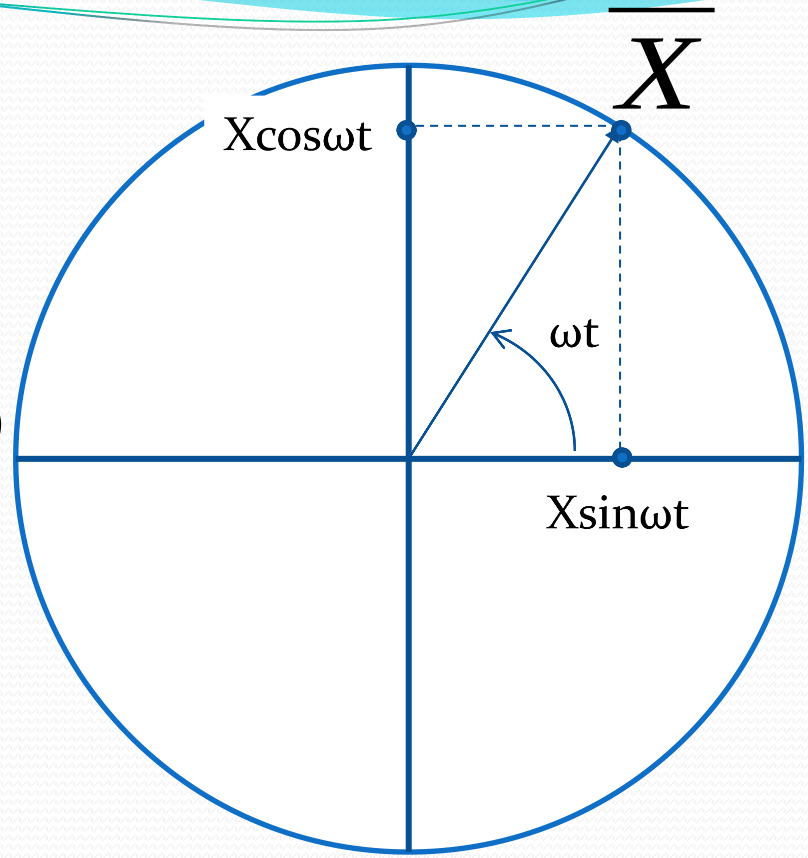
Fourier transzformáció (2)

Jelek és rendszerek - 9

Összefoglaló

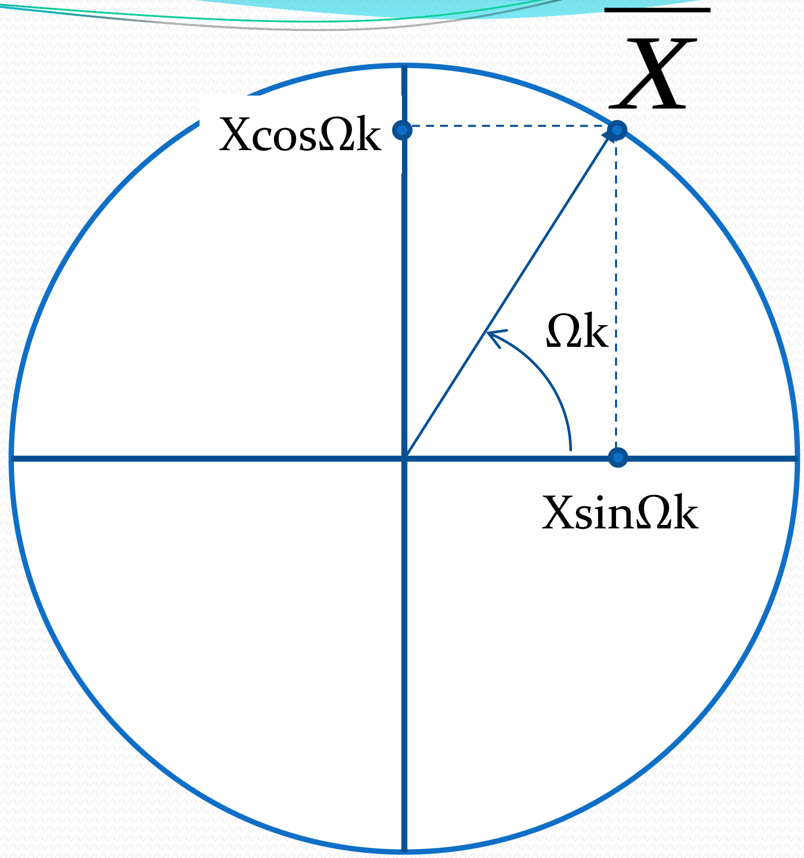
- FI szinusz: $\boldsymbol{x(t)=X\cdot sin(\omega t)}$
  - X =*amplitúdó,*
  - ωt=*fázis,*
  - ω=*körfrekvencia*



- Komplex FI szinusz: $\overline{X} = X \cdot e^{j\omega t}$

Összefoglaló

- DI szinusz: $\boldsymbol{x[k]=X\cdot \sin(\Omega k)}$
  - X =*amplitúdó,*
  - Ωk=*fázis,*
  - Ω =*körfrekvencia*



- Komplex DI szinusz: $\overline{X} = X \cdot e^{j\Omega k}$

Összefoglaló

- Egy L periódusú x[k] jelt *L számú, pΩ frekvenciájú komplex szinuszos jel összegeként állíthatjuk elő :*

$$x[k] = \sum_{p=0}^{L-1} \left(X_P \cdot e^{j \cdot p \cdot \Omega \cdot k} \right)$$ - DI Fourier sor

$$X_P = \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} x[k] \cdot e^{-j \cdot p \cdot \Omega \cdot k}$$ - Fourier együtthatók

Összefoglaló

- Egy x(t) ω körfrekvenciájú FI jel, közelítőleg (esetleg pontosan) előállítható 0, ω, 2ω,…,Nω körfrekvenciájú szinuszos jelek szuperpozíciójával.

$$x(t) \cong \sum_{p=0}^{N-1} \left(X_P \cdot e^{j \cdot p \cdot \omega \cdot t} \right)$$ - FI Fourier sor

$$X_P = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \cdot e^{-j \cdot p \cdot \omega \cdot t} dt$$ - Fourier együtthatók

Összefoglaló

FI jel Fourier transzformáltja (spektruma)

$$X\left(j\omega\right)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\cdot e^{-j\cdot\omega\cdot t}dt$$

DI jel Fourier transzformáltja (spektruma)

$$X\left(j\Omega\right)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x\left[k\right]\cdot e^{-j\cdot\Omega\cdot k}$$

FI Inverz Fourier transzformáció

$$x\left(t\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X\left(j\omega\right)\cdot e^{j\cdot\omega\cdot t}d\omega$$

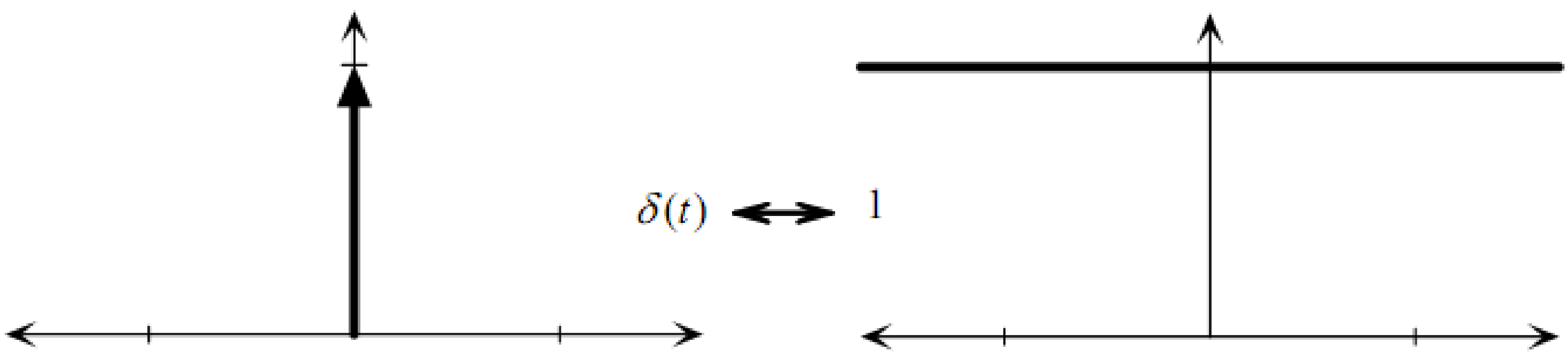
DI Inverz Fourier transzformáció

$$x\left[k\right]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X\left(j\Omega\right)\cdot e^{j\cdot\Omega\cdot k}d\Omega$$

Tematika

1. Néhány jel spektruma
2. A Fourier-transzformáció tételei

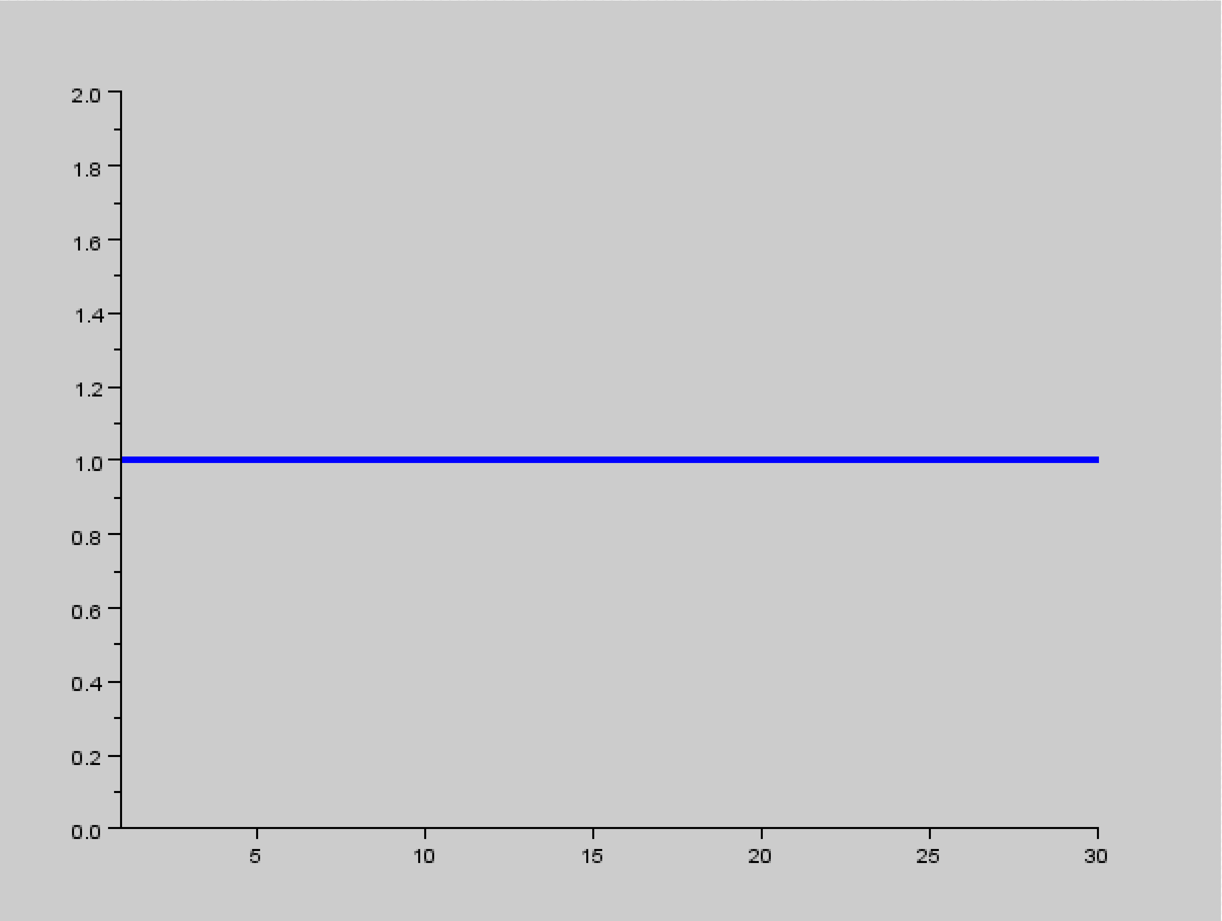
Néhány jel spektruma:
1. Dirac impulzus



A Dirac-impulzus spektrumában minden frekvencia egyforma súllyal szerepel.

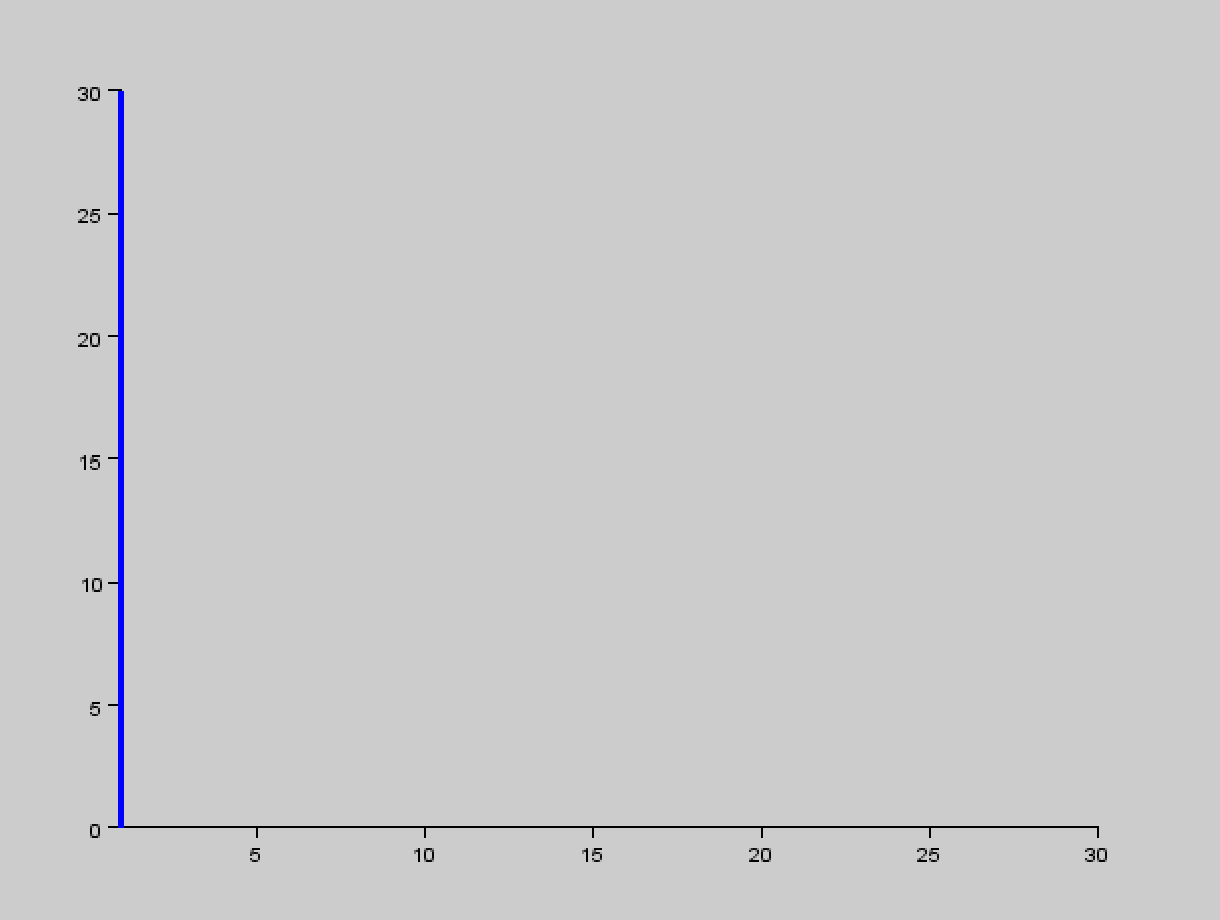
DI példa

```
x=zeros(1,30)
x(1)=1
X=fft(x)
plot2d(abs(X))
```

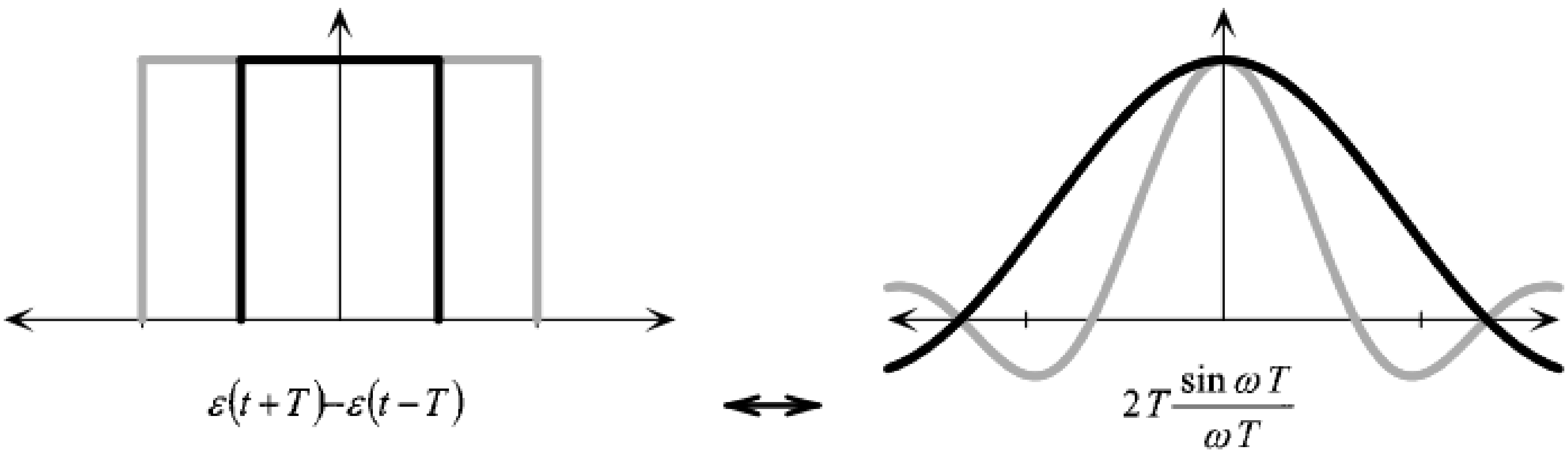


És fordítva …

```
x=ones(1,30)
X=fft(x)
plot2d(abs(X))
```



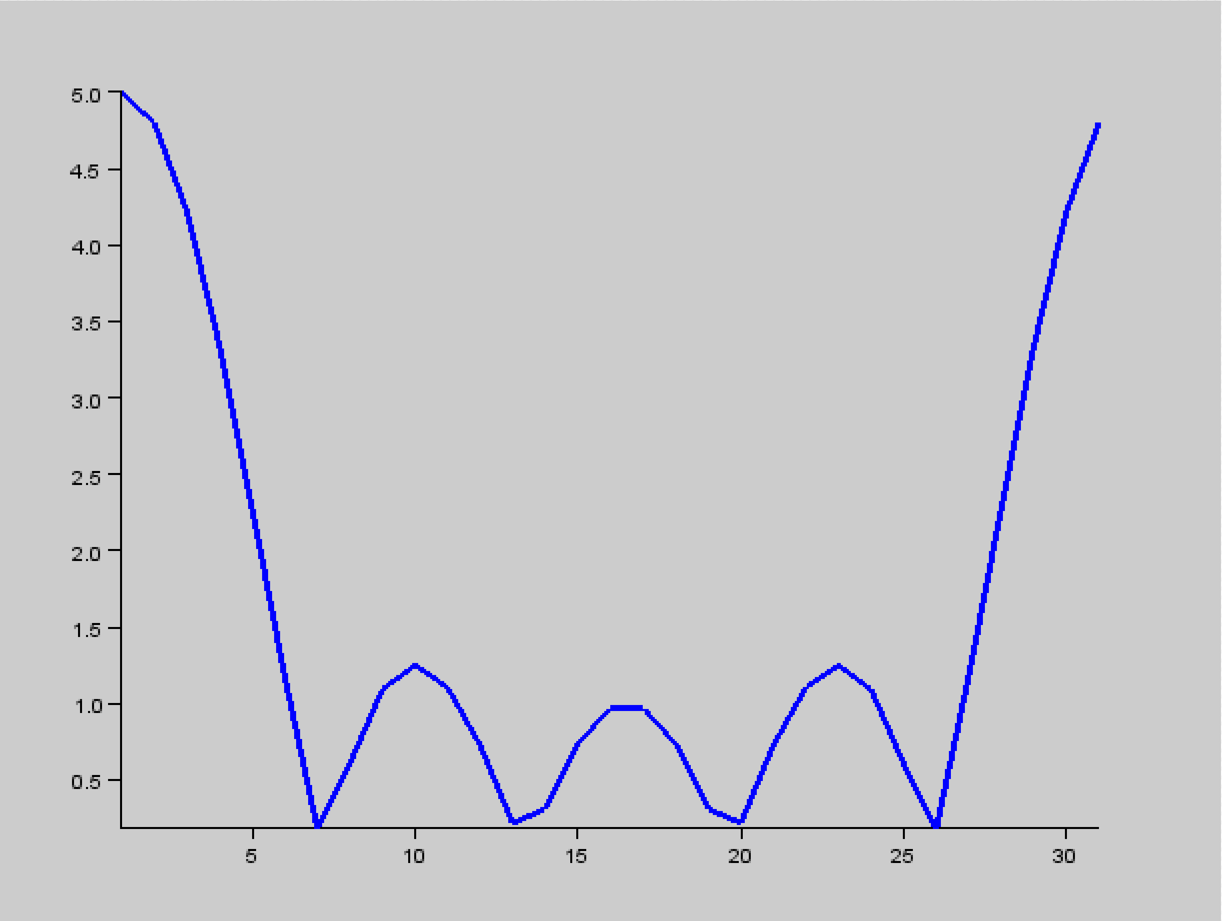
Néhány jel spektruma: 2. Derékszögű impulzus



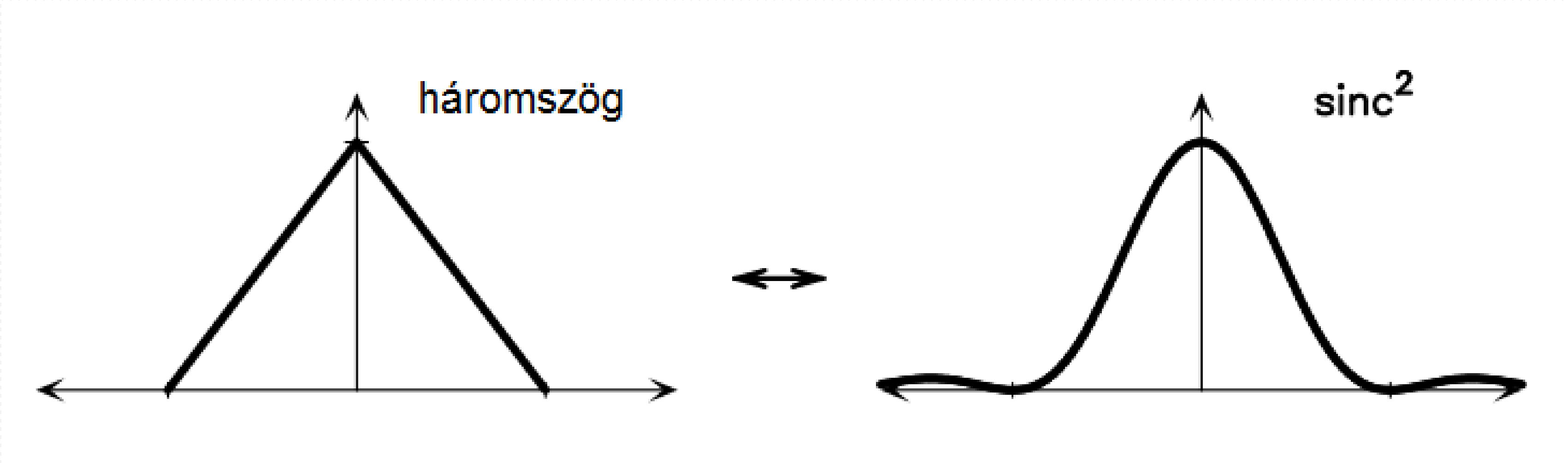
Minél szélesebb az impulzus, annál keskenyebb a spektruma.

DI példa

```
x=ones(1,31)
for i=6:31
   x(i)=0
end
X=fft(x)
plot2d(abs(X))
```



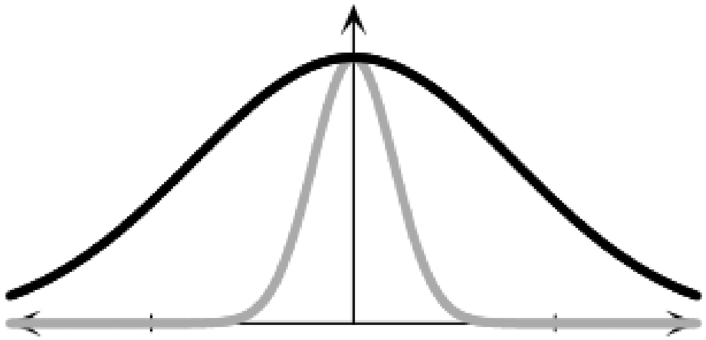
Néhány jel spektruma:
3. Háromszögű impulzus

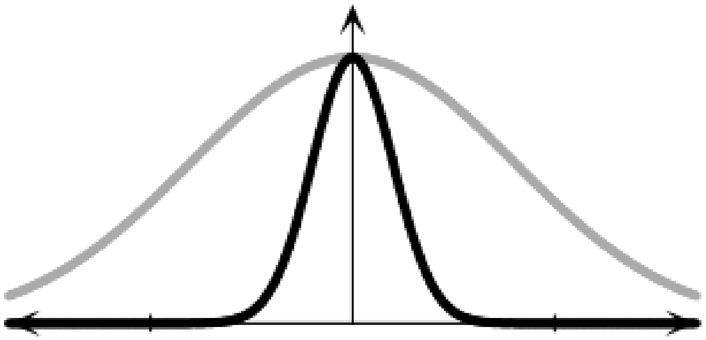


Kardinális szinusz (*sinus cardinalis*).

$$\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

Néhány jel spektruma:
4. Gauss függvény alakú impulzus



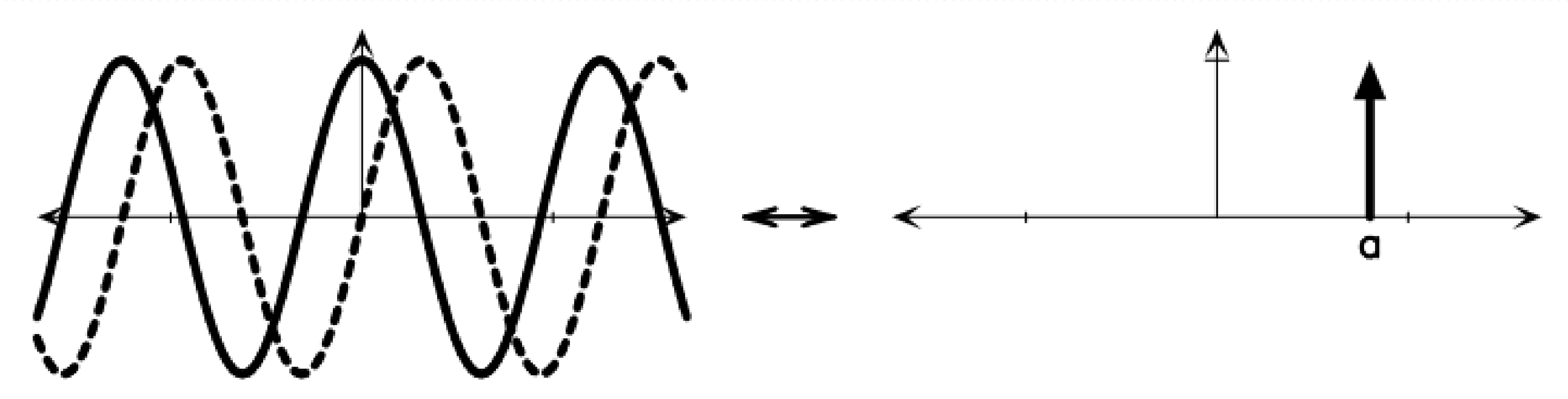


Időtartománybeli Gauss impulzus $\leftrightarrow$ Frekvenciatartománybeli Gauss impulzus

Gauss impulzus

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{(x-\mu)}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2}$$

Néhány jel spektruma:
5. Komplex szinusz

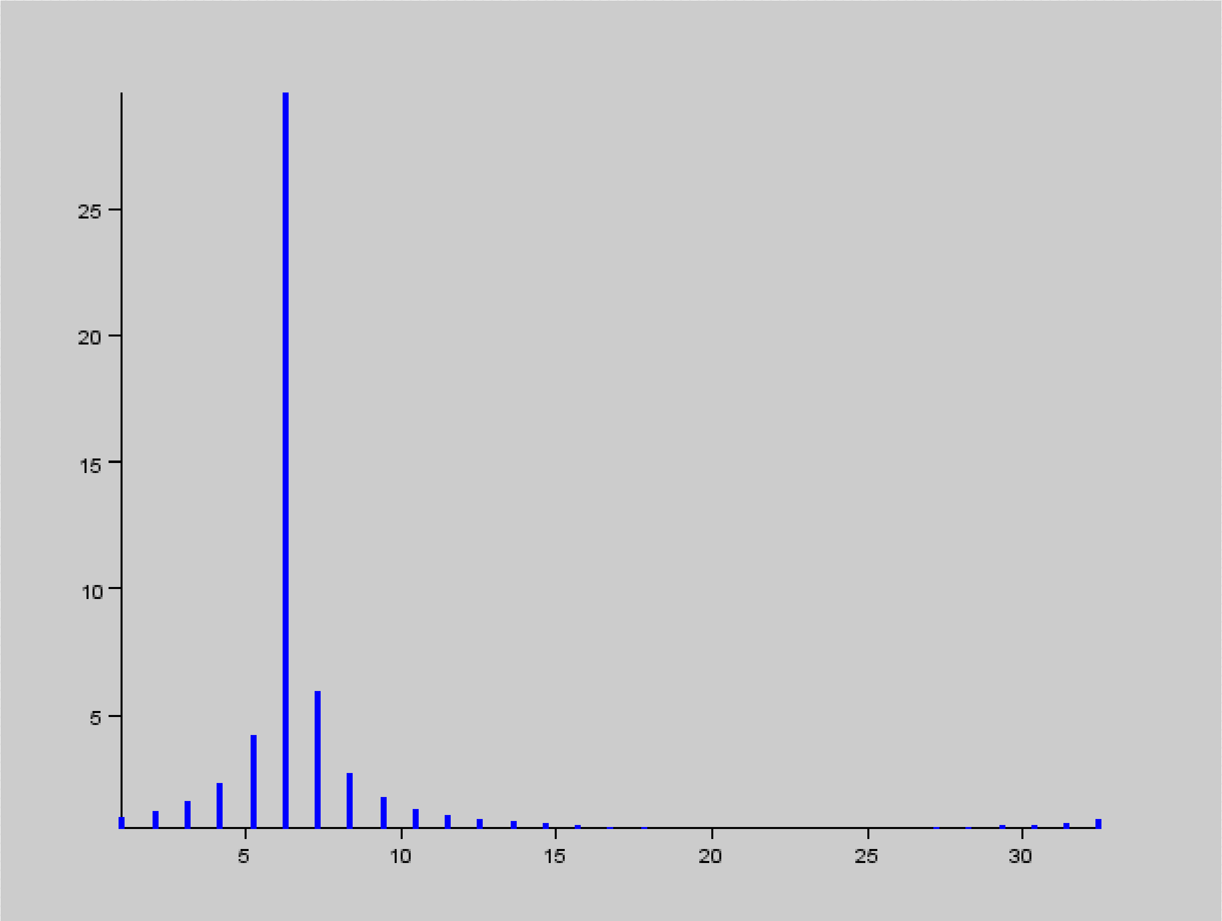


$$e^{j\omega_0 t}$$

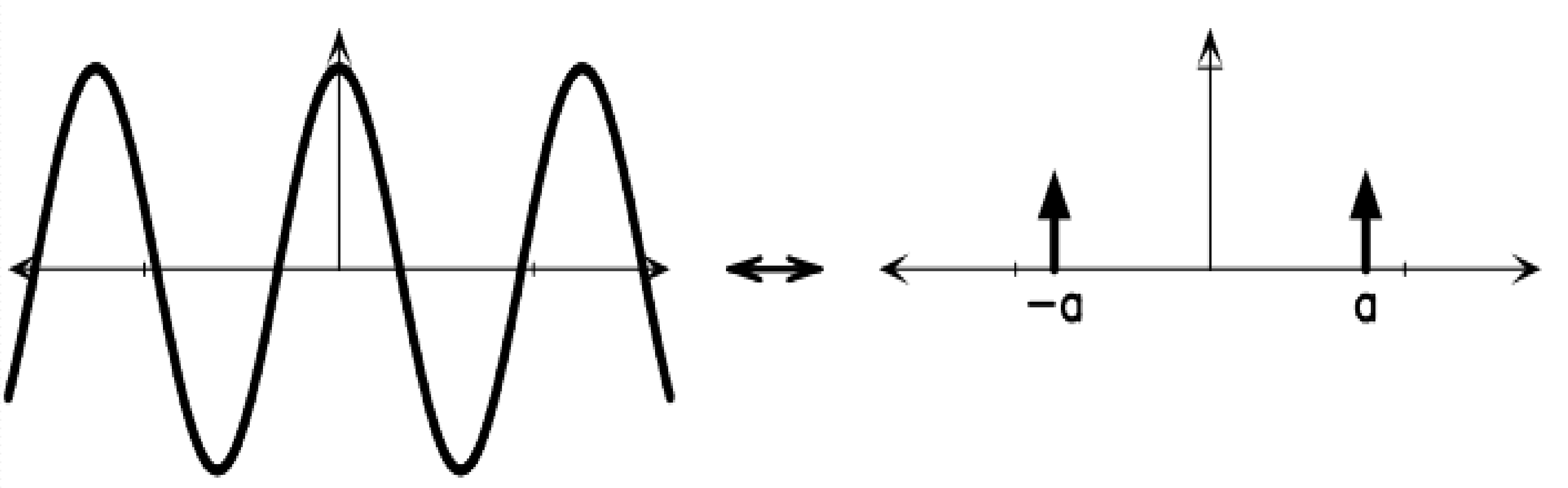
$$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

DI példa

```
omega=2*%pi/6
k=1:31
fi=omega*k
x=exp(%i*omega*k)
X=fft(x)
plot2d3(fi,abs(X))
```



Néhány jel spektruma:
6. Szinusz

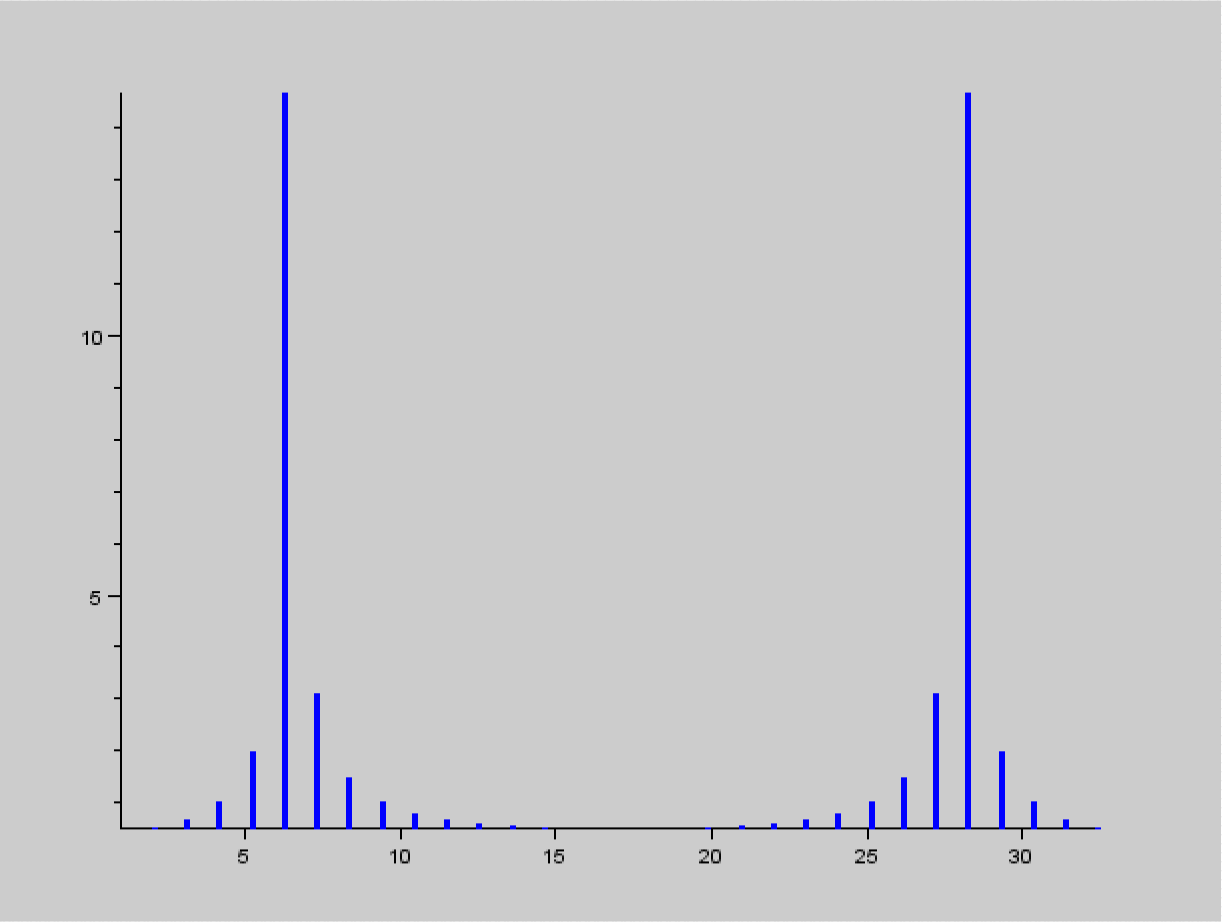


$$\cos(\omega_0 t)$$

$$\pi\left[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)\right]$$

DI példa

```
omega=2*%pi/6
k=1:31
fi=omega*k
x=cos(omega*k)
X=fft(x)
plot2d3(fi,abs(X))
```



A Fourier-transzformáció néhány tétele

Linearitás

- Mind a Fourier-transzformáció, mind az inverze lineáris operáció, ezért érvényes a szuperpozíció elve DI illetve FI jelekre egyaránt:

$$\mathcal{F}\{C_1 x_1 + C_2 x_2\} = C_1 \mathcal{F}\{x_1\} + C_2 \mathcal{F}\{x_2\},$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{C_1 X_1 + C_2 X_2\} = C_1 \mathcal{F}^{-1}\{X_1\} + C_2 \mathcal{F}^{-1}\{X_2\}.$$

A Fourier-transzformáció néhány tétele

A valós spektrumok

- Az X komplex spektrum két valós spektrummal írható le.
- Ez lehet az **amplitúdó** spektrum és a **fázis**-spektrum, vagyis

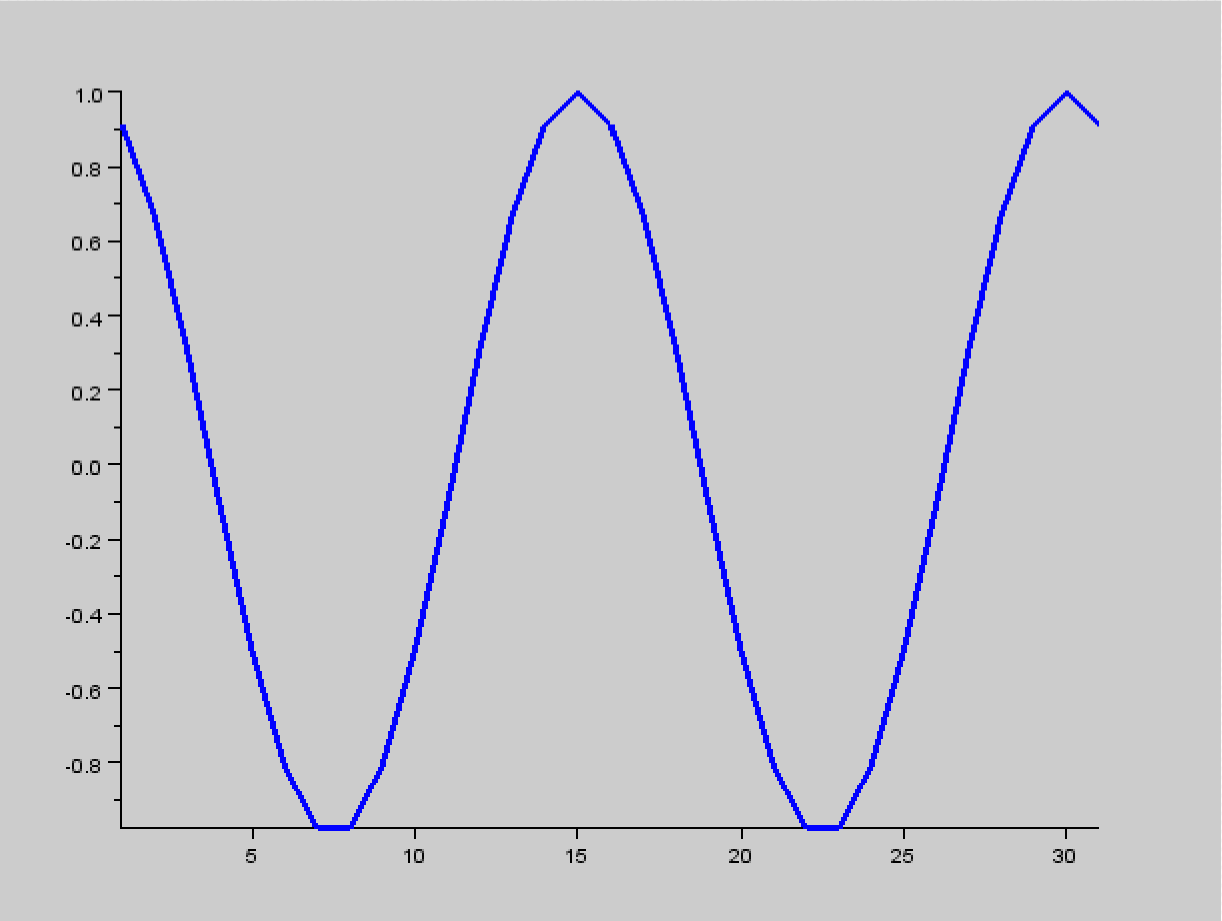
$$X(j\omega)=A_x(\omega)e^{j\varphi_x(\omega)}$$

- Használható azonban a ***valós rész*** *és a* ***képzetes rész*** *is:*

$$X(j\omega)=P_x(\omega)+jQ_x(\omega)$$

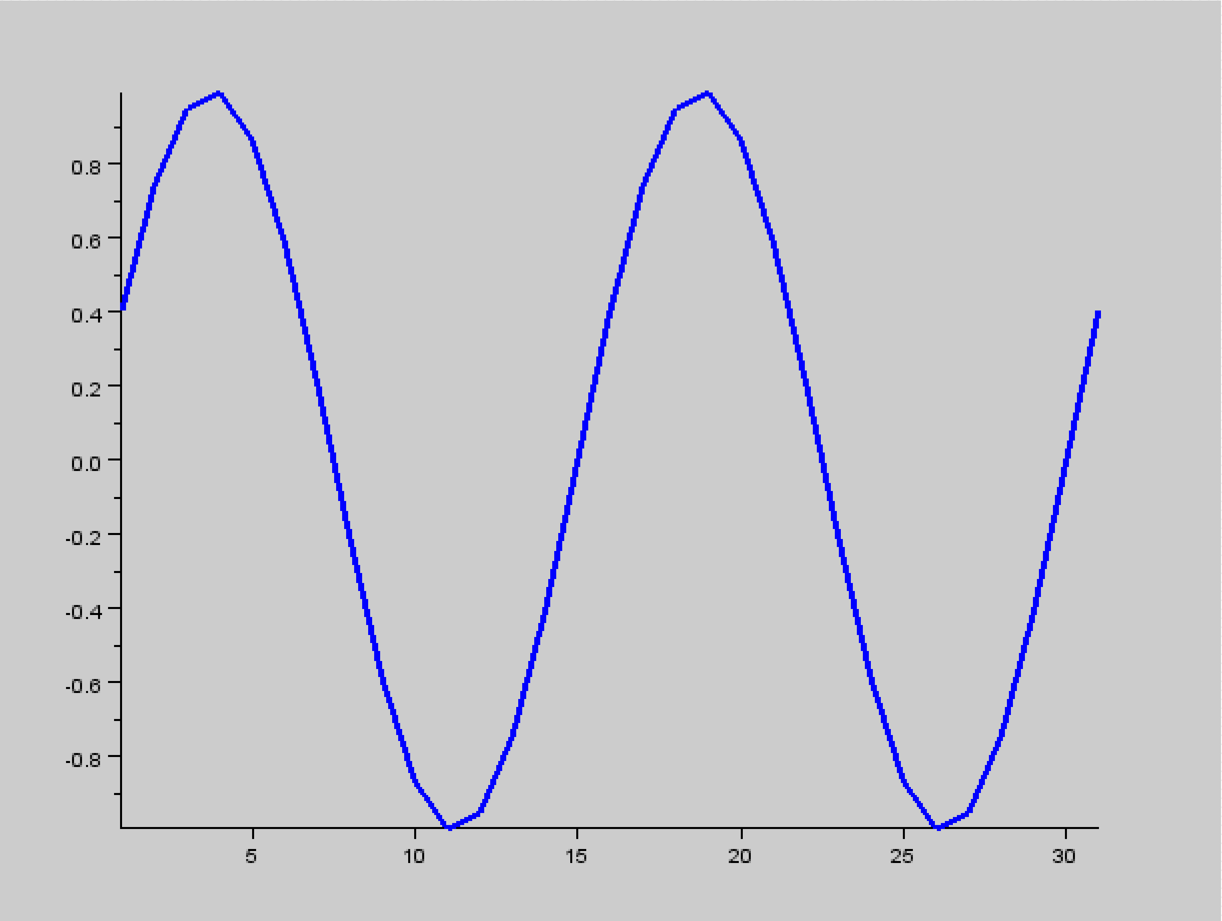
példa

```
omega=2*%pi/15
k=1:31
fi=omega*k
x=exp(%i*omega*k)
figure(1)
plot2d(real(x))
```



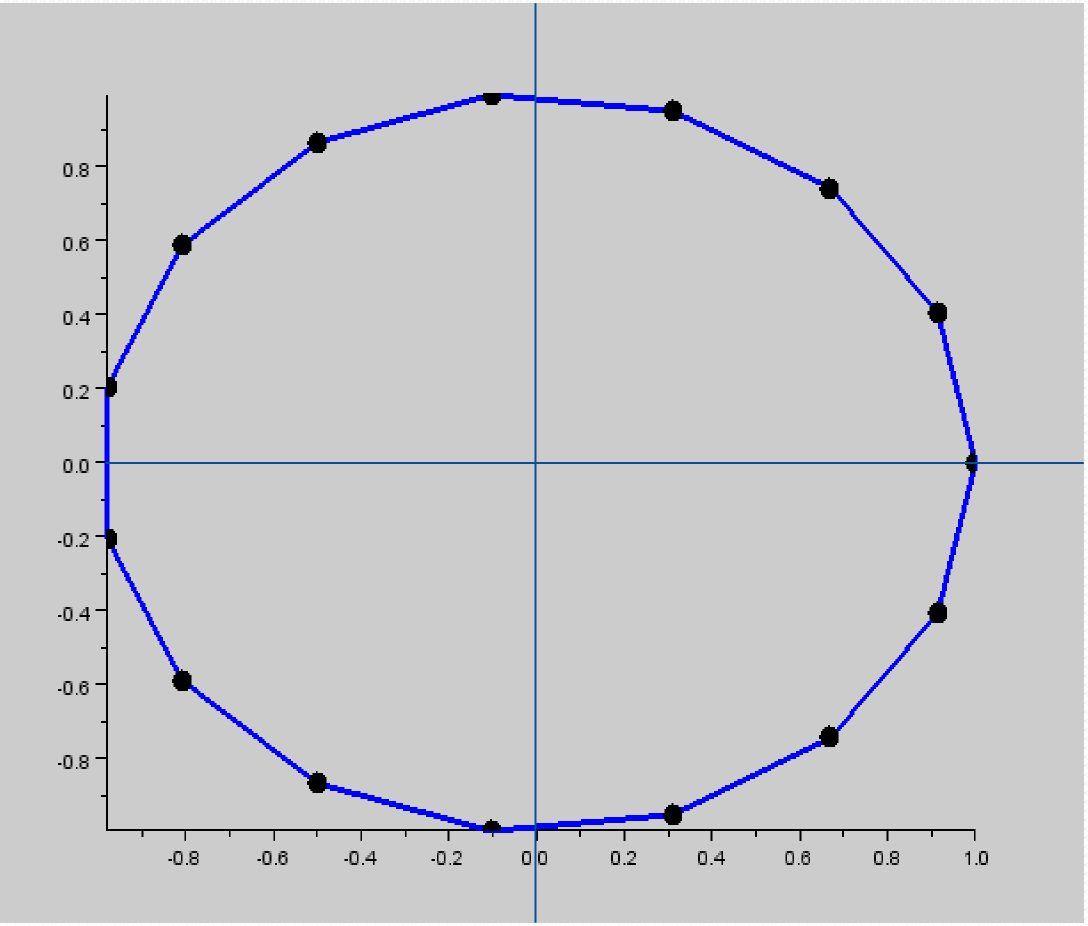
példa

```
omega=2*%pi/15
k=1:31
fi=omega*k
x=exp(%i*omega*k)
figure(2)
plot2d(imag(x))
```



példa

```
omega=2*%pi/15
k=1:31
fi=omega*k
x=exp(%i*omega*k)
figure(2)
plot2d(real(x),imag(x))
```



A Fourier-transzformáció néhány tétele

Eltolás az időtartományban

- Az időbeli eltolás megfelel a frekvenciatartományban komplex exponenciális függvénnyel végzett szorzásnak.
- ***Az amplitúdó-spektrumot az időbeli eltolás nem befolyásolja***.

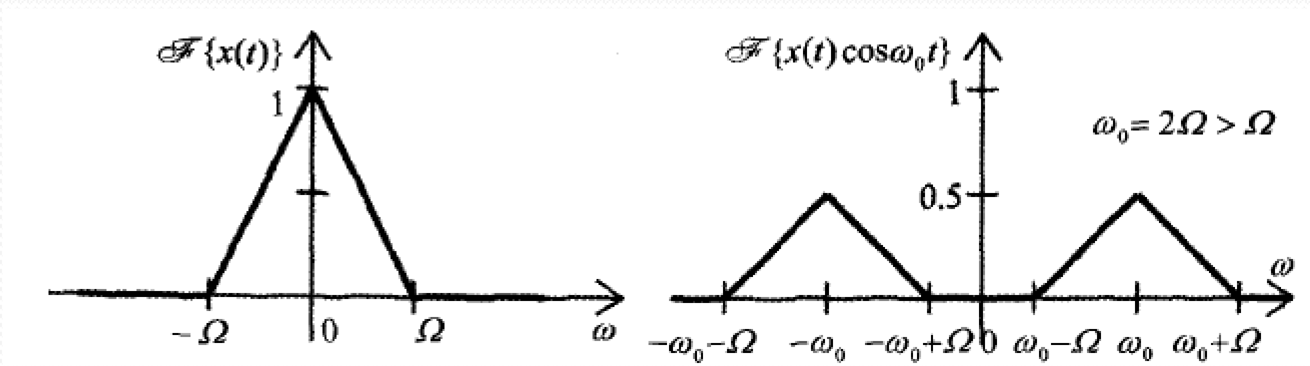
$$\mathcal{F}\left\{x(t-\tau)\right\} = \mathrm{e}^{-j\tau\omega} X(j\omega)$$

A Fourier-transzformáció néhány tétele

Moduláció az időtartományba

- Az ωo körfrekvenciájú szinuszos vivőjel modulációja az x(t) jellel az x jel spektrumának eltolását jelenti ωo körfrekvenciával.

$$\mathcal{F}\left\{x(t)e^{j\omega_0 t}\right\}=X\left(j\left(\omega-\omega_0\right)\right).$$



A Fourier-transzformáció néhány tétele

Szorzás hatványfüggvénnyel

- A jel ***szorzása*** az időtartományban a ***t*** tényezővel megfelel a frekvenciatartományban a ***differenciálásnak*** és ***j*** tényezővel végzett szorzásnak.

$$\mathcal{F}\{t\,x(t)\} = \mathrm{j}\frac{\mathrm{d}X(\mathrm{j}\omega)}{\mathrm{d}\omega}$$

- A tétel ismételten alkalmazható.

A Fourier-transzformáció néhány tétele

Folytonos idejű jelek deriváltja

- a jel n-szeres differenciálása megfelel a $(j\omega)^n$ tényezővel végzett szorzásnak.

$$\mathcal{F}\left\{x'(t)\right\} = j\omega\, X(j\omega).$$

A Fourier-transzformáció néhány tétele

Folytonos idejű jelek integrálja

- Az időtartománybeli integrálás nem egyszerűen osztásnak felel meg a frekvenciatartományban, hanem még egy additív tag is megjelenik.

$$\mathscr{F}\left\{\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right\} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega} X(\mathrm{j}\omega) + \pi X(\mathrm{j}0)\delta(\omega).$$

A Fourier-transzformáció néhány tétele

A skálázás megváltoztatása

- A szélesebb jelhez keskenyebb spektrum tartozik és viszont.

$$g(t)=x(a\,t), \qquad \mathscr{F}\{g(t)\}=\frac{1}{|a|}X\left(\mathrm{j}\frac{\omega}{a}\right).$$

A Fourier-transzformáció néhány tétele

Parseval tétele

- Egy valós vagy komplex értékű jel *energiája*:

- $$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\mathrm{j}\omega)|^2 \mathrm{d}\omega .$$

A Fourier-transzformáció néhány tétele

Folytonos idejű jelek szimmetria tulajdonsága

Legyen $\mathscr{F}\{u(t)\} = U(j\omega)$ *és* $\mathscr{F}\{v(t)\} = V(j\omega)$

Ha u(t) úgy tekinthető, mint a V(jω), ha abban ω helyére a t változót írjuk, akkor u(t) spektruma a v(t) ismeretében a következő módon állítható elő:

$$\text{ha } u(t) = V(j\omega)\big|_{\omega=t}, \text{ akkor } U(j\omega) = 2\pi\, v(t)\big|_{t=-\omega}.$$

A Fourier-transzformáció néhány tétele

Konvolúció

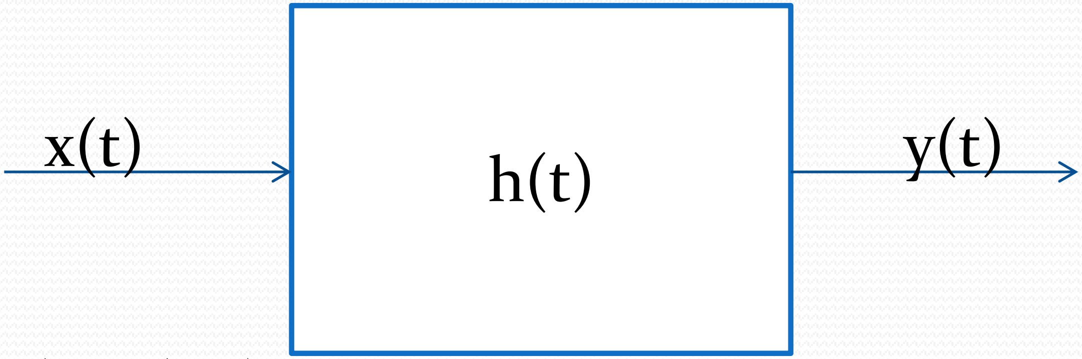
- *A konvolúció spektruma a spektrumok szorzata*

$$\mathcal{F}\{h(t)*u(t)\}=H(j\omega)U(j\omega).$$

$$\mathcal{F}\{g(t)g(t)\}= F(j\omega)*G(j\omega).$$

- Az időtartománybeli szorzásnak frekvenciatartománybeli konvolúció felel meg:

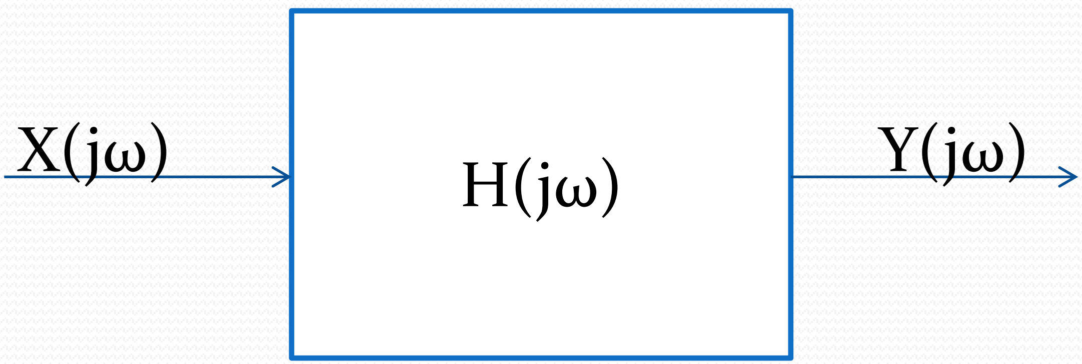
Az impulzus válasz és az átviteli függvény



$$y(t) = h(t) * x(t)$$

$$Y(j\omega) = F\{h(t) * x(t)\} = H(j\omega) \cdot X(j\omega)$$

$$H(j\omega) = F\{h(t)\}$$



Az átviteli karakterisztika az impulzusválasz Fourier transzformáltja!