

VÁRTERÉSZ MAGDA

*Mesterséges intelligencia 2  
előadások*

2006/07-es tanév

# Tartalomjegyzék

<b>1. Logikai kalkulusok</b>	<b>4</b>
<b>2. A predikátumkalkulus</b>	<b>7</b>
2.1. A természetes levezetés . . . . .	16
<b>3. Formulák normálformái</b>	<b>23</b>
3.1. Kvantormentes formulák normálformái . . . . .	23
3.2. Kvantoros formulák prenex alakja . . . . .	28
3.2.1. A prenex-konjunktív vagy prenex-diszjunktív normálalakra hozás algoritmus . . . . .	31
3.3. Skolem-normálforma . . . . .	34
3.3.1. Prenexformula „átírása” univerzális Skolem-formába . . . . .	35
3.4. Klózok, Horn-klózok . . . . .	41
3.4.1. Horn-klózok . . . . .	44
<b>4. Termhelyettesítés</b>	<b>45</b>
4.1. Illesztő helyettesítés . . . . .	55
4.1.1. Illesztő algoritmus . . . . .	57
<b>5. A rezolúciós kalkulus</b>	<b>62</b>
5.1. Rezolúció az ítéletlogikában . . . . .	62
5.1.1. Rezolúciós stratégiák . . . . .	73
5.2. A Herbrand-univerzum és az elsőrendű klózhalmazok . . . . .	85

---

5.2.1. A Herbrand-univerzum előállítása . . . . .	86
5.3. A rezolúciós kalkulus az elsőrendű logikában . . . . .	104
5.3.1. Rezolúciós levezetési stratégiák . . . . .	122
<b>6. A tablók módszere – tablókalkulus</b>	<b>126</b>
6.1. Jelölt tabló az ítéletlogikában . . . . .	126
6.2. Az elsőrendű tabló . . . . .	139

## 1. fejezet

# Logikai kalkulusok

Felépíthető a logika szemantikai fogalmakra hivatkozás nélkül is:

szintaktika	szemantika
logikai nyelv	interpretáció
formula	logikai érték
<b>levezethetőség</b>	következmény

A levezethetőség fogalmát **kalkulus** megadásával definiálhatjuk.

Egy kalkulus megadásakor felsoroljuk az

- **alapformuláit** és a
- **levezetési szabályait**.

Ekkor definiálható a levezethetőség fogalma. Egy  $\Gamma$  formulahalmazból levezethető a  $B$  formula (jelölése:  $\Gamma \vdash B$ )

- ha  $B$  alapformula, vagy  $B \in \Gamma$ ,
- illetve ha van olyan levezetési szabály, mely  $B$ -t előállítja, és az(ok) a formula(ák), amely(ek)ből ez a levezetési szabály  $B$ -t előállítja, az(ok)  $\Gamma$ -ből levezethető(ek).

Egy kalkulus **helyes**, ha  $\Gamma \vdash B$ , akkor  $\Gamma \models B$ .

Egy kalkulus **teljes**, ha  $\Gamma \models B$ , akkor  $\Gamma \vdash B$ .

Egy kalkulus **adekvát**, ha helyes is, teljes is.

Egy logikai rendszer megalkotásakor

- először egy szemantikai rendszert definiálunk,
- majd megkísérlünk ehhez legalább helyes, de ha lehet, adekvát logikai kalkulust szerkeszteni.

## 2. fejezet

### A predikátumkalkulus

Alapsémák:

1.  $A \supset (B \supset A)$

2.  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$

3.  $A \supset (B \supset A \wedge B)$

4.  $A \wedge B \supset A$

5.  $A \wedge B \supset B$

6.  $(A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset (A \vee B \supset C))$

7.  $A \supset A \vee B$

$$8. B \supset A \vee B$$

$$9. (A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A)$$

$$10. \neg\neg A \supset A$$

$$11. \forall x A(x) \supset A(x)_t^x$$

$$12. \forall x (C \supset A(x)) \supset (C \supset \forall x A(x)), x \notin Fv(C)$$

$$13. A(x)_t^x \supset \exists x A(x)$$

$$14. \forall x (A(x) \supset C) \supset (\exists x A(x) \supset C), x \notin Fv(C)$$

Levezetési szabályok:

$$\text{modus ponens} \quad \frac{A \quad A \supset B}{B}$$

$$\text{általánosítási szabály} \quad \frac{A}{\forall x A}$$

A sémákban és szabályokban az

- $A, B, C$  formulákkal;
- $x$  változóval;
- $t$   $x$ -szel azonos típusú termmel

helyettesíthető be. Az alapsémákból így **alapformulákat** kapunk.

Lemma.

A predikátumkalkulus minden alapformulája logikai törvény.

Lemma.

$$A, A \supset B \models B$$

Lemma.

Ha  $\Gamma \models A(x)$  és  $x \notin Par(\Gamma)$ , akkor  $\Gamma \models \forall x A(x)$ .

## 2.1. DEFINÍCIÓ. (FORMULA-FA ÉS MAGASSÁGA)

- Minden  $A$  formula 1 magasságú formula-fa, melyben  $A$  **alsó formula**, és nincs nála feljebb levő formula;
- Ha  $D_1$   $m_1$ ,  $D_2$   $m_2$  magasságú olyan formula-fák, melyben az alsó formulák  $A$  és  $A \supset B$ , akkor

$$\frac{D_1 \quad D_2}{B}$$

is formula-fa  $B$  alsó formulával;  $B$ -nél  $D_1$  és  $D_2$  minden formulája feljebb van; a formula-fa magassága  $\max \{m_1, m_2\} + 1$ ;

- ha  $D$   $m$  magasságú olyan formula-fa, amelyben az alsó formula  $A$ , akkor a

$$\frac{D}{\forall x A}$$

alakzat is formula-fa, melyben  $\forall x A$  alsó formula, melynél  $D$  minden formulája feljebb van, és a formula-fa magassága  $m + 1$ .

A formulafában azon formulák, melyeknél nincs feljebb levő:

- alapformulák,
- **hipotézisek**, vagy **nyílt premisszák**.

Példa.

$$\frac{\frac{Q(x) \supset P}{\forall x(Q(x) \supset P)} \quad \forall x(Q(x) \supset P) \supset (\exists xQ(x) \supset P)}{\exists xQ(x) \supset P}$$

3 magasságú formulafa

alsó formula:  $\exists xQ(x) \supset P$

alapformula:  $\forall x(Q(x) \supset P) \supset (\exists xQ(x) \supset P)$

hipotézis:  $Q(x) \supset P$

**2.2. DEFINÍCIÓ. Levezetés-fa** egy formula-fa, melyben ha  $A$ -ból az általánosítás szabályával akarjuk a  $\forall xA$ -t nyerni, akkor  $x$  nem paraméter egyetlen a  $\forall xA$ -nál feljebb levő hipotézisben sem.

**2.3. DEFINÍCIÓ.** A  $\Gamma$  formulahalmazból a  $B$  formula **levezethető**, ha készíthető olyan levezetés-fa, melyben  $B$  alsó formula, és a hipotézisek mind elemei  $\Gamma$ -nak.

Jelölése:  $\Gamma \vdash B$  (szekvencia)

**2.4. TÉTEL.** *A predikátumkalkulus adekvát logikai kalkulus.*

**2.5. TÉTEL. (HELYESSÉG.)** Ha  $\Gamma \vdash B$ , akkor  $\Gamma \models B$ .

BIZONYÍTÁS. A  $\Gamma \vdash B$  szekvenciát megalapozó levezetésfa magassága szerinti indukcióval bizonyítunk. Legyen a levezetésfa magassága  $k$ .

- $k = 1$  esetén
  - vagy axióma  $B$ , ekkor  $\models B$ , így nyilván  $\Gamma \models B$  is.
  - vagy  $B \in \Gamma$ , azaz hipotézis, ekkor minden olyan interpretációban és változókiértékelés mellett, amikor minden hipotézis igaz, nyilván  $B$  is igaz, tehát  $\Gamma \models B$ .
- Az indukciós feltevésünk szerint legyen igaz az állítás minden  $n$ -nél nem magasabb formulafa esetén.

- Legyen most  $k = n + 1$ . Ha a  $\Gamma \models B$  szekvenciát megalapozó formulafát
  - a modus ponens levezetési szabállyal nyertük a  $\Gamma \vdash A$  és  $\Gamma \vdash A \supset B$  szekvenciákat megalapozó, legfeljebb  $n$  magasságú levezetésfákból. Az indukciós feltevés miatt ekkor igaz az állítás, tehát  $\Gamma \models A$  és  $\Gamma \models A \supset B$ . De minden olyan interpretációban és változókiértékelés mellett, amikor a  $\Gamma$ -beli hipotézisek mind igazak, ezek szerint igazak ezen interpretációkban és változókiértékelések mellett az  $A$  és az  $A \supset B$  formula is, így a  $B$  formula is. Tehát  $\Gamma \models B$  is.

- az általánosítás szabályával nyertük,  $B$  tehát  $\forall x A(x)$  alakú. Az  $n$  magasságú levezetésfa, amiből nyertük, a  $\Gamma \vdash A$  szekvenciát alapozza meg, ahol  $x \notin \text{Par}(\Gamma)$ . Az indukciós feltevés miatt ekkor igaz az állítás, tehát  $\Gamma \models A(x)$ . De minden olyan interpretációban és változókiértékelés mellett, amikor a  $\Gamma$ -beli hipotézisek mind igazak, ezek szerint igaz ezen interpretációkban és változókiértékelések mellett az  $A(x)$  is. Mivel  $x \notin \text{Par}(\Gamma)$ , minden ilyen változókiértékelés minden  $x$ -variánsa mellett is igazak a hipotézisek, így az  $A(x)$  is, tehát a  $\forall x A(x)$  is. Ezért  $\Gamma \models \forall x A(x)$ .

## 2.1. A természetes levezetés

Az azonosság törvénye

$$\Gamma, A \vdash A$$

Struktúrális szabályok

bővítés

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, B \vdash A}$$

szűkítés

$$\frac{\Gamma, B, B, \Delta \vdash A}{\Gamma, B, \Delta \vdash A}$$

felcserélés

$$\frac{\Gamma, B, C, \Delta \vdash A}{\Gamma, C, B, \Delta \vdash A}$$

vágás

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Delta, A \vdash B}{\Gamma, \Delta \vdash B}$$

## Logikai szabályok

BEVEZETÉS

implikáció

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \supset B}$$

konjunkció

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}$$

diszjunkció

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}$$

ELTÁVOLÍTÁS

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash A \supset B}{\Gamma \vdash B}$$

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash C}{\Gamma, A \wedge B \vdash C}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \vee B \vdash C}$$

## BEVEZETÉS

negáció

$$\frac{\Gamma, A \vdash B \quad \Gamma, A \vdash \neg B}{\Gamma \vdash \neg A}$$

ekvivalencia

$$\frac{\Gamma, A \vdash B \quad \Gamma, B \vdash A}{\Gamma \vdash A \equiv B}$$

## ELTÁVOLÍTÁS

$$\frac{\Gamma \vdash \neg\neg A}{\Gamma \vdash A}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash A \equiv B}{\Gamma \vdash B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash B \quad \Gamma \vdash A \equiv B}{\Gamma \vdash A}$$

## BEVEZETÉS

univerzális kvantor

$$\frac{\Gamma \vdash A(x)}{\Gamma \vdash \forall x A(x)} \quad (x \notin Par(\Gamma))$$

egzisztenciális kvantor

$$\frac{\Gamma \vdash A(x)_t^x}{\Gamma \vdash \exists x A(x)}$$

## ELTÁVOLÍTÁS

$$\frac{\Gamma \vdash \forall x A(x)}{\Gamma \vdash A(x)_t^x}$$

$$\frac{\Gamma, A(x) \vdash B}{\Gamma, \exists x A(x) \vdash B} \quad (x \notin Par(\Gamma))$$

## 2.6. TÉTEL. (DEDUKCIÓ-TÉTEL.)

Ha  $\Gamma, A \vdash B$ , akkor  $\Gamma \vdash A \supset B$ .

BIZONYÍTÁS. A  $\Gamma, A \vdash B$  szekvenciát megalapozó levezetésfa magassága szerinti indukcióval bizonyítunk. Legyen a levezetésfa magassága  $k$ .

- $k = 1$  esetén

– vagy axióma  $B$ , vagy  $B \in \Gamma$ , ekkor

$$\frac{B \quad ; \quad B \supset (A \supset B)}{A \supset B}$$

így  $\Gamma \vdash A \supset B$ .

– vagy  $B = A$ . De ekkor  $\vdash A \supset A$ .

- Az indukciós feltevésünk szerint legyen igaz az állítás minden  $n$ -nél nem magasabb formulafa esetén.

- Legyen most  $k = n + 1$ . Ha a  $\Gamma, A \vdash B$  szekvenciát megalapozó formulafát
  - a modus ponens levezetési szabállyal nyertük a  $\Gamma, A \vdash C$  és  $\Gamma, A \vdash C \supset B$  szekvenciákat megalapozó, legfeljebb  $n$  magasságú levezetésfákból. Az indukciós feltevés miatt ekkor igaz az állítás, tehát  $\Gamma \vdash A \supset C$  és  $\Gamma \vdash A \supset (C \supset B)$ .

$$\frac{\begin{array}{c} \Gamma \\ \vdots \\ \Gamma \\ \vdots \\ A \supset C \end{array} \quad \frac{\begin{array}{c} \Gamma \\ \vdots \\ A \supset (C \supset B); (A \supset (C \supset B)) \supset ((A \supset C) \supset (A \supset B)) \end{array}}{(A \supset C) \supset (A \supset B)}}{A \supset B}$$

Tehát  $\Gamma \vdash A \supset B$ .

- az általánosítás szabályával nyertük,  $B$  tehát  $\forall xC(x)$  alakú.  
 Az  $n$  magasságú levezetésfa, amiből nyertük, a  $\Gamma, A \vdash C(x)$  szekvenciát alapozza meg, ahol  $x \notin \text{Par}(\Gamma, A)$ . Az indukciós feltevés miatt ekkor igaz az állítás, tehát  $\Gamma \vdash A \supset C(x)$ .

$$\frac{\forall x(A \supset C(x)) \supset (A \supset \forall xC(x)) \qquad \frac{\Gamma}{\vdots} \frac{A \supset C(x)}{\forall x(A \supset C(x))}}{A \supset \forall xC(x)}$$

Tehát  $\Gamma \vdash A \supset \forall xC(x)$ .

## 3. fejezet

# Formulák normálformái

### 3.1. Kvantormentes formulák normálformái

- Egy atomi formulát vagy negáltját **literálnak** fogjuk nevezni.
- **Elemi konjunkció**
  1. egy literál,
  2. vagy egy elemi konjunkció és egy literál konjunkciója;
- **Elemi diszjunkció**
  1. egy literál,
  2. vagy egy elemi diszjunkció és egy literál diszjunkciója.

- **Konjunktív normálforma**

1. egy elemi diszjunkció,
2. vagy egy konjunktív normálforma és egy elemi diszjunkció konjunkciója.

- **Diszjunktív normálforma**

1. egy elemi konjunkció,
2. vagy egy diszjunktív normálforma és egy elemi konjunkció diszjunkciója.

Lemma.

Az elsőrendű logikai nyelv minden kvantormentes formulájához konstruálható vele logikailag ekvivalens konjunktív és diszjunktív normálforma.

*Jelek közötti összefüggések:* (1)  $\neg(A \supset B) \sim A \wedge \neg B$

$$(2) A \supset B \sim \neg A \vee B$$

*Kétszeres tagadás:*

$$(3) \neg\neg A \sim A$$

*De Morgan törvényei:*

$$(4) \neg(A \wedge B) \sim \neg A \vee \neg B$$

$$(5) \neg(A \vee B) \sim \neg A \wedge \neg B$$

*Disztributivitás:*

$$(6) A \wedge (B \vee C) \sim (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

$$(7) A \vee (B \wedge C) \sim (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

A konstrukció lépései:

1. a logikai jelek közötti összefüggések alapján az implikációkat eltávolítjuk;
2. De Morgan törvényeivel elérjük, hogy negáció csak atomokra vonatkozzon;
3. a disztributivitást felhasználva elérjük, hogy a konjunkciók és diszjunkciók megfelelő sorrendben kövessék egymást;
4. esetleg egyszerűsítünk.

Példa.

$$(A \supset B) \vee \neg(\neg B \supset A \vee \neg C)$$

↓ implikáció-eltávolítás

$$(\neg A \vee B) \vee (\neg B \wedge \neg(A \vee \neg C))$$

↓ negáció atomokra vonatkozik

$$(\neg A \vee B) \vee (\neg B \wedge \neg A \wedge C)$$

↓ konjunkciók diszjunkciója

$$(\neg A \vee B \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee B \vee \neg A) \wedge (\neg A \vee B \vee C)$$

↓ egyszerűsítés

$$(\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee B \vee C)$$

↓ egyszerűsítés

$$\neg A \vee B$$

### 3.2. Kvantoros formulák prenex alakja

Egy  $Q_1x_1Q_2x_2 \dots Q_nx_nA$  ( $n \geq 0$ ) alakú formulát, ahol a  $A$  kvantormentes formula, **prenex alakú formulának** nevezünk.

Példa.

A  $\forall x \forall y (P(x, y) \supset \neg Q(x))$ , a  $\exists x \forall y (P(x, y) \vee R(x, z))$ , a  $\neg P(x, x)$  formulák prenexformulák, viszont a  $\forall x \forall y P(x, y) \supset \neg Q(x)$  formula nem prenexformula.

Lemma.

Egy elsőrendű logikai nyelv tetszőleges formulájához konstruálható vele logikailag ekvivalens prenex alakú formula.

*De Morgan kvantoros törvényei* (1)  $\neg \forall x A \sim \exists x \neg A$

$$(2) \neg \exists x A \sim \forall x \neg A$$

*Kvantorok kétoldali kiemelése* változótisztaság

$$(3) \forall x A \wedge \forall y B \sim \forall x (A \wedge B(y||x))$$

$$(4) \exists x A \vee \exists y B \sim \exists x (A \vee B(y||x))$$

*Kvantorok egyoldali kiemelése* változótisztaság

$$(5) Qx A \wedge B \sim Qx (A \wedge B)$$

$$(6) Qx A \vee B \sim Qx (A \vee B)$$

A konstrukció lépései:

1. változó-tiszta alakra hozzuk a formulát;
2. alkalmazzuk De Morgan kvantoros és a kvantorkiemelésre vonatkozó logikai törvényeket.

Példa.

$$\forall x P(x) \supset \neg \exists x Q(x)$$

↓ változó-tiszta alakra hozás

$$\forall x P(x) \supset \neg \exists y Q(y)$$

↓ egyoldali kvantorkiemelés

$$\forall x P(x) \supset \forall y \neg Q(y)$$

$$\exists x (P(x) \supset \forall y \neg Q(y))$$

$$\exists x \forall y (P(x) \supset \neg Q(y))$$

3.2.1. **A prenex-konjunktív vagy prenex-diszjunktív normálalakra hozás algoritmus**

1. Az implikációk helyére a *logikai jelek közötti összefüggések* alapján velük ekvivalens implikációt nem tartamazó formulákat írunk.
2. A *kétszeres tagadás és De Morgan törvényeit* alkalmazzuk a formulában szereplő negációkra addig, amíg minden negáció hatásköre atomi formula nem lesz.
3. Az így nyert formulához vele kongruens (logikailag ekvivalens) változóiban tiszta formulát konstruálunk.
4. A *kvantorkiemelésre* vonatkozó ekvivalenciákat alkalmazzuk addig, amíg az összes kvantor a formula elé nem kerül. Ezzel a formulát prenexalakra hoztuk.
5. Prenex-konjunktív, illetve prenex-diszjunktív normálformula előállításához a kapott prenexformula magját a *disztributivitást* alkalmazva konjunktív, illetve diszjunktív normálformára hozzuk.

Példa. Hozzuk a

$$\forall x(\forall yP(x, y) \wedge \exists y\neg(Q(y) \supset P(x, a))) \supset \neg\forall x\exists y(P(y, x) \supset R(x, y))$$

formulát prenexalakra.

1. Az implikációk átírása:

$$\neg(\forall x(\forall yP(x, y) \wedge \exists y(Q(y) \wedge \neg P(x, a)))) \vee \neg\forall x\exists y(\neg P(y, x) \vee R(x, y)).$$

2. A kétszeres tagadás és De Morgan törvényeinek alkalmazása:

$$\exists x(\exists y\neg P(x, y) \vee \forall y(\neg Q(y) \vee P(x, a))) \vee \exists x\forall y(P(y, x) \wedge \neg R(x, y)).$$

3. Az egzisztenciális kvantor kétoldali kiemelésére vonatkozó ekvivalencia alkalmazása:

$$\exists x(\exists y\neg P(x, y) \vee \forall y(\neg Q(y) \vee P(x, a)) \vee \forall y(P(y, x) \wedge \neg R(x, y))).$$

4. A formulában az  $y$  változó három prefixumban is meg van nevezve. Két helyen a kötött változókat szabályosan átnevezzük a

formulában még nem szereplő  $y_1$  és  $y_2$  változókra:

$$\exists x(\exists y\neg P(x, y) \vee \forall y_1(\neg Q(y_1) \vee P(x, a)) \vee \forall y_2(P(y_2, x) \wedge \neg R(x, y_2))).$$

5. Ezután már mindegyik kvantor kiemelhető (tetszőleges sorrendben), egy lehetséges eredmény:

$$\exists x \exists y \forall y_1 \forall y_2 (\neg P(x, y) \vee (\neg Q(y_1) \vee P(x, a)) \vee (P(y_2, x) \wedge \neg R(x, y_2))).$$

6. A formula magja diszjunktív normálforma, de a disztribúció felhasználásával átírható konjunktív normálformába, ha az a további feldolgozás szempontjából úgy célszerű:

$$\begin{aligned} \exists x \exists y \forall y_1 \forall y_2 ((\neg P(x, y) \vee \neg Q(y_1) \vee P(x, a) \vee P(y_2, x)) \wedge \\ \wedge (\neg P(x, y) \vee \neg Q(y_1) \vee P(x, a) \vee \neg R(x, y_2))). \end{aligned}$$

### 3.3. Skolem-normálforma

A  $\forall x \forall y (P(x, y) \supset \neg Q(x))$  prenexformula prefixumában csak univerzális kvantorok vannak. Az ilyen, azaz  $\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n A$  alakú formulák fontosak lesznek a továbbiakban.

*Univerzális Skolem-formulának* nevezzük az olyan prenexformulát, amelynek a prefixumában csak univerzális kvantor szerepel. Ha a Skolem-formula magja konjunktív normálforma, akkor a formulát *Skolem-normálformának* nevezzük.

Tétel.

Tetszőleges  $A$  elsőrendű formulához konstruálható olyan univerzális Skolem-formula, mely pontosan akkor kielégíthetetlen, ha  $A$  kielégíthetetlen.

## 3.3.1. Prenexformula „átírása” univerzális Skolem-formába

1. Új Skolem-szimbólumok bevezetése:

Vizsgáljuk meg a

$$\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_{j-1} \exists x_j Q_{j+1} x_{j+1} \dots Q_n x_n A$$

prenexformulát, amelynek a prefixumából az egzisztenciális kvantorokat eliminálni szeretnénk. Legyen a prefixumban az első egzisztenciális kvantor a prefixum  $j$ -edik kvantora.

- Ha  $j = 1$ , akkor minden olyan interpretációban és  $\kappa$  változókiértékelés esetén, amely mellett a formula igaz, az interpretáció  $\mathcal{U}_{\pi_{x_1}}$  univerzumában van legalább egy  $u \in \mathcal{U}_{\pi_{x_1}}$ , hogy  $\kappa^*(x_1) = u$  mellett a  $Q_2 x_2 \dots Q_n x_n A$  formula igaz lesz. Ezt az elemet *Skolem-konstansnak* nevezzük.

Bővítsük ki az elsőrendű nyelvünket egy új  $\pi_{x_1}$  fajta  $s$  konstansszimbólummal, mely az egyes interpretációk univerzumai-ban rendre egy-egy Skolem-konstanst – ha egyáltalán van ilyen – nevez meg.

- Legyen most  $j > 1$ . Egy  $\mathcal{I}$  interpretációban valamely  $\kappa$  változókiértékelés mellett a

$$\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_{j-1} \exists x_j Q_{j+1} x_{j+1} \dots Q_n x_n A$$

formula pontosan akkor igaz, ha  $\kappa$ -ban az  $x_1, x_2, \dots, x_{j-1}$  változókhoz bármilyen más – az interpretáció megfelelő univerzumaiból vett – elemet rendelve mindig van legalább egy elem  $\mathcal{U}_{\pi_{x_j}}$ -ben, amellyel pedig az  $x_j$  változót értékelve az így nyert változókiértékelés mellett a  $\exists x_j$  hatásköre igaz.

Azaz minden  $(u_1, u_2, \dots, u_{j-1}) \in \mathcal{U}_{\pi_{x_1}} \times \dots \times \mathcal{U}_{\pi_{x_{j-1}}}$  elem  $j - 1$ -eshez tartozik legalább egy  $u \in \mathcal{U}_{\pi_{x_j}}$ , hogy  $\kappa$  azon  $\kappa'$  variánsa mellett, melyre

$$\kappa'(x) = \begin{cases} u_i & \text{ha } x \in \{x_1, x_2, \dots, x_{j-1}\}, \\ u & \text{ha } x = x_j, \\ \kappa(x) & \text{egyébként,} \end{cases}$$

a  $\exists x_j$  hatásköre igaz lesz. Legyen

$$f^{\mathcal{I}} : \mathcal{U}_{\pi_{x_1}} \times \dots \times \mathcal{U}_{\pi_{x_{j-1}}} \rightarrow \mathcal{U}_{\pi_{x_j}}$$

egy függvény, amely minden  $(u_1, u_2, \dots, u_{j-1})$ -hez egy ilyen  $u$  értéket rendel. Ezt a függvényt *Skolem-függvénynek* nevezzük.

Bővítsük ki az elsőrendű nyelvünket egy új  $f(\pi_{x_1}, \dots, \pi_{x_{j-1}}, \pi_{x_j})$  alakú függvényszimbólummal. A kibővített nyelv interpretálása során  $f$ -et, ha van Skolem-függvény, Skolem-függvénnyel interpretáljuk.

2. Kvantoreliminálási lépés:

Ezután a prefixumból elhagyjuk a  $\exists x_j$ -t, és a formula magjában elvégezzük az  $(x_j \parallel s)$ , illetve az  $(x_j \parallel f(x_1, x_2, \dots, x_{j-1}))$  termhelyettesítést. A kapott

$$Q_2 x_2 \dots Q_n x_n A(x_1 \parallel s),$$

illetve

$$\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_{j-1} Q_{j+1} x_{j+1} \dots Q_n x_n A(x_j \parallel f(x_1, x_2, \dots, x_{j-1}))$$

formula az eredeti formulában szereplő első egzisztenciális kvantort már nem tartalmazza.

Megmutatjuk, hogy ezzel a lépéssel az eredeti formulával a kielégíthetőség szempontjából egyenértékű formulát kaptunk.

- (a) Egyrészt minden olyan interpretációban, amelyben az eredeti formula valamely változókiértékelés mellett igaz volt, az új függvényszimbólumot (konstansszimbólumot) interpretálhatjuk egy Skolem-függvénnyel (Skolem-konstanssal) úgy, hogy a változókiértékelés mellett igaz lesz az átalakított formula is.
  - (b) Ha pedig az eredeti formula minden interpretációban, minden változókiértékelés mellett hamis volt, azaz kielégíthetetlen, akkor az átalakított formula is az lesz, mivel ekkor nincs Skolem-függvény (konstans) egyetlen interpretáló struktúrában sem.
3. Az új Skolem-szimbólumok bevezetésének és a kvantoreliminálásnak a lépéseit végrehajtjuk a soron következő egzisztenciális kvantorra, amíg minden egzisztenciális kvantort nem elimináltunk.

Példa. Írjuk át Skolem-normálformába a

$$\begin{aligned} & \exists x \exists y \forall y_1 \forall y_2 ((\neg P(x, y) \vee \neg Q(y_1) \vee P(x, a) \vee P(y_2, x)) \wedge \\ & \wedge (\neg P(x, y) \vee \neg Q(y_1) \vee P(x, a) \vee \neg R(x, y_2))) \end{aligned}$$

prenex-konjunktív formulát. A két egzisztenciális kvantor a prefixum első két kvantora, ezért két Skolem-konstanst kell bevezetnünk. Jelöljük az  $a$ -tól különböző két új konstanst  $s_1$  és  $s_2$ -vel.

$$\begin{aligned} & \forall y_1 \forall y_2 ((\neg P(s_1, s_2) \vee \neg Q(y_1) \vee P(s_1, a) \vee P(y_2, s_1)) \wedge \\ & \wedge (\neg P(s_1, s_2) \vee \neg Q(y_1) \vee P(s_1, a) \vee \neg R(s_1, y_2))). \end{aligned}$$

### 3.4. Klózok, Horn-klózok

Az ítéletlogikában az elemi diszjunkciót *klóznak* is nevezik.

Az *elsőrendű klóz* pedig egy olyan zárt univerzális Skolem-formula, amelynek a magja elemi diszjunkció.

Egy Skolem-normálforma magja egy konjunktív normálforma.

Ha egy zárt  $K$  Skolem-normálformára „visszafelé” alkalmazzuk a konjunkióra vonatkozó kétoldali kvantorkiemelési szabályt, akkor elsőrendű klózok konjunkióját kapjuk. Legyen  $S$  ezen klózok halmaza.

Tétel.

Legyen  $K$  egy zárt Skolem-normálforma,  $S$  pedig a  $K$  magjából nyert elsőrendű klózoknak a halmaza.  $K$  pontosan akkor kielégíthetetlen, ha  $S$  kielégíthetetlen.

Példa. Az előző példában kapott Skolem-normálformában alkalmazzuk a kvantorkiemelésre vonatkozó ekvivalenciát „visszafelé”:

$$\begin{aligned} & \forall y_1 \forall y_2 (\neg P(s_1, s_2) \vee \neg Q(y_1) \vee P(s_1, a) \vee P(y_2, s_1)) \wedge \\ & \wedge \forall y_1 \forall y_2 (\neg P(s_1, s_2) \vee \neg Q(y_1) \vee P(s_1, a) \vee \neg R(s_1, y_2)). \end{aligned}$$

Hozzuk a formulát változóiban tiszta alakra:

$$\begin{aligned} & \forall y_1 \forall y_2 (\neg P(s_1, s_2) \vee \neg Q(y_1) \vee P(s_1, a) \vee P(y_2, s_1)) \wedge \\ & \wedge \forall x_1 \forall x_2 (\neg P(s_1, s_2) \vee \neg Q(x_1) \vee P(s_1, a) \vee \neg R(s_1, x_2)). \end{aligned}$$

Mivel egy elsőrendű klóz minden változója univerzálisan kvantált, az elsőrendű klózhalmazokban a klózek prefixumait (helykímélési céllal) nem tüntetjük fel. Tehát a fenti elsőrendű klózhalmazt így adjuk meg:

$$\left\{ \begin{array}{l} \neg P(s_1, s_2) \vee \neg Q(y_1) \vee P(s_1, a) \vee P(y_2, s_1), \\ \neg P(s_1, s_2) \vee \neg Q(x_1) \vee P(s_1, a) \vee \neg R(s_1, x_2) \end{array} \right\}.$$

Példa. Írjuk át Skolem-normálformába a

$$\forall x \exists y \exists z ((\neg P(x, y) \wedge Q(x, z)) \vee R(x, y, z))$$

prenexformulát. Először írjuk át a formula magját konjunktív normálformába:

$$\forall x \exists y \exists z ((\neg P(x, y) \vee R(x, y, z)) \wedge (Q(x, z) \vee R(x, y, z))).$$

A Skolem-függvények egyváltozósak, vezessünk be az elsőrendű nyelvbe jelölésükre két új függvényszimbólumot:  $f$ -et és  $g$ -t. A Skolem-normálforma:

$$\forall x ((\neg P(x, f(x)) \vee R(x, f(x), g(x))) \wedge (Q(x, g(x)) \vee R(x, f(x), g(x)))).$$

Elsőrendű klózek konjunkciójaként felírva a formulát:

$$\forall x (\neg P(x, f(x)) \vee R(x, f(x), g(x))) \wedge \forall x (Q(x, g(x)) \vee R(x, f(x), g(x))).$$

A változóiban tiszta elsőrendű klózhalmoz pedig:

$$\{ \neg P(x, f(x)) \vee R(x, f(x), g(x)), Q(y, g(y)) \vee R(y, f(y), g(y)) \}.$$

## 3.4.1. Horn-klózek

A *Horn-klózek* olyan klózek, melyekben legfeljebb egy pozitív literál van.

- tény:  $A$
- szabály:  $\neg B_1 \vee \neg B_2 \vee \dots \vee \neg B_n \vee A$
- cél:  $\neg B_1 \vee \neg B_2 \vee \dots \vee \neg B_n$

Tehát a Horn-klózek olyan univerálisan kvantált zárt formulák, melyek magja a szabályok esetén

$$B_1 \wedge B_2 \wedge \dots \wedge B_n \supset A,$$

cél esetén pedig

$$\neg(B_1 \wedge B_2 \wedge \dots \wedge B_n)$$

alakban is írható.

## 4. fejezet

### Termhelyettesítés

Egy olyan függvényt, amely az elsőrendű nyelv véges sok változóján van értelmezve és minden változóhoz a változó fajtájával megegyező fajtájú termet rendel, *termhelyettesítésnek* nevezünk. *Üres* a termhelyettesítés, ha az értelmezési tartománya üres.

Legyen  $\text{Dom}(\theta) = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$  és  $\theta(x_i) = t_i$  minden  $i = 1, 2, \dots, k$ -ra ( $k \geq 1$ ).  $\theta$ -t megadhatjuk táblázattal:

$$\theta = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_k \\ t_1 & t_2 & \dots & t_k \end{pmatrix}$$

vagy felsorolással:

$$\theta = (x_1, x_2, \dots, x_k \parallel t_1, t_2, \dots, t_k)$$

$\theta_{-x}$  jelölje azt a termhelyettesítést, melyre  $\text{Dom}(\theta_{-x}) = \text{Dom}(\theta) \setminus \{x\}$  és minden  $z \in \text{Dom}(\theta_{-x})$  esetén  $\theta_{-x}(z) = \theta(z)$ .

Legyen  $\theta$  tetszőleges termhelyettesítés.

1. Ha  $c \in \text{Cnst}$ , akkor  $(c\theta) \rightleftharpoons c$ .

2. Ha  $x$  változó, akkor  $(x\theta) \rightleftharpoons \begin{cases} x, & \text{ha } x \notin \text{Dom}(\theta) \\ \theta(x), & \text{ha } x \in \text{Dom}(\theta) \end{cases}$

3.  $(f(t_1, t_2, \dots, t_k)\theta) \rightleftharpoons f((t_1\theta), (t_2\theta), \dots, (t_k\theta))$

4.  $(P(t_1, t_2, \dots, t_k)\theta) \rightleftharpoons P((t_1\theta), (t_2\theta), \dots, (t_k\theta))$

5.  $(\neg A\theta) \rightleftharpoons \neg(A\theta)$ .

6.  $((A \circ B)\theta) \rightleftharpoons ((A\theta) \circ (B\theta))$ , ahol  $\circ$  binér logikai összekötőjel.

7.  $(Qx A\theta) \rightleftharpoons Qx(A\theta_{-x})$ , ahol  $Q$  kvantor.

A  $\theta$  termhelyettesítés megengedett a  $K$  kifejezés számára, ha minden  $x \in \text{Dom}(\theta)$  esetén  $x$  minden  $K$ -beli szabad előfordulása kívül esik a  $\theta(x)$  term valamennyi változóját megnevező kvantor hatáskörén.

1. Termek és atomi formulák számára minden termhelyettesítés megengedett.
2.  $\neg A$  számára egy termhelyettesítés megengedett, ha megengedett  $A$  számára.
3.  $(A \circ B)$  számára egy termhelyettesítés megengedett, ha megengedett  $A$  és  $B$  számára is.
4.  $QxA$  számára egy  $\theta$  termhelyettesítés megengedett, ha
  - (a) egyetlen  $z \in \text{Par}(QxA) \cap \text{Dom}(\theta)$  változó esetén sem fordul elő  $x$  a  $\theta(z)$  termben,
  - (b)  $\theta_{-x}$  pedig megengedett  $A$  számára.

Példa.

A  $\forall \tilde{x} R(\tilde{x}, f(x, \tilde{x})) \supset \exists x Q(x, f(x, \tilde{x}))$  formula számára az

$$\left( \begin{array}{ccc} x & y & \tilde{x} \\ y & x & f(y, \tilde{y}) \end{array} \right)$$

termhelyettesítés megengedett, az

$$\left( \begin{array}{ccc} x & y & \tilde{x} \\ y & x & f(x, \tilde{y}) \end{array} \right)$$

termhelyettesítés pedig nem megengedett, mert a helyettesítendő szabad előfordulású  $\tilde{x}$  az  $x$ -et kötő  $\exists$  hatáskörében van, és a helyére beírandó  $f(x, \tilde{y})$  termben is előfordul az  $x$  változó.

Legyen  $K$  egy kifejezés és  $\theta$  egy termhelyettesítés. Konstruáljunk meg egy  $K$ -val kongruens olyan  $K'$  formulát, amely számára  $\theta$  megengedett. Ekkor a  $(K'\theta)$  kifejezés a  $\theta$  termhelyettesítés  $K$ -ban való szabályos végrehajtásának eredménye. Jelölése:  $[K\theta]$ .

1. Ha  $K$  term vagy atomi formula, akkor  $[K\theta] \rightleftharpoons (K\theta)$ .

2.  $[\neg A\theta] \rightleftharpoons \neg[A\theta]$

3.  $[(A \circ B)\theta] \rightleftharpoons ([A\theta] \circ [B\theta])$

4.(a) Ha egyetlen  $z \in \text{Par}(QxA) \cap \text{Dom}(\theta)$  változó esetén sem fordul elő a  $\theta(z)$  termben  $x$ , akkor  $[QxA\theta] \rightleftharpoons Qx[A\theta_{-x}]$ .

(b) Ha van olyan  $z \in \text{Par}(QxA) \cap \text{Dom}(\theta)$  változó, hogy  $x$  paraméter  $\theta(z)$ -ben, akkor válasszunk egy új változót – például  $u$ -t –, mely nem fordul elő sem  $QxA$ -ban, sem  $\text{Rng}(\theta)$  termjeiben, és

$$[QxA\theta] \rightleftharpoons Qu[A(x \parallel u)\theta_{-x}].$$

Példa.

A  $\forall \tilde{x} R(\tilde{x}, f(x, \tilde{x})) \supset \exists x Q(x, f(x, \tilde{x}))$  formulában az

$$\begin{pmatrix} x & y & \tilde{x} \\ y & x & f(x, \tilde{y}) \end{pmatrix}$$

termhelyettesítés szabályos végrehajtásának eredménye a

$$\forall \tilde{x} R(\tilde{x}, f(y, \tilde{x})) \supset \exists z Q(z, f(z, f(x, \tilde{y})))$$

formula.

Legyenek

$$\theta = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_k \\ t_1 & t_2 & \dots & t_k \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \eta = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_\ell \\ s_1 & s_2 & \dots & s_\ell \end{pmatrix}$$

egy nyelv termhelyettesítései.  $\theta$  és  $\eta$  kompozícióján a

$$(\theta\eta) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_k & y_{i_1} & y_{i_2} & \dots & y_{i_j} \\ (t_1\eta) & (t_2\eta) & \dots & (t_k\eta) & s_{i_1} & s_{i_2} & \dots & s_{i_j} \end{pmatrix}$$

termhelyettesítést értjük, ahol

$$\{y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_j}\} = \text{Dom}(\eta) \setminus \text{Dom}(\theta).$$

Példa.

Legyenek

$$\theta = \begin{pmatrix} x & y & \tilde{x} \\ y & x & f(x, \tilde{y}) \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \eta = \begin{pmatrix} x & y & \tilde{x} & \tilde{y} & \tilde{z} \\ c & z & \tilde{y} & \tilde{x} & f(x, \tilde{x}) \end{pmatrix}$$

$\mathcal{L}^{p1}$  termhelyettesítései. Ekkor

$$(\theta\eta) = \begin{pmatrix} x & y & \tilde{x} & \tilde{y} & \tilde{z} \\ z & c & f(c, \tilde{x}) & \tilde{x} & f(x, \tilde{x}) \end{pmatrix}$$

és

$$(\eta\theta) = \begin{pmatrix} x & y & \tilde{x} & \tilde{y} & \tilde{z} \\ c & z & \tilde{y} & f(x, \tilde{y}) & f(y, f(x, \tilde{y})) \end{pmatrix}.$$

A példa mutatja, hogy a kompozíció művelete egy nyelv termhelyettesítéseinek halmazán nem kommutatív.

Lemma.

Legyenek  $\theta$  és  $\eta$  egy nyelv termhelyettesítései. Ekkor tetszőleges  $t$  term esetén

$$(t(\theta\eta)) = ((t\theta)\eta).$$

Tétel.

Egy elsőrendű logikai nyelv tetszőleges  $\theta$ ,  $\eta$  és  $\zeta$  termhelyettesítései esetén

$$(1) ((\theta\eta)\zeta) = (\theta(\eta\zeta)) \quad (\text{a kompozíció asszociatív})$$

$$(2) \theta\varepsilon = \varepsilon\theta = \theta \quad (\varepsilon \text{ neurális elem})$$

Azaz a kompozíció műveletével a termhelyettesítések halmaza neurális elemmel rendelkező félcsoport.

Legyenek  $\theta$  és  $\eta$  termhelyettesítések. Az  $\eta$  helyettesítés *általánosabb* a  $\theta$  helyettesítésnél, ha van olyan  $\lambda$  termhelyettesítés, hogy  $\theta = \eta\lambda$ .

Példa.

Az

$$\theta = \begin{pmatrix} x & y & z \\ f(g(a, h(z))) & g(h(x), b) & h(x) \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \eta = \begin{pmatrix} x & y \\ f(g(x, y)) & g(z, b) \end{pmatrix}$$

helyettesítések esetén  $\eta$  általánosabb a  $\theta$  helyettesítésnél, mert  $\theta = \eta\lambda$ , ahol

$$\lambda = \begin{pmatrix} x & y & z \\ a & h(z) & h(x) \end{pmatrix}$$

A reláció reflexív és tranzitív.

## 4.1. Illesztő helyettesítés

Legyen  $W = \{A_1, A_2, \dots, A_k\}$  azonos predikátumszimbólumot tartalmazó atomi formulák legalább kételemű véges halmaza. Az olyan  $\theta$  termhelyettesítést, amelyre az  $A_1\theta, A_2\theta, \dots, A_k\theta$  atomi formulák rendre azonosak,  $W$  *illesztő helyettesítésének* nevezzük.  $W$  illesztő helyettesítése  $W$  *legáltalánosabb illesztő helyettesítése*, ha  $W$  minden illesztő helyettesítésénél általánosabb.

Példa.

A  $P(x, f(a, y))$  és a  $P(b, z)$  atomoknak egy illesztő helyettesítése:

$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ b & c & f(a, c) \end{pmatrix}$$

legáltalánosabb illesztő helyettesítése:

$$\begin{pmatrix} x & z \\ b & f(a, y) \end{pmatrix}$$

Vizsgáljuk a  $W$  elemeit párhuzamosan, szimbólumonként balról jobbra haladva. Álljunk meg annál az első szimbólumnál, amelyik a  $W$  nem minden atomi formulájában egyforma. Emeljük ki  $W$  minden atomi formulájából azt a résztermet, amely az ezen a pozíción lévő szimbólummal kezdődik. E résztermek  $D$  halmazát a  $W$  összeférhetetlenségi halmazának nevezzük.

Példa.

Legyen

$$W = \{P(x, f(y, z)), P(x, a), P(x, g(h(k(x))))\}.$$

$W$  összeférhetetlenségi halmaza

$$D = \{f(y, z), a, g(h(k(x)))\}$$

## 4.1.1. Illesztő algoritmus

1.  $k := 0$ ,  $W_k := W$ ,  $\sigma_k := \varepsilon$ .
2. Ha  $W_k$  egyetlen atomot tartalmaz, akkor sikeresen vége:  $\sigma_k$  a  $W$  legáltalánosabb illesztő helyettesítése. Egyébként határozzuk meg  $W_k$  összeférhetetlenségi halmazát:  $D_k$ -t.
3. Ha van  $D_k$ -ban olyan  $x_k$  individuumváltozó és  $t_k$  term, hogy  $x_k$  nem fordul elő  $t_k$ -ban, akkor a 4. lépéssel folytatjuk. Egyébként sikertelenül vége:  $W$  nem illeszthető.
4.  $\sigma_{k+1} := \sigma_k(x_k \parallel t_k)$ ,  $W_{k+1} := \{A(x_k \parallel t_k) \mid A \in W_k\}$ . (Megjegyezzük, hogy  $W_{k+1} = \{A\sigma_{k+1} \mid A \in W\}$ .)
5.  $k := k + 1$ , és a 2. lépéssel folytatjuk.

Tétel

Ha  $W$  egymáshoz illeszthető atomi formulák véges, nemüres halmaza, akkor az illesztő algoritmus mindig a 2. lépéssel fejeződik be, és az utolsó  $\sigma_k$  legáltalánosabb illesztő helyettesítés lesz  $W$ -re.

Példa.

Döntsük el az illesztő algoritmussal, hogy illeszthetők-e a

$$W = \{ P(a, x, f(g(y))), P(z, f(z), f(u)) \}$$

halmaz atomi formulái egymáshoz.

1.  $W_0 := W, \quad \sigma_0 := \varepsilon.$

2.  $D_0 = \{a, z\}.$

3.  $z$  egy individuumváltozó,  $a$  egy a  $z$ -t nem tartalmazó term.

4.  $\sigma_1 := \sigma_0(z \parallel a) = \varepsilon(z \parallel a) = (z \parallel a).$

$$\begin{aligned} W_1 &:= \{ P(a, x, f(g(y)))(z \parallel a), P(z, f(z), f(u))(z \parallel a) \} = \\ &= \{ P(a, x, f(g(y))), P(a, f(a), f(u)) \}. \end{aligned}$$

5.  $D_1 = \{x, f(a)\}$

6.  $x$  egy individuumváltozó,  $f(a)$  egy az  $x$ -et nem tartalmazó term.

$$7. \sigma_2 := \sigma_1(x \parallel f(a)) = (z \parallel a)(x \parallel f(a)) = (z, x \parallel a, f(a)).$$

$$\begin{aligned} W_2 &:= \{ P(a, x, f(g(y)))(x \parallel f(a)), P(a, f(a), f(u))(x \parallel f(a)) \} = \\ &= \{ P(a, f(a), f(g(y))), P(a, f(a), f(u)) \}. \end{aligned}$$

$$8. D_2 = \{g(y), u\}.$$

9.  $u$  egy individuumváltozó,  $g(y)$  egy az  $u$ -t nem tartalmazó term.

$$10. \sigma_3 := \sigma_2(u \parallel g(y)) = (z, x \parallel a, f(a))(u \parallel g(y)) = (z, x, u \parallel a, f(a), g(y)).$$

$$\begin{aligned} W_3 &:= \{ P(a, f(a), f(g(y)))(u \parallel g(y)), P(a, f(a), f(u))(u \parallel g(y)) \} = \\ &= \{ P(a, f(a), f(g(y))), P(a, f(a), f(g(y))) \} = \\ &= \{ P(a, f(a), f(g(y))) \}. \end{aligned}$$

11.  $W_3$ -ban egyetlen atom van, így  $\sigma_3$  a legáltalánosabb illesztő helyettesítés  $W$ -re.

Példa.

Vizsgáljuk meg, hogy illeszthetők-e egymáshoz a

$$W = \{ Q(f(a), g(x)), Q(y, y) \}$$

halmaz atomi formulái.

1.  $W_0 := W, \quad \sigma_0 := \varepsilon.$

2.  $D_0 = \{ f(a), y \}.$

3.  $y$  egy individuumváltozó,  $f(a)$  egy az  $y$ -t nem tartalmazó term.

4.  $\sigma_1 := \sigma_0(y \parallel f(a)) = \varepsilon(y \parallel f(a)) = (y \parallel f(a)).$

$$\begin{aligned} W_1 &:= \{ Q(f(a), g(x))(y \parallel f(a)), Q(y, y)(y \parallel f(a)) \} = \\ &= \{ Q(f(a), g(x)), Q(f(a), f(a)) \}. \end{aligned}$$

5.  $D_1 = \{ g(x), f(a) \}.$

6. A  $D_1$ -ben nincs individuumváltozó, ezért az algoritmus azzal az eredménnyel fejeződik be, hogy  $W$  atomjai nem illeszthetők.

## 5. fejezet

# A rezolúciós kalkulus

### 5.1. Rezolúció az ítéletlogikában

Legyenek  $C_1$  és  $C_2$  pontosan egy komplement literálpárt tartalmazó klózok. Ha  $C_1 = C'_1 \vee L_1$  és  $C_2 = C'_2 \vee L_2$ , ahol  $L_1$  és  $L_2$  a komplement literálpár, a  $C'_1 \vee C'_2$  klózt a  $(C_1, C_2)$  klózpár *rezolvensének* nevezzük. Ha  $C_1 = L_1$  és  $C_2 = L_2$ , rezolvensük az *üres klóz* ( $\square$ ).

Az a tevékenység, amelynek eredménye a rezolvens, a *rezolválás*, azon literálpár literáljai pedig, amely lehetővé teszi a rezolvensképzést, a *kirezolvált literálok*.

Példa.

Vizsgáljunk most meg néhány klózpárt, van-e rezolvensük.

	klózpár	rezolvens
(a)	$(X \vee Y, \neg Y \vee Z)$	$X \vee Z$
(b)	$(X \vee \neg Y, \neg Y \vee Z)$	nincs: mindkét azonos alapú literál negált
(c)	$(X \vee \neg Y, Z \vee \neg V)$	nincs: nincs azonos alapú literál
(d)	$(\neg X \vee \neg Y, X \vee Y \vee Z)$	nincs: két komplement literálpár van
(e)	$(X, \neg X)$	$\square$

Egy  $S$  klózhalmazból a  $C$  klóz *rezolúciós levezetése* egy olyan véges  $k_1, k_2, \dots, k_m$  ( $m \geq 1$ ) klózsorozat, ahol minden  $j = 1, 2, \dots, m$ -re

1. vagy  $k_j \in S$ ,
2. vagy van olyan  $1 \leq s, t < j$ , hogy  $k_j$  a  $(k_s, k_t)$  klózpár rezolvense, és klózsorozat utolsó tagja,  $k_m$ , éppen a  $C$  klóz.

A rezolúciós kalkulus eldöntésproblémája az, hogy *levezethető-e  $S$ -ből az üres klóz*. A rezolúciós levezetés célja tehát az üres klóz levezetése  $S$ -ből. Azt, hogy  $S$ -ből levezethető az üres klóz, úgy is ki lehet fejezni, hogy  $S$ -nek van *rezolúciós cáfolata*.

Példa.

Próbáljuk meg az üres klózt levezetni az

$$S = \{ \neg X \vee Y, \neg Y \vee Z, X \vee V, \neg V \vee Y \vee Z, \neg Z \}$$

klózhalmazból. A levezetés bármelyik  $S$ -beli klózzal indítható.

1.  $\neg V \vee Y \vee Z$  [  $\in S$  ]
2.  $\neg Z$  [  $\in S$  ]
3.  $\neg V \vee Y$  [ 1, 2 rezolvense ]
4.  $\neg Y \vee Z$  [  $\in S$  ]
5.  $\neg Y$  [ 2, 4 rezolvense ]
6.  $\neg V$  [ 3, 5 rezolvense ]
7.  $X \vee V$  [  $\in S$  ]
8.  $X$  [ 6, 7 rezolvense ]

9.  $\neg X \vee Y$       [  $\in S$  ]
10.  $Y$                       [ 8, 9 rezolvense ]
11.  $\square$                     [ 5, 10 rezolvense ]

Tehát  $S$ -nek van rezolúciós cáfolata.

Legyenek  $C_1 = C'_1 \vee L_1$  és  $C_2 = C'_2 \vee L_2$ , ahol  $L_1$  és  $L_2$  az egyetlen komplement literálpár.

Tétel.

$$\{C_1, C_2\} \models_0 C'_1 \vee C'_2.$$

BIZONYÍTÁS. Ha  $C_1 = L_1$  és  $C_2 = L_2$ , akkor nincs a  $\{C_1, C_2\}$  klózalmazt kielégítő interpretáció, tehát igaz az állítás. Egyébként a  $\{C_1, C_2\}$  klózalmazt kielégítő tetszőleges interpretáció

- vagy olyan, hogy az  $L_1$ -hez rendel  $i$  értéket ( $\mathcal{I}_{L_1}$ ),
- vagy olyan, hogy az  $L_2$ -höz rendel  $i$  értéket ( $\mathcal{I}_{L_2}$ ).

$\mathcal{I}_{L_1}$  kielégíti a  $\{C_1, C_2\}$  klózalmazt, azaz itt a  $C_1$  és a  $C_2$  klózik igazak, de  $L_2$  hamis, ezért  $C'_2$  igaz, tehát igaz  $C'_1 \vee C'_2$  is. Hasonlóképpen láthatjuk be, hogy a  $\mathcal{I}_{L_2}$  interpretációkban pedig  $C'_1$  igaz. Tehát mind  $\mathcal{I}_{L_1}$ , mind  $\mathcal{I}_{L_2}$  kielégíti a  $C'_1 \vee C'_2$  klózt.

Tétel.

Ha a  $C$  klóz a  $(C_1, C_2)$  klózpár rezolvense, akkor azon  $\mathcal{I}$  interpretációk a  $\{C_1, C_2\}$  klózhalmazt nem elégítik ki, amelyekben  $C$  hamis.

BIZONYÍTÁS.

- Ha  $C_1 = L_1$  és  $C_2 = L_2$ , rezolvensük az üres klóz. Az üres klóz kielégíthetetlen, azaz minden interpretációban hamis. Tehát azt kell belátni, hogy a  $\{C_1, C_2\}$  klózhalmaz kielégíthetetlen. De  $C_1$  és  $C_2$  egy komplementaris literálpár, így egyetlen interpretáció sem elégítheti ki egyszerre őket.
- Legyen  $C_1 = C'_1 \vee L_1$  és  $C_2 = C'_2 \vee L_2$ , ahol  $L_1$  és  $L_2$  komplementaris literálpár. Legyen  $\mathcal{I}$  egy olyan interpretáció, melyben  $C$  hamis. Ez azt jelenti, hogy  $C'_1$  és  $C'_2$  minden literálja hamis  $\mathcal{I}$ -ben, azaz a  $C_1$  és  $C_2$  klózokban  $L_1$  és  $L_2$  kivételével minden literál hamis. Az  $L_1$  és  $L_2$  literálok közül viszont csak az egyik lehet igaz, ezért a  $\{C_1, C_2\}$  klózhalmazt az  $\mathcal{I}$  interpretáció nem elégíti ki.

Lemma.

Legyen  $S$  tetszőleges klózhalmoz és a  $k_1, k_2, \dots, k_m$  klózsorozat rezolúciós levezetés  $S$ -ből. Ekkor  $k_j$  minden  $j = 1, 2, \dots, m$ -re tautologikus következménye az  $S$  klózhalmoznak, azaz  $S \models_0 k_j$ .

BIZONYÍTÁS.

1. A levezetés első klóza,  $k_1$ , biztosan eleme  $S$ -nek, tehát  $S \models_0 k_1$ .
2. Tegyük most fel, hogy minden  $j \leq n$ -re igazoltuk már, hogy  $S \models_0 k_j$ .
3. Belátjuk, hogy  $k_{n+1}$ -re is igaz az állítás. Ha  $k_{n+1} \in S$ , akkor  $S \models_0 k_{n+1}$ . Ha  $k_{n+1}$  valamely  $k_s, k_t$  klózok rezolvense, akkor az első tétel miatt  $\{k_s, k_t\} \models_0 k_{n+1}$ . Az indukciós feltevés miatt  $S \models_0 k_s$  és  $S \models_0 k_t$ . Ebből  $S \models_0 k_{n+1}$ .

Tétel. [A rezolúciós kalkulus helyessége.]

Legyen  $S$  tetszőleges klózhalmoz. Ha  $S$ -ből levezethető az üres klóz, akkor  $S$  kielégíthetetlen.

BIZONYÍTÁS. Tegyük fel, hogy van olyan  $\mathcal{I}$  interpretáció, ami kielégíti  $S$ -et. Az előbb bizonyított lemma szerint egy  $S$ -ből való rezolúciós levezetésbeli bármely  $k_j$  klózra  $S \models_0 k_j$ , tehát  $\mathcal{I}$  kielégíti a rezolúciós levezetés minden klózát is. De az üres klóz kielégíthetetlen, tehát nem lehet eleme a levezetésnek. Így tehát ha  $S$ -ből levezethető az üres klóz, akkor  $S$  kielégíthetetlen.

Tétel. [A rezolúciós kalkulus teljessége.]

Ha az  $S$  véges klózhalmoz kielégíthetetlen, akkor  $S$ -ből levezethető az üres klóz.

## Következtetés rezolúciós kalkulussal

Legyen  $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  a feltételformulák halmaza és  $B$  a tételformula. A feltételhalmazhoz hozzávesszük a tételformula negáltját és a kapott  $\{A_1, A_2, \dots, A_n\} \cup \{\neg B\}$  formulahalmazból előállítjuk az  $S$  klózalmazt. Ha  $S$ -nek van rezolúciós cáfolata, akkor

$$\{A_1, A_2, \dots, A_n\} \models_0 B.$$

Példa.

Vegyük a következő formulahalmazt:

$$\{X \supset Y, Y \supset Z, X \vee U, U \supset V \supset Z, \neg Z\}.$$

A tételformula  $\neg X$ . A tétel negáltját hozzátesszük a feltételformulák halmazához, és ha a kapott formulahalmaz kielégíthetetlen, akkor igazoltuk, hogy  $\neg X$  tétel. A rezolúciós kalkulus előkészítéseként a feltételformulákból klózoikat állítunk elő:

$$\{\neg X \vee Y, \neg Y \vee Z, X \vee U, \neg U \vee \neg V \vee Z, \neg Z\}.$$

Ezt a klózhalmazt kibővítjük az  $X$  formulával (klózzal), és rezolúciós levezetéssel megpróbáljuk levezetni az üres klózt.

1.  $\neg X \vee Y$  [  $\in S$  ]
2.  $\neg Y \vee Z$  [  $\in S$  ]
3.  $\neg X \vee Z$  [ 1, 2 rezolvense ]
4.  $\neg Z$  [  $\in S$  ]
5.  $\neg X$  [ 3, 4 rezolvense ]
6.  $X$  [  $\in S$  ]
7.  $\square$  [ 5, 6 rezolvense ]

Tehát a  $\neg X$  tétel.

## 5.1.1. Rezolúciós stratégiák

Egy rezolúciós levezetés szerkezetét *levezetési fa* segítségével szemléltethetjük. A levezetési fa csúcsai klózik. Két csúcsból pedig pontosan akkor vezet él egy harmadik, közös csúcsba, ha ott a két klóz rezolvense található.

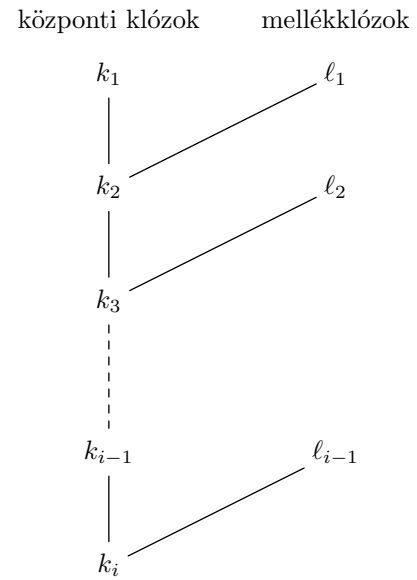
Egy  $S$  klózhalmazból való *lineáris rezolúciós levezetés* egy olyan  $k_1, \ell_1, k_2, \ell_2, \dots, k_{m-1}, \ell_{m-1}, k_m$  rezolúciós levezetés, amelyben minden  $j = 2, 3, \dots, m$ -re  $k_j$  a  $(k_{j-1}, \ell_{j-1})$  klózpár rezolvense. A  $k_j$  klózikat *centrális klóziknak*, az  $\ell_j$  klózikat *melléklóziknak* nevezük.

A lineáris rezolúciós levezetés definíciójából világos, hogy tetszőleges rezolúciós levezetés átírható lineárisrá, azaz

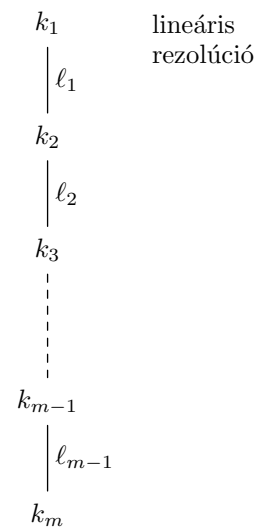
Tétel.

A lineáris rezolúciós kalkulus teljes.

A lineáris levezetés szerkezetét szemléltető levezetési fa a következő:



Szokás a levezetési fát egyetlen ágként (lineáris gráffal) is ábrázolni. Ekkor a centrális klózokat a csúcsokhoz, a melléklózokat pedig az élekhez rendeljük.



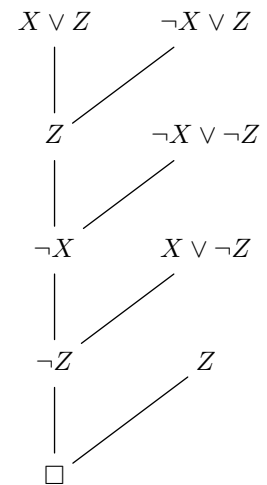
Amennyiben egy levezetést lineáris gráffal ábrázolunk, a gyökérben lévő  $k_1$  klózzal kezdődő összes levezetést egyetlen fával ábrázolhatjuk. Ez a *teljes levezetési fa*. Egy csúcsból annyi él indul ki, ahány klózalmazbeli klózzal, illetve a levezetés során addig előállt rezolvenssel képezhető rezolvense a csúcshoz rendelt klóznak. A lineáris rezolúciós kalkulus teljessége miatt ha van az üres klóznak levezetése  $k_1$ -ből, akkor azt meg is találjuk a levezetések teljes fájának bejárásával.

Példa.

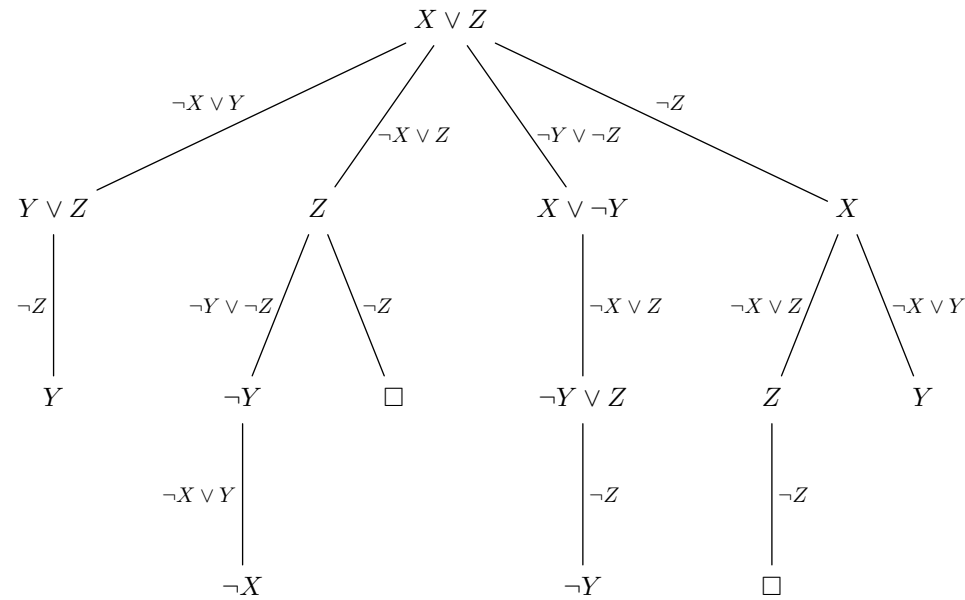
(a) Legyen  $S = \{X \vee Z, \neg X \vee Z, X \vee \neg Z, \neg X \vee \neg Z\}$ .  $S$ -ből az  $X \vee Z$  klózzal kezdődő egy lehetséges lineáris levezetés:

1.  $X \vee Z$  [  $\in S$  ]
2.  $\neg X \vee Z$  [  $\in S$  ]
3.  $Z$  [ 1, 2 rezolvense ]
4.  $X \vee \neg Z$  [  $\in S$  ]
5.  $X$  [ 3, 4 rezolvense ]
6.  $\neg X \vee \neg Z$  [  $\in S$  ]
7.  $\neg Z$  [ 5, 6 rezolvense ]
8.  $Z$  [ centrális klóz ]
9.  $\square$  [ 7, 8 rezolvense ]

A levezetést szemléltető levezetési fa:



(b) Legyen  $S = \{X \vee Z, \neg X \vee Z, \neg Y \vee \neg Z, \neg X \vee Y, \neg Z\}$ .  
 Állítsunk elő egy részletet a teljes levezetési fából. Induljunk ki a  $X \vee Z$  klózból.



A gyakorlatban elterjedt két jól használható, de nem teljes rezolúciós stratégia a *lineáris input-* és az *egységrezolúciós stratégia*. A két eljárás ekvivalens egymással, azaz egy klózhalmaznak pontosan akkor van lineáris inputrezolúciós cáfolata, ha van egységrezolúciós cáfolata.

Egy  $S$  klózhalmazból való lineáris inputrezolúciós levezetés egy olyan  $k_1, \ell_1, k_2, \ell_2, \dots, k_{m-1}, \ell_{m-1}, k_m$  lineáris rezolúciós levezetés, melyben minden  $j = 1, 2, \dots, m - 1$ -re  $\ell_j \in S$ , azaz a lineáris inputrezolúciós levezetésben a melléklózok  $S$ -nek elemei.

Egy  $S$  klózhalmazból való egységrezolúciós levezetés egy olyan  $k_1, k_2, \dots, k_m$  rezolúciós levezetés, ahol minden  $j = 1, 2, \dots, m$ -re ha  $k_j \notin S$ , akkor  $k_j$  két olyan őt a levezetésben megelőző  $k_s, k_t$  ( $1 \leq s, t < j$ ) klóznak a rezolvense, amelyek közül az egyik egységklóz.

A lineáris inputrezolúciós stratégia nem teljes: Legyen a levezetésben  $k_m$  az üres klóz, vagyis a  $(k_m - 1, \ell_m - 1)$  klózpár rezolvense.  $\ell_{m-1}$  egységklóz és  $\ell_{m-1} \in S$ , tehát  $S$ -ben kell egységklóznak lenni. (Az egységrezolúció esetén pedig a levezetést el sem lehet kezdeni, ha nincs  $S$ -ben egységklóz.)

Példa.

Legyen a klózhalmaz

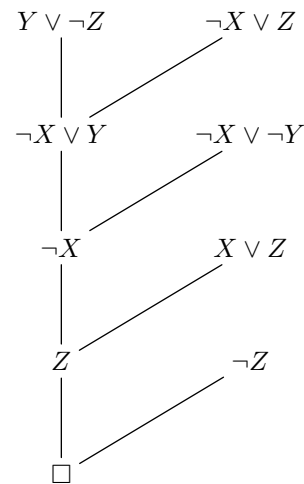
$$S = \{ Y \vee \neg Z, X \vee Z, \neg X \vee \neg Y, \neg X \vee Z, \neg Z \}.$$

Egy lineáris inputcáfolat:

1.  $Y \vee \neg Z$  [  $\in S$  ]
2.  $\neg X \vee Z$  [  $\in S$  ]
3.  $\neg X \vee Y$  [ 1, 2 rezolvense ]
4.  $\neg X \vee \neg Y$  [  $\in S$  ]

5.  $\neg X$  [ 3, 4 rezolvense ]  
 6.  $X \vee Z$  [  $\in S$  ]  
 7.  $Z$  [ 5, 6 rezolvense ]  
 8.  $\neg Z$  [  $\in S$  ]  
 9.  $\square$  [ 7, 8 rezolvense ]

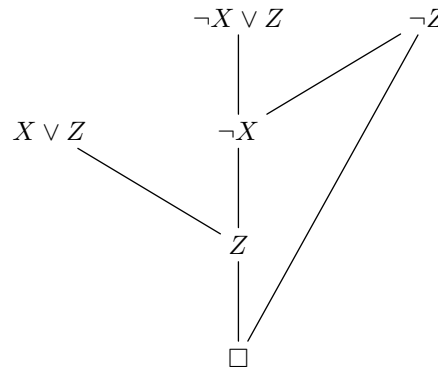
A lineáris inputrezolúcióhoz tartozó levezetési fa:



Egy egységcáfolat:

1.  $\neg X \vee Z$  [  $\in S$  ]
2.  $\neg Z$  [  $\in S$  ]
3.  $\neg X$  [ 1, 2 rezolvense ]
4.  $X \vee Z$  [  $\in S$  ]
5.  $Z$  [ 3, 4 rezolvense ]
6.  $\square$  [ 2, 5 rezolvense ]

Az egységcáfolathoz tartozó levezetési fa:



Bár a lineáris inputrezolúciós stratégia nem teljes, meg lehet adni olyan formulaosztályt, amelyre az. Az olyan klózokat, amelyek legfeljebb egy pozitív literált tartalmaznak, *Horn-klózoknak* nevezzük. A *Horn-formulák* pedig azok a formulák, melyek konjunktív normálformája Horn-klózok konjunkciója. Bebizonyították, hogy a lineáris inputrezolúciós stratégia Horn-formulák esetére (szokás azt is mondani, hogy a *Horn-logikában*) teljes.

## 5.2. A Herbrand-univerzum és az elsőrendű klózhalmazok

Jó lenne, ha létezne olyan speciális  $\mathcal{H}$  univerzum, hogy egy  $S$  elsőrendű klózhalmaz pontosan akkor lenne kielégíthetetlen, ha kielégíthetetlen ezen  $\mathcal{H}$  univerzum felett. Egy ilyen univerzum létezését mutatta meg Herbrand.

## 5.2.1. A Herbrand-univerzum előállítása

Legyen  $S$  tetszőleges klózhalmaz, a leíró nyelve pedig  $\langle Pr, Fn, Cnst \rangle$ .

$$1. \mathcal{H}_0 \rightleftharpoons \begin{cases} Cnst, & \text{ha } Cnst \neq \emptyset, \\ \{a\} & \text{egyébként,} \end{cases} \quad \text{továbbá } i := 0.$$

$$2. \mathcal{H}_{i+1} \rightleftharpoons \mathcal{H}_i \cup T_i, \text{ ahol}$$

$$T_i \rightleftharpoons \{t \mid t = f(t_1, t_2, \dots, t_n), \text{ ahol } f \in Fn, t_j \in \mathcal{H}_i, j = 1, 2, \dots, n\},$$

$i := i + 1$  és ismételjük meg a lépést.

$$3. \mathcal{H} \rightleftharpoons \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathcal{H}_i.$$

A  $\mathcal{H}$  halmaz az  $S$  klózhalmaz Herbrand-univerzuma.

Példa.

Legyen  $S = \{P(a), \neg P(x) \vee P(f(x))\}$ . Ekkor

$$\mathcal{H}_0 = \{a\},$$

$$\mathcal{H}_1 = \{a, f(a)\},$$

$$\mathcal{H}_2 = \{a, f(a), f(f(a))\},$$

$$\vdots$$

$$\mathcal{H} = \{a, f(a), f(f(a)), f(f(f(a))), \dots\}.$$

Példa.

Legyen  $S = \{P(x) \vee Q(x), R(z), T(y) \vee \neg W(y)\}$ .

Mivel  $S$ -ben nincs konstansszimbólum, ezért legyen  $\mathcal{H}_0 = \{a\}$ .

$S$ -ben függvényyszimbólum sincs, ezért

$$\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_1 = \dots = \mathcal{H} = \{a\}.$$

Példa.

Legyen  $S = \{P(f(x), a, g(y), b)\}$ . Ekkor

$$\mathcal{H}_0 = \{a, b\}$$

$$\mathcal{H}_1 = \{a, b, f(a), f(b), g(a), g(b)\}$$

$$\mathcal{H}_2 = \{a, b, f(a), f(b), g(a), g(b), \\ f(f(a)), f(f(b)), f(g(a)), f(g(b)), \\ g(f(a)), g(f(b)), g(g(a)), g(g(b))\}$$

⋮

Legyen az  $S$  klózhalmaz leíró nyelve  $\langle Pr, Fn, Cnst \rangle$ , Herbrand-univerzuma pedig  $\mathcal{H}$ .  $S$  leíró nyelve *Herbrand-interpretációinak* nevezzük és  $\mathcal{I}_{\mathcal{H}}$ -vel jelöljük a nyelv azon interpretációit, melyek univerzuma éppen  $\mathcal{H}$ ,

- minden  $c \in Cnst$  konstansszimbólumhoz  $\mathcal{I}_{\mathcal{H}}$  a  $c \in \mathcal{H}$  univerzum-elemet (önmagát) rendeli, és
- minden  $k$  aritású  $f \in Fn$  függvénytípus-szimbólumhoz  $\mathcal{I}_{\mathcal{H}}$  hozzárendeli azt az  $f^{\mathcal{I}_{\mathcal{H}}}: \mathcal{H}^k \rightarrow \mathcal{H}$  műveletet, amelyikre minden  $h_1, h_2, \dots, h_k \in \mathcal{H}$  esetén

$$f^{\mathcal{I}_{\mathcal{H}}}(h_1, h_2, \dots, h_k) = f(h_1, h_2, \dots, h_k).$$

Egy  $S$  elsőrendű klózhalmaz Herbrand-interpretációi tehát csak az  $S$ -ben előforduló predikátumszimbólumok interpretálásában különböznek.

Legyen  $S$  egy elsőrendű klózhalmaz és  $\mathcal{H}$  a klózhalmazhoz tartozó Herbrand-univerzum. A  $\mathcal{H}$  Herbrand-univerzum feletti zárt atomok egy rögzített sorozatát *Herbrand-bázisnak* nevezzük.

Világos, hogy ha adva van az  $S$  elsőrendű klózhalmaz egy  $\mathcal{I}_{\mathcal{H}}$  Herbrand-interpretációja, azt a következő módon is leírhatjuk:

legyen  $\{A_1, A_2, \dots\}$  az  $S$  klózhalmaz Herbrand-bázisa és legyen

$$L_i \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} A_i, & \text{ha } A_i \text{ igaz } \mathcal{I}_{\mathcal{H}}\text{-ban,} \\ \neg A_i, & \text{ha } A_i \text{ hamis } \mathcal{I}_{\mathcal{H}}\text{-ban.} \end{cases}$$

Ekkor a  $\mathcal{I}_{\mathcal{H}}$  Herbrand-interpretációt az  $\{L_1, L_2, \dots\}$  literál-halmaz egyértelműen megadja.

Példa.

Legyen  $S = \{P(x) \vee Q(x), R(f(y))\}$ .  $S$  Herbrand-univerzuma:

$$\mathcal{H} = \{a, f(a), f(f(a)), f(f(f(a))), \dots\}.$$

$S$  Herbrand-bázisa:

$$\{P(a), Q(a), R(a), P(f(a)), Q(f(a)), R(f(a)), \dots\}.$$

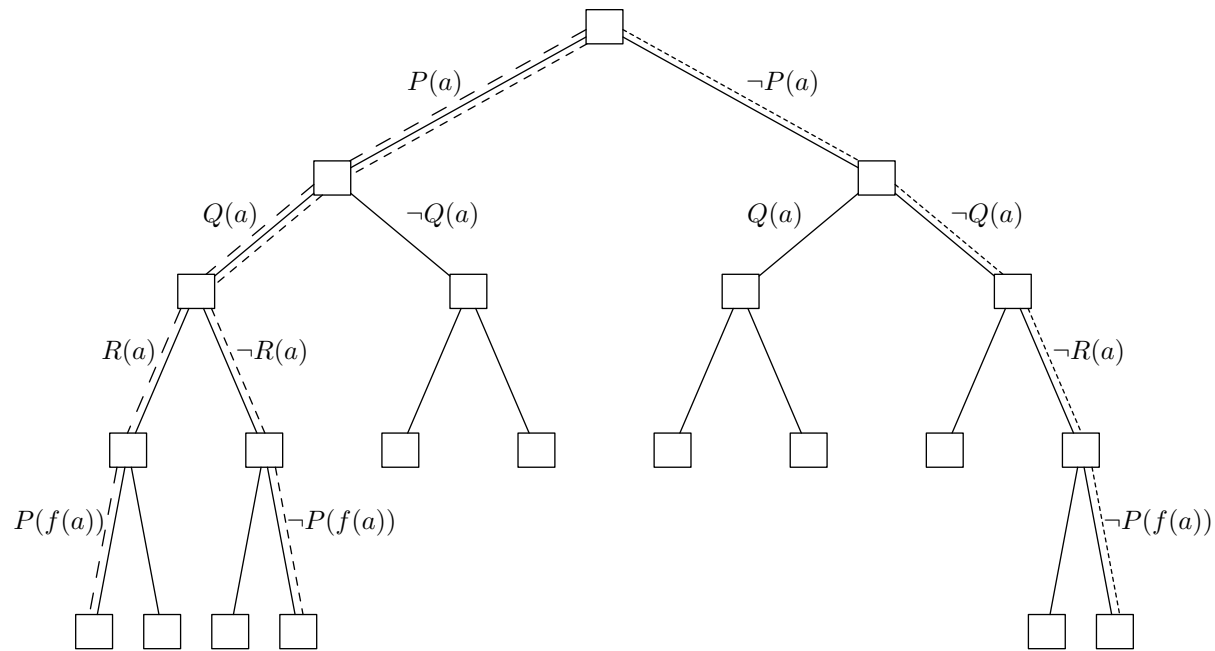
Néhány Herbrand-interpretáció:

$$\mathcal{I}_1 = \{P(a), Q(a), R(a), P(f(a)), Q(f(a)), R(f(a)), \dots\}$$

$$\mathcal{I}_2 = \{\neg P(a), \neg Q(a), \neg R(a), \neg P(f(a)), \neg Q(f(a)), \neg R(f(a)), \dots\}$$

$$\mathcal{I}_3 = \{P(a), Q(a), \neg R(a), P(f(a)), Q(f(a)), \neg R(f(a)), \dots\}$$

Az alábbi ábrán látható szemantikus fán bejelöltük az  $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \mathcal{I}_3$  Herbrand-interpretációkat.



Legyen az  $S$  klózalmaz leíró nyelve  $\langle Pr, Fn, Cnst \rangle$ , és legyen ennek  $\mathcal{I}$  valamely  $\mathcal{U}$  univerzum feletti interpretációja.

Az  $\mathcal{I}$ -nek *megfelelő Herbrand-interpretáció*  $S$ -nek egy olyan  $\mathcal{I}_{\mathcal{H}}$  Herbrand-interpretációja, amelyre teljesül, hogy van olyan

$$\varphi: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{U}$$

függvény, hogy

a  $P(h_1, h_2, \dots, h_n)$  zárt atom pontosan akkor igaz  $\mathcal{I}_{\mathcal{H}}$ -ban, ha a („neki megfelelő”)  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$  atom igaz  $\mathcal{I}$ -ben az

$$x_1 \mapsto \varphi(h_1), x_2 \mapsto \varphi(h_2), \dots, x_n \mapsto \varphi(h_n)$$

változókiértékelés mellett.

Most megmutatjuk, hogy valamely  $S$  elsőrendű klózalmaz leíró nyelvének tetszőleges  $\mathcal{I}$  interpretációjához van megfelelő Herbrand-interpretáció.

Legyen  $\mathcal{I} = \langle \mathcal{I}_{Pr}, \mathcal{I}_{Fn}, \mathcal{I}_{Cnst} \rangle$ , ahol az interpretáció univerzuma  $\mathcal{U}$ .

Legyen a  $\varphi: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{U}$  a következőképpen definiálva:

- ha  $Cnst = \emptyset$ , akkor a  $\mathcal{H}$ -ben szereplő extra konstanshoz  $\varphi$  rendeljen tetszőleges  $\mathcal{U}$ -beli elemet,
- minden  $c \in Cnst$  (egyúttal  $c \in \mathcal{H}$ ) konstansszimbólum esetén  $\varphi(c)$  legyen az  $\mathcal{I}_{Cnst}(c)$   $\mathcal{U}$ -beli elem,
- ha pedig  $h \in \mathcal{H}$   $f(h_1, h_2, \dots, h_k)$  alakú, akkor  $\varphi(f(h_1, h_2, \dots, h_k))$  legyen a  $f^{\mathcal{I}}(\varphi(h_1), \varphi(h_2), \dots, \varphi(h_k))$   $\mathcal{U}$ -beli elem.

Most megadjuk az  $\mathcal{I}$ -nek megfelelő Herbrand-interpretációt:

Ha az  $S$  Herbrand bázisabeli  $A_1$ -nek „megfelelő”  $\mathcal{I}$ -beli atom igaz, a Herbrand-interpretációt megadó literálhalmazba írjuk be  $A_1$ -et, egyébként pedig  $\neg A_1$ -et. Mivel a bázis elemei különbözőek, a Herbrand-bázis első  $k$  atomja igazságértékének rögzítése után  $A_{k+1}$  is „megkaphatja” a neki „megfelelő”  $\mathcal{I}$ -beli atom igazságértékét.

Példa.

Legyen  $S = \{P(x), Q(y, f(y, a))\}$ .

Legyen  $\mathcal{I}$  a következő:  $\mathcal{U} = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}\}$ , az  $a$  interpretáltja  $\mathbf{2}$ , a predikátum- és függvényyszimbólumokhoz pedig az alábbi reláció- és művelettáblákkal definiált relációkat és műveleteket rendel  $\mathcal{I}$ .

$P^{\mathcal{I}}$	<b>1</b>	<b>2</b>
	<i>i</i>	<i>h</i>

$Q^{\mathcal{I}}$	<b>1</b>	<b>2</b>
<b>1</b>	<i>h</i>	<i>h</i>
<b>2</b>	<i>i</i>	<i>i</i>

$f^{\mathcal{I}}$	<b>1</b>	<b>2</b>
<b>1</b>	<b>1</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>2</b>	<b>1</b>

$S$  Herbrand-univerzuma:

$$\mathcal{H} = \{a, f(a, a), f(a, f(a, a)), f(f(a, a), a), f(f(a, a), f(a, a)), \dots\}.$$

$S$  Herbrand-bázisa:

$$\{P(a), Q(a, a), P(f(a, a)), Q(a, f(a, a)), Q(f(a, a), a), \dots\}.$$

Ekkor a  $\varphi: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{U}$  megfeleltetés:

$$a \mapsto \mathbf{2} \text{ (kötelező)}, f(a, a) \mapsto \mathbf{1}, f(a, f(a, a)) \mapsto \mathbf{2}, f(f(a, a), a) \mapsto \mathbf{2}, \dots$$

Az  $\mathcal{I}$ -nek megfelelő Herbrand-interpretáció:

$$\mathcal{I}_{\mathcal{H}} = \{\neg P(a), Q(a, a), P(f(a, a)), \neg Q(a, f(a, a)), Q(f(a, a), a), \dots\}.$$

Példa.

Legyen  $S = \{P(x), Q(y, f(y, z))\}$ . Vegyük észre, hogy  $S$  leíró nyelve az előző példabeli leíró nyelvtől csak abban különbözik, hogy ebben nincs konstansszimbólum. Interpretáljuk a  $S$  nyelvét az  $\mathcal{I}'$  interpretációval, ami csak annyiban különbözik  $\mathcal{I}$ -től, hogy konstansszimbólumot nyilván nem kell interpretálnia.

Most a  $\varphi: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{U}$  megfeleltetés során  $a$ -hoz bármely univerzumelem hozzárendelhető. Tartsuk meg a többi Herbrand-univerzumbeli elemre az előző példabeli megfeleltetést.

– Ha  $a \mapsto \mathbf{2}$ , akkor az  $\mathcal{I}'$ -nek megfelelő Herbrand-interpretáció a fenti  $\mathcal{I}_{\mathcal{H}}$ .

– Ha  $a \mapsto \mathbf{1}$ , az  $\mathcal{I}'$ -nek megfelelő Herbrand-interpretáció

$$\mathcal{I}'_{\mathcal{H}} = \{P(a), \neg Q(a, a), P(f(a, a)), \neg Q(a, f(a, a)), \neg Q(f(a, a), a), \dots\}.$$

Tétel.

Ha egy  $\mathcal{I}$  interpretáció kielégít egy  $S$  elsőrendű klózhalmazt, akkor az  $\mathcal{I}$ -nek megfelelő Herbrand-interpretáció is kielégíti  $S$ -t.

BIZONYÍTÁS.

A definíció szerint ha  $\mathcal{I}_{\mathcal{H}}$  az  $\mathcal{I}$ -nek megfelelő Herbrand-interpretáció, akkor van olyan  $\varphi: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{U}$  függvény, hogy az  $\mathcal{I}$  ugyanazt az igazságértéket rendeli a  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$  atomhoz az

$$x_1 \mapsto \varphi(h_1), x_2 \mapsto \varphi(h_2), \dots, x_n \mapsto \varphi(h_n)$$

változókiértékelés mellett, mint az  $\mathcal{I}_{\mathcal{H}}$  a  $P(h_1, h_2, \dots, h_n)$ -hez minden  $h_1, h_2, \dots, h_n \in \mathcal{H}$  esetén.

Tétel.

Egy  $S$  elsőrendű klózalmaz akkor és csak akkor kielégíthetetlen, ha  $S$ -t nem elégíti ki a Herbrand-univerzuma feletti egyetlen Herbrand-interpretáció sem.

BIZONYÍTÁS.

1. Tegyük fel, hogy  $S$  kielégíthetetlen. Ekkor  $S$ -t nem elégítheti ki (semmilyen univerzum felett) egyetlen interpretáció sem, így egyetlen Herbrand-interpretáció sem.
2. Tegyük fel, hogy  $S$  ugyan kielégíthetetlen az általa meghatározott Herbrand-univerzumon, de  $S$  nem kielégíthetetlen, azaz van olyan  $\mathcal{U}$  univerzum és  $\mathcal{I}$  interpretáció, amely  $S$ -t kielégíti. Legyen  $\mathcal{I}_{\mathcal{H}}$  a  $\mathcal{I}$ -nek megfelelő Herbrand-interpretáció. Az előző tétel miatt  $\mathcal{I}_{\mathcal{H}}$  kielégíti  $S$ -t, pedig  $\mathcal{I}_{\mathcal{H}}$  a Herbrand-univerzum feletti interpretáció. Ellentmondásra jutottunk, tehát ha  $S$  kielégíthetetlen a Herbrand-univerzumán, akkor  $S$  kielégíthetetlen.

5.1. MEGJEGYZÉS. Egyik tétel sem áll fenn, ha  $S$  nem elsőrendű klózhalmaz. Vagyis, ha  $S$  tetszőleges zárt formulák halmaza, akkor általában nem igaz, hogy  $S$  kielégíthetetlenségének vizsgálata esetén elég lenne  $S$ -et csak a Herbrand-struktúrákkal interpretálni.

Például legyen  $S = \{P(a), \exists x \neg P(x)\}$ . Az  $S$  második formulája nem elsőrendű klóz.  $S$  Herbrand-univerzuma:  $\mathcal{H} = \{a\}$ ,  $S$  Herbrand-bázisa:  $\{P(a)\}$ . Az  $S$  formulahalmazt egyik Herbrand-interpretáció sem elégíti ki. Azonban  $S$  kielégíthető, hiszen az az  $\mathcal{U} = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$  feletti  $\mathcal{I}$  interpretáció, melyben  $P^{\mathcal{I}}(\mathbf{0}) = i$ ,  $P^{\mathcal{I}}(\mathbf{1}) = h$  és  $a \mapsto \mathbf{0}$ , kielégíti  $S$ -et.

Legyen  $S$  egy klózalmaz,  $\mathcal{H}$  a Herbrand-univerzuma,  $\kappa$  egy változókiértékelés. Ekkor

$$\theta = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_k \\ \kappa(x_1) & \kappa(x_2) & \dots & \kappa(x_k) \end{pmatrix}$$

egy termhelyettesítése  $S$  leíró nyelvének. A  $C(t_1, t_2, \dots, t_n)\theta$  formulát a  $\forall x_1 \forall x_2 \forall x_n C(t_1, t_2, \dots, t_n)$  klóz egy  $\mathcal{H}$  feletti *alappéldánynak* (alaplóz) nevezzük.

Példa.

Az  $S = \{\neg P(x) \vee Q(f(x), x), P(g(b)), \neg Q(y, z)\}$  klózalmaz klózzai Herbrand-univerzum feletti alappéldányai:

$$\begin{aligned} &\{\neg P(b) \vee Q(f(b), b), \neg P(f(b)) \vee Q(f(f(b)), f(b)), \\ &\neg P(g(b)) \vee Q(f(g(b)), g(b)), \dots, P(g(b)), \\ &\neg Q(b, b), \neg Q(f(b), b), \dots, \neg Q(f(g(b)), g(b)), \dots\} \end{aligned}$$

Most ismertetjük az elsőrendű rezolúciós kalkulushoz is elvezető Herbrand-tételt.

Tétel.

Egy  $S$  elsőrendű klózalmaz akkor és csak akkor kielégíthetetlen, ha az  $S$  klóza Herbrand-univerzum feletti alappéldányainak van véges kielégíthetetlen  $S'$  részalmazza.

Példa.

- (a) Legyen  $S = \{P(x), \neg P(f(a))\}$ . Az  $S$  elsőrendű klózhalmaz kielégíthetetlen, mert  $S$  Herbrand-univerzum feletti alapklózainak

$$\{P(f(a)), \neg P(f(a))\}$$

egy véges kielégíthetetlen részhalmaza.

- (b) Az  $S = \{\neg P(x) \vee Q(f(x), x), P(g(b)), \neg Q(y, z)\}$  kielégíthetetlen, mert  $S$  Herbrand-univerzum feletti alapklózainak

$$\{\neg P(g(b)) \vee Q(f(g(b)), g(b)), P(g(b)), \neg Q(f(g(b)), g(b))\}$$

egy véges kielégíthetetlen részhalmaza. Ezek az alapklózik az  $x \mapsto g(b)$ ,  $y \mapsto f(g(b))$ ,  $z \mapsto g(b)$  változókiértékelés mellett álltak elő.

## 5.3. A rezolúciós kalkulus az elsőrendű logikában

Példa.

$$C_1 = \forall x(P(f(x)) \vee Q(x)) \quad \text{és} \quad C_2 = \forall x\forall y(\neg P(f(x)) \vee R(x, y))$$

Ha a magjaikat a nulladrendű esethez hasonlóan rezolválnánk, a

$$C = \forall x\forall y(Q(x) \vee R(x, y))$$

klózhoz jutnánk. Lássuk be, hogy

$$\{\forall x(P(f(x)) \vee Q(x)), \forall x\forall y(\neg P(f(x)) \vee R(x, y))\} \models \forall x\forall y(Q(x) \vee R(x, y)).$$

Ha  $\mathcal{I}$  kielégíti a  $C_1$  és  $C_2$  klózokat, a  $P(f(x)) \vee Q(x)$  és  $\neg P(f(x)) \vee R(x, y)$  formulák  $\mathcal{I}$ -ben minden változókiértékelés mellett igazak. Tehát ha  $|P(f(x))|^{\mathcal{I}, \kappa} = h$ , akkor  $|Q(x)|^{\mathcal{I}, \kappa} = i$ , és ha  $|\neg P(f(x))|^{\mathcal{I}, \kappa} = h$ , akkor  $|R(x, y)|^{\mathcal{I}, \kappa} = i$ . Mivel minden  $\kappa$ -ra  $|P(f(x))|^{\mathcal{I}, \kappa} = i$  esetén  $|\neg P(f(x))|^{\mathcal{I}, \kappa} = h$  és fordítva, vagy a  $|Q(x)|^{\mathcal{I}, \kappa} = i$ , vagy az  $|R(x, y)|^{\mathcal{I}, \kappa} = i$  fennáll, és így  $|\forall x\forall y(Q(x) \vee R(x, y))|^{\mathcal{I}, \kappa} = i$ .

Ha ilyen módon képezve elsőrendű klózok rezolvensét szeretnénk ezt rezolúciós levezetési szabályként alkalmazni, akkor igazolni kell általánosan is a példabeli állítást.

Tétel.

Legyenek most  $C_1$  és  $C_2$  olyan elsőrendű klózok, melyek pontosan egy komplement literálpárt tartalmaznak, azaz  $C_1$  és  $C_2$  magjai  $C_1^M = C_1^{M'} \vee L_1$  és  $C_2^M = C_2^{M'} \vee L_2$  alakúak, ahol  $L_1$  és  $L_2$  komplement literálpár. Ha  $C^M = C_1^{M'} \vee C_2^{M'}$  a  $C$  klóz magja, akkor  $\{C_1, C_2\} \models C$ .

BIZONYÍTÁS. Tegyük fel hogy az  $\mathcal{I}$  interpretáció kielégíti a  $\{C_1, C_2\}$  elsőrendű klózalmazt. Kövessük az előző gondolatmenetet. Az  $\mathcal{I}$  interpretációban tetszőleges  $\kappa$  változókiértékelés mellett vagy  $L_1$  és  $C_2^{M'}$ , vagy  $L_2$  és  $C_1^{M'}$  igaz. Azaz  $\mathcal{I}$ -ben  $C$  igaz.

Komplemens párt nem tartalmazó két elsőrendű klóz Herbrand-univerzum feletti alappéldányaiban lehet komplemens pár.

Példa.

$$\{ \forall x \forall y (P(x) \vee \neg Q(x, f(y))), \forall z \forall v (\neg P(g(z)) \vee \neg P(v)), \forall u Q(g(u), u) \}.$$

Egyik klózpárban sincs komplemens literálpár. A Herbrand-univerzum:

$$\{ a, g(a), f(a), g(f(a)), g(g(a)), f(f(a)), f(g(a)), \dots \}.$$

Egy alaprezolúciós levezetés:

1.  $Q(g(f(a)), f(a))$  [  $u \mapsto f(a)$  ]
2.  $P(g(f(a))) \vee \neg Q(g(f(a)), f(a))$  [  $x \mapsto g(f(a)), y \mapsto a$  ]
3.  $P(g(f(a)))$
4.  $\neg P(g(f(a)))$  [  $z \mapsto f(a), v \mapsto g(f(a))$  ]
5.  $\square$

Tegyük egy új változót a kiválasztott alapklózokban az  $a$  helyébe.

1.  $Q(g(f(w)), f(w))$  [  $(u \parallel f(w))$  ]
2.  $P(g(f(w))) \vee \neg Q(g(f(w)), f(w))$  [  $(x, y \parallel g(f(w)), w)$  ]
3.  $P(g(f(w)))$
4.  $\neg P(g(f(w)))$  [  $(z, v \parallel f(w), g(f(w)))$  ]
5.  $\square$

Ez a levezetés a

$$\left\{ \forall w (P(g(f(w))) \vee \neg Q(g(f(w)), f(w))), \right. \\ \left. \forall w \neg P(g(f(w))), \forall w Q(g(f(w)), f(w)) \right\}$$

klózhalmazból való egy elsőrendű rezolúciós levezetés. Ezt a klózhalmazt úgy kaptuk az eredetiből, hogy az elsőrendű klózok magjaiban az atomi formulákban az individuumváltozók helyébe olyan termeket helyettesítettünk, amelyek azonos alapú literálokat eredményeztek.

Ezzel a – logikában egyébként nem megengedett – helyettesítéssel (illesztő helyettesítés)

- a klózhalmaz kielégíthetősége megőrződik,
- a kapott elsőrendű klózhalmaz alappéldányaiban a lehetséges komplementens párok megjelennek.

Tétel.

Legyen  $C^M$  a  $C$  elsőrendű klóz magja. Tegyük fel, hogy

$$Par(C^M) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}.$$

Legyen  $\theta = (x_1, x_2, \dots, x_n \mid t_1, t_2, \dots, t_n)$  tetszőleges termhelyettesítés  $C$  leíró nyelvében, és

$$Par(C^M\theta) = \{y_1, y_2, \dots, y_k\}.$$

Ekkor tetszőleges olyan  $\mathcal{I}_{\mathcal{H}}$  Herbrand-interpretációban, amelyben  $C$  igaz, a  $\forall y_1 \forall y_2 \dots \forall y_k (C^M\theta)$  klóz is igaz.

BIZONYÍTÁS. Tegyük fel, hogy a  $\mathcal{I}_{\mathcal{H}}$  Herbrand-interpretációban a  $C$  klóz, azaz  $\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n C^M$  igaz. Ekkor  $C^M$  a Herbrand-interpretációbeli minden változókiértékelés mellett igaz. Ez azt jelenti, hogy  $C^M$  Herbrand-univerzum feletti alapklózái  $\mathcal{I}_{\mathcal{H}}$ -ban igazak. Nyilván  $C^M \theta$ -nak az  $\mathcal{I}_{\mathcal{H}}$ -beli tetszőleges  $\kappa$  változókiértékelés mellett  $\mathcal{H}$  feletti alappéldányai mind  $C^M$   $\mathcal{H}$  feletti alapklózái, hisz a  $t_1, t_2, \dots, t_n$  termek  $\kappa$  mellett  $\mathcal{H}$  feletti alappéldányai jelennek meg az  $x_1, x_2, \dots, x_n$  változók helyett  $C^M$ -ben. Ezek viszont mint Herbrand-univerzumbeli elemek  $C^M$  alappéldányaiban is előfordulnak.

Legyen  $W$  egy  $C$  elsőrendű klózban előforduló legalább két azonos alapú egyformán negált literál alapjainak halmaza. Ha  $W$  atomjai illeszthetők egymáshoz és  $\sigma$  a  $W$  legáltalánosabb illesztő helyettesítése, akkor a  $C^M\sigma$  magú klózt a  $C$  klóz *faktorának* nevezzük. Ha a faktor egységklóz, akkor  $C$  *egységfaktorának* hívjuk.

Példa.

Legyen  $C = \forall x\forall y(P(x) \vee P(f(y)) \vee \neg Q(x))$ .

A két  $P$ -vel kezdődő atom legáltalánosabb illesztő helyettesítése a

$$\sigma = (x \parallel f(y)).$$

Ennek megfelelően a

$$\forall y(P(f(y)) \vee \neg Q(f(y)))$$

klóz a  $C$  klóz faktora.

Legyenek  $C_1$  és  $C_2$  változóikban tiszta klózok. Legyenek  $C_1$  és  $C_2$  magjai rendre  $C_1^M = C_1^{M'} \vee L_1$  és  $C_2^M = C_2^{M'} \vee L_2$  alakúak, ahol  $L_1$  és  $L_2$  ellentétesen negált literálok. Ha az  $L_1$  és az  $L_2$  literálok alapjai illeszthetők egymáshoz, legyen  $\sigma$  a legáltalánosabb illesztő helyettesítésük. Ekkor a  $C_1$  és  $C_2$  klózok *bináris rezolvense* a  $C_1^{M'}\sigma \vee C_2^{M'}\sigma$  magú klóz.

A  $C_1$  és a  $C_2$  klózok *elsőrendű rezolvense* a következő bináris rezolvensek valamelyike:

1. a  $C_1$  és a  $C_2$  klózok bináris rezolvense,
2. a  $C_1$  klóz és a  $C_2$  klóz egy faktorának a bináris rezolvense,
3. a  $C_1$  klóz egy faktorának és a  $C_2$  klóznak a bináris rezolvense,
4. a  $C_1$  klóz egy faktorának és a  $C_2$  klóz egy faktorának a bináris rezolvense.

Példa.

Legyen  $C_1^M = P(x) \vee Q(x)$  és  $C_2^M = \neg P(a) \vee R(x)$ . Mivel  $x$  mind  $C_1^M$ -ben, mind  $C_2^M$ -ben előfordul, a  $C_2^M$ -ben átnevezzük. Ezután  $C_2^M = \neg P(a) \vee R(y)$ . A rezolváláshoz válasszuk az  $L_1 = P(x)$  és az  $L_2 = \neg P(a)$  literálokat. Alapjaik legáltalánosabb illesztő helyettesítése:  $(x \parallel a)$ . Így tehát a  $C_1$  és a  $C_2$  klózok bináris rezolvense

$$Q(x)(x \parallel a) \vee R(y)(x \parallel a) = Q(x) \vee R(y),$$

ahol a  $P(x)$  és a  $\neg P(a)$  literálok szerint rezolváltunk.

Példa.

$C_1^M = P(x) \vee P(f(y)) \vee R(g(y))$  és  $C_2^M = \neg P(f(g(a))) \vee Q(b)$ . A  $C_1$  faktorának magja  $P(f(y)) \vee R(g(y))$ .  $C_1$  faktorának és  $C_2$ -nek bináris rezolvense a  $R(g(g(a))) \vee Q(b)$  klóz. Ennélfogva a  $C_1$  és a  $C_2$  klózok egyik elsőrendű rezolvense  $R(g(g(a))) \vee Q(b)$ .

Jelöljük  $C_1$  és  $C_2$  elsőrendű rezolvensét – utalva a rezolvensképzés módjára – a következőképpen:  $((C_1\lambda_1)\sigma - L_1\sigma) \vee ((C_2\lambda_2)\sigma - L_2\sigma)$ .  
Tétel.

Legyen a  $C$  elsőrendű klóz a  $C_1$  és  $C_2$  elsőrendű klózok elsőrendű rezolvense. Ekkor  $\{C_1, C_2\} \models C$ .

BIZONYÍTÁS.  $C_1$  és  $C_2$  változóikban tiszta klózok. Rezolvensük általános esetben  $C = ((C_1\lambda_1)\sigma - L_1\sigma) \vee ((C_2\lambda_2)\sigma - L_2\sigma)$ . Az előbb bizonyított tétel miatt, ha az  $\mathcal{I}_{\mathcal{H}}$  Herbrand-interpretáció kielégíti  $\{C_1, C_2\}$ -t, akkor  $\mathcal{I}_{\mathcal{H}}$  kielégíti a  $\{C_1\lambda_1\sigma, C_2\lambda_2\sigma\}$  klózhalmazt is. Az a két literál, amely szerint rezolváltunk, a  $C_1\lambda_1\sigma$  és  $C_2\lambda_2\sigma$  klózokban komplementis literálpár, így

$$\{C_1\lambda_1\sigma, C_2\lambda_2\sigma\} \models C.$$

Ez viszont azt jelenti, hogy  $\{C_1, C_2\} \models C$ .

Egy  $S$  elsőrendű klózhalmazból való *elsőrendű rezolúciós levezetés* elsőrendű klózok egy olyan véges  $k_1, k_2, \dots, k_m$  ( $m \geq 1$ ) sorozata, ahol minden  $j = 1, 2, \dots, m$ -re

1. vagy  $k_j \in S$ ,
2. vagy van olyan  $1 \leq s, t < j$ , hogy  $k_j$  a  $k_s$  és  $k_t$  klózok elsőrendű rezolvense.

Tétel. [Elsőrendű rezolúciós kalkulus helyessége.]

Ha egy  $S$  elsőrendű klózalmazból van az üres klóznak elsőrendű rezolúciós levezetése, akkor  $S$  kielégíthetetlen.

BIZONYÍTÁS. Tegyük fel, hogy van az üres klóznak elsőrendű rezolúciós levezetése  $S$ -ből:  $k_1, k_2, \dots, k_{m-1}, k_m = \square$  ( $m \geq 1$ ).

Tegyük fel ugyanakkor, hogy van olyan  $\mathcal{I}$  interpretáció, mely kielégíti  $S$ -t. Ezért ha a rezolúciós levezetésben  $k_j \in S$ ,  $\mathcal{I}$  kielégíti  $k_j$ -t. Ha pedig a rezolúciós levezetésben  $k_j$  a  $k_s$  és  $k_t$  ( $1 \leq s, t < j$ ) kló-zok elsőrendű rezolvense és  $\mathcal{I}$  kielégíti a  $k_s$  és  $k_t$  klózokat, akkor  $\mathcal{I}$  kielégíti a rezolvensüket,  $k_j$ -t is. Ezért indukcióval könnyen látható, hogy  $\mathcal{I}$ -nek ki kellene elégítenie a  $\{k_1, k_2, \dots, k_{m-1}, k_m\}$  klózalmazt is. De  $k_m = \square$ , az üres klóz pedig kielégíthetetlen, tehát  $S$ -nek is kielégíthetetlennek kell lennie.

Példa.

A

$$\{ \forall x \forall y (P(x) \vee \neg Q(x, f(y))), \forall z \forall v (\neg P(g(z)) \vee \neg P(v)), \forall u Q(g(u), u) \}$$

klózhalmazból szerkesszünk meg egy elsőrendű rezolúciós levezetést:

1.  $Q(g(u), u)$
2.  $P(x) \vee \neg Q(x, f(y)) \quad [ (x, u \parallel g(f(y)), f(y)) ]$
3.  $P(g(f(y)))$
4.  $\neg P(g(z)) \vee \neg P(v) \quad [ (v \parallel g(z)) \text{ faktorizáció, } (z \parallel f(y)) ]$
5.  $\square$

A faktorizáció az elsőrendű rezolúciós elv lényeges eleme, alkalmazása nélkül az elsőrendű rezolúciós eljárás nem lenne teljes.

Példa.

Adott a következő formulahalmaz:

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall x \forall y (P(x) \supset Q(y, y) \vee Q(x, y)), \\ \forall x \forall y \neg (P(x) \wedge Q(y, y) \wedge Q(x, y)), \\ \forall x P(x) \end{array} \right\}.$$

A formulák alapján kapott klózhalmoz:

$$S = \left\{ \neg P(x) \vee Q(y, y) \vee Q(x, y), \neg P(x) \vee \neg Q(y, y) \vee \neg Q(x, y), P(x) \right\}.$$

1. A Herbrand-univerzum:  $\mathcal{H} = \{a\}$ . A Herbrand-bázis:  $\{P(a), Q(a, a)\}$ .  
A  $\mathcal{H}$  feletti alapklózhalmaz:  $\{\neg P(a) \vee Q(a, a), \neg P(a) \vee \neg Q(a, a), P(a)\}$ .  
Alaprezolúciós levezetés:

1.  $P(a)$
2.  $\neg P(a) \vee Q(a, a)$
3.  $Q(a, a)$  [ 1, 2 rezolvense ]
4.  $\neg P(a) \vee \neg Q(a, a)$
5.  $\neg Q(a, a)$  [ 1, 4 rezolvense ]
6.  $\square$  [ 3, 5 rezolvense ]

2. Elsőrendű rezolúciós levezetés  $S$ -ből, faktorizáció nélkül:

1.  $P(x)$

2.  $\neg P(x) \vee Q(y, y) \vee Q(x, y)$

3.  $Q(y, y) \vee Q(x, y)$  [ 1, 2 rezolvense ]

4.  $\neg P(x) \vee \neg Q(y, y) \vee \neg Q(x, y)$

5.  $\neg Q(y, y) \vee \neg Q(x, y)$  [ 1, 4 rezolvense ]

A levezetés nem folytatható, mivel nincs olyan klózpár, amely egyetlen komplementes literálpárt tartalmazna. Így az üres klózt nem kapjuk meg.

3. Rezolúciós levezetés  $S$ -ből, faktorizációval:

(a) Alkalmazzuk  $S$  klózaira a  $\sigma = (x \parallel y)$  legáltalánosabb illesztő helyettesítést.

$$S_\sigma = \{ \neg P(y) \vee Q(y, y), \neg P(y) \vee \neg Q(y, y), P(y) \}.$$

(b) A levezetés  $S_\sigma$ -ből:

1.  $P(y)$
2.  $\neg P(y) \vee Q(y, y)$
3.  $Q(y, y)$  [ 1, 2 rezolvense ]
4.  $\neg P(y) \vee \neg Q(y, y)$
5.  $\neg Q(y, y)$  [ 1, 4 rezolvense ]
6.  $\square$  [ 3, 5 rezolvense ]

Tétel. [Elsőrendű rezolúciós kalkulus teljessége.] Ha egy  $S$  elsőrendű klózalmaz kielégíthetetlen, akkor  $S$ -ből van az üres klóznak rezolúciós levezetése.

## 5.3.1. Rezolúciós levezetési stratégiák

## 1. A teljes szintek módszere

Legyen  $S$  tetszőleges klózalmaz. A teljes szintek módszere a következőképpen állítja elő a levezetéshez a rezolvenseket:

$$1. R_0 := \{ C \mid C \text{ a } (C_1, C_2) \text{ pár rezolvense, } C_1, C_2 \in S \}, \\ S_1 := S \cup R_0, \quad i := 1.$$

2. Ha  $\square \in S_i$ , sikeresen vége. Egyébként

$$R_i := \{ C \mid C \text{ a } (C_1, C_2) \text{ pár rezolvense, } C_1 \in S_i, C_2 \in R_{i-1} \}, \\ S_{i+1} := S_i \cup R_i, \quad i := i + 1 \text{ és folytassuk a 2. lépéssel.}$$

Ezzel a módszerrel sok egyforma klóz jelenik meg a rezolvensek között, sőt olyan rezolvens klózok is a klózalmazba kerülhetnek, amelyekre a továbblépésben biztosan nincs szükség. E problémák megoldására született meg a törlési stratégia.

## 2. A törlési stratégia

Minden  $i = 1, 2, \dots$  esetén az  $R_i$  klózalmazból el kell hagyni a fölösleges klózokat: a tautológiákat és azokat, amelyeket más klózok „tartalmaznak”.

Jelölje  $C^l$  és  $D^l$  rendre a  $C$  és a  $D$  klózok literáljainak halmazát. Egy  $C$  klóz *befoglalja* a  $D$  klózt, ha van olyan  $\sigma$  termhelyettesítés, hogy  $C^l\sigma \subseteq D^l$ .  $D$  a *befoglalt* klóz.

Példa.

Legyen  $C = P(x)$   $D = P(a) \vee Q(a)$ .

Ekkor  $C^l = \{P(x)\}$  és  $D^l = \{P(a), Q(a)\}$ .

Ha  $\sigma = (x \parallel a)$ , akkor  $C^l\sigma = \{P(a)\}$ .

$C^l\sigma \subseteq D^l$ , tehát  $C$  befoglalja  $D$ -t.

A tautológiákat és a befoglalt klózokat meg kell találni. A tautológiákat a faktorizáció segítségével fedhetjük fel.

A befoglalási teszt azonban nem olyan egyszerű.

Legyenek  $C$  és  $D$  klózok. Legyen  $\theta = (x_1, x_2, \dots, x_n \parallel a_1, a_2, \dots, a_n)$ , ahol  $x_1, x_2, \dots, x_n$  a  $D$ -ben előforduló változók és  $a_1, a_2, \dots, a_n$  sem  $C$ -ben, sem  $D$ -ben elő nem forduló különböző konstansszimbólumok. Tegyük fel, hogy  $D = L_1 \vee L_2 \vee \dots \vee L_m$ .

$$1. W := \{ \neg L_1\theta, \neg L_2\theta, \dots, \neg L_m\theta \}, \quad U_0 := \{ C \}, \quad i := 0,$$

2. Ha  $\square \in U_i$ , akkor vége:  $C$  befoglalja  $D$ -t. Egyébként

$$U_{i+1} = \{ C \mid C \text{ a } C_1, C_2 \text{ rezolvense, } C_1 \in U_i, C_2 \in W \},$$

3. Ha  $U_{i+1}$  üres, akkor vége:  $C$  nem foglalja be  $D$ -t. Egyébként  $i := i + 1$ , és folytatás a 2. lépéssel.

Példa.

$D = \neg P(h(y)) \vee Q(f(h(y)), a) \vee \neg P(z)$  és  $C = \neg P(x) \vee Q(f(x), a)$ .

Befoglalja-e  $C$  a  $D$ -t?

$D$  változói az  $y$  és a  $z$ . Legyen  $\theta = (y, z \parallel b, c)$ .

Ekkor  $D\theta = \neg P(h(b)) \vee Q(f(h(b)), a) \vee \neg P(c)$ .

$$1. W = \{ P(h(b)), \neg Q(f(h(b)), a), P(c) \},$$

$$U_0 = \{ \neg P(x) \vee Q(f(x), a) \}.$$

2. Mivel  $\square \notin U_0$ , azt kapjuk, hogy

$$U_1 = \{ Q(f(h(b)), a), \neg P(h(b)), Q(f(c), a) \}.$$

3. Mivel  $U_1 \neq \emptyset$  és az  $\square \notin U_1$ , az eljárást folytatva kapjuk, hogy

$$U_2 = \{ \square \}.$$

4. Mivel  $\square \in U_2$ , az eljárásnak vége:  $C$  befoglalja  $D$ -t.

## 6. fejezet

# A tablók módszere – tablókalkulus

### 6.1. Jelölt tábló az ítéletlogikában

Vezessünk be a logika nyelvébe két új szimbólumot: a  $T$ -t és az  $F$ -et. Ha  $A$  formula,  $TA$  és  $FA$  *jelölt formulák*.

Egy interpretációban  $TA$  igaz, ha  $A$  igaz és  $TA$  hamis, ha  $A$  hamis. Továbbá  $FA$  igaz, ha  $A$  hamis és  $FA$  hamis, ha  $A$  igaz.

Legyen  $S$  jelölt formulák tetszőleges halmaza.  $S$  *lefele zárt*, ha minden olyan esetben, amikor

1.  $TA \wedge B \in S$ , akkor  $TA \in S$  és  $TB \in S$ ,
2.  $TA \vee B \in S$ , akkor  $TA \in S$  vagy  $TB \in S$ ,
3.  $TA \supset B \in S$ , akkor  $FA \in S$  vagy  $TB \in S$ ,
4.  $T\neg A$ , akkor  $FA \in S$ ,
5.  $FA \wedge B \in S$ , akkor  $FA \in S$  vagy  $FB \in S$ ,
6.  $FA \vee B \in S$ , akkor  $FA \in S$  és  $FB \in S$ ,
7.  $FA \supset B \in S$ , akkor  $TA \in S$  és  $FB \in S$  és
8.  $F\neg A$ , akkor  $TA \in S$ .

Jelölt formulák egy  $S$  halmaza *Hintikka-halmaz*, ha  $S$  lefele zárt és nem tartalmaz ellentétesen jelölt formulapárt.

Tétel.

Ha  $S$  Hintikka-halmaz, akkor kielégíthető.

BIZONYÍTÁS. Az  $S$  Hintikka-halmaz lefele zárt, tehát tartalmaz jelölt atomokat, de nem tartalmaz ellentétesen jelölteket. Legyen  $e$  tetszőlegesen rögzített igazságérték. Legyen az  $\mathcal{I}$  interpretáció a következő:

$$\mathcal{I}(X) \Rightarrow \begin{cases} i & \text{ha } TX \in S, \\ h & \text{ha } FX \in S, \\ e & \text{egyébként.} \end{cases}$$

A szerkezeti indukció elvének segítségével megmutatjuk, hogy tetszőleges  $C \in S$  jelölt formula igaz  $\mathcal{I}$ -ben.

**(alaplépés:)** Jelölt ítéletváltozókra  $\mathcal{I}$  definíciója miatt nyilvánvaló, hogy igaz az állítás.

**(indukciós lépések:)** – Legyen  $C = TA \wedge B$  alakú jelölt formula.

Mivel  $C \in S$ , így  $TA \in S$  és  $TB \in S$ . Indukciós feltevésünk, hogy  $TA$  és  $TB$  igazak. De mivel  $C = TA \wedge B$ , ezért  $C$  is igaz. Hasonló az  $FA \vee B$  és az  $FA \supset B$  formulák esete.

– Legyen  $C = FA \wedge B$  alakú jelölt formula. Mivel  $C \in S$ , így  $FA \in S$  vagy  $FB \in S$ . Indukciós feltevésünk, hogy  $FA$  vagy  $FB$  igazak. De így a  $C = FA \wedge B$  is igaz. Hasonló a  $TA \vee B$  és a  $TA \supset B$  formulák esete.

– Legyen  $C = T\neg A$  alakú. Mivel  $C \in S$ , így  $FA \in S$ . Indukciós feltevésünk, hogy  $FA$  igaz, így  $C$  igaz. Hasonlóan az  $F\neg A$  esetben.

A tablók módszerében (mint kalkulusban) minden „formulafajtára” van egy-egy levezetési szabály. A levezetési szabályt a formula *közvetlen tablójának* is nevezik:

$$\begin{array}{c} T\neg A \\ | \\ FA \end{array}$$

$$\begin{array}{c} F\neg A \\ | \\ TA \end{array}$$

$$\begin{array}{c} TA \wedge B \\ | \\ TA \\ | \\ TB \end{array}$$

$$\begin{array}{c} FA \wedge B \\ / \quad \backslash \\ FA \quad FB \end{array}$$

$$\begin{array}{c} TA \vee B \\ / \quad \backslash \\ TA \quad TB \end{array}$$

$$\begin{array}{c} FA \vee B \\ | \\ FA \\ | \\ FB \end{array}$$

$$\begin{array}{c} TA \supset B \\ / \quad \backslash \\ FA \quad TB \end{array}$$

$$\begin{array}{c} FA \supset B \\ | \\ TA \\ | \\ FB \end{array}$$

Egy  $C$  jelölt formula *jelölt táblója* egy olyan bináris fa, melynek csúcsai jelölt formulák. A gyökérbe elhelyezzük a  $C$  jelölt formulát. Előállítjuk  $C$  közvetlen táblóját. Feltesszük, hogy a  $C$ -nek egy  $T$  táblója adott. Legyen  $T$ -ben  $D$  egy levélcsúcs. Ekkor a  $T$  tábló *közvetlen kiterjesztése* a következő:

- (A) Ha van még nem „feldolgozott”  $TA \wedge B$ ,  $FA \vee B$ ,  $FA \supset B$  alakú jelölt formula a gyökérből a  $D$  csúcsba vezető úton, akkor kapcsoljuk  $D$ -hez ezen út folytatásaként a megfelelő formula közvetlen táblójából nyert jelölt formulákat mint új csúcsokat. Azaz két egymást követő csúcsot illesztünk a táblóhoz.
- (B) Ha van még nem „feldolgozott”  $FA \wedge B$ ,  $TA \vee B$ ,  $TA \supset B$  alakú jelölt formula a gyökérből a  $D$  csúcsba vezető úton, akkor  $D$ -hez kapcsoljunk két csúcsot: a bal oldali a megfelelő formula közvetlen táblójából nyert egyik, a jobb oldali pedig a másik jelölt formula.

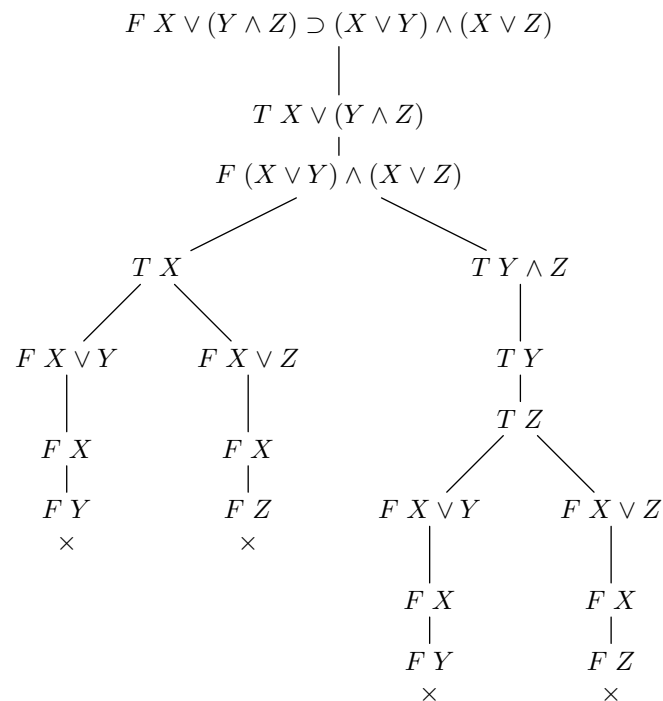
(E) Ha van még nem „feldolgozott”  $T\neg A$ ,  $F\neg A$  alakú jelölt formula a gyökérből a  $D$  csúcsba vezető úton, akkor kapcsoljuk  $D$ -hez ezen út folytatásaként a megfelelő formula közvetlen táblójából nyert jelölt formulát mint új csúcsot.

Példa.

Adjuk meg most az

$$F(X \vee (Y \wedge Z)) \supset (X \vee Y) \wedge (X \vee Z)$$

formula jelölt táblóját.



A tabló egy *ága teljes*, ha az ágon lévő fel nem dolgozott formulák jelölt atomok. A tabló *teljes*, ha minden ága teljes.

A tabló egy *ága zárt*, ha az ágon egy formula  $T$ -vel és  $F$ -fel jelölve is előfordul. A tabló *zárt*, ha minden ága zárt, egyébként a tabló *nyitott*.

Azt mondjuk, hogy az  $A$  formulának létezik *tablócáfolata*, ha a  $TA$  tablója zárt, vagy hogy a  $B$  formula *bizonyítható tablóval*, ha  $FB$  tablója zárt.

Tétel. [A tablókalkulus helyessége.]

Ha a  $TA$  jelölt formula táblója zárt, akkor  $A$  kielégíthetetlen.

BIZONYÍTÁS. Tegyük fel, hogy  $TA$  táblója zárt, ekkor a tábló minden ága zárt. Mivel a tábló gyökerében lévő  $TA$  formula minden ágon szerepel, ezért ha  $A$  kielégíthető lenne, lenne olyan interpretáció, melyben  $TA$  igaz, de ekkor van olyan ág, melyen haladva ebben az interpretációban igaz jelölt formulákat kapunk. De akkor az ág nem lehet zárt.

Tétel.

Egy tabló bármely teljes, nyitott ága kielégíthető.

BIZONYÍTÁS. Legyen  $S$  az  $T$  tabló egy teljes, nyitott ágán az összes jelölt formula halmaza.  $S$  Hintikka-halmaz, mert nincs olyan  $X$  ítéletváltozó, hogy  $TX, FX \in S$ , továbbá ha

1.  $TA \wedge B \in S$ , akkor  $TA \in S$  és  $TB \in S$ ,
2.  $TA \vee B \in S$ , akkor  $TA \in S$  vagy  $TB \in S$ ,
3.  $TA \supset B \in S$ , akkor  $FA \in S$  vagy  $TB \in S$ ,
4.  $T\neg A$ , akkor  $FA \in S$ ,
5.  $FA \wedge B \in S$ , akkor  $FA \in S$  vagy  $FB \in S$ ,
6.  $FA \vee B \in S$ , akkor  $FA \in S$  és  $FB \in S$ ,
7.  $FA \supset B \in S$ , akkor  $TA \in S$  és  $FB \in S$  és
8. ha  $F\neg A$ , akkor  $TA \in S$ .

A Hintikka-halmazok kielégíthetők, tehát  $S$  kielégíthető.

Tétel. [A tablókalkulus teljessége.]

Ha egy  $A$  formula kielégíthetetlen, akkor  $TA$  bármely teljes tablója zárt.

BIZONYÍTÁS. Tegyük fel, hogy  $T$  az  $TA$  formula egy teljes tablója. Ha  $T$  nyitott, akkor  $A$  kielégíthető. Ezért ha  $A$  kielégíthetetlen, akkor  $T$  biztosan zárt.

A tábló fogalmát most kiterjesztjük formulahalmazokra is.

Egy  $\{C_1, C_2, \dots, C_n\}$  véges formulahalmaz táblója gyökerében a formulahalmaz minden formulája szerepel. Ezután a  $C_1$  teljes táblóját a gyökérhez kapcsoljuk. A nyitott ágakat a  $C_2$  teljes táblójával folytatjuk és így tovább.

Egy  $\{C_1, C_2, \dots\}$  megszámlálhatóan végtelen formulahalmaz táblója gyökerében a formulahalmaz minden formulája szerepel. Ezután az előbbi módszerrel definiáljuk a formulahalmaz táblóját.

## 6.2. Az elsőrendű tabló

Hogy a tárgyalás egyszerűbb legyen, az (egyfajtájú) elsőrendű logika nyelv ábécéjét – a nyelv kifejezőerejét megőrizve – újradefiniáljuk. A nyelv ábécéjének logikán kívüli szimbólumai legyenek a következők:

1. minden  $k = 1, 2, \dots$  esetén  $k$  aritású predikátumszimbólumok megszámlálható sorozata,
2. individuumváltozók megszámlálható sorozata,
3. az individuumváltozóktól különböző ún. (individuum-)paraméterszimbólumok megszámlálható sorozata.

A nyelv szintaxisa csak a termek definiálásában változik: az individuumváltozók és a paraméterszimbólumok lesznek a nyelv termjei.

*Tiszta formulák* azok az elsőrendű formulák, amelyekben nem fordul elő paraméterszimbólum.

A nyelv szemantikájának megadása során rögzítünk egy tetszőleges, nemüres halmazt, az univerzumot, jelöljük ezt most is  $\mathcal{U}$ -val.

A nyelv tiszta formuláinak igazságértékét a különböző  $\mathcal{U}$  feletti interpretációk és változókiértékelések mellett a szokásos módon definiálhatjuk.

Ha egy formulában minden paraméterszimbólum helyére  $\mathcal{U}$ -nak egy-egy elemét írjuk be, ún.  $\mathcal{U}$ -formulát nyerünk. Nyilván a tiszta formulák is  $\mathcal{U}$ -formulák. Az összes – szabad individuumváltozót nem tartalmazó – zárt  $\mathcal{U}$ -formulának a halmazát jelöljük  $E^{\mathcal{U}}$ -val.

Legyen  $A$  egy az  $u_1, u_2, \dots, u_n$  univerzumelemeket tartalmazó zárt  $\mathcal{U}$ -formula.  $A$  az  $\mathcal{U}$  feletti valamely  $\mathcal{I}$  interpretációban pontosan akkor igaz, ha  $A$ -ba az  $u_1, u_2, \dots, u_n$  helyére az  $A$ -ban nem szereplő  $x_1, x_2, \dots, x_n$  egymástól különböző individuumváltozókat írva, a nyert tiszta formula  $\kappa(x_i) = u_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) mellett igaz  $\mathcal{I}$ -ben.

Határozzuk meg végül a paraméterszimbólumokat is tartalmazó zárt – szabad individuumváltozót nem tartalmazó – formulák szemantikáját. Egy az  $a_1, a_2, \dots, a_n$  paraméterszimbólumokat tartalmazó zárt formulát az  $\mathcal{U}$  feletti valamely  $\mathcal{I}$  interpretáció kielégíti, ha van a paraméterszimbólumoknak  $\mathcal{U}$ -ba való olyan  $\kappa$  leképezése, hogy az  $\kappa(a_i) \in \mathcal{U}$  individuumokat rendre  $a_i$  helyére írva, az így nyert zárt  $\mathcal{U}$ -formula igaz  $\mathcal{I}$ -ben.

Legyen  $S \subseteq E^{\mathcal{U}}$  jelölt formulák tetszőleges halmaza.  $S$  az  $\mathcal{U}$  univerzum felett *S lefele zárt*, ha minden olyan esetben, amikor

1.  $TA \wedge B \in S$ , akkor  $TA \in S$  és  $TB \in S$ ,
2.  $TA \vee B \in S$ , akkor  $TA \in S$  vagy  $TB \in S$ ,
3.  $TA \supset B \in S$ , akkor  $FA \in S$  vagy  $TB \in S$ ,
4.  $T\neg A$ , akkor  $FA \in S$ ,
5.  $T\forall x A \in S$ , akkor minden  $u \in \mathcal{U}$ -ra  $TA_u^x \in S$ ,
6.  $T\exists x A \in S$ , akkor legalább egy  $u \in \mathcal{U}$ -ra  $TA_u^x \in S$ ,

7.  $FA \wedge B \in S$ , akkor  $FA \in S$  vagy  $FB \in S$ ,
8.  $FA \vee B \in S$ , akkor  $FA \in S$  és  $FB \in S$ ,
9.  $FA \supset B \in S$ , akkor  $TA \in S$  és  $FB \in S$  és
10.  $F\neg A$ , akkor  $TA \in S$ ,
11.  $F\forall xA \in S$ , akkor legalább egy  $u \in \mathcal{U}$ -ra  $FA_u^x \in S$ ,
12.  $F\exists xA \in S$ , akkor minden  $u \in \mathcal{U}$ -ra  $FA_u^x \in S$ .

$S \subseteq E^{\mathcal{U}}$  elsőrendű Hintikka-halmaz, ha az  $\mathcal{U}$  univerzum felett lefele zárt és  $\mathcal{U}$ -atom  $T$ -vel is és  $F$ -fel is egyszerre nem fordul elő benne.

Tétel. [Hintikka-lemma az elsőrendű logikában.]

Ha  $S$  az  $\mathcal{U}$  univerzum feletti elsőrendű Hintikka-halmaz, akkor  $S$  kielégíthető ( $\mathcal{U}$  felett).

Az elsőrendű tablók módszerében – az ítéletlogikai tablókhoz hasonlóan – minden formulafajtára van egy-egy levezetési szabály, azaz *közvetlen tabló*.

$$\begin{array}{ccc}
 T\forall xA & & F\exists xA \\
 \downarrow & (C) & \downarrow \\
 TA(x \parallel a) & & FA(x \parallel a) \\
 \\
 T\exists xA & & F\forall xA \\
 \downarrow & (D) & \downarrow \\
 TA(x \parallel a) & \text{(megkötéssel)} & FA(x \parallel a)
 \end{array}$$

A „megkötéssel” azt jelenti, hogy ha az  $a$  paraméterszimbólumot korábban már bevezettük valamely (C) vagy (D) közvetlen tablóval az ágon, akkor nem használhatjuk fel újra (mert az interpretációban szabadon választható értéket szeretnénk majd biztosítani e paraméterszimbólum számára). Ha viszont a (C) közvetlen tablót alkalmazzuk egy ilyen  $a$  ún. *kritikus* paraméterszimbólum bevezetése után,  $a$  felhasználható  $C$ -ben.

Egy tiszta formula jelölt táblóját a közvetlen táblók segítségével az ítéletlogikai definíció kiterjesztésével adhatjuk meg:

- (C) Ha van  $T\forall xA$ , illetve  $F\exists xA$  alakú jelölt formula a gyökérből a  $D$  csúcsba vezető úton, akkor  $D$ -hez kapcsoljuk ezen út folytatásaként  $TA_a^x$ , illetve  $FA_a^x$  formulát mint új csúcsot, ahol  $a$  tetszőleges paraméterszimbólum.
- (D) Ha van  $F\forall xA$ , illetve  $T\exists xA$  alakú nem „feldolgozott” jelölt formula a gyökérből a  $D$  csúcsba vezető úton, akkor  $D$ -hez kapcsoljuk ezen út folytatásaként  $TA_a^x$ , illetve  $FA_a^x$  formulát mint új csúcsot, ahol  $a$  kritikus paraméterszimbólum.

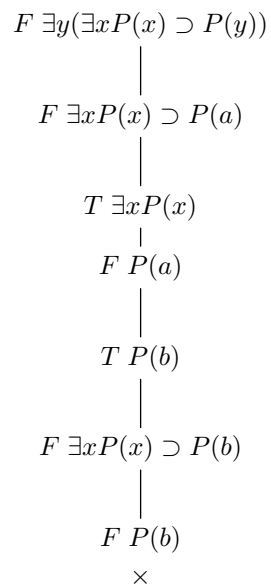
A (D) közvetlen tablót *liberalizálhatjuk* a következők szerint:

Ha az  $a$  paraméterszimbólumot új paraméterszimbólumként vezetjük be egy (C) közvetlen tablóval a tabló aktuális ágán, akkor később egy (D) közvetlen tablóval újra felhasználhatjuk (mivel a (C)-vel bevezetett paraméterszimbólum interpretációbeli értéke tetszőleges, tehát a (D)-vel bevezetett érték is megfelel számára.) Ezzel a liberalizálással a tabló sok esetben rövidíthető.

Példa.

A  $\exists y(\exists xP(x) \supset P(y))$  formula jelölt tablója

1. nem liberalizált paramétertechnikával:



2. liberalizált paramétertechnikával:

$$\begin{array}{c} F \exists y(\exists x P(x) \supset P(y)) \\ | \\ F \exists x P(x) \supset P(a) \\ | \\ T \exists x P(x) \\ | \\ F P(a) \\ | \\ T P(a) \\ \times \end{array}$$

A tabló egy ága zárt, ha az ágon (elsőrendű) komplement literálpár fordul elő, és a tabló akkor zárt, ha minden ága zárt, egyébként a tabló nyitott.

Tétel. [Az elsőrendű tabló helyessége.]

Ha az elsőrendű  $TA$  formula tablója zárt, akkor  $A$  kielégíthetetlen.

BIZONYÍTÁS. Ha egy tabló zárt, akkor  $TA$  nem lehet igaz egyetlen interpretációban sem, hisz egyetlen ága sem lehet igaz egyetlen interpretációban sem. Tehát a gyökérben lévő formula kielégíthetetlen.

A tabló egy ága *befejezett*, ha az ágon lévő fel nem dolgozott formulák literálok, és ha egy  $T\forall xA$ , illetve  $F\exists xA$  formula és egy  $a$  paraméterszimbólum előfordul az ágon, akkor  $TA_a^x$ , illetve  $FA_a^x$  is szerepel ezen az ágon. A tabló *befejezett*, ha minden ága befejezett.

Ezután olyan szisztematikus tablóépítési stratégiát vezetünk be, amely biztosítja, hogy befejezett ágak állhassanak elő:

- Először az (A), a (B) és a (D) tablóépítési szabályokat hajtjuk végre, amíg lehet.
- Ezután a (C) közvetlen tablók alkalmazása következik az ágon előforduló paraméterszimbólumok segítségével.

A tablóépítést addig folytatjuk, amíg az ág vagy befejezett, vagy zárt nem lesz.

Tétel.

Egy befejezett szisztematikus tabló nyitott ágai kielégíthetők.

BIZONYÍTÁS. Egy befejezett szisztematikus tabló nyitott ágán egy elsőrendű Hintikka-halmaz áll elő, ahol  $\mathcal{U}$  az ágon szereplő paraméterszimbólumok halmaza. Egy elsőrendű Hintikka-halmaz pedig kielégíthető.

Tétel. [Az elsőrendű tabló teljessége.]

Ha az  $A$  elsőrendű formula logikai törvény, akkor van az  $FA$  jelölt formulának zárt, befejezett tablója.

BIZONYÍTÁS. Legyen  $A$  elsőrendű logikai törvény. Legyen  $T$  az  $FA$  jelölt formula befejezett szisztematikus tablója. Ha  $T$ -nek lenne nyitott ága, akkor (és így  $\neg A$  is) kielégíthető lenne, ellentétben azzal, hogy  $A$  törvény.