

# **Irányítástechnika**

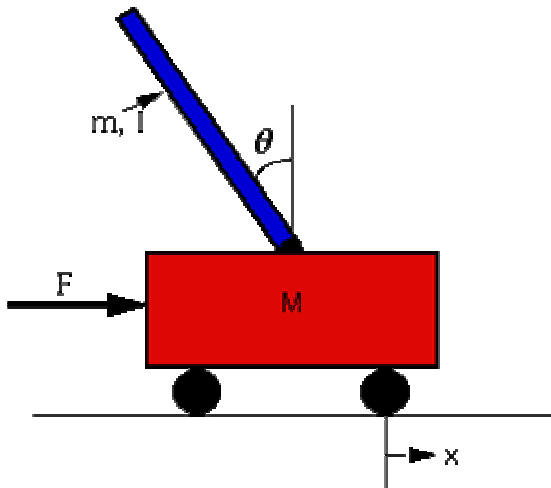
## Irodalom:

Lantos Béla:	Irányítási rendszerek elmélete és tervezése
Bánhidi ....:	Automatika mérnököknek
Keviczky ....:	Szabályozástechnika
Csáki, Bars Ruth:	Automatika
Mórocz István:	Irányítástechnika és készülékei I., II.

# Az irányítás célja:

A szabályozott jellemző előírt értéken tartása az alapjel szerint a rendszerre ható esetleges zavaró hatások ellenére

Példa: fordított inga  
(inverted pendulum)



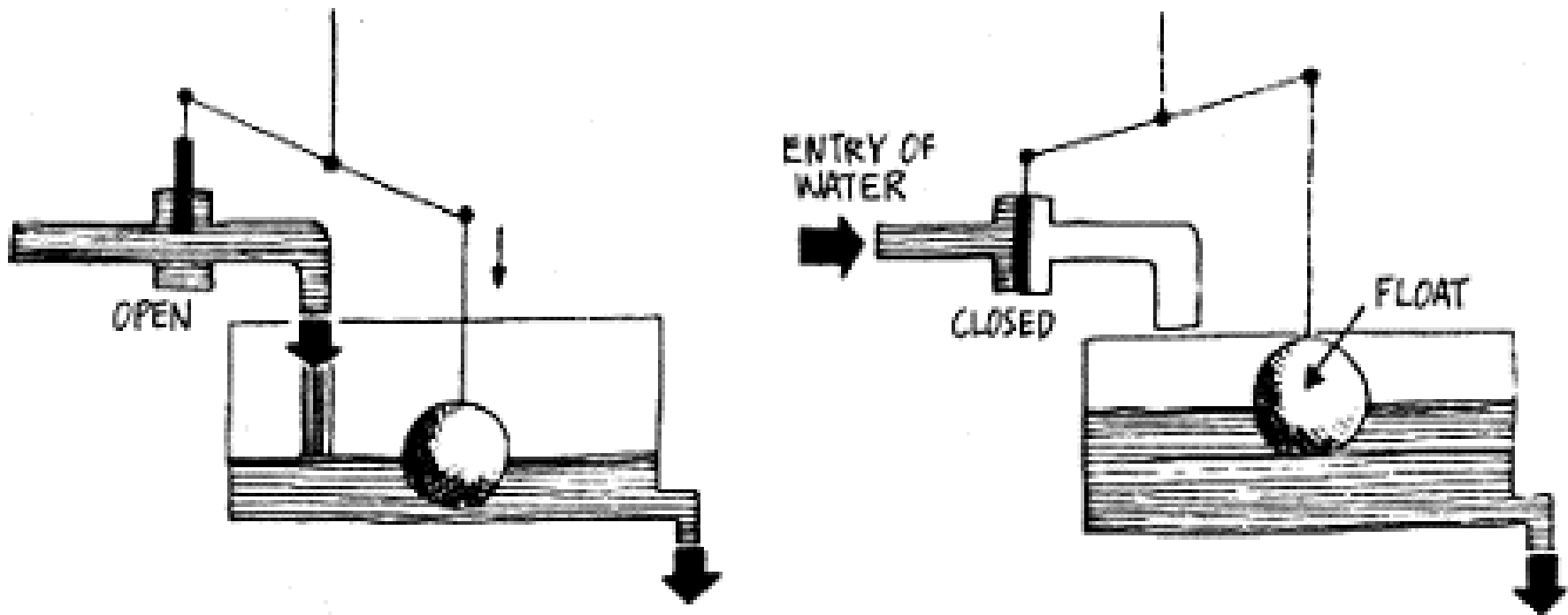
Segway



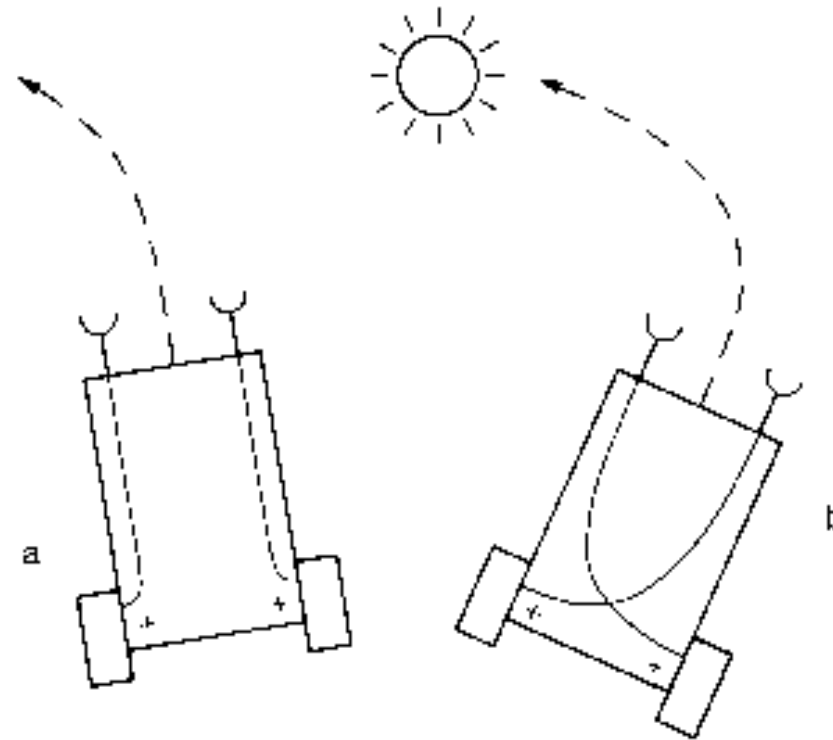
# Segway



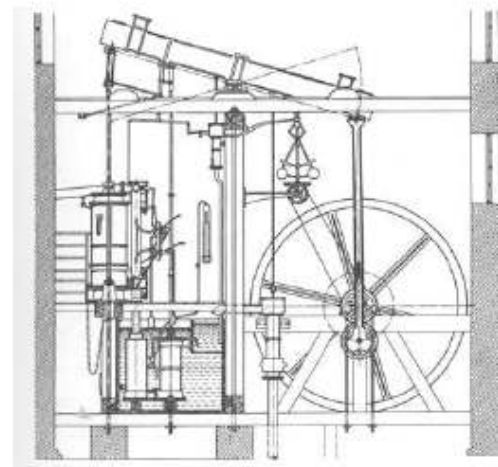
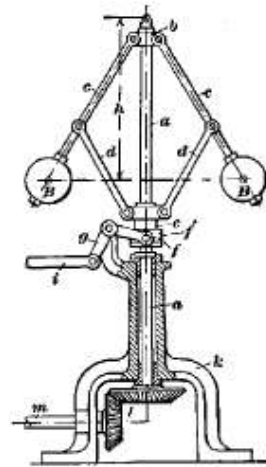
# Visszacsatolás



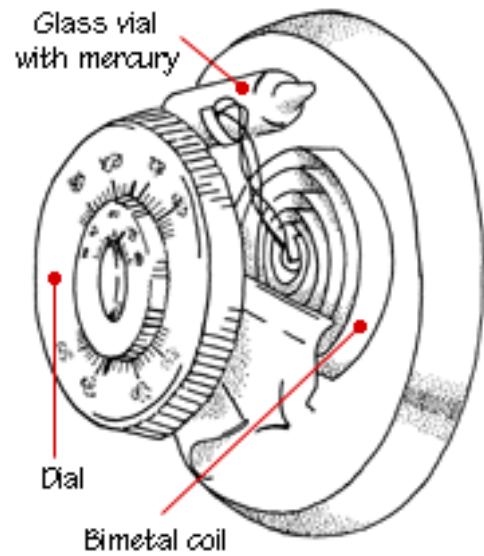
# Komplex viselkedés



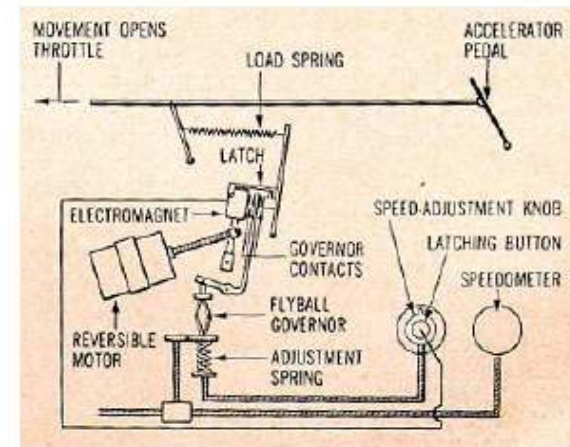
# Gőzgép – ipari forradalom



# Termosztát és tempomat

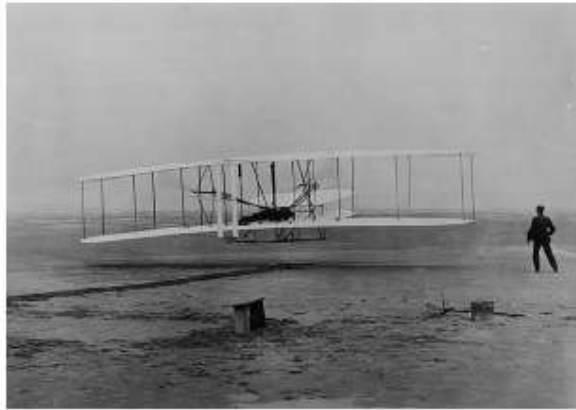


(a)



(b)

# További példák



(a)



(b)

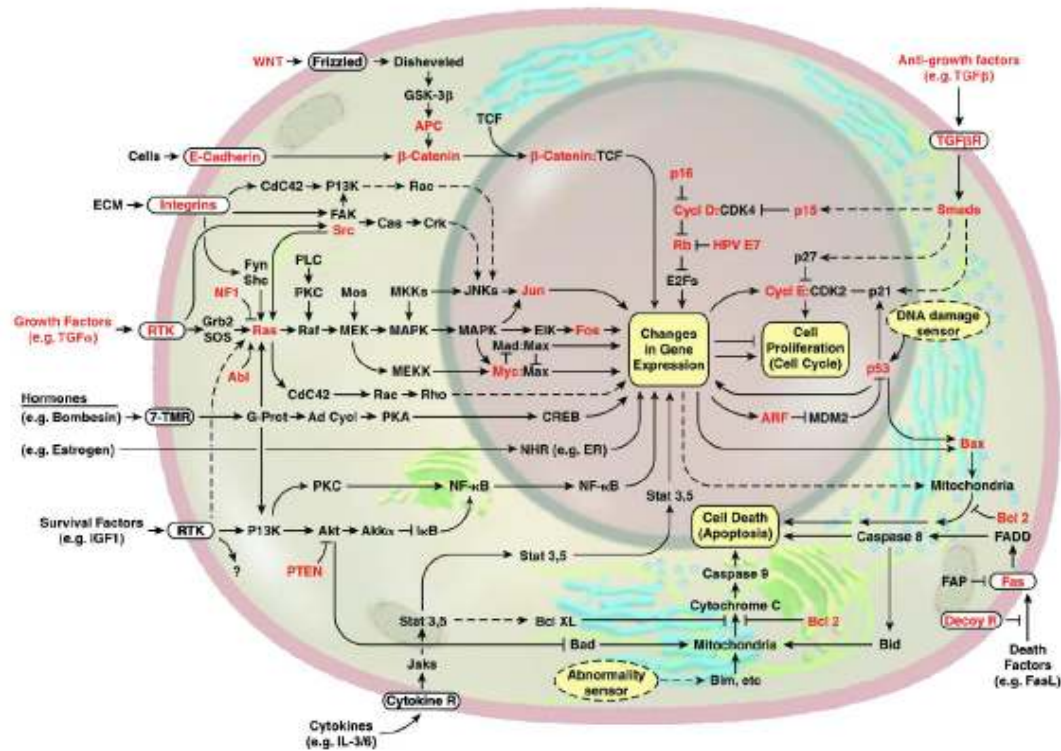


(a)

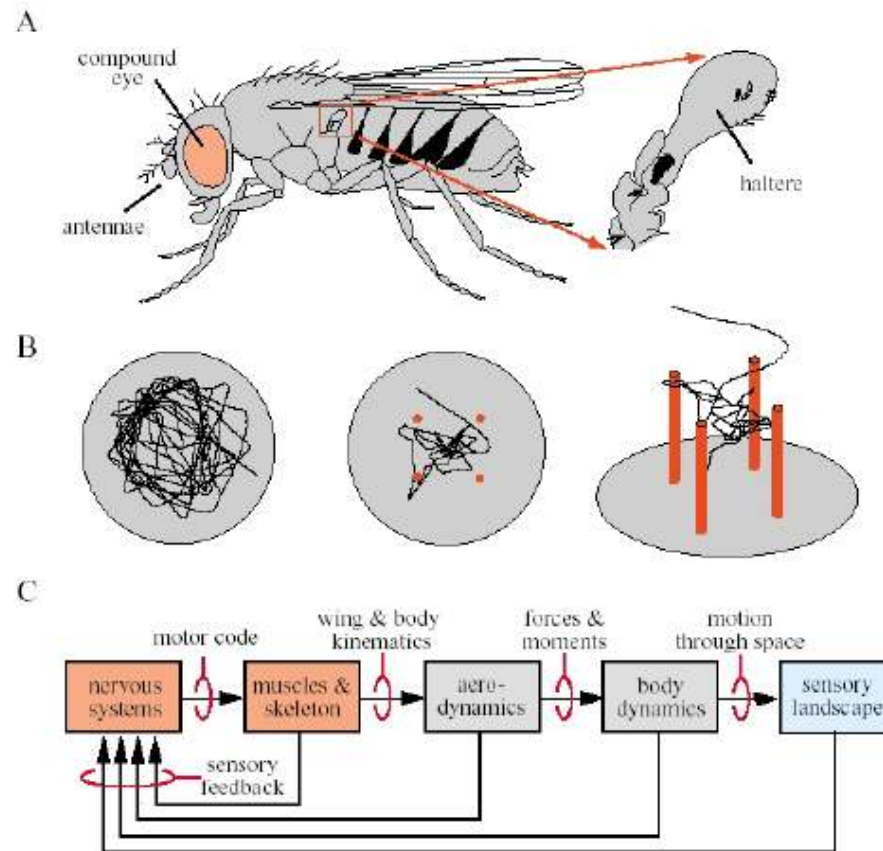


(b)

# Egy sejt szabályozóköréi



# Egy rovar



# Robotok



(a)



(b)

## Irányítástechnikai alapfogalmak:

### 1. Az irányítási folyamat műveletei:

**Érzékelés** (információ szerzés az irányítandó folyamatról)

**Ítéletalkotás** (döntés a rendelkezés szükségességéről)

**Rendelkezés** (utasítás a beavatkozásról)

**Jelformálás** (a szabályzás minőségi jellemzőinek alakítása)

**Beavatkozás** (az irányított folyamat befolyásolása)

2. **Jel:** Valamely fizikai v. kémiai állapotot meghatározó értéke, mely egyértelműen hozzárendelt információ szerzésére, továbbítására vagy tárolására alkalmas.

3. Csoportosítás:

A jel értékészlete szerint:

**Folytonos**

**Szakaszos** (csak diszkrét értékeket vehet fel)

A jel időbeli lefolyás szerint:

**Folytonos**

**Diszkrét** (csak meghat. időnként van jel)

Az érték meghatározottsága szerint:

**Determinisztikus**

**Stochasztikus** ( a jelcsak valószínűségyszámítási  
módszerekkel írható le)

Az irányítási rendszer részei:

- A. **Irányított rendszer** (tech. folyamat, gép, stb.  
erre vonatkozik az irányítás)
- B. **Irányító rendszer** (minden más szerv, készülék)

## **Hatáslánc:**

az irányítási hatást közvetítő szerkezeti egységek sorozata

Az irányítási rendszer leírható **hatásvázlat**-tal.

A hatásvázlat részei:

**Jelátviteli tag:** az irányítási rendszer egy eleme.

Jelformáló tulajdonsága matematikai modellel, jelleggörbével adható meg.

**Irányított szakasz:** az irányított rendszer jelátviteli tulajdonságait leíró tag.

**Hatásirány:** a jel terjedési iránya (nincs visszahatás)

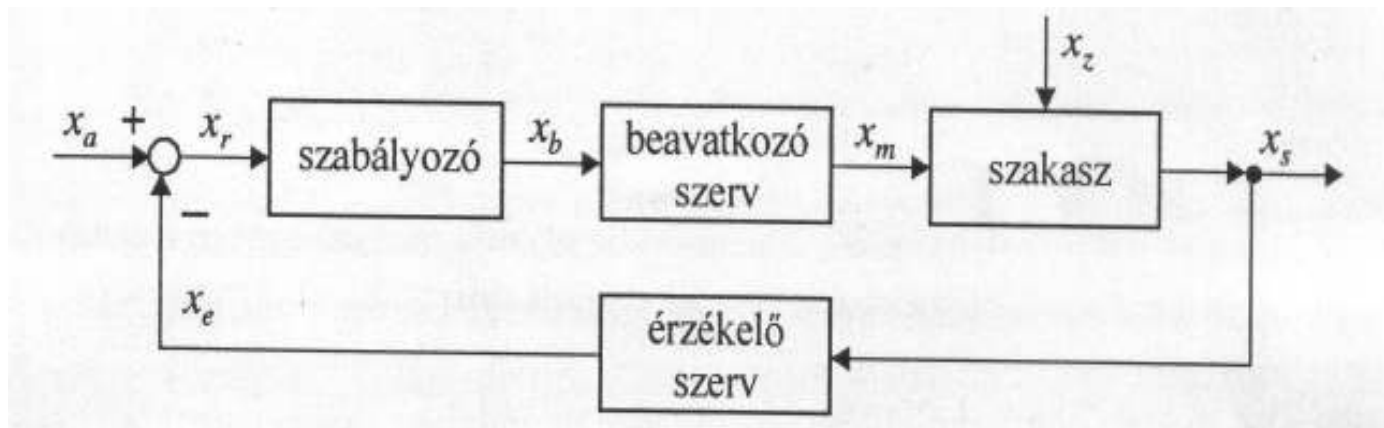
**Kimenő, bemenő jel**

Az irányítás felosztása:

**Vezérlés:** vezérlési parancs:  $\rightarrow X_r$  rendelkező jel  $\rightarrow$   
vezérlő kimenete:  $X_b$  beavatkozó jel  $\rightarrow$   
beavatkozó szerv:  $X_m$  módosított jellemző  
( $X_m$  a vezérelt ber.-ben zajló folyamatot befolyásolja)

A vezérelt berendezésre zavaró jelek is hatnak.

**Szabályozás:**



$X_a$ : alapjel,  $X_e$ : ellenőrző jel,  $X_r$ : rendelkező jel,  $X_b$ : beavatkozó jel,  
 $X_m$ : módosított jellemző,  $X_s$ : szabályozott jellemző,  $X_z$ : zavaró jellemző

## A szabályozás és vezérlés összehasonlítása:

A **vezérlés** hatásvázlata nyitott: nincs visszajelzés

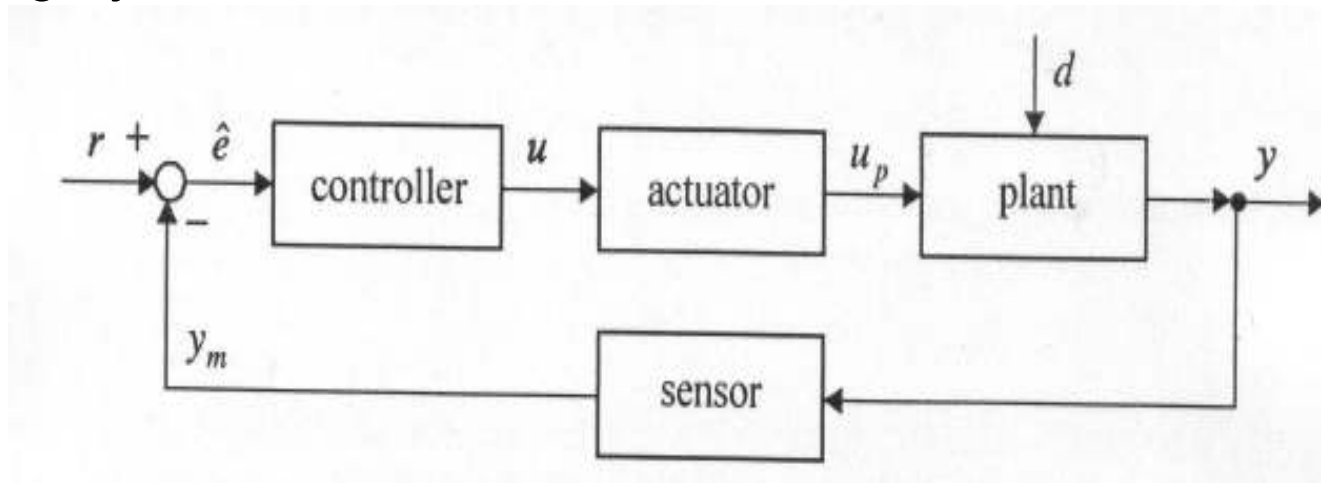
Pontosan ismerni kell a vezérelt folyamatot.

Stabil működés. Előre ismert zavaró jel kiküszöbölhető.

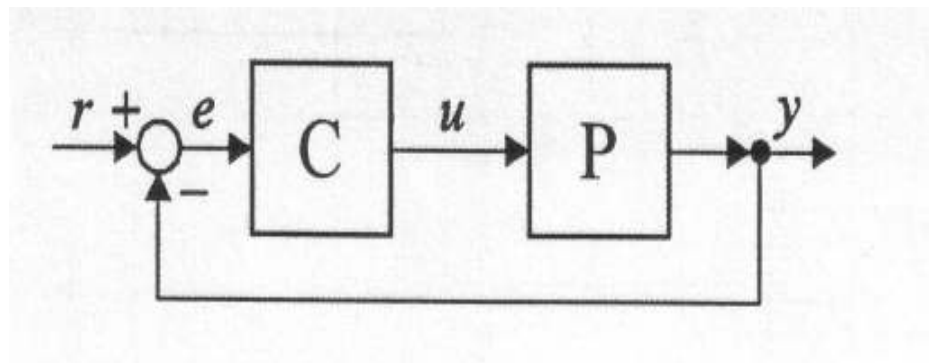
A **szabályozás** hatásvázlata zárt: van visszajelzés a beavatkozás eredményéről. Hiba esetén:(zavarás, alapjel változás) beavatkozás a hiba csökkentésére. Lehetőség van előre nem ismert zavaró körülmény hatásának kiküszöbölésére.

A v.cs. hatására labilissá válhat.

Angol jelölésekkel:



Egyszerűsített hatásvázlat:

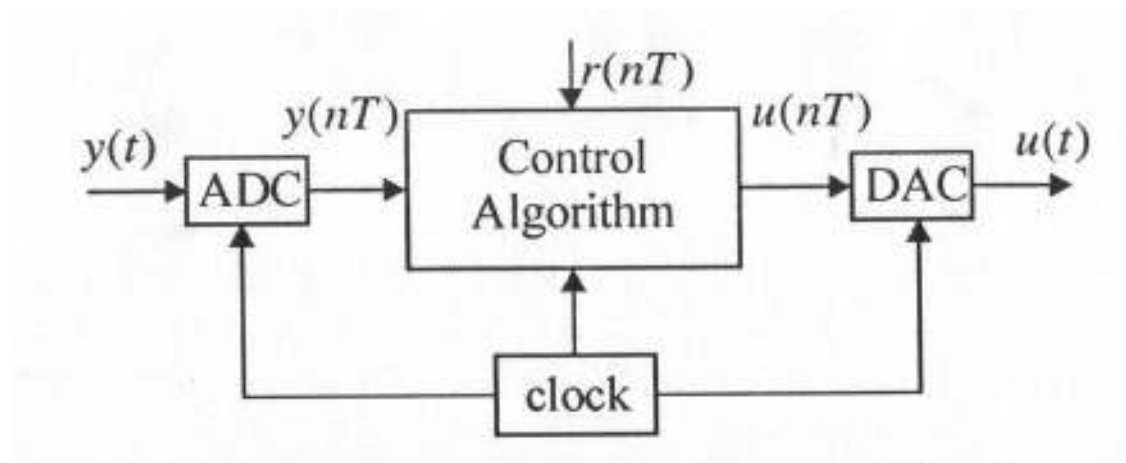


C: controller

P: plant

{ Beavatkozó, szakasz, érzékelő }

## Mintavételes szabályzó: (Az esetek túlnyomó többségében)



DAC: tartó áramkörrel (mintavétel között is van beavatkozó jel)

## Terminológia:

magyar		angol	
Irányítás		control	
Szabályozás		feedback control, closed loop control	
Vezérlés		open loop control	
Szabályozott szakasz (folyamat)		plant, process	
Beavatkozó szerv		actuator	
Érzékelő		sensor	
Szabályozó		controller	
szabályozott jellemző	$x_s$	plant output, controlled variable	$y$
módosított jellemző	$x_m$	plant input, manipulated variable	$u_p$
zavaró jel	$x_z$	disturbance, noise	$d$
ellenőrző jel	$x_e$	measured output, sensor output	$y_m$
alapérték	$x_{s,a}$	desired plant output	$y_d$
alapjel	$x_a$	set-point, reference signal	$r$
rendelkező jel	$x_r$	indicated error	$e$
beavatkozó jel	$x_b$	control signal, actuator input	$u$
szabályozási algoritmus		control algorithm, control law	

# „Komplex” matematikai alapok

$$a + jb = M(\cos \theta + j \sin \theta)$$

$$M_1 e^{j\theta_1} M_2 e^{j\theta_2} = M_1 M_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$$

$$e^{jx} = \cos x + j \sin x$$

$$e^{jx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(jx)^n}{n!} = \left[ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \right] + j \left[ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right]$$

$$\cos(x) = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} \quad \sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$$

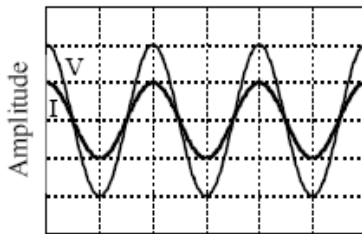
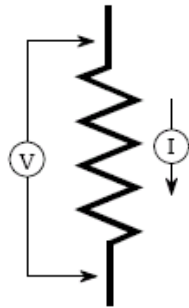
$$\cos(\omega t) = \frac{1}{2} e^{j(-\omega)t} + \frac{1}{2} e^{j\omega t}$$

$$\sin(\omega t) = \frac{1}{2} j e^{j(-\omega)t} - \frac{1}{2} j e^{j\omega t}$$

# Impedanciás leírás

$$U = I R$$

Resistor

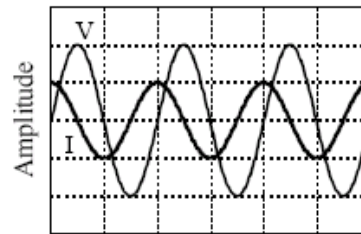
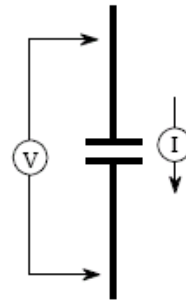


Time

$R$

$$U = 1/C \int i dt$$

Capacitor

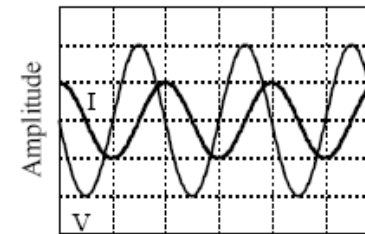
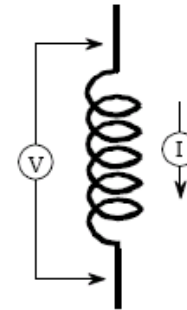


Time

$-j/\omega C$

$$U = L di/dt$$

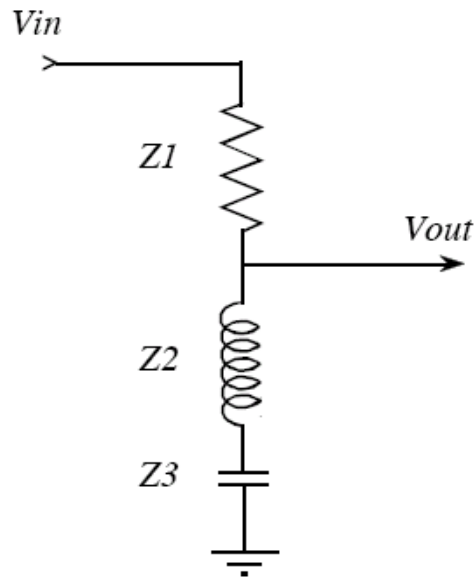
Inductor



Time

$j\omega L$

# Egy lyukszűrő



$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{j\omega L - \frac{j}{\omega C}}{R + j\omega L - \frac{j}{\omega C}}$$

# Frekvencia válasz

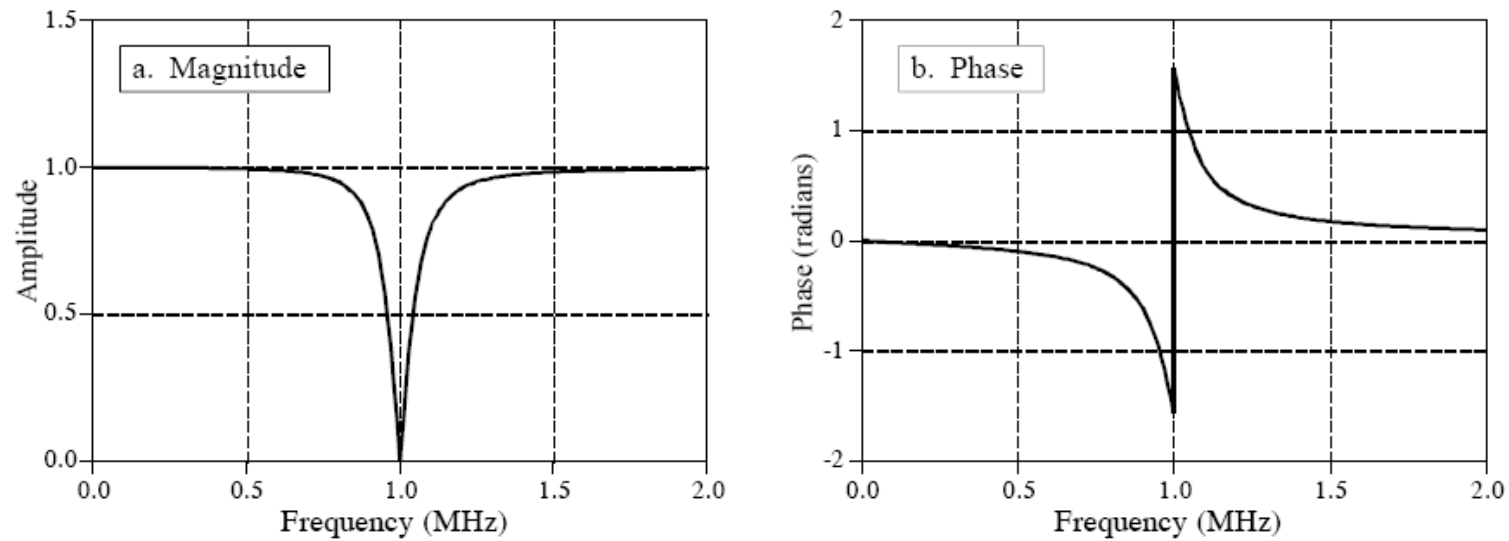


FIGURE 30-7  
Notch filter frequency response. These curves are for the component values:  $R = 50\Omega$ ,  $C = 470\mu\text{F}$ , and  $L = 54\mu\text{H}$ .

# Rendszerleírási módszerek:

1. Az átviteli tag leírása állandósult állapotban (statikus karakterisztika)

$X_{be}$  állandó



Átviteli tényező:

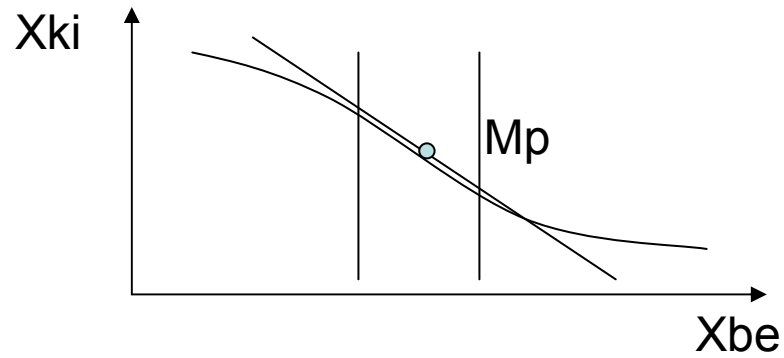
$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{X}_{ki}}{\mathbf{X}_{be}} \Bigg|_{t = \infty}$$

Megadás: statikus jelleggörbe alapján, a mp.-nál, ill. szakaszonként

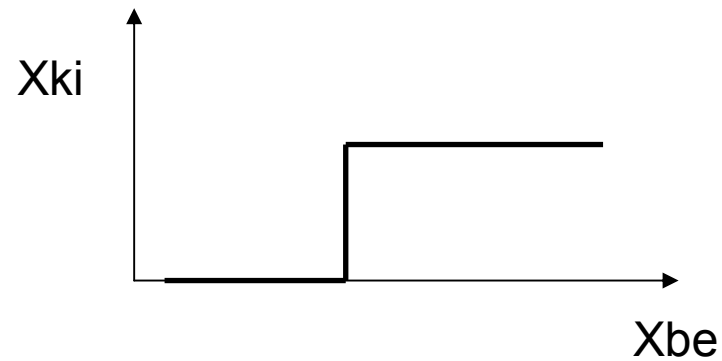
1.1 Lineáris jelátvivő tag:

$$X_{ki} = K * X_{be}$$

1.2 Nem lineáris tag



1.3 Törtvonalas karakterisztikájú tag



Minden tartományra meg kell adni.

## 2. Az átviteli tag tranziens állapota

Ideális esetben a kimenő jel azonnal beáll az átviteli tényezővel meghatározott értékre.

Reálisan, a tagok tehetetlenek, energiatároló képességük van, ezért átmeneti folyamatok keletkeznek.

Egy rendszer dinamikus viselkedésének leírására algebrai és **differentiál egyenleteket** használnak.

Lineáris rendszerben érvényes a szuperpozíció elve:

ha  $X_{b1}(t) \rightarrow X_{k1}(t)$  és  $X_{b2}(t) \rightarrow X_{k2}(t)$  akkor  
$$X_{b1}(t) + X_{b2}(t) \rightarrow X_{k1}(t) + X_{k2}(t) ,$$

Lineáris rendszer esetén az őt leíró diff. egyenlet állandó együtthatójú.

**Invariáns** egy rendszer ha  $X_b(t) \rightarrow X_k(t)$ , akkor  $X_b(t-t_0) \rightarrow X_k(t-t_0)$ ,

(az áramköri elemek invariánsak)

## Lineáris invariáns rendszerek általános differenciál egyenlete:

( időállandós alak, ez szab. technikában célszerűbb használni, mert az időállandókból következtetni lehet a rendszer viselkedésére – az egyenlet megoldása nélkül )

$$T_n^n y^{(n)}(t) + T_{n-1}^{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + T_1 \dot{y}(t) + y(t) = A \left[ \tau_m^m u^{(m)}(t) + \tau_{m-1}^{m-1} u^{(m-1)}(t) + \dots + \tau_1 \dot{u}(t) + u(t) \right]$$

**A** : a rendszer átviteli tényezője ( $t \rightarrow \infty$ )

**T, τ** : a rendszer időállandói

$u^{(m)}$  a bemenő jel m-ik deriváltja,

$y^{(n)}$  a kimenő jel n-ik deriváltja

## I. Vizsgálat a differenciál egyenlet módszerrel:

Az eredmény közvetlenül az időtartományban keletkezik.  
Fizikailag megvalósítható rendszereknél:  $m \leq n$

**Megoldás =**

**Homogén egyenlet ált. megoldása +**

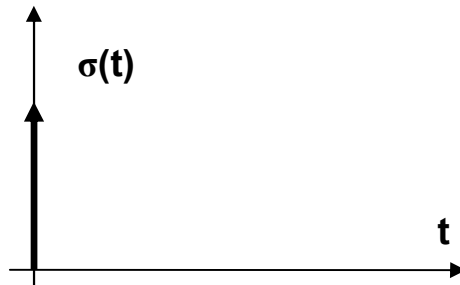
**inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása**

1. Példa: R – L kör vizsgálata

homogén egyenlet	-----	transziens viselkedés
In.hom egy. part. megold.	-----	stacioner viselkedés

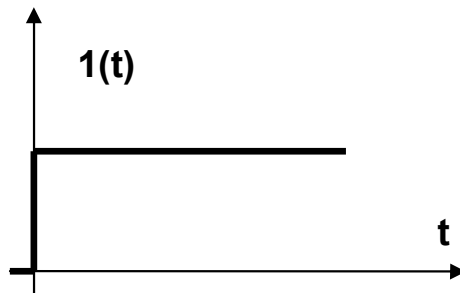
**Általánosan:** Szemléletes megoldás, de bonyolult, két energiatárolónál nehéz, ennél többnél gyakorlatilag lehetetlen a megoldás.  
(numerikus módszerek, áramkörszimuláció)

## Tipikus vizsgálójelek:



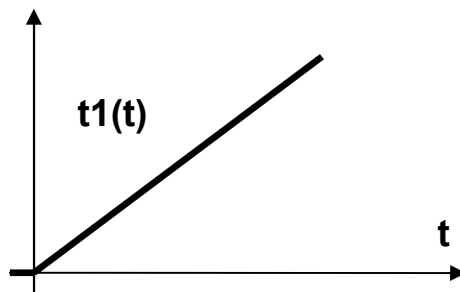
Egységimpulzus-függvény  
Dirac-delta  $\delta(t)$   $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$

Jelátvivő tag válasz: **Súlyfüggvény**  $y(t)$

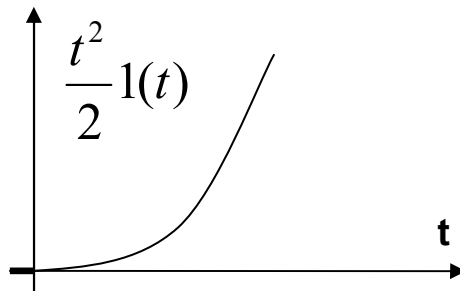


Egységugrás-függvény  $1(t)$

Jelátvivő tag válasz: **Átmeneti függvény**  $v(t)$



Egységsebesség ugrás-függvény  $t 1(t)$



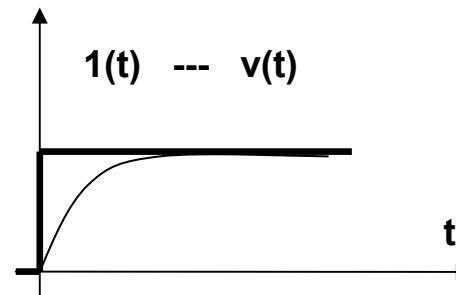
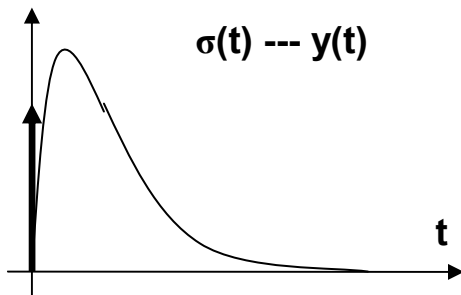
Egységgyorsulás-függvény  $\frac{t^2}{2} 1(t)$

**A bemenő jelek közötti összefüggések:**

$$\delta(t) = \frac{d}{dt} 1(t) \quad 1(t) = \frac{d}{dt} t 1(t) \quad t 1(t) = \frac{d}{dt} \frac{t^2}{2} 1(t)$$

**A kimenő jelek hasonlóan pl.:**

$$y(t) = \frac{d}{dt} v(t)$$



## II. Vizsgálat operátoros módszerrel:

**A differenciál egyenlettel megfogalmazott jelenséget áttranszformáljuk operátoros tartományba.**

Előny: Algebrai egyenletekkel lehet dolgozni.  
(deriválás ---  $j\omega$  -al szorzás, integrálás ---  $j\omega$  -al osztás )

Hátrány: Az időtartománybeli szemléletes végeredményhez csak visszaalakítás után jutunk , nem minden fgv.-re értelmezhető

### II.A. Fourier transzformáció:

**Minden periódikus jel felírható Fourier-sor alakjában:**

$$f(t, T) = \sum_{k=0}^{\infty} (A_k \cos k\omega t + B_k \sin k\omega t)$$

$k=0, 1, 2, \dots$

T: a fgv. periódusideje

$\omega=2\pi/T$

**Az együtthatók:**

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t, T) dt,$$

$$A_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t, T) \cos k\omega t dt,$$

$$B_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t, T) \sin k\omega t dt,$$

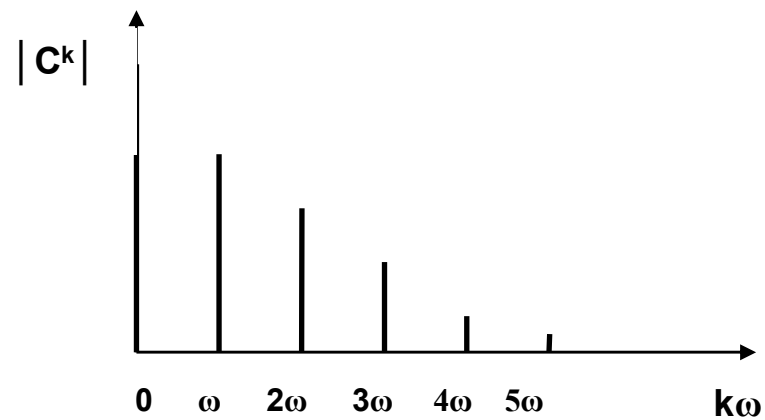
2. példa: négyszögjel Fourier sora

**Komplex alak:**

$$f(t, T) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega t}$$

$$C_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t, T) e^{-jk\omega t} dt$$

**A jel amplitúdóspektruma:**



**Aperiodikus lefolyású jeleknél:  $T \rightarrow \infty$**

**Fourier-sor  $\rightarrow$  Fourier integrál:** (  $f(t)$  Fourier-transzformáltja )

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$$

$|F(j\omega)|$  : amplitúdó sűrűség spektrum, folytonos fgv.

A rendszert leíró algebrai egyenlet megoldása után:

**Visszatranszformálás az időtartományba:**

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

## II.B. Laplace transzformáció:

A Fourier transzformáció nem értelmezhető sok fgv.-re.

Szeretnénk több fgv.-re használható eljárást találni.

$f(t)$ -hez abszolút integrálható fgv.-t rendelünk:

$$\text{pl. } \lim_{t \rightarrow \infty} t^n e^{\sigma t} \longrightarrow 0 \quad \text{ha } \sigma < 0$$

Keressük:  $f(t)e^{-\sigma t}$  pozitív időkre abszolút integrálható fgv.  
biztosan létező FOURIER-integrálját.

A negatív időket kizárjuk a vizsgálatból ( $t < 0$ -nál a fgv. nem konvergál),  
Bekapcsolási fgv.-el dolgozunk.

$$\varphi(t) = f(t)e^{-\sigma t} \quad \sigma > 0, \quad \varphi(t) \equiv 0, \quad \text{ha } t < 0 \quad \text{és} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)| dt \leq K$$

$\varphi(t)$  Csillapított bekapcsolási fgv. Fourier transzformáltja:

$$\Phi(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} f(t) e^{-(\sigma + j\omega t)} dt$$

Ez az  $\mathbf{s = \sigma + j\omega}$  komplex változó függvényének is tekinthető:

$$F(s) = \Phi(j\omega) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

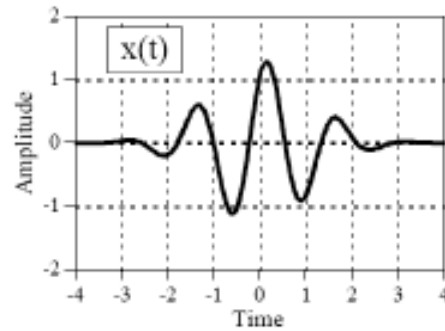
Formailag a Fourier és Laplace nagyon hasonló:

csak az integrálás határaiban van eltérés

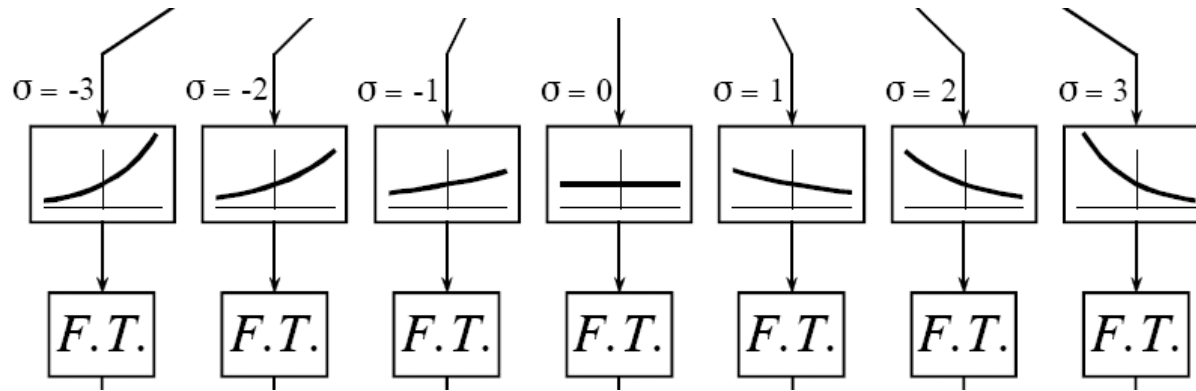
Laplace transzformáció:  $s$  ---- komplex:  $\mathbf{s = \sigma + j\omega}$

Fourier transzformáció:  $s$  ---- képzetes:  $\mathbf{s = j\omega}$

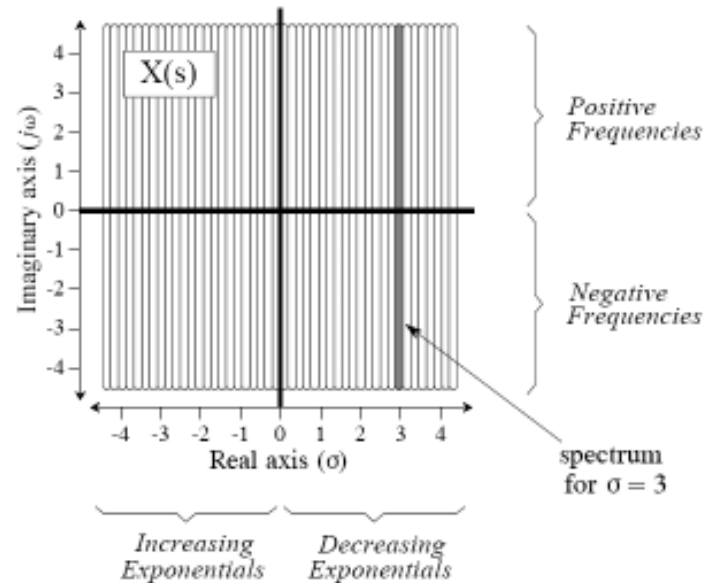
$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$



$$X(\sigma, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t) e^{-\sigma t}] e^{-j\omega t} dt$$

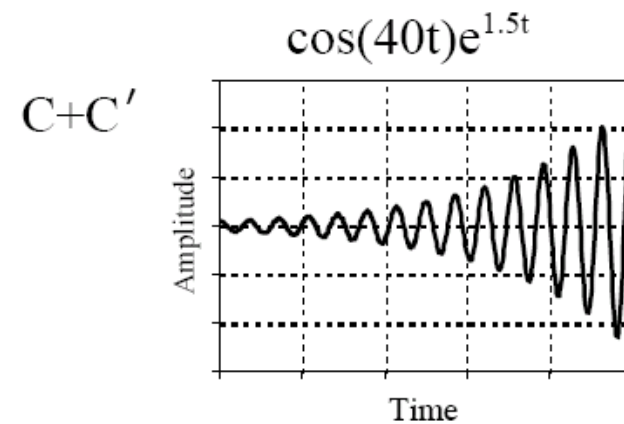
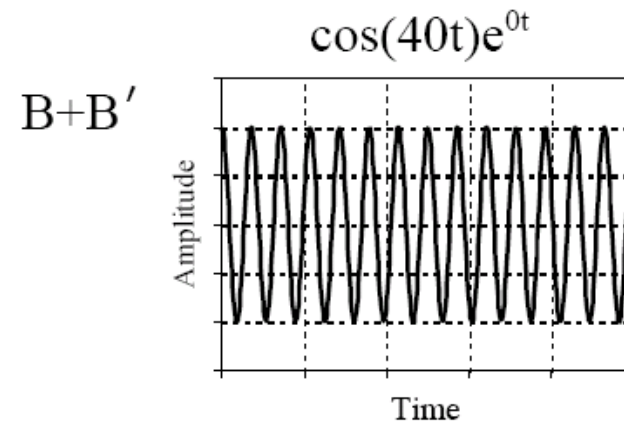
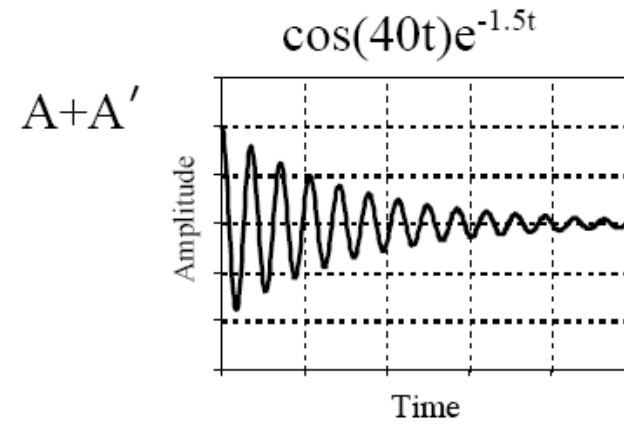
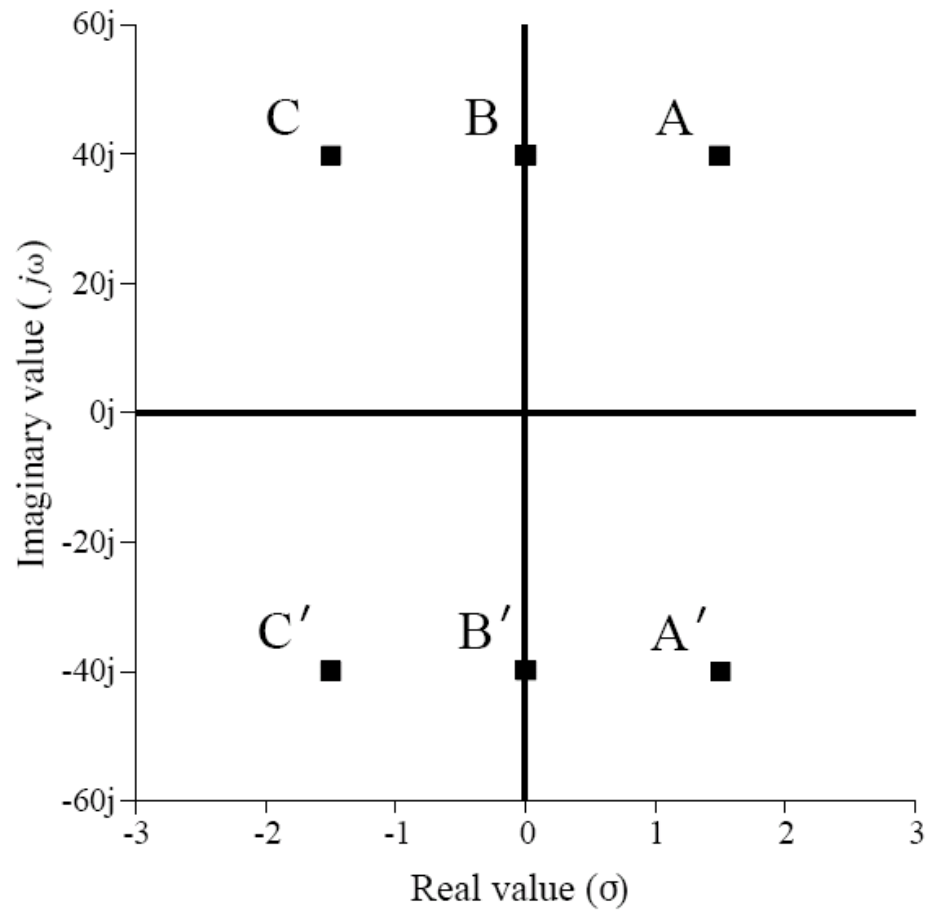


# Fourier – Laplace



# Fourier → Laplace

s-Domain



# SL

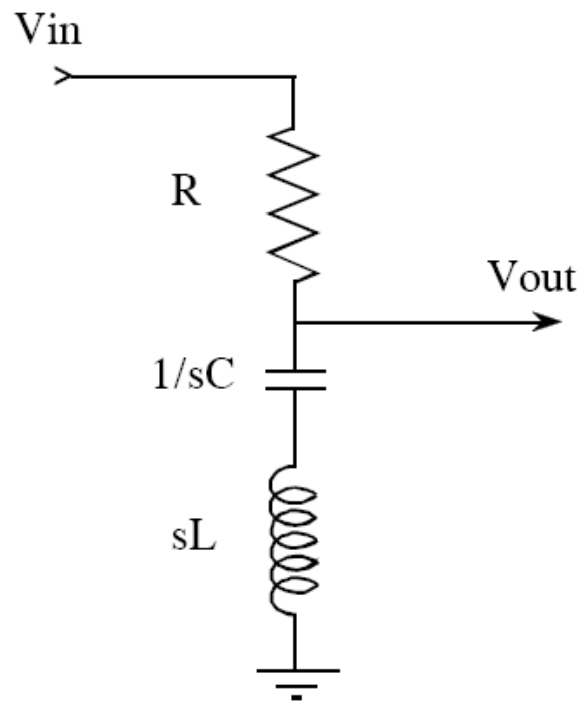
$$v(t) = L \frac{d}{dt} i(t) = L \frac{d}{dt} \cos(\omega_0 t) = \omega_0 L \sin(\omega_0 t)$$

$$I(s) = \int_0^{\infty} \cos(\omega_0 t) e^{-st} dt = \frac{\omega_0}{\omega_0^2 + s^2}$$

$$V(s) = \int_0^{\infty} \omega_0 L \sin(\omega_0 t) e^{-st} dt = \frac{\omega_0 L s}{\omega_0^2 + s^2}$$

$$\frac{V(s)}{I(s)} = \frac{\frac{\omega_0 L s}{\omega_0^2 + s^2}}{\frac{\omega_0}{\omega_0^2 + s^2}} = sL$$

# RLC lyukszűrő



$$H(s) = \frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)} = \frac{sL + 1/sC}{R + sL + 1/sC}$$

$$\frac{sL + 1/sC}{R + sL + 1/sC} \left[ \frac{s}{s} \right] = \frac{Ls^2 + 1/C}{Ls^2 + Rs + 1/C}$$

# Zérók és pólusok

$$H(s) = \frac{as^2 + bs + c}{as^2 + bs + c}$$

$$H(s) = \frac{(s - z_1)(s - z_2)}{(s - p_1)(s - p_2)}$$

where:

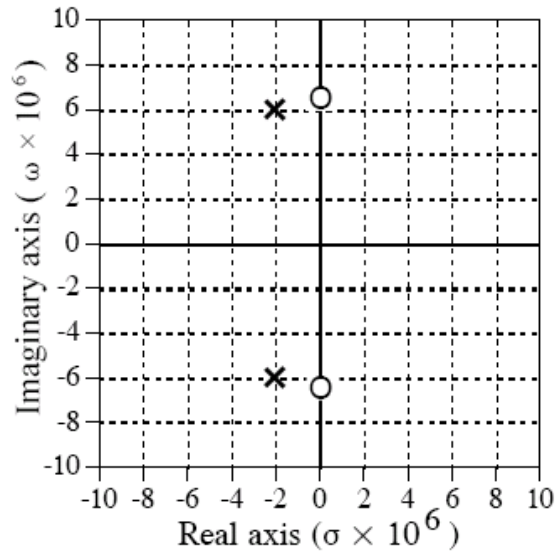
$$z_1 = j/\sqrt{LC}$$

$$z_2 = -j/\sqrt{LC}$$

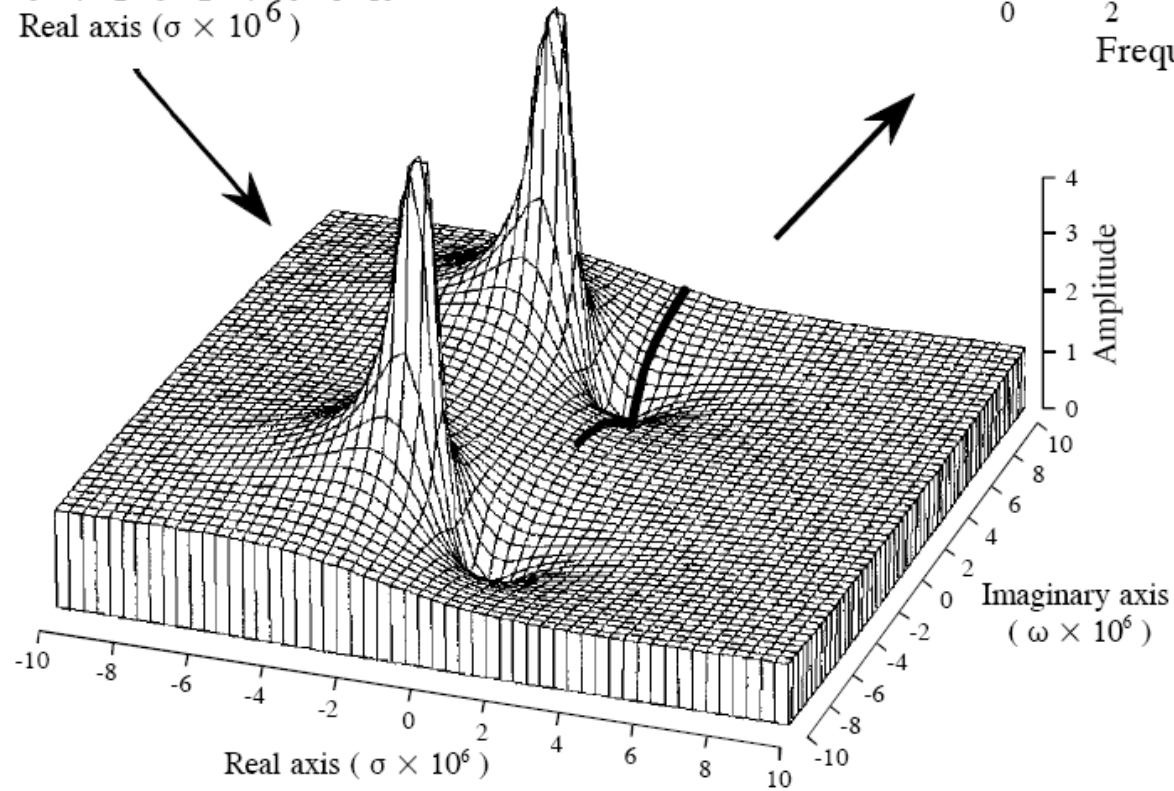
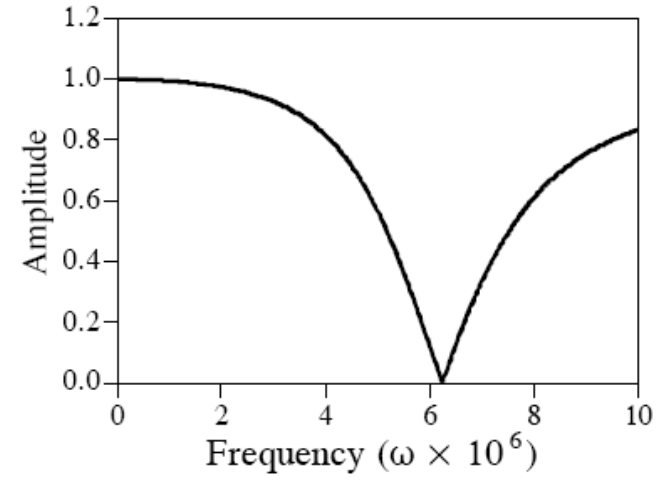
$$p_1 = \frac{-R + \sqrt{R^2 - 4L/C}}{2L}$$

$$p_2 = \frac{-R - \sqrt{R^2 - 4L/C}}{2L}$$

pole-zero plot

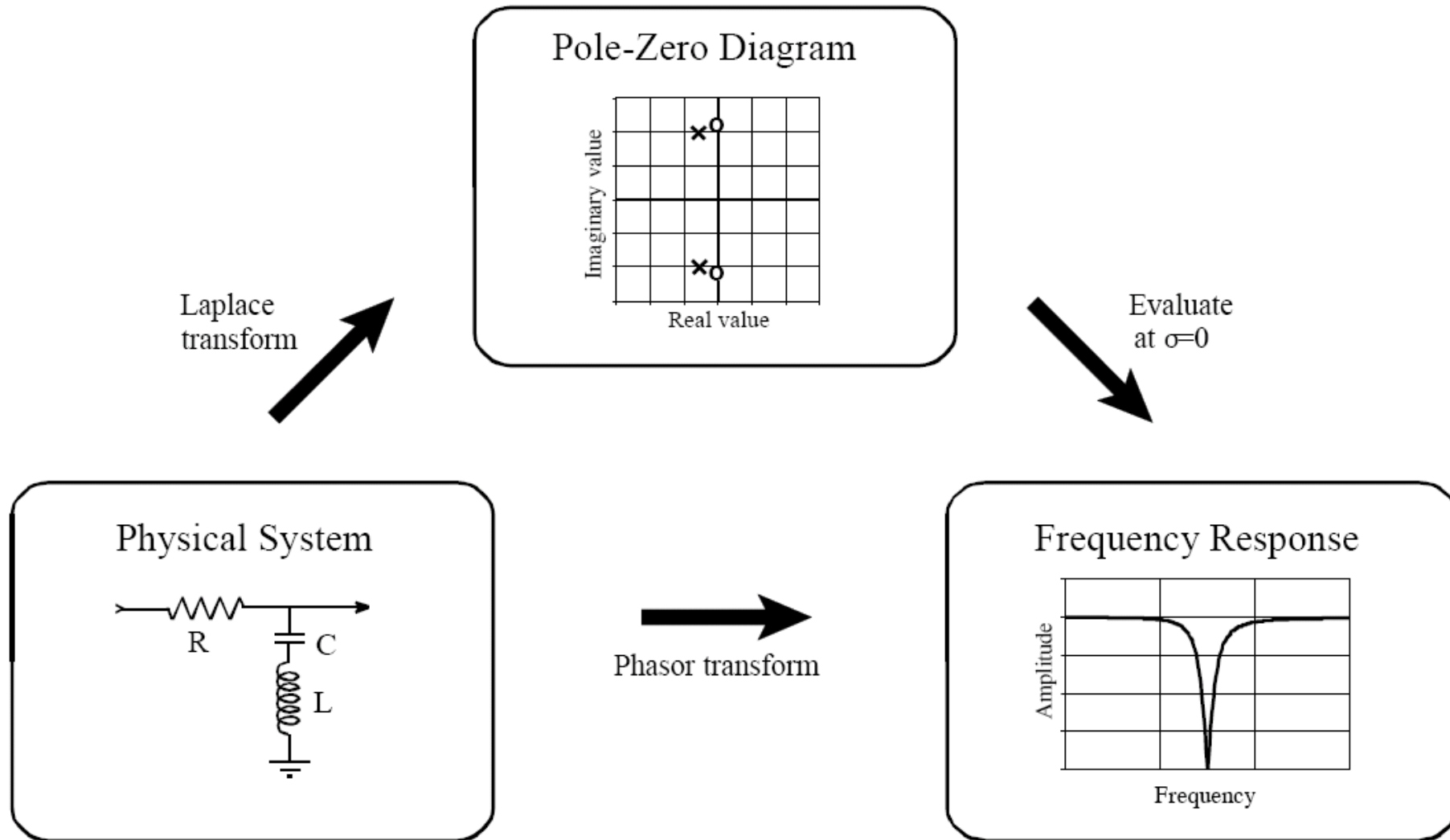


frequency response



s-domain

# s - transform



A keresett mennyiség időfüggvényét **inverz Laplace-transzformációval** kaphatjuk vissza:

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\omega}^{c+j\omega} F(s) ds$$

Gyakorlati esetekre:

$$F(s) = \frac{F_z(s)}{F_p(s)}$$

Racionális törtfüggvény  
z zérusok, p pólusok

Ekkor:

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{F_z(s_k)}{F_p'(s_k)} e^{s_k t}$$

## A Laplace- transzformációra vonatkozó összefüggések

Összefüggés	Időfüggvény	LAPLACE-transzformált
A LAPLACE-transzformáció értelmezése	$f(t)$	$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$
Inverz LAPLACE-transzformáció	$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{ts} ds$	$F(s)$
Linearitás, szuperpozíció	$Cf(t)$ $C_1f_1(t) + C_2f_2(t)$	$CF(s)$ $C_1F_1(s) + C_2F_2(s)$
A differenciálhányados LAPLACE-transzformáltja $\left[ \frac{df(t)}{dt} = f'(t) \right]$	$f'(t)$ $f''(t)$ $f^{(n)}(t)$	$sF(s) - f(0)$ $s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$ $s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$
Az integrál LAPLACE-transzformáltja	$\int_0^t f(\tau) d\tau$	$\frac{1}{s} F(s)$
Eltolási tétel	$1(t - \tau)f(t - \tau)$	$e^{-s\tau}F(s)$
Csillapítástétel	$f(t)e^{-\gamma t}$	$F(s + \gamma)$
Konvolúciótétel	$f_1(t) * f_2(t)$	$F_1(s)F_2(s)$
Periodikus függvény LAPLACE-transzformáltja	$f_p(t) =$ $= \sum_{n=0}^{\infty} f_T(t - nT)$ $f_T(t) = f_p(t), \text{ ha } 0 \leq t < T$ $f_T(t) = 0, \text{ ha } t \geq T; t < 0$	$\frac{F_T(s)}{1 - e^{-sT}}$
Kezdetiérték-tétel, végértéktétel (Határértéktételek)		$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$ $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$

## Néhány függvény Laplace- transzformáltja

*Néhány függvény LAPLACE-transzformáltja*

Időfüggvény $f(t) \quad t > 0$	LAPLACE-transzformált $F(s)$
$\delta(t)$	1
$\delta(t - \tau)$	$e^{-s\tau}$
$1(t)$	$\frac{1}{s}$
$1(t - \tau)$	$\frac{1}{s} e^{-s\tau}$
$t$	$\frac{1}{s^2}$
$\frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{s^{n+1}}$
$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{s + \alpha}$
$1 - e^{-\alpha t}$	$\frac{\alpha}{s(s + \alpha)}$
$te^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(s + \alpha)^2}$
$\sin \alpha t$	$\frac{\alpha}{s^2 + \alpha^2}$
$\cos \alpha t$	$\frac{s}{s^2 + \alpha^2}$

## Az operátoros impedanciák:

**t tartományban:**

$$u_R = R i(t)$$

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau$$

$$u_L(t) = L \frac{di}{dt}$$

**s tartományban:**

$$U_R(s) = R I(s)$$

$$U_C(s) = \frac{1}{sC} I(s)$$

$$U_L(s) = L s I(s)$$

$R$ ,  $sL$ ,  $\frac{1}{sC}$  operátoros impedanciák

3. példa: soros R-L kör

## Az átviteli függvény:

A kimenőjel és a bemenőjel Laplace transzformáltjának hányadosa.

$$X_k(s) = Y(s) * X_b(s) \quad Y(s) : \text{átviteli fgv.}$$

$Y(s)$ : Meghatározható a rendszert leíró differenciál egyenletből

$$Y(s) = \frac{X_k(s)}{X_b(s)} = A \frac{1 + s\tau_1 + \dots + s^m\tau_m^m}{1 + sT_1 + \dots + s^nT_n^n}$$

A: átviteli tényező ( $t \rightarrow \infty$ )

Az átviteli fgv. a legtöbb esetben racionális tört fgv. alakban felírható:

$$Y(s) = \frac{Y_z(s)}{Y_p(s)}$$

Az átviteli függvény kifejezhető gyöktényezős alakban:

$$Y(s) = \frac{Y_z(s)}{Y_p(s)} = \frac{k_1 (s - s'_1)(s - s'_2) \dots (s - s'_3)}{k_2 (s - s''_1)(s - s''_2) \dots (s - s''_3)}$$

$s = s'_i$  helyen zérushelyek

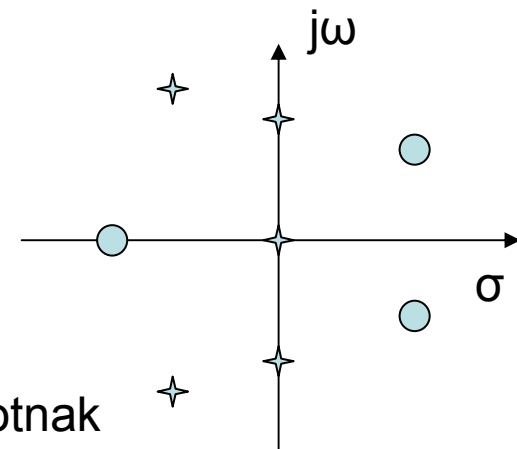
$s = s''_i$  helyen pólushelyek

Az átviteli függvényt a pólusai, zérusai és k-k egyértelműen meghatározzák

Jelölés az S síkon:            körök    ---    zérusok  
    x-ek    ---    pólusok

Mivel a két polinom együtthatói valósak:

a gyökök valósak, vagy konjugált komplex párokat alkotnak



## **Ismétlés OPERÁTOROS számítási mód:**

A rendszer viselkedését leíró diff. egyenlet alapján áttérünk operátoros tartományba, a bemenő jel operátoros ismeretében az átviteli fgv.-el szorozzuk, majd visszatérünk az idő tartományba (ha szükséges )

### **Előny:**

- differenciál egyenlet helyett algebrai egyenlet
- kezdeti feltételeket egyszerűbb figyelembe venni
- szinte tetszőleges vizsgáló jelet lehet használni
- a kimenő jel a bemenő jel és a jelátvivő tag szorzatától függ,  
a létrejött hatást tényezőnként lehet vizsgálni

### III. Rendszervizsgálat a frekvenciatartományban

A rendszert csak **szinuszos** vizsgálójelekkel gerjesztjük.  
A stacioner állapot beállása után a kimeneti jel – szinuszos-  
csak amplitúdóban és fázisban különbözik a bemenettől.

**A frekvenciafüggvény:**



$$X_b(j\omega) = X_b(\omega) e^{j\omega t}$$

$$X_k(j\omega) = X_k(\omega) e^{j\omega t + \varphi}$$

$$Y(j\omega) = \frac{X_k(j\omega)}{X_b(j\omega)} = \frac{X_k(\omega) e^{j(\omega t + \varphi)}}{X_b(\omega) e^{j\omega t}} = \frac{X_k(\omega)}{X_b(\omega)} e^{j\varphi}$$

A rendszert leíró differenciálegyenletből kapott átviteli fgv:

$$Y(s) = \frac{X_k(s)}{X_b(s)} = A \frac{1 + s\tau_1 + \dots + s^m \tau_m^m}{1 + sT_1 + \dots + s^n T_n^n}$$

Az átviteli fgv.-be szinuszos gerjesztést feltételezve kapjuk a frekvencia fgv.-t:

$$Y(s) = \frac{X_k(j\omega)}{X_b(j\omega)} = A \frac{1 + j\omega\tau_1 + \dots + j\omega^m \tau_m^m}{1 + j\omega T_1 + \dots + j\omega^n T_n^n}$$

( Formálisan  $s=j\omega$  behelyettesítéssel )

A számláló és a nevező gyöktényezős alakra hozható:

### III.A. Vizsgálat a logaritmusos frekvenciafüggvény módszerrel

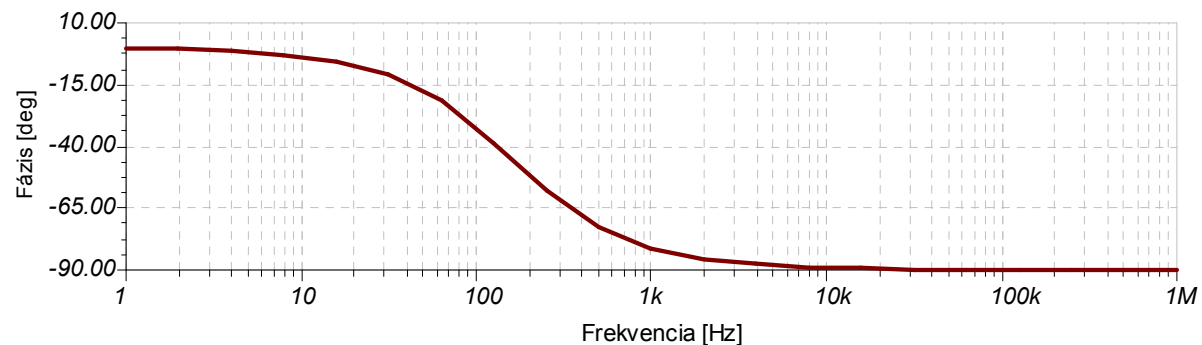
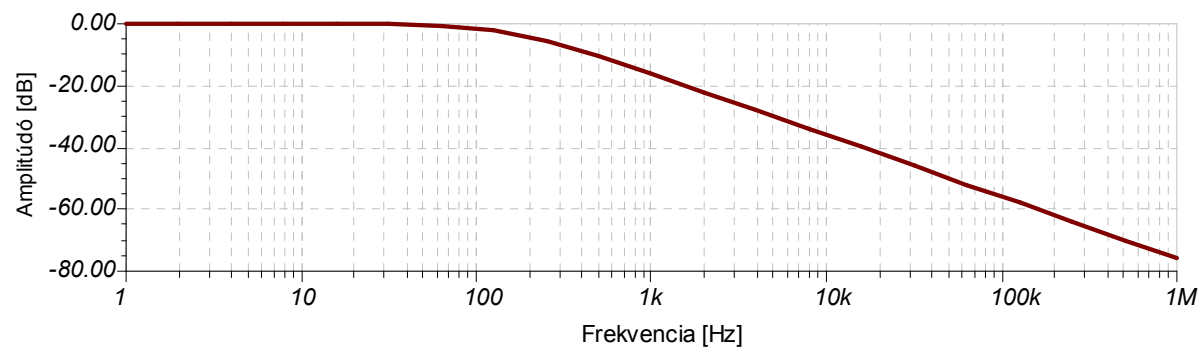
$$Y(j\omega) = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$$

Amplitúdó karakterisztika:

$$a(\omega) = 20 \log|Y(j\omega)|$$

Fázis karakterisztika

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{\text{Im} Y(j\omega)}{\text{Re} Y(j\omega)}$$

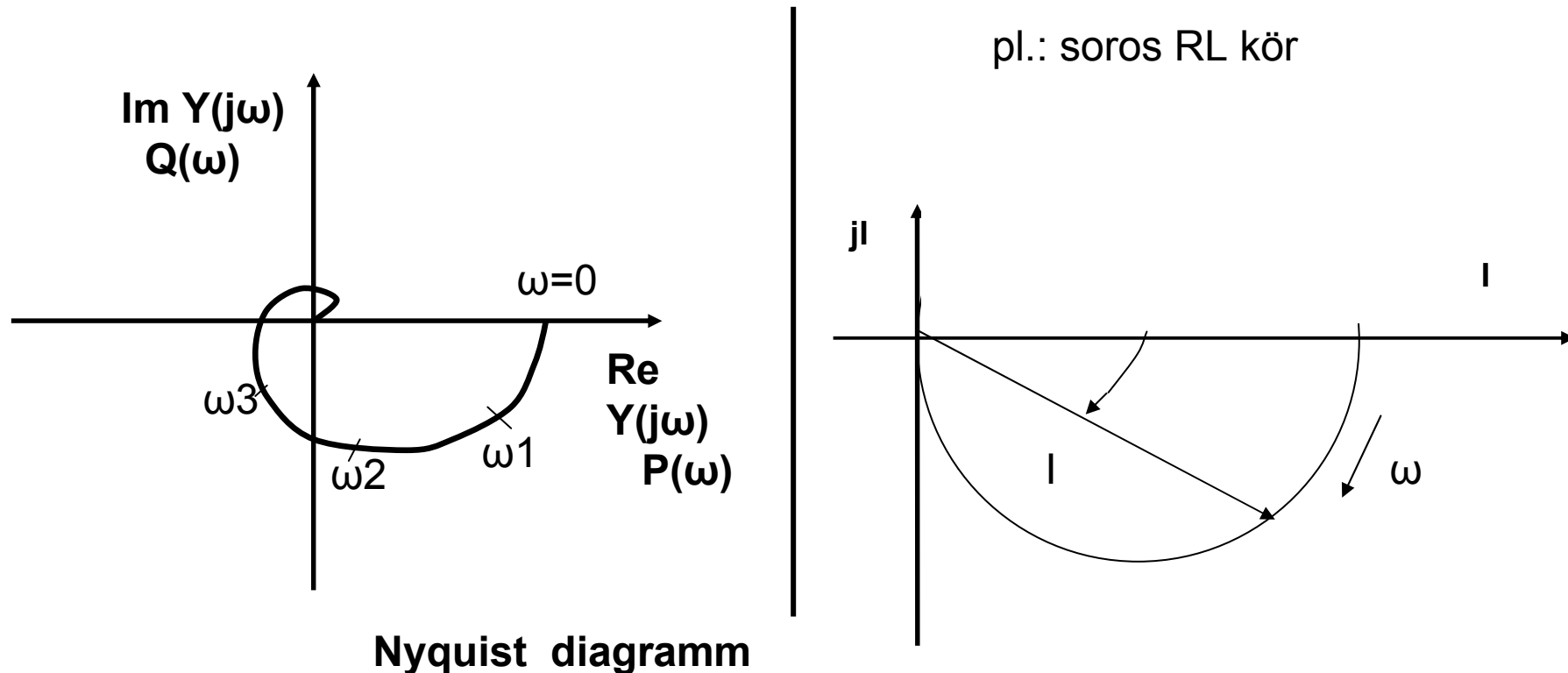


### III.B. Vizsgálat az amplitúdó-fázis módszerrel

(Gyök helygörbe, Nyquist diagram)

$$Y(j\omega) = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)} = P(\omega) + jQ(\omega)$$

Ha a komplex mennyiség megváltozik, az őt leíró fázor végpontja ennek megfelelő folytonos vonalat ír le.



## IV. Differenciálegyenletek állapotváltozós alakja

A rendszer jellemzésére alkalmas **állapotváltozókat** kell választani.  
Ezek kapcsolata egy differenciál egyenlet rendszer, az állapotegyenletek.  
(StateEquation –SE-)

Az állapotegyenletek megoldása – a rendszer válaszána időfüggvénye egy adott gerjesztésre – numerikusan meghatározható.

Alkalmas nem lineáris, valamint több bemenetű, több kimenetű rendszerek vizsgálatára is.

Állapotegyenletek:

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = f_i[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), x_b(t),] \quad i = 1, 2, \dots, n$$

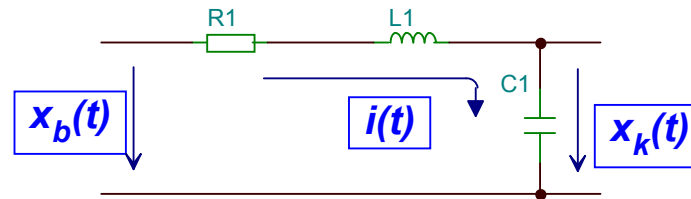
Kimeneti egyenlet:

$$x_k(t) = g[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), x_b(t)]$$

Tömör vektor függvény alakban:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), x_b(t),]$$

példa: RLC osztó



Az állapotváltozók:

$$x_1(t) = i(t)$$

$$x_2(t) = \int i(t) dt$$

A rendszert leíró differenciálegyenlet:

$$Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) dt = x_b(t)$$

Az állapotváltozós alak:

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = -\frac{R}{L} x_1(t) - \frac{1}{LC} x_2(t) + \frac{1}{L} x_b(t)$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = x_1(t) \quad x_2(t) \quad \text{def. alapján}$$

A fenti két diff. egyenletből álló diff. egy. rendszer megoldását kell a kezdeti feltételeknek megfelelően ( $t=0$ ) megkeresni.

$$x_1(t) \quad \text{ismeretében} \quad (i(t))$$

$$x_k(t) \quad \text{meghatározható:} \quad x_k(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt$$

$$x_2(t) \quad \text{def. alapján} \quad x_k(t) = \frac{1}{C} x_2(t)$$

Az állapotegyenletek leírása mátrixegyenlettel:

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1(t)}{dt} \\ \frac{dx_2(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{LC} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} x_b(t)$$

Kimeneti egyenlet:

$$x_k(t) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + 0x_b(t)$$

Az előbbi két egyenlet:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{b} x_b(t),$$

alakban írható, ahol  $\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}^T, d$

együtthatókat, tartalmukat,  
az állapot változók számát  
a konkrét rendszer tulajdonsága  
határozza meg

## Lineáris rendszerek leírása - Összefoglaló

Időtartomány  
(Állapottér leírás)

diff. egyenlet

nehéz számolni

szemléletes leírás  
egy fgv.

egyszerű mérés

tervezni nem alkalmas

Frekvenciatartomány

Fourier transzf.

elég nehéz

szemléletes  
két fgv.

$A(\omega)$  egyszerű  
 $\varphi(\omega)$  bonyolult

alkalmas

Komplex  
frekvenciatartomány

Laplace transzf.

egyszerű

nem szemléletes  
pólus-zérus

nem lehet mérni

kitűnő

## Jellegzetes alaptagok jellemzői:

A., Energatároló nélküli tagok

1. Arányos tag:

$$x_k = A_p x_b \quad Y_P(s) = A_p$$

Jelátvivő tag válasz: **Átmeneti függvény**  $v(t) = A_p 1(t)$

2. Integráló tag:

$$T_I \frac{dx_k}{dt} = x_b \quad Y_P(s) = \frac{1}{sT_I}$$

Jelátvivő tag válasz: **Átmeneti függvény**  $v(t) = \frac{1}{T_I} t$

3. Differenciáló tag:

$$x_k = T_D \frac{dx_b}{dt} \qquad Y_P(s) = sT_D$$

Jelátvivő tag válasz: **Átmeneti függvény**  $v(t) = T_D \delta(t)$

4. Arányos, Holtidős tag:

$$x_k(t) = A_H x_b(t - T_H) \qquad Y_H(s) = A_H e^{-sT_H}$$

Jelátvivő tag válasz: **Átmeneti függvény**  $v(t) = A_H 1(t - T_H)$

## B., Energiatárolós tagok

5. Egytárolós tag:

$$T_1 \frac{dx_k}{dt} + x_k = x_b$$

$$Y_P(s) = \frac{1}{1 + sT_1}$$

Jelátvivő tag válasz: **Átmeneti függvény**

$$v(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T_1}}$$

6. Két és több tárolós tag: . . .

7. Egytárolós integráló tag:

$$T_2^2 \frac{d^2 x_k}{dt^2} + T_1 \frac{dx_k}{dt} = x_b$$
$$Y_P(s) = \frac{1}{sT_1 + s^2T_2^2} = \frac{1}{sT_I} \frac{1}{1 + sT}$$
$$T_I = T_1 \quad T = \frac{T_2^2}{T_1}$$

Jelátvivő tag válasz: **Átmeneti függvény**

$$v(t) = \frac{1}{T_I} \left[ t - T \left( 1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) \right]$$

8. Egytárolós differenciáló tag:

$$T_1 \frac{dx_k}{dt} + x_k = T_D \frac{dx_b}{dt} \qquad Y_P(s) = \frac{sT_D}{1 + sT_1}$$

Jelátvivő tag válasz: **Átmeneti függvény**

$$v(t) = \frac{T_D}{T_1} e^{-\frac{t}{T_1}}$$

9. Holtidős arányos, egytárolós tag:

$$Y_{PHT1}(s) = A_H \frac{e^{-sT_H}}{1 + sT_1}$$

## Összetett tagok:

Az egyszerű tagok soros, párhuzamos eredőiként ill. visszacsatolással állíthatók elő.

A szab. körbe iktatva megváltoztatják az :

- átviteli fgv.-t
- frekvencia fgv.-t
- időbeli viselkedést

Megfelelő tag beépítésével a szabályzás minőségi jellemzői beállíthatók.

### 1. Arányos-differenciáló PD tag

Átviteli fgv.: 
$$Y_{PD}(s) = A_P(1 + sT_D)$$

Átmeneti fgv.: 
$$v(t) = A_P 1(t) + A_P T_D \delta(t)$$

Frekvencia fgv.: 
$$Y_{PD}(j\omega) = A_P(1 + j\omega T_D)$$

$$|Y_{PD}|[dB] = 20 \lg A_P + 20 \lg |1 + j\omega T_D| = 20 \lg \sqrt{1 + \omega^2 T_D^2}$$

## 2. Arányos-integráló PI tag (példa PI)

Átviteli fgv.: 
$$Y_{PI}(s) = A_P \left( 1 + \frac{1}{sT_I} \right)$$

Átmeneti fgv.: 
$$v(t) = A_P 1(t) + \frac{A_P}{T_I} t 1(t)$$

Frekvencia fgv.: 
$$Y_{PI}(j\omega) = A_P + \frac{A_I}{j\omega} \qquad A_I = \frac{A_P}{T_I}$$

## 2. Arányos-integráló-differenciáló PID tag (példa PID)

Átviteli fgv.: 
$$Y_{PI}(s) = A_P \left( 1 + \frac{1}{sT_I} + sT_D \right)$$

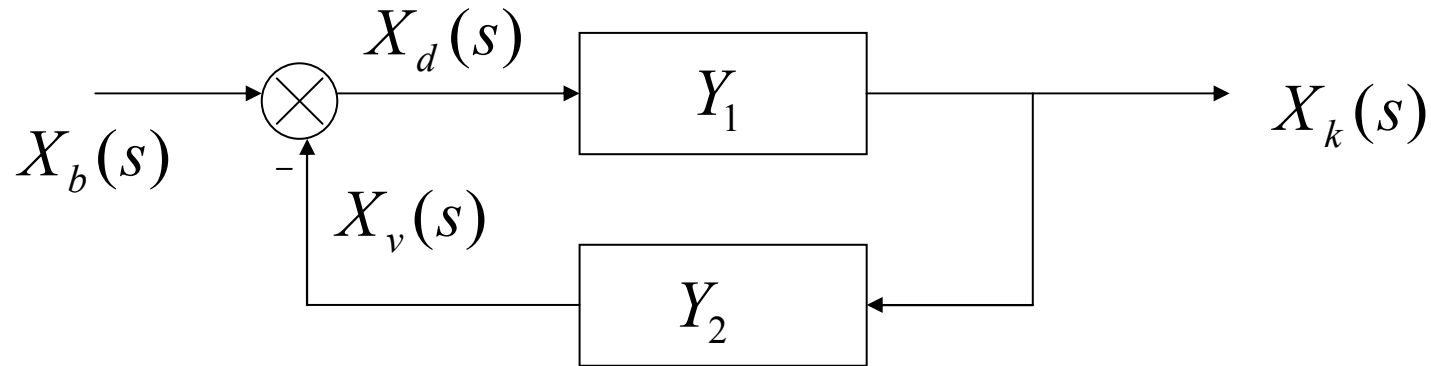
Átmeneti fgv.: 
$$v(t) = A_P 1(t) + A_I t 1(t) + A_D \delta(t)$$

$$A_I = \frac{A_P}{T_I}$$

$$A_D = A_P T_D$$

Frekvencia fgv.: 
$$Y_{PI}(j\omega) = A_P + \frac{A_I}{j\omega} + A_D j\omega$$

Visszacsatolással kapott összetett átviteli tag:

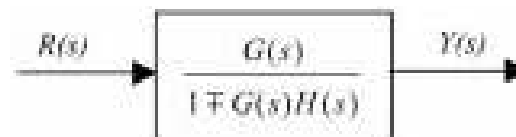
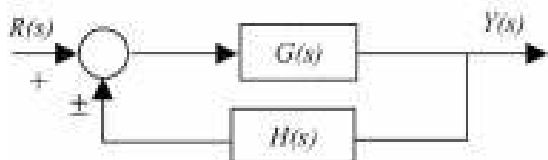
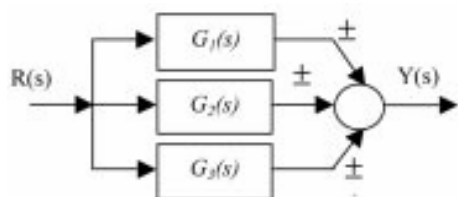


$$X_k(s) = Y_1 X_d(s), \quad X_d(s) = X_b(s) - X_v(s), \quad X_v(s) = Y_2 X_k(s),$$

$$Y_e(s) = \frac{Y_1}{1 + Y_1 Y_2} \quad (\text{ha } + \rightarrow - : \text{poz. v.cs.})$$

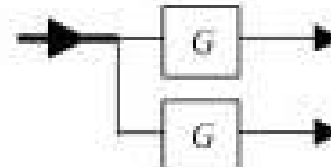
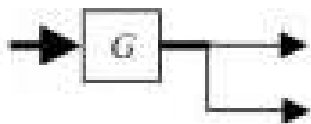
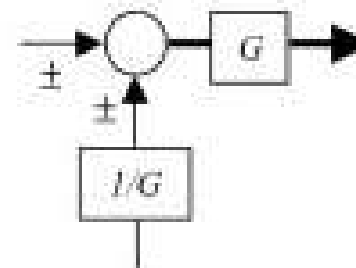
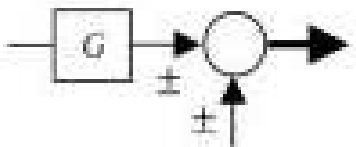
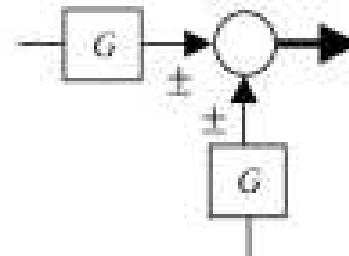
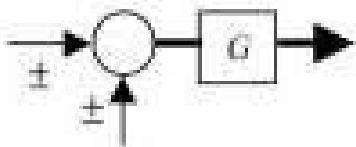
$$H(s) = Y_1(s) Y_2(s) \quad \text{Hurokátviteli fgv.}$$

## Hatásvázlat átalakítási szabályok



Egy szab. kör matematikai vizsgálata a hatásvázlat alapján történik. Sok esetben egyenértékűen átalakított hálózaton ez egyszerűbb.

# Hatásvázlat átalakítási szabályok: csomópontok eltolása

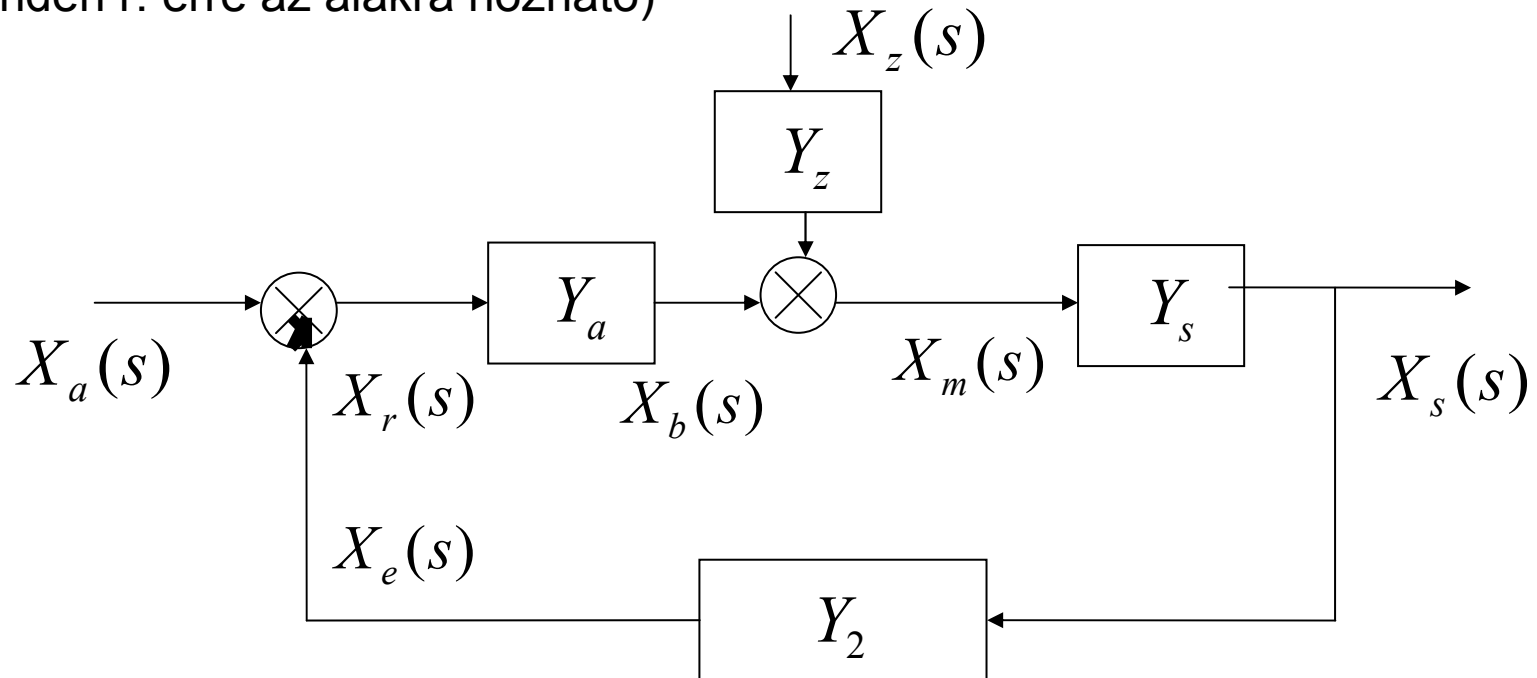


## Zárt szabályozási rendszerek jelátviteli tulajdonságai:

(a szabályzási kör statikus viselkedése)

Zárt szab. kör eredő átviteli függvényei:

(minden r. erre az alakra hozható)



$Y_c, Y_z, Y_c, Y_s$  : tagcsoportok eredői

A zárt rendszer átmeneti függvényeiből a rendszer ki és bemenő jeleinek kapcsolata állapítható meg.

Az előbbi hatásvázlatra:

$$X_s(s) = W(s) X_a(s) + W_z(s) X_z(s),$$

$$X_r(s) = W_r(s) X_a(s) + W_{rz}(s) X_z(s),$$

$W(s)$ : zárt rendszer átv.fgv.

$W_r(s)$ : hiba átv.fgv.

$W_z(s)$ : zav.jell.–re von. átv.fgv.

$W_{rz}(s)$ : zav. jellemzőel von. hiba átv.fgv.

$$W(s) = \left. \frac{X_s(s)}{X_a(s)} \right|_{X_z=0}$$

$$W_r(s) = \left. \frac{X_r(s)}{X_a(s)} \right|_{X_z=0}$$

$$W_z(s) = \left. \frac{X_s(s)}{X_z(s)} \right|_{X_a=0}$$

$$W_{rz}(s) = \left. \frac{X_r(s)}{X_z(s)} \right|_{X_a=0}$$

A zárt rendszerre von. átviteli fgv.-ek ismeretében meghatározható a szabályozott jellemző és a rendelkezőjel időbeli lefolyása különböző alapjelek és zavaró jelek esetén.

A szabályozások típuszáma:

A szabályzásokat rendszerint két csoportra oszthatjuk:

a.: értéktartó	szabályzások
b.: követő	szabályzások

A szabályzások értéktartó, követő tulajdonságaira a felnyitott kör átv. fgv.-ből következtethetünk.

A felnyitott kör átv. fgv-e a hurokátviteli fgv.

A hurokátviteli fgv. mindig felírható :

$$Y(s) = \frac{K}{s^i} Y_0(s), \quad \text{alakban.}$$

$K$  : a felnyitott kör hurokerősítési tényezője

$Y_0(s)$  :  $Y(s)$  sem integráló, sem differenciáló tagot sem tartalmazó része,  
csak a tranziens viselkedést befolyásolja.

$$Y_0(t \rightarrow \infty) = Y_0(s \rightarrow 0) = 1$$

$i$  :  $s$  kitevője, a szabályozás típuszámát adja meg.

$i = 0$ , 0 típusú arányos szabályozás

$i = 1$ , 1 típusú integráló szabályzás

$i = 2$ , 2 típusú integráló

$i > 2$ : nagyon istabil, a 2-es is ritka)

( $i < 0$ : differenciáló jelleg, igyekeznek elkerülni, a bem. jel  
vált sebessége határozza meg a kimenő jelet

Értéktartó szabályozások vizsgálata:

Cél: az állandó alapértékhez minél közelebb tartani a szabályozott jellemzőt.

$W(s)$ : zárt rendszer átv.fgv.

$W_z(s)$ : zav.jell. – re von. átv. fgv.

és  $X_a(s)$  ill.  $X_z(s)$  ismeretében

$X_s(t)$ , ill.  $\Delta X_s(t)$  meghatározható

A szabályozott jellemző állandósult értéke:

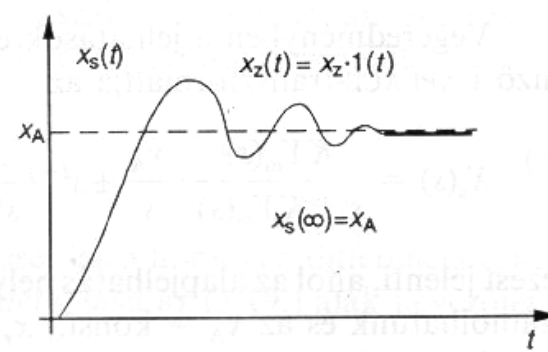
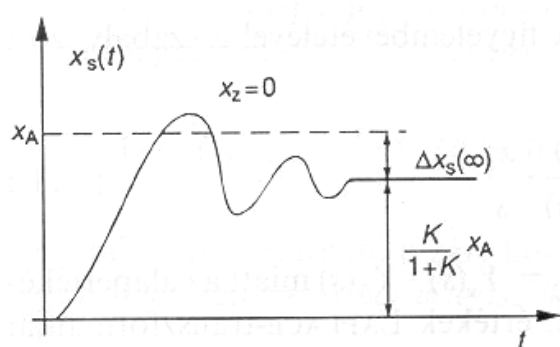
$$x_s(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} x_s(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX_s(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \frac{KY_m(s)}{s^i + KY_m(s)} x_A \pm s^{i-j} \frac{A_{z2}Y_{mz}(s)}{s^i + KY_m(s)} x_z \right]$$

A szabályozási eltérés:

$$\Delta x_s(\infty) = x_A - x_s(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s\Delta X_s(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \frac{s^i}{s^i + KY_m(s)} x_A \mp s^{i-j} \frac{A_{z2}Y_{mz}(s)}{s^i + KY_m(s)} x_z \right]$$

### A szabályozások értéktartó tulajdonságai

Kör típuszáma	Zavarás típuszáma	A szabályozott jellemző állandósult értéke	Állandósult szabályozási eltérés
$i$	$j$	$x_s(\infty) = x_{sa}(\infty) + x_{sz}(\infty)$	$\Delta x_s(\infty) = x_A - x_s(\infty)$
0	0	$\frac{K}{1+K} x_A \pm \frac{A_{z2}}{1+K} x_z$	$\frac{1}{1+K} x_A \mp \frac{A_{z2}}{1+K} x_z$
0	1	$\frac{K}{1+K} x_A \pm \infty$	$\frac{1}{1+K} x_A \mp \infty$
1	0	$x_A \pm 0$	$0 \mp 0$
1	1	$x_A \pm \frac{A_{z2}}{K} x_z$	$0 \mp \frac{A_{z2}}{K} x_z$
1	2	$x_A \pm \infty$	$0 \mp \infty$



Követő szabályozások vizsgálata:

Cél: a vezető jel ill. az alapjel változásának minél pontosabb követése, valamint zavarjel elnyomás.

A vezetőjel esetén is megadható típuszám (k):

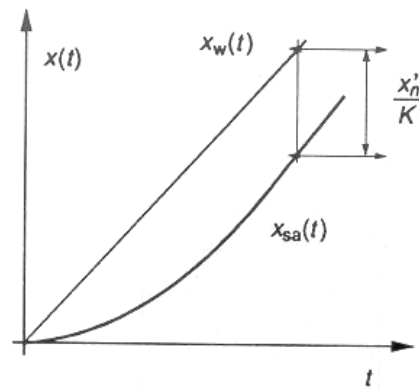
$$L^{-1}\left(\frac{x_w}{s^k}\right) = x_w 1(t) \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}$$

A követési eltérés:

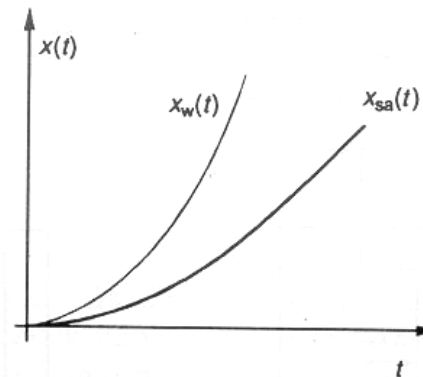
$$\Delta x_s(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \frac{s^{i-(k-1)}}{s^i + KY_m(s)} x_w \mp s^{i-j} \frac{A_{z2} Y_{mz}(s)}{s^i + KY_m(s)} x_z \right]$$

**A szabályozások követési tulajdonságai**

Kör típuszáma	Zavarás típuszáma	Vezetőjel típuszáma		
		1	2	3
$i$	$j$	$\Delta x_s(\infty)$		
0	0	$\frac{1}{1+K} x_w \mp \frac{A_{z2}}{1+K} x_z$	$\infty \mp \frac{A_{z2}}{1+K} x_z$	$\infty \mp \frac{A_{z2}}{1+K} x_z$
1	0	$0 \mp 0$	$\frac{1}{K} x_w \mp 0$	$\infty \mp 0$
1	1	$0 \mp \frac{A_{z2}}{K} x_z$	$\frac{1}{K} x_w \mp \frac{A_{z2}}{K} x_z$	$\infty \mp \frac{A_{z2}}{K} x_z$
2	1	$0 \mp 0$	$0 \mp 0$	$\frac{1}{K} x_w \mp 0$
2	2	$0 \mp \frac{A_{z2}}{K} x_z$	$0 \mp \frac{A_{z2}}{K} x_z$	$\frac{1}{K} x_w \mp \frac{A_{z2}}{K} x_z$



a)



b)

## **Szabályozási körök stabilitás vizsgálata**

(a szabályozási kör dinamikus viselkedése)

Alapvető követelmény:

zavarás esetén - álljon be az eredeti állapot

alapjel változás esetén – álljon be az új egyensúlyi állapot

Stabil a rendszer, ha kimozdítva eredeti helyzetéből, majd magára hagyva visszatér előző egyensúlyi helyzetébe.

pl. impulzus jel esetén: eredeti állapotba áll vissza

egységugrás jel esetén : az új állapotban vesz fel állandósult értéket

Instabil állapot : minden határon túli jel változás a kimeneten, ami a rendszer elemeinek tönkremenetéhez is vezethet.

A szabályzási rendszer stabilitását befolyásoló tényezők:

A rendszer lengés hajlama annál nagyobb:

1. minél nagyobb a rendszer **hurokerősítése**
2. minél nagyobb a rendszer **késleltetése** (minél több energiatároló)

Ha a rendszer stabilitása nem megfelelő:

vagy a fenti paraméterek változtatásával,

vagy pótlólagos jelformálással kell kompenzálást megvalósítani.  
(később kerül tárgyalásra)

A stabilitás matematikai megfogalmazása:

lineáris rendszerekre:

$$\int_0^{\infty} |w(t)| dt < M, \quad M \text{ véges korlát}$$

$w(t)$ : a rendszer súlyfüggvénye (Dirac fgv.-re adott válasz)

A fenti egyenlőtlenség teljesülésének szükséges feltétele:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = 0$$

A rendszer viselkedését a differenciálegyenlete adja meg.

A homogén rész megoldása a magára hagyott rendszer állapotát adja meg.

Ha a megoldás  $t \rightarrow \infty$  esetén 0-hoz tart, akkor a rendszer stabil.

A súlyfüggvény a Dirac impulzus által kitérített rendszer viselkedését adja meg.

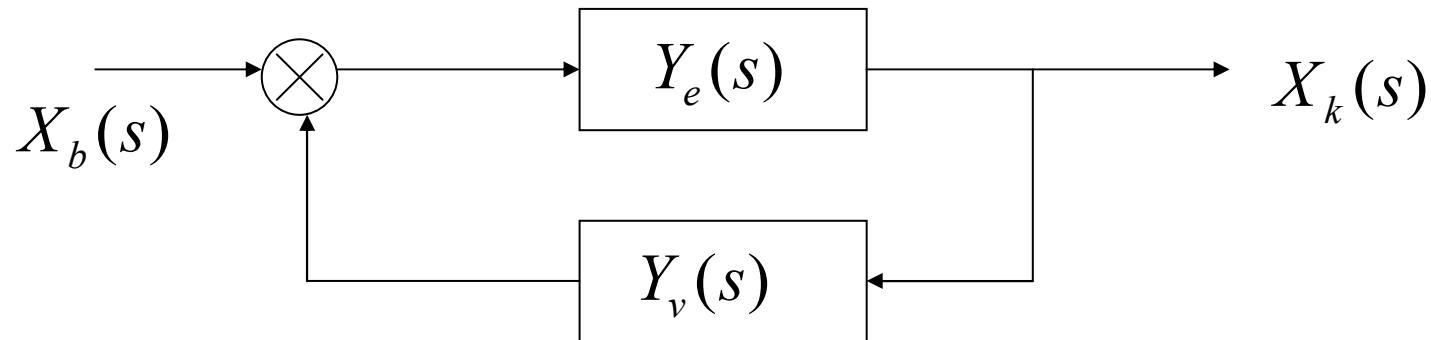
Ez alapján: a stabilitás vizsgálat elvégezhető:

a rendszer homogén diff.egyenletéhez tartozó karakterisztikus egyenlet alapján,

ill. a súly fgv. Laplace transzformáltjából (átviteli fgv.)

$$W(s) = L[w(t)]$$

Egyhurkos szabályzásnál:



Az átviteli függvény:

$$W(s) = \frac{Y_e(s)}{1 + Y_e(s)Y_v(s)}$$

Az átviteli függvény nevezője a karakterisztikus függvény.

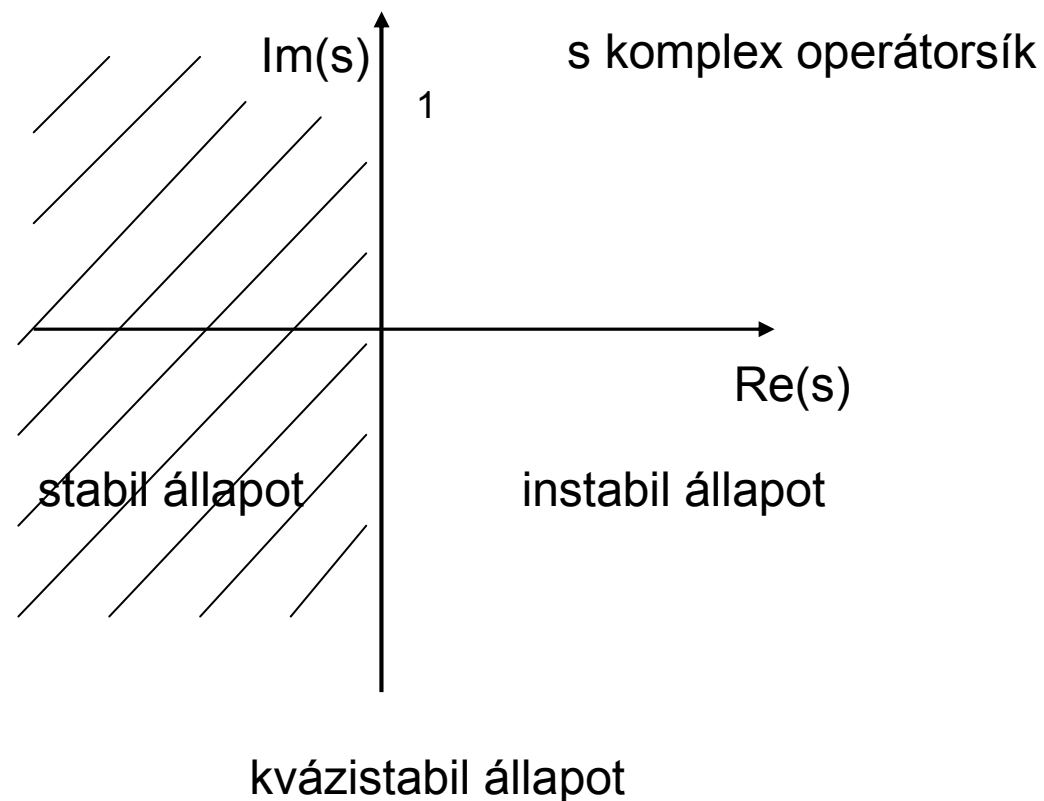
A karakterisztikus függvény rendezett alakja a karakterisztikus egyenlet

$$1 + Y_e(s)Y_v(s) = 0$$

Egy zárt szabályozási kör csak akkor stabil, ha

a zárt kör eredő átviteli függvény nevezőjének (karakterisztikus egyenlet) gyökei negatív valós résszel rendelkeznek.

Ezek az átviteli fgv. pólusai. (példa :gyökök az s síkon 15.lap tábla)



A pólusok elhelyezkedése:

gyökök ill. gyökpárok a bal félsíkon: stabil állapot

gyökök ill. gyökpárok a képzetes tengelyen: kvázistabil

gyökök ill. gyökpárok a jobb félsíkon: instabil állapot

A karakterisztikus egyenlet megoldása:

a gyökök meghatározása --- következtetés a rendszer viselkedésére

Esetlegesen magasabb fokszámú egyenlet megoldása helyett

különböző stabilitási kritériumokat dolgoztak ki:

Hurwitz, Routh, Nyquist, Bode, gyökhelygörbe

## Hurwitz stabilitási kritérium

A karakterisztikus polinom alapján:

$$K(s) = 1 + Y_e(s)Y_v(s) = A_n s^n + A_{n-1} s^{n-1} + A_2 s^2 + A_1 s + A_0$$

A polinom együtthatóiból von le következtetést:

Stabil a rendszer, ha egyszerre teljesülnek az alábbi feltételek:

- a., Minden együttható  $> 0$
- b., Az un. Hurwitz determináns  $> 0$
- c., Az előbbi determináns főátlója mentén lévő aldeterminánsok külön-külön  $> 0$

Hurwitz determináns:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_{n-1} & A_{n-3} & A_{n-5} \dots & 0 \\ A_n & A_{n-2} & A_{n-4} \dots & 0 \\ 0 & A_{n-1} & A_{n-3} \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & A_0 \end{vmatrix}$$

Aldeterminánsok:

$$\Delta_1 = A_{n-1}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} A_{n-1} & A_{n-3} \\ A_n & A_{n-2} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_n = \Delta$$

Következtetések az instabilitásra:

annyi gyök van a jobb félsíkon, ahány Hurwitz determináns negatív,

annyi gyök van a képzetes tengelyen, ahány determináns nulla.

Alkalmazás:

A: Ha minden paraméter ismert: Megállapítható a rendszer stabilitása

B: Ha egy paraméter szabad: Megadható, hogy ezen paraméter mely értéktartományában stabil a rendszer.

## Routh stabilitási kritérium

$$K(s) = 1 + Y_e(s)Y_v(s) = A_n s^n + A_{n-1} s^{n-1} + A_2 s^2 + A_1 s + A_0$$

A polinom együtthatóiból von le következtetést:

Stabil a rendszer, ha egyszerre teljesülnek az alábbi feltételek:

a., Minden együttható  $> 0$

b., A Ruth-séma első oszlopának minden eleme  $> 0$

Ruth séma:

$$\begin{array}{cccc} A_n & A_{n-2} & A_{n-4} & 0 \\ A_{n-1} & A_{n-3} & A_{n-5} & 0 \\ B_{n-2} & B_{n-4} & B_{n-6} & 0 \\ C_{n-3} & C_{n-5} & C_{n-7} & 0 \end{array}$$

$$B_{n-2} = \frac{A_{n-1}A_{n-2} - A_n A_{n-3}}{A_{n-1}}$$

$$B_{n-4} = \frac{A_{n-1}A_{n-4} - A_n A_{n-5}}{A_{n-1}}$$

# Részletes szabály

$$P(s) = a_0 + a_1s + \dots + a_n s^n$$

$n$	$a_n$	$a_{n-2}$	$a_{n-4}$	$a_{n-6}$	$\dots$	$0$
$n-1$	$a_{n-1}$	$a_{n-3}$	$a_{n-5}$	$a_{n-7}$	$\dots$	$0$
$n-2$	$b_{n-1}$	$b_{n-2}$	$b_{n-3}$	$b_{n-4}$	$\dots$	$0$
$n-3$	$c_{n-1}$	$c_{n-2}$	$c_{n-3}$	$c_{n-4}$	$\dots$	$0$
$\vdots$	$\vdots$					
$3$	$d_{n-1}$	$d_{n-2}$	$0$			
$2$	$e_{n-1}$	$e_{n-2}$	$0$			
$1$	$f_{n-1}$					
$0$	$g_{n-1}$					

$$b_{n-1} = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}$$

$$b_{n-2} = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$$

$$c_{n-1} = \frac{b_{n-1}a_{n-3} - a_{n-1}b_{n-2}}{b_{n-1}}$$

$$c_{n-2} = \frac{b_{n-1}a_{n-5} - a_{n-1}b_{n-3}}{b_{n-1}}$$

$$c_{n-3} = \frac{b_{n-1}a_{n-7} - a_{n-1}b_{n-4}}{b_{n-1}}$$

$$f_{n-1} = \frac{e_{n-1}d_{n-2} - d_{n-1}e_{n-2}}{e_{n-1}}$$

$$g_{n-1} = e_{n-2}$$

## Nyquist stabilitási kritérium

A felnyitott kör helygörbélyéből következtetünk a zárt rendszer stabilitására.

A zárt rendszer pólusait az alábbi kifejezésből:

$$1 + Y(s) = 0 \quad s = j\omega \quad \text{helyettesítéssel}$$

$0 \leq \omega < \infty$  esetén vizsgáljuk, hogy

$$Y(j\omega_0) = -1 \quad \text{mely frekvenciákra teljesül}$$

A fenti feltétel teljesülésekor a rendszer az adott frekvencián csillapítatlan szinuszos rezgőmozgást végez.

## Nyquist stabilitási kritérium

A felnyitott kör helygörbélyéből következtetünk a zárt rendszer stabilitására.

A zárt rendszer pólusait az alábbi kifejezésből:

$$1 + Y(s) = 0 \quad s = j\omega \quad \text{helyettesítéssel}$$

$0 \leq \omega < \infty$  esetén vizsgáljuk, hogy

$$Y(j\omega_0) = -1 \quad \text{mely frekvenciákra teljesül}$$

A fenti feltétel teljesülésekor a rendszer az adott frekvencián csillapítatlan szinuszos rezgőmozgást végez.  
(ez a stabilitás határa)

Az eddigiekből következik:

Ha a felnyitott kör hurokátviteli frekvenciafüggvénye éppen áthalad a komplex frekvenciasík (  $-1+j0$  ) pontján, akkor a rendszer éppen a stabilitás határán van, a szabályozott jellemző nem éri el az állandósult állapotát.

$$W(j\omega_0) = \frac{Y_e(j\omega_0)}{1 + Y(j\omega_0)} = \frac{Y_e(j\omega_0)}{0} \rightarrow \infty$$

pl.: egységugrás bemenő jel esetén (végtelen sok fr. komponens)  
az  $\omega_0$  frekvenciájú rezgés fennmarad

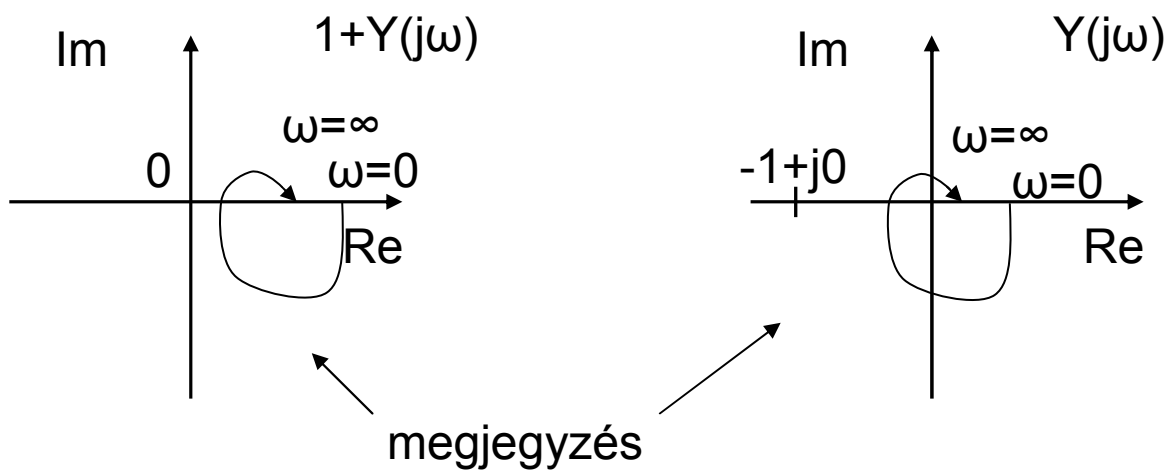
## Egyszerűsített Nyquist kritérium:

komplex operátorsík  $\xrightarrow{\text{konform leképezés}}$  frekvenciasík

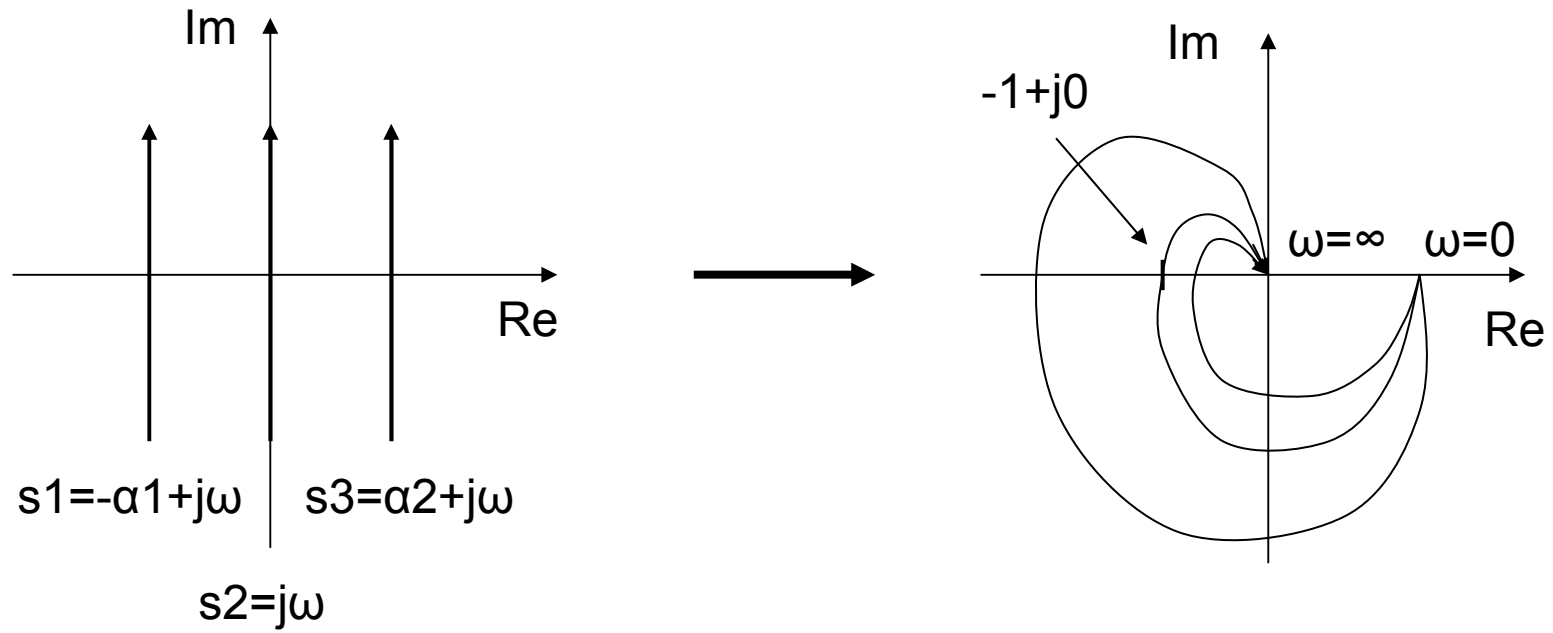
stabilitás:

bal félsík  $\rightarrow$  stabil

???

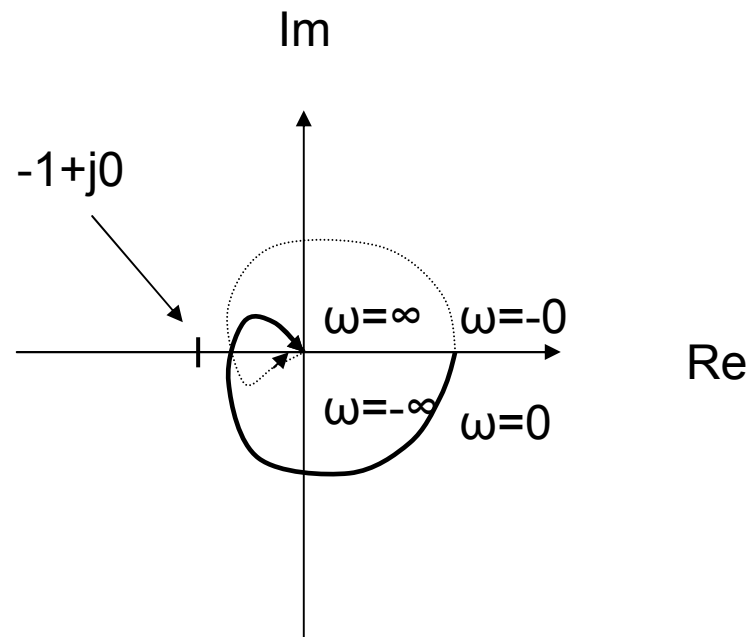


## Konform leképezés



## Teljes frekvencia függvény:

$-\infty < \omega < +\infty$  kiterjesztés



Stabilitás:

A hurokátviteli teljes frekvenciafüggvény helygörbéje a komplex frekvenciasík  $(-1+j0)$  pontján nem megy át, vagy nem fogja körül.

(  $0 < \omega < \infty$  tartományon balkéz felől essen a  $(-1+j0)$  pont )