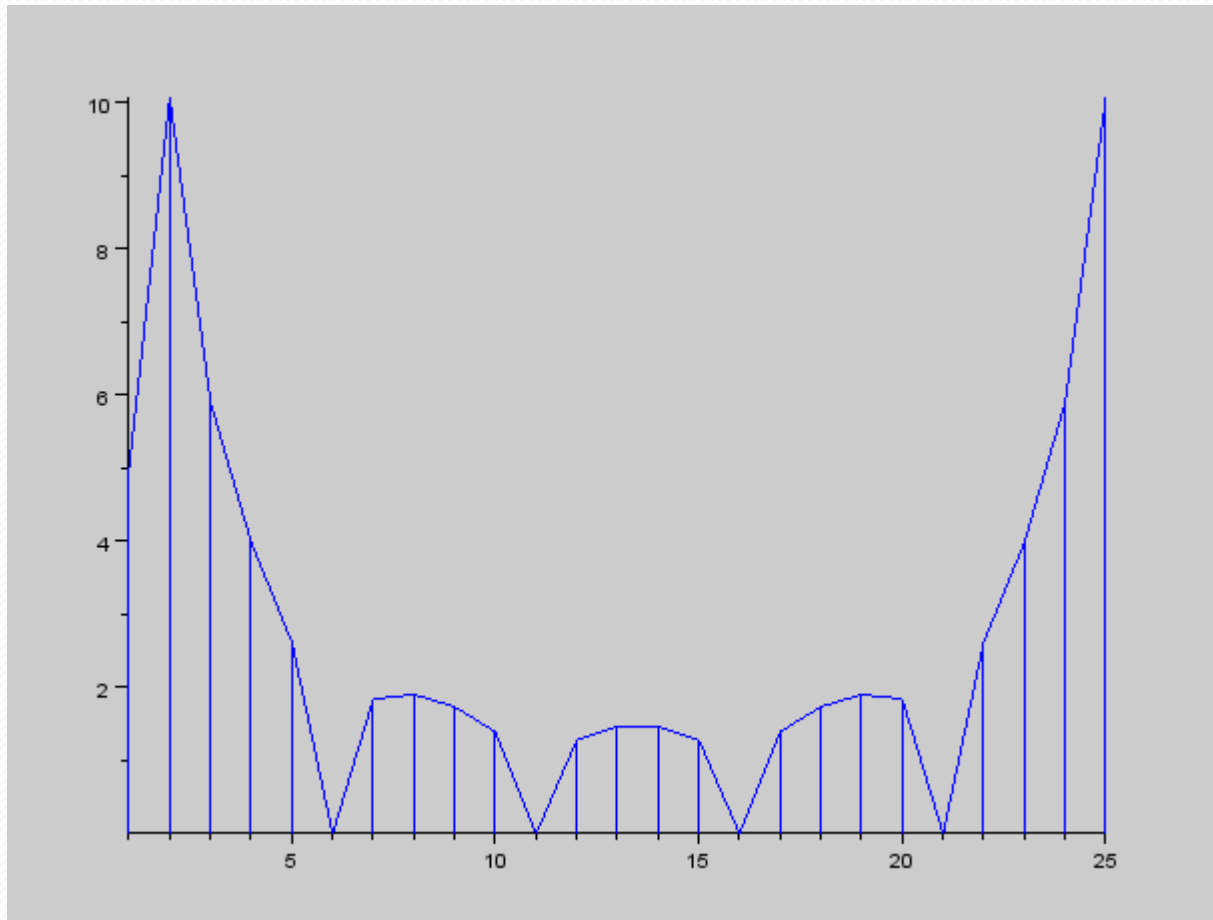
$$X(j\Omega) = \sum_{-\infty}^{\infty} x[k] \cdot e^{-j\Omega k}$$

- A Fourier-integrál numerikus közelítése megegyezik a Fourier-sor numerikus eljárásával, amelyre un. FFT algoritmusok állnak rendelkezésre.

Példa

- $x = [-1 \ -1 \ -1 \ -1 \ -1 \ -1 \ -1 \ -1 \ -1 \ -1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$
- $Y = \text{fft}(x)$
- $\text{plot2d3}(\text{abs}(Y))$
- $z = \text{ifft}(Y)$
- $\text{plot2d3}(z)$

FFT(x)



IFFT(Y)

