

Laplace transzformáció

Jelek és rendszerek - 10

Összefoglaló

- A jeleknek és a lineáris, invariáns rendszereknek a frekvenciatartományban történő leírásának és analízisének sok előnye van.
- Például, egy lineáris, invariáns rendszer válaszát az időtartománybeli konvolúció helyett a frekvenciatartományban szorzással állíthatjuk elő.
- A frekvenciatartománybeli leírásnak természetesen hátrányai is vannak.
- Ezek egyike az, hogy - nagyon egyszerű esetektől eltekintve - a válasz időfüggvényének meghatározása numerikus eljárást igényel, ezért általános következtetések levonása nehéz.

Összefoglaló

- A rendszer jellemzése az időtartományban impulzusválaszával különösen akkor szemléletes, ha a rendszer első- vagy másodrendű.
- A rendszer jellemzése a frekvenciatartományban átviteli karakterisztikájával szemléletes, de alkalmazása gyakorlatot igényel.
- A vázolt nehézségek indokolttá teszik egy harmadik leírásmód bevezetését is:

a komplex frekvenciatartománybeli analízis .

Tematika

- Jelek leírása a komplex frekvenciatartományban
 - DI Laplace transzformáció
 - DI átviteli függvény
 - FI Laplace transzformáció
 - Néhány függvény Laplace transzformáltja
 - A Laplace transzformáció néhány tétele
 - Az átviteli függvény
- Néhány speciális rendszer

Megjegyzés

- A komplex frekvenciát és a jelek Laplace-transzformáltját formálisan fogjuk definiálni, mivel szemléletesen nehezen értelmezhetők.
- A módszer csakis belépő jelek illetve kauzális rendszerek esetében alkalmazható.

DI jel Laplace transzformáltja

Egy $x[k]$ diszkrét idejű jel

$$X(z) = Z\{x[k]\}$$

Laplace-transzformáltjának

(más néven Z-transzformáltjának) definíciója:

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x[k] \cdot z^{-k}$$

DI jel Laplace transzformáltja és a spektruma

Ha $x[k]$ egy belépő és abszolút összegezhető DI jel, akkor

$X(e^{j\Omega})$ spektruma kifejezhető $X(z)$ Laplace-transzformáltjával $z = e^{j\Omega}$ helyettesítéssel.

- A z változó neve a mérnöki gyakorlatban *komplex frekvencia*. Matematikailag egy komplex értékű változó.

A DI egységimpulzus Laplace transzformáltja

$$x[k] = \delta[k]$$

$$X(z) = \sum_0^{\infty} x[k] \cdot z^{-k} = \sum_0^{\infty} \delta[k] \cdot z^{-k}$$

$$\delta[k] = 1, 0, 0, 0, 0, \dots$$

$$X(z) = Z\{\delta[k]\} = 1 \cdot z^{-0} = 1$$

Az m ütemmel késleltetett egységimpulzus

$$X(z) = \sum_0^{\infty} x[k] \cdot z^{-k} = \sum_0^{\infty} \delta[k - m] \cdot z^{-k}$$

$$\delta[k] = 0, 0, 0, \dots, 1, 0, 0, \dots$$

$$X(z) = Z\{\delta[k - m]\} = z^{-m}$$

- Egy ütemű késleltetés az időtartományban = szorzás z^{-1} -el a komplex frekvencia tartományban.

A DI egységugrás

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x[k] \cdot z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon[k] \cdot z^{-k}$$

$$\varepsilon[k] = 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots$$

$$Z\{x[k]\} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots + z^{-n} + \dots$$

$$Z\{x[k]\} = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

A véges hosszúságú belépő diszkrét idejű jel

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x[k] \cdot z^{-k}$$

$$x[k] = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$$

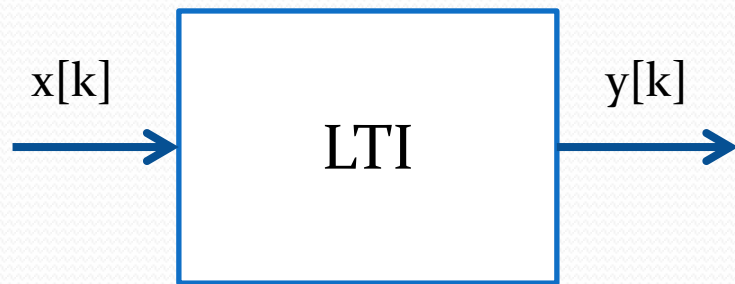
$$x[k] = x_0 \cdot \delta[k] + x_1 \cdot \delta[k-1] + x_2 \cdot \delta[k-2] \dots + x_n \cdot \delta[k-n]$$

$$Z\{\delta[k-m]\} = z^{-m}$$

$$Z\{x[k]\} = x_0 + x_1 \cdot z^{-1} + x_2 \cdot z^{-2} \dots + x_n \cdot z^{-n}$$

- Bármely DI jel Z-transzformáltja a z^{-1} változó polinomja.

DI átviteli függvény



$$x[k] = b_0, b_1, \dots, b_m \Rightarrow X(z) = b_0 + b_1 \cdot z^{-1}, \dots, b_m \cdot z^{-m}$$

$$y[k] = a_0, a_1, \dots, a_n \Rightarrow Y(z) = a_0 + a_1 \cdot z^{-1}, \dots, a_n \cdot z^{-n}$$

$$m \leq n$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 \cdot z^{-1}, \dots + b_m \cdot z^{-m}}{a_0 + a_1 \cdot z^{-1}, \dots + a_n \cdot z^{-n}}$$

FI jel Laplace transzformáltja

Egy $x(t)$ folytonos idejű jel

$$X(s) = L\{x(t)\}$$

Laplace-transzformáltjának

definíciója:

$$X(s) = \int_0^{\infty} x(t) \cdot e^{-s \cdot t} \cdot dt$$

FI jel Laplace transzformáltja

Ha $x(t)$ egy belépő és abszolút integrálható FI jel, akkor

$X(j\omega)$ spektruma kifejezhető $X(s)$ Laplace-transzformáltjával $s = j\omega$ helyettesítéssel.

- Az s változó neve a mérnöki gyakorlatban *komplex frekvencia*. Matematikailag egy komplex értékű változó.

A Dirac impulzus Laplace transzformáltja

$$X(s) = \int_0^{\infty} x(t) \cdot e^{-s \cdot t} \cdot dt$$

$$L\{\delta(t)\} = \int_0^{\infty} \delta(t) \cdot e^{-s \cdot t} \cdot dt = \int_{-0}^{+0} \delta(t) \cdot e^{-s \cdot t} \cdot dt$$

$$L\{\delta(t)\} = \int_{-0}^{+0} e^{-s \cdot t} \cdot dt = e^{-s \cdot t} \Big|_{t=0} = 1$$

A T idővel késleltetett egységimpulzus

$$X(s) = \int_0^{\infty} \delta(t - T) \cdot e^{-st} \cdot dt$$

$$X(s) = \int_T^T e^{-st} \cdot dt = e^{-sT}$$

- T idejű késleltetés az időtartományban =
- szorzás e^{-sT} -val a komplex frekvencia tartományban

A folytonos idejű egységugrás

$$X(s) = \int_0^{\infty} \varepsilon(t) \cdot e^{-st} \cdot dt$$

$$X(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot dt = -\frac{1}{s} \cdot e^{-st} \Big|_0^{\infty}$$

$$X(s) = 0 - \left(-\frac{1}{s} \cdot e^0 \right) = \frac{1}{s}$$

Néhány függvény Laplace-transzformáltja

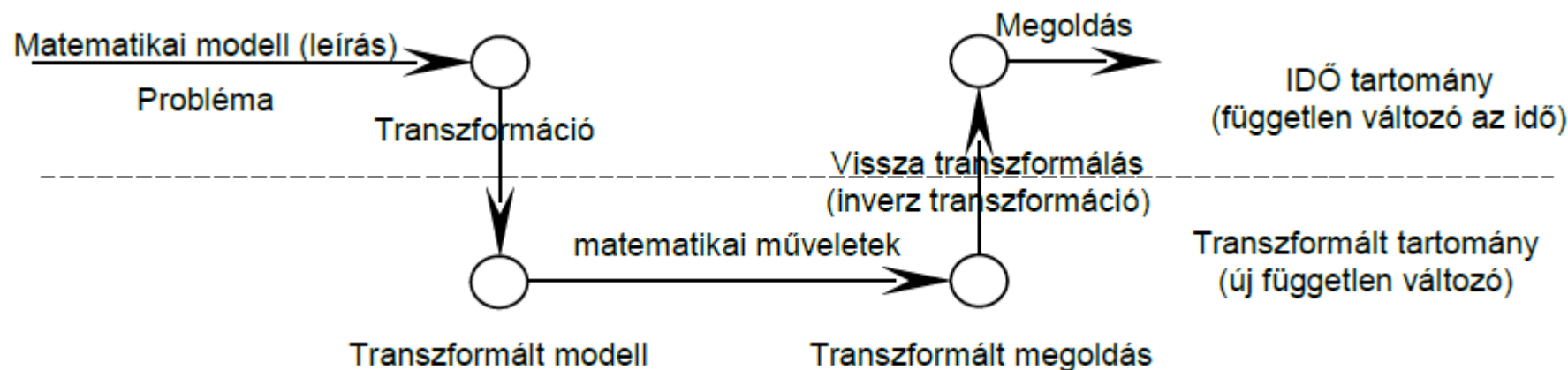
t	$\frac{1}{s^2}$
$e^{-a \cdot t}$	$\frac{1}{a + s}$
$\frac{1}{T} e^{-t/T}$	$\frac{1}{1 + Ts}$
$1 - e^{-t/T}$	$\frac{1}{s(1 + Ts)}$

Néhány függvény Laplace-transzformáltja

$\frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{s^{n+1}}$
$\sin \alpha t$	$\frac{\alpha}{s^2 + \alpha^2}$
$\cos \alpha t$	$\frac{s}{s^2 + \alpha^2}$

Fontosabb alkalmazási szabályok (műveletek)

- A Laplace transzformáció tehát az $f(t)$ valós változójú függvényhez az s komplex változójú függvényt rendeli.



- Kérdés: az $f(t)$ függvényen végzett alapvető műveletek miként érvényesülnek a transzformált tartományban?

LINEARITÁSI szabály

- Adott $f(t)$, amelynek Laplace transzformáltja $\mathcal{L}\{f(t)\}=F(s)$
akkor $\mathcal{L}\{K \cdot f(t)\}=K \cdot \mathcal{L}\{f(t)\}=K \cdot F(s)$.
- Adott $f_1(t), f_2(t)$, amelyeknek Laplace transzformáltjai $F_1(s), F_2(s)$
akkor $\mathcal{L}\{f_1(t)+f_2(t)\}=\mathcal{L}\{f_1(t)\}+\mathcal{L}\{f_2(t)\}=F_1(s)+F_2(s)$.

ELTOLÁSI szabály

$$L\{x(t)\}=X(s) \Rightarrow L\{x(t-T)\}=X(s) \cdot e^{-sT}$$

HASONLÓSÁGI szabály

$$L\{x(t)\} = X(s) \Rightarrow L\{x(a \cdot t)\} = \frac{1}{a} X\left(\frac{s}{a}\right)$$

DIFFERENCIÁLÁS időtartományban

$$L\{x(t)\} = X(s) \Rightarrow L\left\{\frac{dx}{dt}\right\} = s \cdot X(s)$$

INTEGRÁLÁS időtartományban

$$L\{x(t)\} = X(s) \Rightarrow L\left\{\int x(t)dt\right\} = \frac{1}{s} X(s)$$

Fontos következtetés:

mivel a differenciálásnak illetve integrálásnak s -el való szorzás illetve osztás felel meg, a differenciál egyenletek helyébe a transzformált tartományban algebrai egyenletek lépnek. Így a feladatok megoldása lényegesen egyszerűsödik.

Alkalmazási példa

- Tegyük fel, hogy egy autómotor erősen leegyszerűsített leíróegyenlete, amely a gázadás ($u(t)$) és a fordulatszám ($v(t)$) kapcsolatát modellezi:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v(t)}{T} = \frac{K}{T} \cdot u(t)$$

- Vessük Laplace-transzformáció alá a differenciál egyenletet:

$$sV + \frac{V}{T} = \frac{K}{T} \cdot U \Leftrightarrow V = \frac{K}{sT + 1} \cdot U$$

Alkalmazási példa

- Legyen a bemeneti jel egy egységugrás (hirtelen gázadás).

$$u(t) = \varepsilon(t) \Rightarrow U(s) = \frac{1}{s}$$

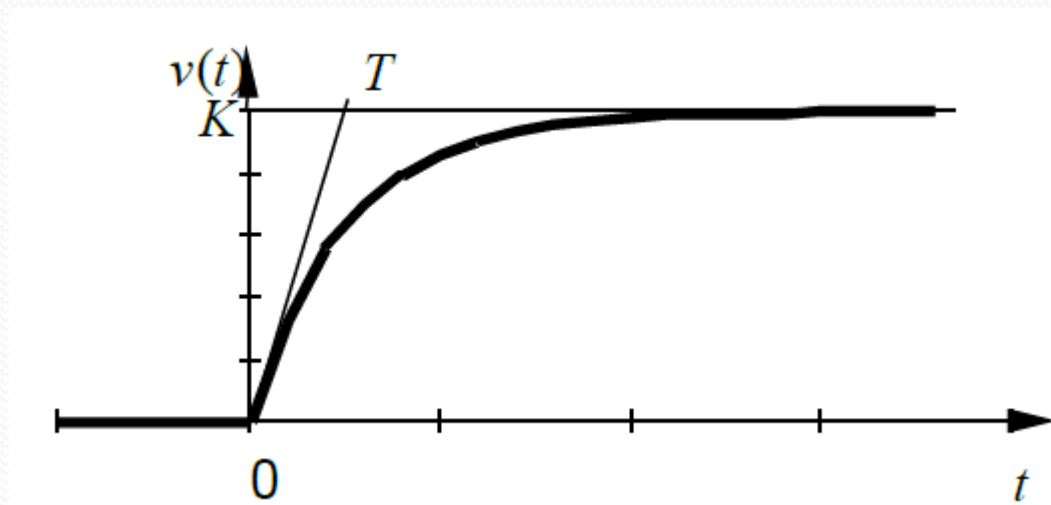
- Ekkor:

$$V = \frac{K}{sT + 1} \cdot \frac{1}{s}$$

Alkalmazási példa

- A Laplace transzformáltak táblázatából:

$$V = \frac{K}{sT + 1} \cdot \frac{1}{s} \Rightarrow v(t) = K \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right)$$



Az átviteli függvény

Legyen $x(t)$ egy LTI rendszer gerjesztése és $y(t)$ a rendszer válasza. A rendszeregyenlet:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + \dots + a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y(t) =$$
$$b_m \frac{d^m x}{dt^m} + \dots + b_2 \frac{d^2 x}{dt^2} + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x(t)$$

Az átviteli függvény

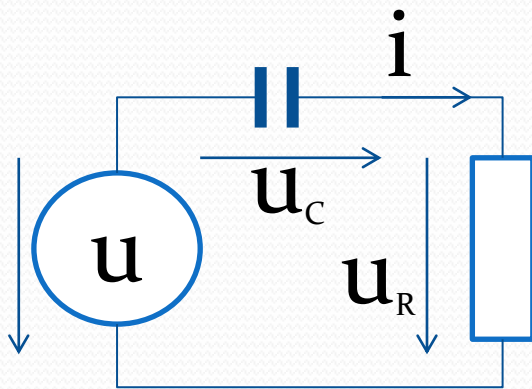
Állítsuk elő a differenciálegyenlet Laplace transzformáltját

$$\left(a_n s^n + \dots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0\right) \cdot Y(s) = \left(b_m s^m + \dots + b_2 s^2 + b_1 s + b_0\right) \cdot X(s)$$

Az átviteli függvény definíció szerint:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + \dots + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

Példa: felül áteresztő szűrő



$u = \text{gerjesztés}$

$u_R = \text{válasz}$

$$u = u_C + u_R$$

$$i = C \frac{du_C}{dt} \Rightarrow u_C = \frac{1}{C} \int i \cdot dt$$

$$u = \frac{1}{C} \int i \cdot dt + u_R = \frac{1}{C} \int \frac{u_R}{R} \cdot dt + u_R$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{RC} \cdot u_R + \frac{du_R}{dt}$$

$$\frac{du_R}{dt} + \frac{1}{RC} \cdot u_R = \frac{du}{dt}$$

$$H(s) = \frac{s}{s + \omega_0}, \quad \omega_0 = \frac{1}{RC}$$

$$U_R = H(s) \cdot U$$

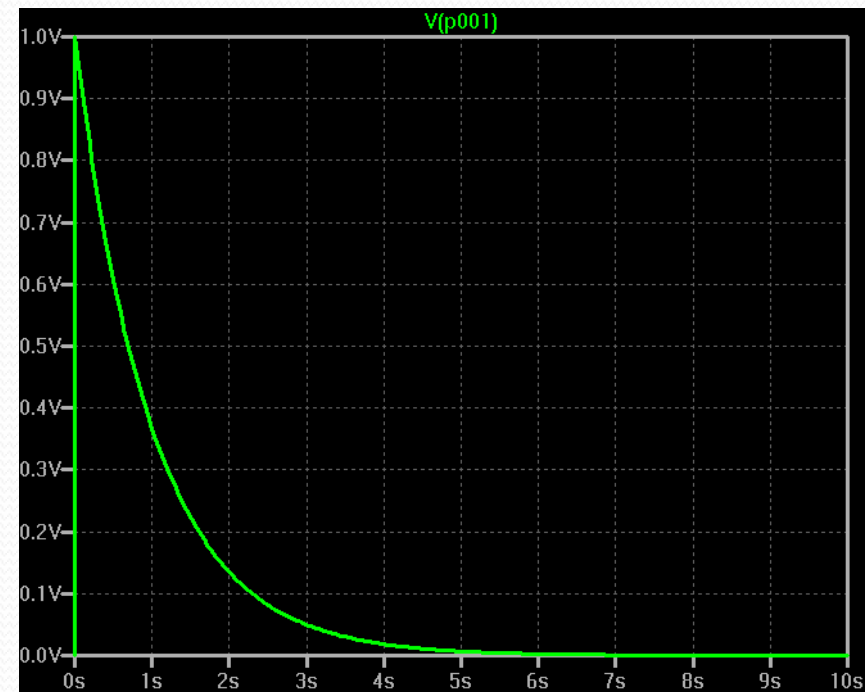
Visszatérés az időtartományba

$$H(s) = \frac{s}{s + \omega_0}, \quad \omega_0 = \frac{1}{RC}$$

$$U_R = H(s) \cdot U$$

$$\text{Legyen } u = \varepsilon(t) \Rightarrow U = \frac{1}{s} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U_R = \frac{1}{s + \omega_0} \Rightarrow u_R(t) = e^{-\omega_0 \cdot t}$$



De a frekvencia tartomány is tanulságos

$$H(s) = \frac{s}{s + \omega_0}, \quad \omega_0 = \frac{1}{RC}$$

Legyen $s = j\omega$

$$\Rightarrow H(j\omega) = \frac{j\omega}{j\omega + \omega_0} = \frac{1}{1 - j\frac{\omega_0}{\omega}}$$

