

Anyagszükséglet tervezés és számítás

Vállalati Információs Rendszerek

Anyagszükséglet tervezés során azt kell meghatározni, hogy egy adott mennyiségű végtermék előállításához mire van szükség:

- alapanyagokból,
- saját alkatrészekből,
- külső forrásokból (beszállító) származó, idegen alkatrészekből.

Ezek a mennyiségek meghatározhatók:

- előrejelzési modell segítségével,
- visszaigazolt megrendelésekből,
- egy termelési program alapján (függetlenül az esetleges konkrét vevői igényektől).

Értékesítésre (piacra) gyártott végtermék mennyiséget **primer** igénynek, míg az ehhez szükséges (származtatott) alapanyagokat, illetve részegységeket, **szekunder** igénynek nevezzük.

A **szekunder** igény a végtermék darabjegyzékéből határozható meg.

A darabjegyzék tartalmazza a **végtermék egy darabjának** elkészítéséhez szükséges:

- összes részegységet,
- alkatrészt,
- alapanyag típust,
- és az egyes típusból szükséges mennyiséget.

Amikor a múltbeli adatok alapján – egy előrejelzési modell felhasználásával – határozható meg a végtermékek és az alkatrészek szükséges mennyisége, akkor ezt:

felhasználás-vezérelt diszpozíciós eljárás-nak nevezzük.

Összeállítási rajzok és ábrázolási módjuk

Összeállítási rajzok segítségével megadható, hogy a vállalat által előállított végtermékekhez a részegységekből és alkatrészekből milyen mennyiségre van szükség.

A szükséglettervezési rendszer elemei két nagy csoportba sorolhatók:

- **végtermékek**, (röviden termékek)
- illetve **alkatrészek**.

Az összeállítási rajzok többféleképpen adhatók meg, úgy mint **összeállítási fa**, **gozinto – gráf**, vagy **darabjegyzék**.

Összeállítási fa és a gozinto gráf

Egy **összeállítási fa** (*eredetfának is nevezik*) a végtermék összes komponensét tartalmazza, mégpedig az egyes szerelési fázisok sorrendjében:

- a **0. szerelési szint** megfelel a **nyersanyagoknak**, illetve **elemi alkatrészeknek**,
- a legmagasabb gyártási szint az **N.-ik szint** pedig a **végterméknek**.

A több helyen felhasznált ugyanazon alkatrészeket (pl. csavar) minden szerelési szinten ábrázolni kell, ahol azok előfordulnak.

Összeállítási fa és gozinto – gráf

Egy **összeállítási fa** nem más, mint egy **irányított gráf**, melynek egy nyelője és minden további csomópontjának egyetlen követő csomópontja van.

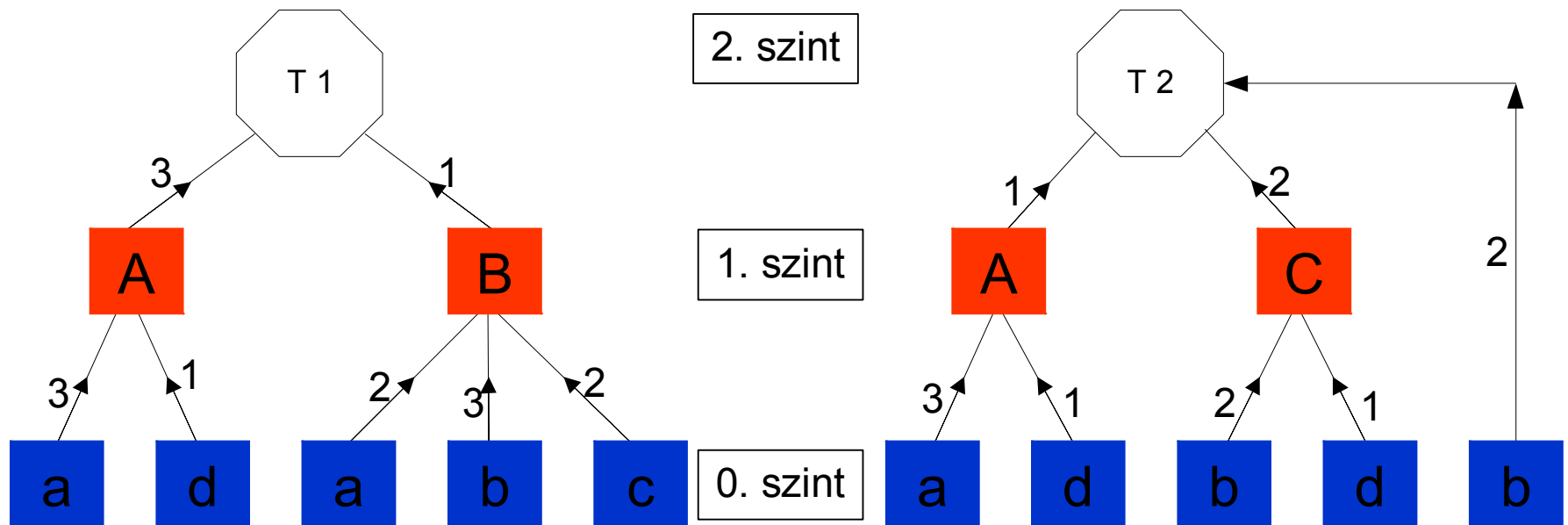
A gráf különböző szintjeinek csomópontjai megfelelnek az egyes gyártási szinteknek.

Egy nyíl **$\langle i, j \rangle$** melynek értéke **$a_{i,j}$** azt mutatja meg, hogy egy **egységnyi** (db, kg, m, stb.) „j” alkatrész előállításához mekkora mennyiség szükséges az „i” alkatrészből.

Angol elnevezése: **directed graph**, melyet magyarul **digráfnak** hívunk.

Ezt az $a_{i,j}$ értéket **input koefficiens**-nek nevezzük, (de hívják még **termelési koefficiens**-nek is).

Az alábbi **termék összeállítási fa** két végtermék (T1, T2) struktúráját tartalmazza, melyek **A, B, C** szerelvényekből, és **a, b, c, d** elemi alkatrészekből állnak. Ügyelni kell arra, ha egy nyíl $\langle i,j \rangle$ több összeállítási fában előfordul (itt pl. az $\langle a,A \rangle$ és $\langle d,A \rangle$), akkor mindig ugyanazt az értéket kapja.

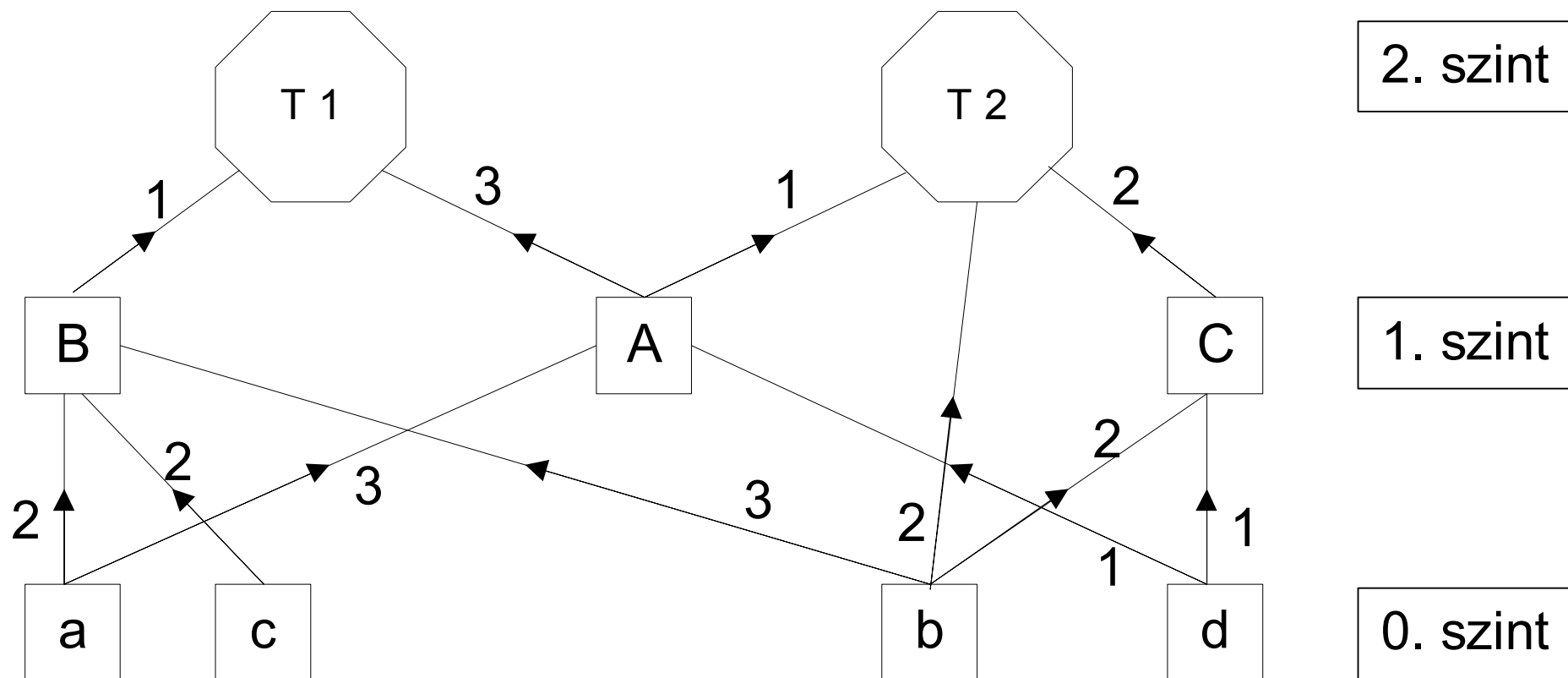


Termék összeállítási fa

Ez egy jól áttekinthető formája a termék ábrázolásának, de a redundancia (ugyanazon elemek többszöri ábrázolása) miatt informatikai kezelése nehézkes.

Kompaktabb ábrázolást tesz lehetővé a **gozinto gráf**. A nyilak pontosan azt jelentik, mint az előzőnél – de itt minden egyes alkatrész csak egyszer van feltüntetve.

Hagyományos összeállítási fa alkalmazása esetén az összes terméken illetve részegységen végig kell menni, a módosítást pedig minden olyan helyen végre kell hajtani, ahol a módosított alkatrész előfordul.



Gozinto-gráf

Ezek a gráfok a gépiparban ciklusmentesek, a vegyipari alkalmazásoknál előfordulnak ciklusok (pl. finomítási eljárásoknál), amikor a végterméket, vagy egyes részterméket újra visszavezetnek ugyanabba a folyamatba.

Darabjegyzék

Az összeállítási fák az ipari gyakorlatban leggyakrabban **darabjegyzék** formában készülnek.

A vegyiparban a **receptúrák**, az építőiparban az **anyaglisták**, a textiliparban az **összetevők**, stb.

Leginkább az építőköcka elv szerinti felosztással lehet találkozni, mely önálló „dobozokba” foglalja össze az egyes elemek tartozékait és az ismétlődő egységeket (természetesen csak egyszer kirészletezve).

Darabjegyzék
táblázatos
formában

Termék 1		
<i>Jelölés</i>	<i>Alkatrésztípus</i>	<i>Mennyiség</i>
A	Szerelvény	3
B	Szerelvény	1
Termék 2		
<i>Jelölés</i>	<i>Alkatrésztípus</i>	<i>Mennyiség</i>
A	Szerelvény	1
C	Szerelvény	2
b	Elemi alkatrész	2
A szerelvény		
<i>Jelölés</i>	<i>Alkatrésztípus</i>	<i>Mennyiség</i>
a	Elemi alkatrész	3
d	Elemi alkatrész	1
B szerelvény		
<i>Jelölés</i>	<i>Alkatrésztípus</i>	<i>Mennyiség</i>
a	Elemi alkatrész	2
b	Elemi alkatrész	3
c	Elemi alkatrész	2
C szerelvény		
<i>Jelölés</i>	<i>Alkatrésztípus</i>	<i>Mennyiség</i>
b	Elemi alkatrész	2
d	Elemi alkatrész	1

Bruttó igény meghatározása

Amikor összeállt, hogy a végtermék mely alkatrészekből épül fel és hány szerelési szinten keresztül, akkor következik a **bruttó igény meghatározása**.

Amennyiben számítógépes adatfeldolgozást végzünk, akkor egy egyszerű algoritmus segítségével ki kell gyűjteni, hogy egy adott termék előállításához a kérdéses alkatrészből összesen mennyit kell beszerezni, vagy legyártani.

Ha ezt a teljes termékpalettára elvégezzük, akkor előáll az adott időszakban beszerezendő és gyártandó mennyiség mind a végtermékekből, mind pedig a különböző alkatrészekből.

Ezeket, ha mátrixban foglalunk össze: **áttekintő mátrixnak** nevezzük. (Jellegét tekintve ez egy **alsó háromszög mátrix**, mivel csak a főátló alatti elemek különböznek 0-tól).

Szükséges hozzá Szükséges belőle	T1	T2	A	B	C	a	b	c	d
T1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
T2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A	3	1	0	0	0	0	0	0	0
B	1	0	0	0	0	0	0	0	0
C	0	2	0	0	0	0	0	0	0
a	11	3	3	2	0	0	0	0	0
b	3	6	0	3	2	0	0	0	0
c	2	0	0	2	0	0	0	0	0
d	3	3	1	0	1	0	0	0	0

Alkatrész áttekintő mátrix

Az MRP folyamata

Az **MRP** (Material Requirements Planning) egy számítógéppel támogatott eljárás, mely elsődlegesen az anyaggazdálkodást hivatott elősegíteni az alábbiak szerint:

- anyagszükséglet meghatározása,
- alkatrész diszpozíció,
- raktárkészlet nyilvántartás.

Egy **MRP** rendszer alkalmazásának fontos feltétele, hogy a termékstruktúrát leíró **gráf ciklusmentes** legyen.

Az **MRP** minden áru vagy alkatrészféleségre (*cikk-számra*) egy előre megadott időtartamon belül meghatározza az egyes periódusokban gyártandó, vagy rendelendő mennyiségeket.

Egy MRP rendszer működtetéséhez az alábbi adatok szükségesek:

- Összeállítási rajz vagy darabjegyzék, és az egyes elemek átfutási ideje az egyes gyártási fokozatokban (Bill of Materials, **BOM** Files).
- Az elsődleges, vagy **primer igény**: minden alkatrésztípusra (cikkszámra) vonatkoztatva, amely:
 - vagy az előrejelzések alapján a végtermék iránti igényt adja meg az egyes periódusokra,
 - vagy már egy adott termelési program alapján ismert (**Master Production Schedule, MPS**).
- A rendelkezésre álló raktárkészlet minden termékre, minden alkatrésztípusra (cikkszámra), a tervezési időszak (pl. hét) minden periódusára (pl. nap) vonatkozóan.

Ezek a raktárkészlet nyilvántartásból gyűjthetők ki (Inventory **Records File**, **IR File**).

Minden alkatrészre meg kell adni az **átfutási időt**:

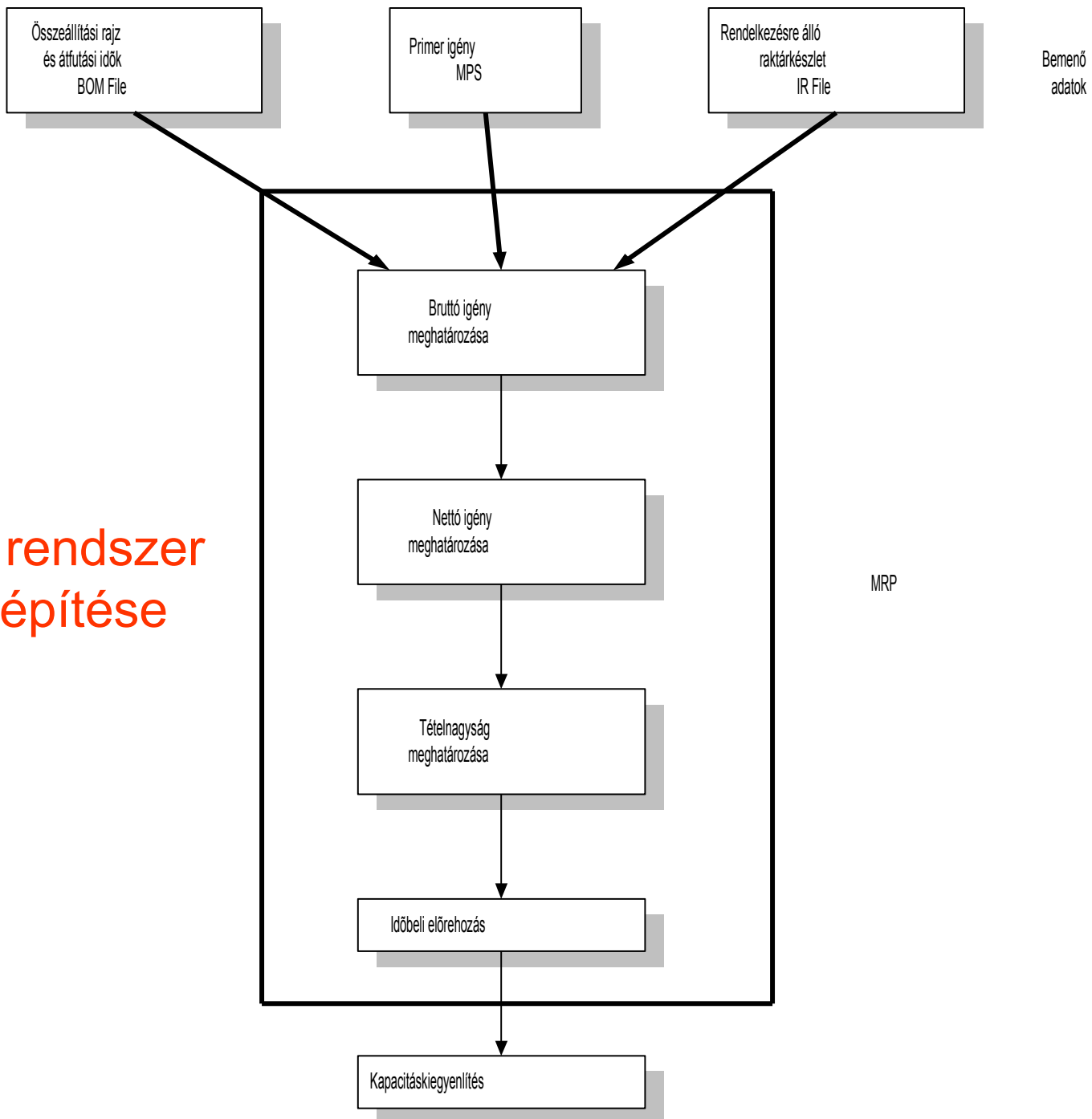
- ami a tényleges **megmunkálási időt** és a **befogási időket** jelenti,
- valamint hozzá számítják az ún. **átviteli időt**:
 - mely a **várakozási**
 - illetve a **szállítási** időt jelenti.

Mivel az **MRP** rendszer egy nagyvonalú (nagyléptékű) tervezési eszköz, ezért az esetek többségében megelégszenek az átfutási idő becslésével.

Egy **MRP** rendszer működtetése során minden gyártási szinten és minden periódusra az alábbi lépéseket kell elvégezni:

- **Darabjegyzék kibontása (bruttó igény meghatározása)**
Ebből derül ki, hogy egy adott alkatrészről hány darabra van szükség az adott végtermék előállításához.
- **Nettó igény meghatározása**
Az előbb meghatározott alkatrészmennyiségből levonják a raktáron lévő rendelkezésre álló készletet.
- **Tétel nagyság meghatározása**
A nettó igény ismeretében kiszámítják, hogy mikor és mennyit gyártsanak (vagy rendeljenek) az adott alkatrésztípusból.
- **Időbeli eltolás**
A gyártási illetve rendelési tétel nagyság és az átfutási idő (gyártás esetén) vagy a szállítási idő (külső beszerzés esetén) ismeretében meghatározzák, hogy mikor is kell az alkatrészek legyártását (vagy megrendelését) elkezdeni, hogy a kívánt időre rendelkezésünkre álljon.

Az **MRP** rendszer elvi felépítése

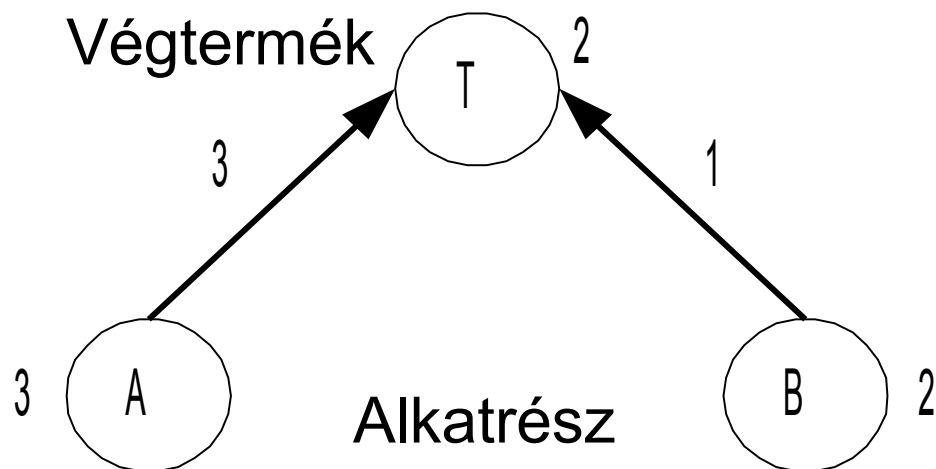


Alapesetben az **MRP** modul nem tartalmaz kapacitástervezési részt. A hiányzó kapacitást nagyobb átfutási idők megadásával lehet pótolni.

Fejlettebb változatok (**MRP II** – Manufacturing Resource Planning) – már azt is vizsgálják, hogy a kiszámított optimális gyártási tételek legyárthatók-e, rendelkeznek-e az ahhoz szükséges erőforrás mennyiséggel.

Egy mintapélda az MRP rendszer működéséről:

Az alábbi ábrán egy termék összeállítási gráfja látható:



A „T” végtermék két alkatrészből – „A” és „B” jelű –, kerül összeszerelésre. Az „A” jelűből 3 darab szükséges, míg a „B” jelűből csak 1. A szükséges mennyiséget a nyilak melletti számok jelölik.

Az „A” és „B” alkatrészek melletti számok az átfutási időket adják meg.

Ha pl. a periódusidő egy hét, ebben az esetben az „A” alkatrész átfutási ideje három hét (**3 egység**), a „B” átfutási ideje két hét (**2 egység**). Vagyis, ha erre a hétre rendelkezésre kell álljon az „A” alkatrész, akkor azt három héttel már előtte kell(ett volna) megrendelni, ill. ha most rendeljük meg, akkor csak három hét múlva fog rendelkezésre állni.

Ez az idő „B” esetében csak két hét. A „T” végterméknek is van átfutási ideje, ami szintén két hét (**2 egység**).

Legyen a **12.** héten **(indulásnál)** a raktárban **8 darab** termék, illetve a **14** héten **4 db** (pl. a visszamondott rendelésből).

Így ezeken a heteken a termék iránti nettó igény valójában csak $30 - 8 = 22$ a **12.** héten, és $24 - 4 = 20$ a **14.** héten.

Ezt az alábbi táblázatban foglalhatjuk össze:

HÉT	<i>10</i>	<i>11</i>	12	<i>13</i>	14	<i>15</i>	<i>16</i>	<i>17</i>	<i>18</i>
Primer igény („T” iránt)			30	16	24	14	22	15	13
Induló raktárkészlet („T” –ből)			8		4				
Nettó igény = gyártási tételnagyság			22	16	20	14	22	15	13
Megrendelés	22	16	20	14	22	15	13		

Tegyük fel, hogy az átállási költségek a „T” végtermék esetén nem jelentősek, így egy **„tételt – tételre” termelési program** megvalósítható.

A táblázat szerint tehát már a **10.** héten el kell kezdeni legyártani a **12.** hétre esedékes **22 db** „T” végterméket.

(a gráfban látható volt, hogy az átfutási idő 2 hét)

A **11.** héten el kell kezdeni a **16 db** „T” végterméket, melyet a **13.** héten kell kiszállítanunk, stb.

Ha megvizsgáljuk az „A” jelű alkatrészt, a „T” végtermékhez **3 db** „A” -ra van szükség, melynek átfutási ideje **3** hét. Legyen ebből is néhány darab a raktárban, pl. a **10.** héten **12 darab**.

HÉT	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Bruttó igény („A” iránt, a „T” iránti igényből számítva)				66	48	60	42	66	45	39
Induló raktárkészlet („A” –ból)				12						
Nettó igény („A” –ból)				54	48	60	42	66	45	39
Gyártási tétel nagyság („A” –ból)										
Aktuális raktárkészlet („A” –ból)										
Gyártási feladat („A” –ból)										

„A” alkatrész iránti igény

Gyártási, vagy rendelési tétel nagyság meghatározása

A gyártási illetve rendelési tétel nagyság meghatározásának két kulcseleme van:

- Az egyik az **átállási költség**, ami azt fejezi ki, ha a gyártósort le kell állítani és egy másik termék gyártására át kell állítani, akkor az mennyibe kerül összesen a vállalatnak.
- A másik fontos tétel pedig, hogy a legyártott, de még fel nem használt **alkatrész vagy végtermék tárolása** a forgóeszközök lekötésén keresztül jelentős pénzösszeget emészt fel.

Az átállási költség fajlagosan (egy darabra vetítve) exponenciálisan csökken, minél nagyobb mennyiséget gyártunk egyetlen átállás során. A készletezési költségek pedig lineárisan nőnek, ha növeljük a gyártott darabszámot.

E két ellentétes irányban változó költség között van egy egyensúlyi pont, vagyis **egy adott darabszámnál** ez a kétfajta **költség megegyezik**.

1. Amennyiben az igény egyenletes, és nem változik a tervezési időszak alatt, akkor használható az **EOQ** (Economic Order Quantity: Gazdaságos Rendelési Mennyiség) formula.
2. Ha az igény a tervezési időszak alatt periódusról periódusra (hétről – hétre) jelentősen változik, akkor egy dinamikus optimalizálási feladatot kell megoldani.

3. Amennyiben az átállási költségek elhanyagolhatók (pl. rendkívül rövid az átállási idő, néhány perc), akkor a **tételt-tételre gyártás** is választható.

Ez azt jelenti, hogy minden periódusban az adott igénynek megfelelő mennyiséget gyártjuk le, majd átállítjuk a berendezéseket más alkatrészek gyártására

A készletgazdálkodásban **dinamikus optimalizálás** a **Wagner – Whitin algoritmus** segítségével történik.

Ez egy kombinatorikai feladat, ahol a variációk száma egyre nő, ahogy egyre több periódust tartalmaz a tervezési időszak.

Tételt – tételre gyártás

A „**tételt – tételre**” gyártás (vagy rendelés) azt jelenti, hogy minden periódusban legyártjuk, ill. megrendeljük az adott periódus igényét. Készletezési költségek nem lesznek, hiszen minden periódusban elfogy az akkor rendelt mennyiség.

Természetesen ennek a készletezési módszernek is van költsége, mégpedig minden egyes periódusban ki kell fizetni a rendelési költséget (beszerzés esetén) ill. viselni kell az átállási költséget (gyártás esetén).

Legyen az **átállási költség** (az **EOQ** modellben rendelési költségként is használatos) jele **A = 400 Ft**, a **raktározási költség hetente és darabonként:**

2 Ft ($v * r = 2 \text{ Ft / db / hét}$).

„A” alkatrész iránti igény

HÉT	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Bruttó igény („A” iránt, a „T” iránti igényből számítva)				66	48	60	42	66	45	39
Induló raktárkészlet („A” –ból)				12						
Nettó igény („A” –ból)				54	48	60	42	66	45	39
Gyártási tétel nagyság („A” –ból)				54	48	60	42	66	45	39
Aktuális raktárkészlet („A” –ból)				0	0	0	0	0	0	0
Gyártási feladat („A” –ból)	54	48	60	42	66	45	39			

A **gyártási feladat** (a táblázat utolsó sora) figyelembe veszi a **3** hétnyi időbeli előrehozás szükségességét, de a már korábban kiszámított mennyiségeken nem változtat.

Az összes költség kiszámítása :

Összesen, ha hét alkalommal rendelünk, egy rendelés 400 Ft, így $7 * 400 \text{ Ft}$ azaz **2800 Ft** lesz a 7 periódusra kiszámított teljes költség.

Rendelési tétel nagyság az EOQ modell alapján

Amennyiben az egyes periódusok igénye nem mutat jelentős ingadozást, akkor az egyes periódusok igényét „helyettesíthetjük” az átlagos igénnyel.

Ezt az alábbi módon határozható meg:

$$D_{\text{átlag}} = \frac{54 + 48 + 60 + 42 + 66 + 45 + 39}{7} * 52 = 2629,7 \approx 2630 \text{db.}$$

az éves igényre alkalmazva az **EOQ** formulát:

$$EOQ = \sqrt{\frac{2 * A * D}{v * r}} = \sqrt{\frac{2 * 400 * 2630}{2 * 52}} = 142,2 \approx 143 \text{db}$$

A rendelés gyakorisága pedig:

$$T = \frac{EOQ}{52} = 2,75 \text{ hét}$$

A'' alkatrész iránti igény

HÉT	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Bruttó igény („A'' iránt, a „T'' iránti igényből számítva)				66	48	60	42	66	45	39
Induló raktárkészlet („A'' –ból)				12						
Nettó igény („A'' –ból)				54	48	60	42	66	45	39
Gyártási tétel nagyság („A'' –ból)				143	0	143	0	0	143	0
Aktuális raktárkészlet („A'' –ból)				89	41	124	82	16	114	75
Gyártási feladat („A'' –ból)	143	0	143	0	0	143	0			

Az **összes költség** a rendelési és készlettartási költségek összege: **TK(EOQ) = 3 * 400 + (89+41+124+82+16+114+75) * 2 = 1.200 + 1.082 = 2.282 Ft.**

Rendelési tétel nagyság a legkisebb összes költség alapján

A **legkisebb összes költség** azon az egyszerű felismerésen alapul, hogy amennyiben az átállási költség nem elhanyagolható, akkor célszerűbb az átállás után több periódus igényét egy sorozatban legyártani.

Vagyis a **tételt – tételre gyártás** lesz az **etalon**, mint a **legdrágább módszer**.

Vizsgálni kell, hogy ehhez képest a tételek összevonása mekkora megtakarítást eredményez. Amíg az összevonás révén az összes költség csökken, addig célszerű a tételeket összevonni.

Amikor ez a sorozat megfordul, és az összes költség növekedni kezd, az már azt jelenti, hogy a legutolsó tételt már nem érdemes az eddigiekhez hozzácsapni - **érdemesebb abban a periódusban újrakezdeni a gyártást.**

A **legkisebb összes költség** alapján az alábbi végeredményre jutunk:

Összesen két alkalommal indítjuk a gyártást:

- a 10. periódusban legyártjuk a 10-13 periódus igényét,
- a 14. periódusban legyártjuk az 14-16 periódus igényét.

E gyártás összes költsége az alábbi táblázatban foglalható össze:

Periódus	Nettó igény	Tervezett rendelés	Záró készlet	Készletartartási ktg.	Rendelési ktg.	Összes ktg.
10.	54	204	150	300	400	700
11.	48	0	102	204	0	904
12.	60	0	42	84	0	988
13.	42	0	0	0	0	988
14.	66	150	84	168	400	1556
15.	45	0	39	78	0	1634
16.	39	0	0	0	0	1634

Az összes költség:

TK(legkisebb összes ktg.) =

$$= 400 + 2 \cdot (48 + 60 + 42) + 2 \cdot (60 + 42) + 2 \cdot 42 + 400 + 2 \cdot (45 + 39) + 2 \cdot 39 =$$
$$= \mathbf{1.634 \text{ Ft.}}$$

(Ez egyébként közvetlenül kiolvasható a táblázat utolsó sorából is)

Ezek után a tényleges gyártást 3 héttel előre kell hozni, így a 7. és a 11. héten fogjuk legyártani a szükséges mennyiségeket.

Rendelési tétel nagyság a legkisebb átlagköltség (egységköltség) alapján

Ez is egy **heurisztikus algoritmus** (Silver – Meal – heuristic), mely szintén nem biztos, hogy abszolút optimumot ad - de mindenképpen egy jó megoldást eredményez.

Ha egyszer átállítottuk a gyártósorokat, akkor érdemes az egyes periódusok igényét összevonni mindaddig, amíg az egy periódusra eső átlagos költség csökken. Vagyis, ha az 1. periódusban gyártjuk le az 1-2. periódus igényét, akkor ennek költsége:

az egyszeri átállás + a második periódus igényének egy periódusnyi készletezési költsége 2 periódusra oszlik el.

Ha az 1. periódusban gyártjuk le az 1-3. periódus igényét, akkor ennek összes költsége (átállás + készletezés) már 3 periódusra oszlik el, stb.

HÉT	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Nettó igény („A” –ból)				54	48	60	42	66	45	39

Az előbbiek alapján ($K_{10,10} = 400$):

$$K_{10,11} = K_{10,10} + v * r * D_{11} = 400 + 2 * 48 = 496 \text{ Ft}$$

Mivel ez két hét költsége, ebből számítjuk ki a heti átlagköltséget:

$$\frac{K_{10,11}}{2} = 248 \text{ Ft}$$

Ha hozzáveszünk még egyheti mennyiséget, vagyis ha a 10. héten kezdenénk a 12. heti mennyiség legyártását, akkor az átlagköltség az alábbiak szerint változna:

$$K_{10,12} = K_{10,11} + 2 * v * r * D_{12} = 496 + 2 * 2 * 60 = 736 \text{ Ft}$$

Mivel ez három hét költsége (10, 11, 12. hét), ebből számítjuk ki a heti átlagköltséget:

$$\frac{K_{10,12}}{3} = 245,3 \text{ Ft}$$

Látható, hogy az átlagköltség tovább csökkent, azaz érdemes egyszerre három hét mennyiségét legyártani!

Nézzük meg, hogy jobban járunk-e akkor, ha a negyedik hét (13. hét) igényét is hozzácsapjuk és a 10. héten még a 13. heti mennyiséget is legyártjuk:

$$K_{10,13} = K_{10,12} + 3 * v * r * D_{13} = 736 + 3*2*42 = 988 \text{ Ft}$$

Mivel ez most már négy hét költsége (10, 11, 12, 13. hét), ebből számítsuk ki a heti átlagköltséget:

$$\frac{K_{10,13}}{4} = 247 \text{ Ft.}$$

$$\frac{K_{10,13}}{4} > \frac{K_{10,12}}{3}$$

Látható, hogy a négy hétre számított átlagköltség nagyobb, mint a három hétre számított, ezért az algorithmus itt megszakad.

Eredményként azt kapjuk, hogy az a legjobb, ha három hét igényét összevonjuk, és ezt egyszerre gyártjuk le.

Innen a **gyártási tétel nagyság** így számítható:

$$Q_{10} = D_{10} + D_{11} + D_{12} = 54 + 48 + 60 = 162$$

Mindezek alapján a következő tétel nagyság az alábbiak szerint számítható:

(Az algoritmus a 13. heti mennyiséggel indul újra, a 13. héten. Akkor kell újra átállítani a gépeket.)

$$K_{13,13} = A = 400 \text{ Ft.}$$

$$K_{13,14} = K_{13,13} + v * r * D_{14} = 400 + 2 * 66 = 532 \text{ Ft}$$

Mivel ez két hét költsége, ebből számítjuk ki a heti átlagköltséget:

$$\frac{K_{13,14}}{2} = 266 \text{ Ft}$$

Ha hozzáveszünk még egyheti mennyiséget, vagyis szintén a 13. héten kezdenénk a 15. heti mennyiség legyártását, akkor az átlagköltségünk az alábbiak szerint változna:

$$K_{13,15} = K_{13,14} + 2 * v * r * D_{15} = 532 + 2 * 2 * 45 = 712 \text{ Ft}$$

Mivel ez három hét költsége (13, 14, 15. hét), ebből számítjuk ki a heti átlagköltséget:

$$\frac{K_{13,15}}{3} = 237,3 \text{ Ft}$$

Vagyis az átlagköltség tovább csökkent, így érdemes egyszerre három hét mennyiségét legyártani.

Nézzük meg, hogy jobban járunk-e, ha a negyedik hét (16. hét) igényét is hozzácsapjuk és a 13. héten még a 16. heti mennyiséget is legyártjuk.

$$K_{13,16} = K_{13,15} + 3 * v * r * D16 = 712 + 3 * 2 * 39 = 946 \text{ Ft}$$

Mivel ez most már négy hét költsége (13, 14, 15, 16. hét), ebből számítsuk ki a heti átlagköltséget:

$$\frac{K_{13,16}}{4} = 236,5 \text{ Ft}$$

$$\frac{K_{13,16}}{4} < \frac{K_{13,15}}{3}$$

Látható, hogy a négy hétre számított átlagköltség kisebb, mint a három hétre számított, ezért az algoritmus folytatódik!

Eredményül azt kapjuk, hogy az a legjobb, ha négy hét igényét vonjuk össze, és ezt egyszerre gyártjuk le.

Innen a gyártási tétel nagyság így számítható:

$$Q13 = D13 + D14 + D15 + D16 = 42 + 66 + 45 + 39 = 192$$

Már csak arra kell figyelni, hogy az „A” alkatrész átfutási ideje három hét, ezért a gyártást ténylegesen a 7. héten kell elkezdeni, hogy a tizedik hétre már rendelkezésre álljon a szükséges mennyiség. Az adatok az alábbi táblázatban láthatók:

Periódus	Rendelt mennyiség	Készlettart. Ktg.	Rendelési ktg.	Összes ktg.	Átlag ktg.
10.	54	0	400	400	400
10-11.	102	96	0	496	248
10-12.	162	240	0	736	245,3
10-13.	204	252	0	988	247
13.	42	0	400	400	400
13-14.	108	132	0	532	266
13-15.	153	312	0	712	237,3
13-16.	192	546	0	946	236,5

„A” alkatrész iránti igény

HÉT	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Bruttó igény („A” iránt, a „T” iránti igényből számítva)				66	48	60	42	66	45	39
Induló raktárkészlet („A” –ból)				12						
Nettó igény („A” –ból)				54	48	60	42	66	45	39
Gyártási tétel nagyság („A” –ból)				162	0	0	192	0	0	0
Aktuális raktárkészlet („A” –ból)				108	60	0	150	84	39	0
Gyártási feladat („A” –ból)	162	0	0	192	0	0	0			

Az időbeli eltolás miatt a tényleges gyártás a 7. és a 10. héten lesz.

E gyártási módszer összes költsége:

TK(legkisebb átlag ktg.)=

$$\begin{aligned} &= 400 + 2 \cdot (48 + 60) + 2 \cdot 60 + 400 + 2 \cdot (66 + 45 + 39) + 2 \cdot (45 + 39) + 2 \cdot 39 = \\ &= 1.682 \text{ Ft.} \end{aligned}$$

Dinamikus programozás, a Wagner – Whitin modell

Amennyiben az igény az egyes periódusokban jelentősen ingadozik (mint az előző mintapéldánkban) akkor az **EOQ** modell már nem használható. Természetesen mint nagyvonalú becslés jó, de pontos eredményt nem fog adni.

A **dinamikus programozás** egy speciális tulajdonságát használja ki az algoritmus, melyet **Wagner – Whitin** kritériumnak is neveznek. Lényege, hogy egy periódusban kétféle dolog történhet:

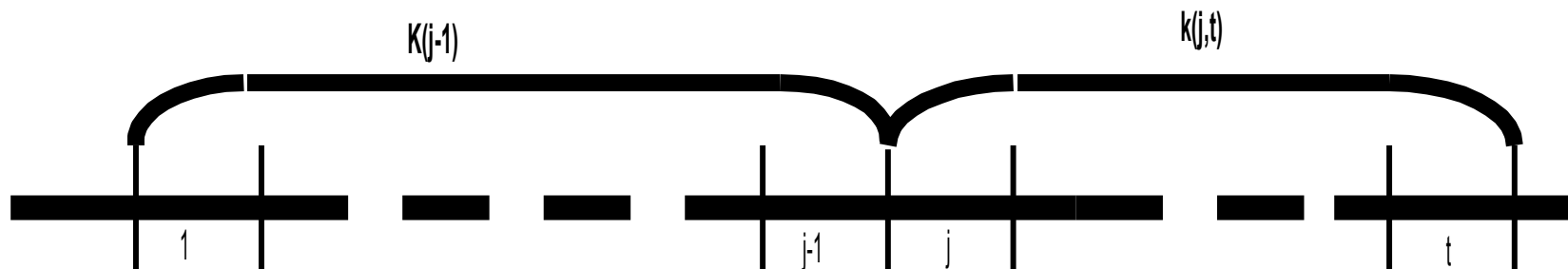
1. Ha a vizsgált időszakban gyártunk, akkor az ezt megelőző periódus végére a raktár kiürül, vagyis a készlet **0**, azaz $X_t \neq 0$ és $I_{t-1} = 0$.
2. Ha a vizsgált időszak végén van raktárkészlet, akkor a következő periódusban nem gyártunk, azaz $I_{t-1} \neq 0$ és $X_t = 0$.

Ebből következően az optimális megoldásra mindig igaz lesz az alábbi feltétel: $I_{t-1} * X_t = 0$, hiszen a szorzatban vagy az egyik, vagy a másik tényező nulla.

Ez a Wagner – Whitin kritérium.

Ez egyben azt is jelenti, hogy mindig egész számú periódusigényét vonjuk össze egy gyártási tételbe, vagyis olyan megoldás biztos nem optimális, ahol a 4. hét igényének egy részét legyártjuk a 3. héten, majd a maradékot a 4. – ben. Ha egyszer a 4. – ben újraindulunk a gyártással, akkor egyszerűbb a teljes mennyiséget a 4. – ben legyártani.

Az algoritmus menete a következő:



Vegyünk a mintapéldát, melyben 7 periódusra kell az optimális rendelési téteknagyságokat meghatározni. Jelöljük „j” -vel azt az időszakot, melyben utoljára gyártunk. Ez azt jelenti, hogy a „j” időszakban fogjuk legyártani a $j, j+1, j+2, \dots, t$ periódusok igényét. Így a raktárkészlet a következők szerint alakul majd:

$$I_j = D_{j+1} + D_{j+2} + D_{j+3} + \dots + D_t = \sum_{w=j+1}^t D_w$$

Ennek megfelelően a raktárkészlet költsége az alábbiak szerint számítható:

$$k(j, t) = i_j * (D_{j+1} + D_{j+2} + \dots + D_t) + i_{j+1} * (D_{j+2} + D_{j+3} + \dots + D_t) + \dots + i_{t-1} * D_t = \sum_{v=j}^{t-1} i_v * \sum_{w=v+1}^t D_w$$

Amennyiben az optimális megoldás szerint az a legjobb, ha a „j”-ik periódusban gyártunk utoljára [az ábrán $k(j, t)$], akkor az ezt megelőző periódusok összes költsége is optimális kell legyen. Még nem tudjuk, hogy a „j”-ik periódus előtt mikor és mennyit gyártunk, de bármi jött is ki, az biztosan jó [az ábrán $K(j-1)$ -el jelölve]. Ugyanezt a gondolatmenetet folytathatjuk tovább visszafelé. Az összes költség az alábbi lesz:

$$TK(1-t) = K(j-1) + A_j + k(j, t)$$

Az optimális megoldást úgy fogjuk megkapni, hogy fokozatosan növeljük a tervezési időszakok számát 1-től, t-ig. Ez egyben azt is jelenti, hogy nem egyetlen feladatot, hanem „t”

számú részfeladatot kell megoldani.

A számítás általános algoritmusa a következő:

$$K(t) = \underset{1 \leq t \leq L}{\text{Min}} \left\{ \underset{1 \leq j \leq t}{K(j-1) + \left(A_j + \sum_{v=j}^{t-1} i_v * \sum_{w=v+1}^t D_w \right)} \right\} = \underset{1 \leq j \leq t}{\text{Min}} \{ K(j-1) + A_j + k(j, t) \}$$

Ez az algoritmus két számítással jár:

1. Először végigmenve az 1. héttől a 7. hétig, kiválasztjuk, hogy mely periódusokban célszerű gyártani és melyekben nem.
2. Másodszor a 7. héttől kezdve visszafelé az 1. hétig kiválasztjuk azokat a periódusokat melyekben gyártanunk kell ahhoz, hogy a legalacsonyabb összes költséget érjük el.

A sorozat indításának költsége (átállási költség): $A = 400$ Ft.
A készletezési költség: $v * r = 2$ Ft /db / hét

Két futó indexet kell használni, „**t**”-vel jelöljük a tervezési időszakot, míg „**j**” – vel azt, amelyikben utoljára gyártunk. Minden periódusban jelöljük vastaggal az addigi legalacsonyabb összes költséget:

$$\mathbf{t = 10, \quad j = 10 \quad K(10) = A = 400 \text{ Ft.}}$$

$$\mathbf{t = 11, \quad j = 10 \quad K(11) = A + v * r * D_{11} = 400 + 2 * 48 = 496 \text{ Ft}}$$

$$t = 11, \quad j = 11 \quad K(11) = K(10) + A = 400 + 400 = 800 \text{ Ft.}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{t = 12, \quad j = 10 \quad K(12) = A + v * r * (D_{11} + D_{12}) + v * r * D_{12} =} \\ = 400 + 2 * (48 + 60) + 2 * 60 = 400 + 216 + 120 = \mathbf{736 \text{ Ft}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t = 12, \quad j = 11 \quad K(12) = K(10) + A + v * r * D_{12} = \\ = 400 + 400 + 2 * 60 = 400 + 400 + 120 = \mathbf{920 \text{ Ft}} \end{aligned}$$

$$t=12, j=12 \quad K(12) = K(11) + A = 496+400 = 496+400 = 896 \text{ Ft}$$

$$\begin{aligned} t=13, j=10 \quad K(13) &= A + v_r(D_{11} + D_{12} + D_{13}) + v_r(D_{12} + D_{13}) + v_r D_{13} = \\ &= 400 + 2*(48+60+42) + 2*(60+42) + 2*42 = 400+300+204+84 = \\ &= \mathbf{988} \text{ Ft} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t=13, j=11 \quad K(13) &= K(10) + A + v_r(D_{12} + D_{13}) + v_r D_{13} = \\ &= 400 + 400 + 2*(60+42) + 2*42 = 400+400+204+84 = \mathbf{1088} \text{ Ft} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{t=13, j=12} \quad \mathbf{K(13)} &= K(11) + A + v*r*D_{13} = 496 + 400 + 2*42 = \\ &= 496 + 400 + 84 = \mathbf{980} \text{ Ft} \end{aligned}$$

$$t=13, j=13 \quad K(13) = K(12) + A = 736 + 400 = \mathbf{1136} \text{ Ft.}$$

A további számítások a fentieknek megfelelően történnek.

Előre történő számítás során meg kell határozni a minimumhelyeket. Visszafelé történő számításnál ezekből kiválasztjuk azokat, melyek a legalacsonyabb összes költséget eredményeznek az adott (számított) periódusra.

A $t=16$, $j=14$ azt jelenti, hogy a 16. héten fellépő igényt a 14. héten kell legyártani. Ha viszont az 14. héten elindul a gyártás, akkor a **Wagner – Whitin** kritériumnak megfelelően a 14. héten legyártjuk az 14. a 15. és a 16. hét igényeit is, vagyis: $Q_{14} = D_{14} + D_{15} + D_{16}$.

Menjünk vissza ezután a 13. hétre (hiszen, ha 14-16-ig már készen vagyunk), és nézzük meg, ott mi lesz az optimális eredmény. Azt találjuk, hogy $t=13$, $j=12$, ami azt jelenti, hogy a 13. hét igényét a 12. héten kell legyártani, mert az a legolcsóbb, így $Q_{12} = D_{12} + D_{13}$.

Végül nézzük meg a 11. hetet, ahol azt találjuk, hogy $t=11$ és $j=10$, ami szerint a 11. hét igényét a 10. héten kell legyártani, így: $Q_{10} = D_{10} + D_{11}$.

A termelési program összes költsége a $t = 16, j = 14$ sorban lenne található (hiszen ez átfogja a teljes tervezési időszakot) és összesen **1626 Ft** lenne.

Természetesen a kiszámított optimális mennyiségeket itt se felejtjük el **3** héttel előrébb hozni:

így a tényleges termelés a:

7.

9.

11. heteken lesz!

HÉT	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Bruttó igény („A” iránt, a „T” iránti igényből számítva)				66	48	60	42	66	45	39
Induló raktárkészlet („A” –ból)				12						
Nettó igény („A” –ból)				54	48	60	42	66	45	39
Gyártási tétel nagyság („A” –ból)				102	0	102	0	150	0	0
Aktuális raktárkészlet („A” –ból)				48	0	42	0	84	39	0
Gyártási feladat („A” –ból)	102	0	102	0	150	0	0			

Hasonlítsuk össze a különböző algoritmusokkal meghatározott termelési programok összes költségét:

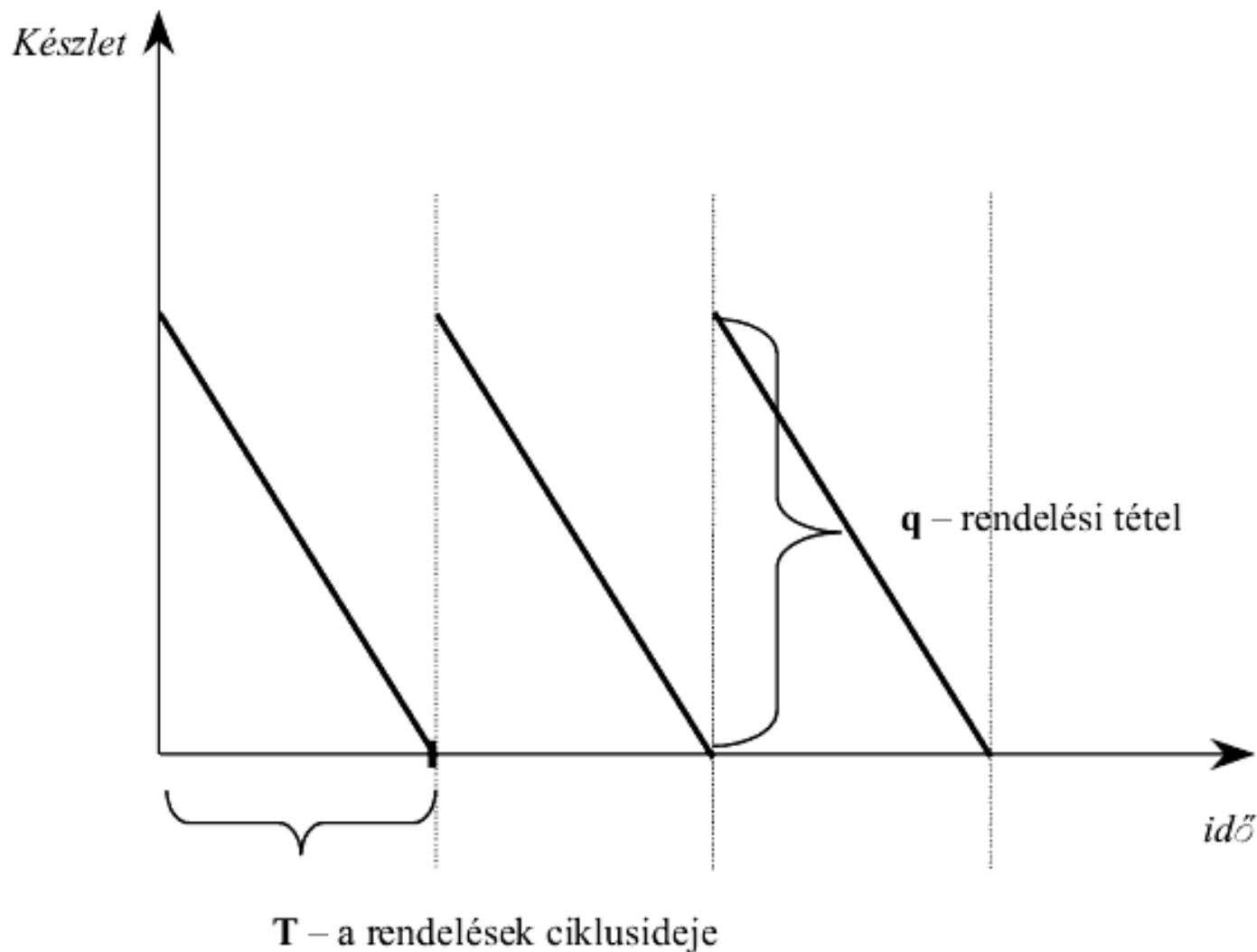
IDŐSZAK	GYÁRTÁSI TÉTELNAGYSÁG Q_i				
	Tételt - tételre	EOQ	Legkisebb összes ktg.	Legkisebb átlag ktg.	Wagner – Whitin algoritmus
10. hét	54	143	204	162	102
11. hét	48	0	0	0	0
12. hét	60	143	0	0	102
13. hét	42	0	0	192	0
14. hét	66	0	150	0	150
15. hét	45	143	0	0	0
16. hét	39	0	0	0	0
Összes ktg.	2.800 Ft.	2.282 Ft.	1.634 Ft.	1.682 Ft.	1.626 Ft.

Erre a feladatra csak a **Wagner – Whitin** algoritmus alkalmazható helyesen, a többi közelítő megoldásnak tekinthető.

A T - q (fűrészfog) készletezési modell

- A legkevesebb szabadságfokkal rendelkező modell mind a rendelési időköz (T), mind a rendelési tételnagyság (q) kötött.
- „vezérelt” készletezési mód (az igény és a teljesítés/előállítás ingadozásai, változásai, a készletek halmozódásához vagy hiányok kialakulásához vezetnek)
- Csak nagy készletmennyiségnél lesz csökkenő az ingadozások okozta hiba
- napjainkban elavult stratégia. (Használhatósága olyan tömegtermelést végző gyártási rendszerekben indokolt, ahol a termelési és felhasználási viszonyok állandónak mondhatók, illetve jól előrejelezhetők)
- A ciklusidő meghatározásánál figyelembe kell venni a rendelés feladási–beérkezési időt (τ), ami azt jelenti, hogy időbe telik, amíg a megrendelt tétel a raktárba érkezik és feldolgozhatóvá válik, miközben az anyagból felhasználás is van.

A T - q (fűrészfog) készletezési modell



A *T-S* (ciklikus) készletezési modell

- Ennél a modellnél is azonos időciklusonként végzik a készletek újra töltését, így a logisztikai rendszer időbeli tervezhetősége jó.
- A beszállítandó mennyiségeket (q) az határozza meg, hogy a ciklus alatti felhasználás miatt mekkora mennyiséget kell pótolni ahhoz, hogy ismét a maximális szintre (S) töltsük a készleteket.
- Ennek megfelelően a „ q ” rendelési mennyiség egy valószínűségi változó lesz.
- Szabadsága az előzőnél nagyobb, mégsem igényel folyamatos készletkövetést, csak minimálisan akkora információigény lép fel, hogy a rendelés feladási–beérkezési idő (t) kezdete előtt megbízható adatok legyenek a készletek szintjéről és az ez idő alatt várható felhasználásról.

A *T-S* (ciklikus) készletezési modell

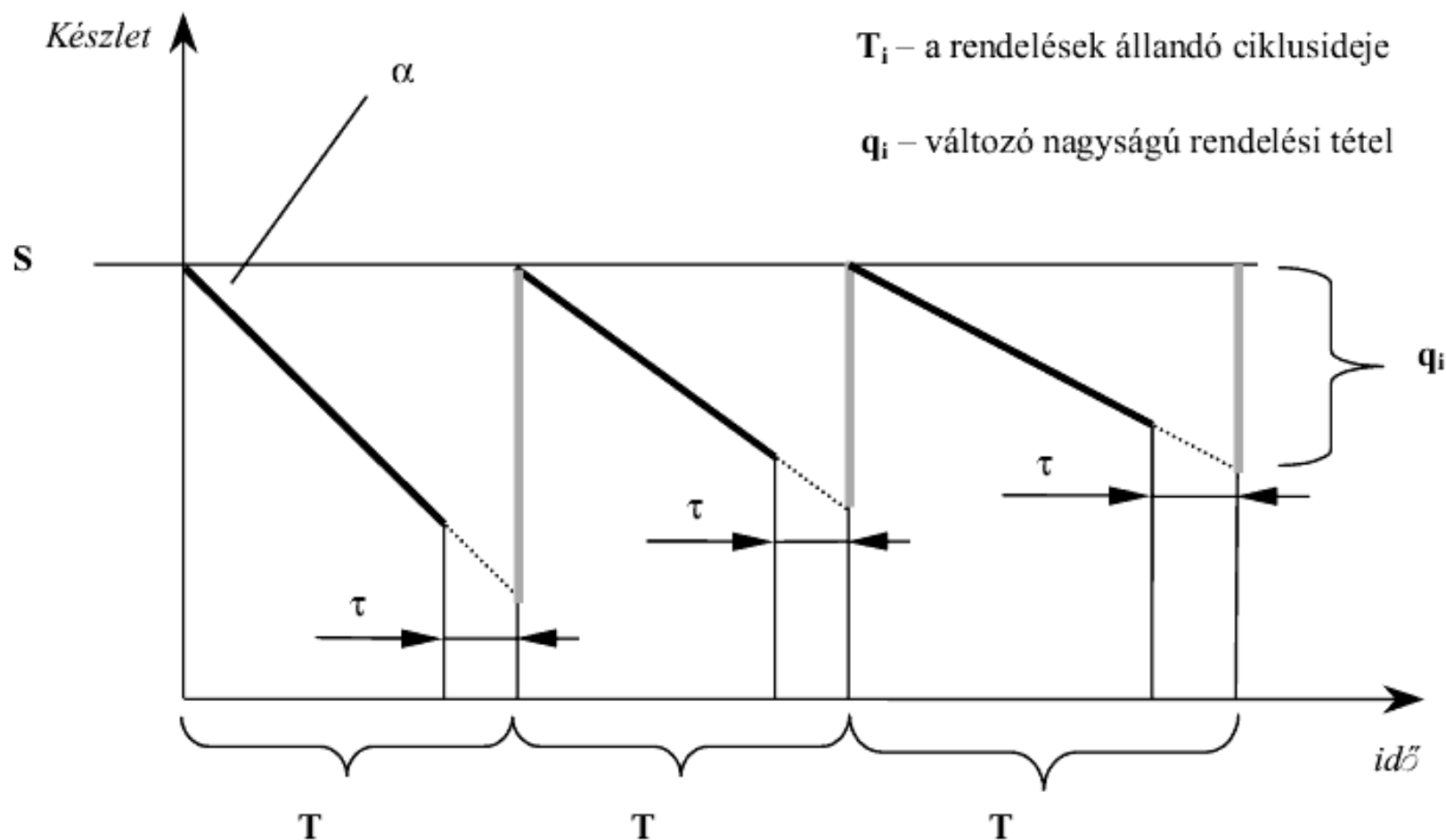
- A változó tétel nagyság miatt a szállító számára kevésbé tervezhető a kiszállítások ideje
- A „ T ” idő alatt fellépő hiányok a normál beszerzési csatornákon keresztül szinte pótolhatatlanok.
- Csak nagy készletpótlási költségek mellett szerezhető be a hiányzó készlet
- A folyamatos készletkövetés hiánya következtében a rendelés feladásakor csak becsült felhasználási intenzitással számolhatunk. Túlbecsült felhasználási rátával felesleges készlet alakul ki a maximális (S) szint felett, míg alulbecsléskor jobb esetben az újonnan beérkező készlet nem tölti fel a raktárt (S) - szintig – rosszabb esetben a tétel beérkezéséig hiány alakulhat ki
- Alkalmazása ott célszerű, ahol a felhasználás, különösen a „ T ” idő alatt jól becsülhető, előírt rendelési határidők vannak, illetve nehezen megoldható vagy túl drága a folyamatos készletellenőrzés.

A T - S (ciklikus) készletezési modell

α – a felhasználási ráta

T_i – a rendelések állandó ciklusideje

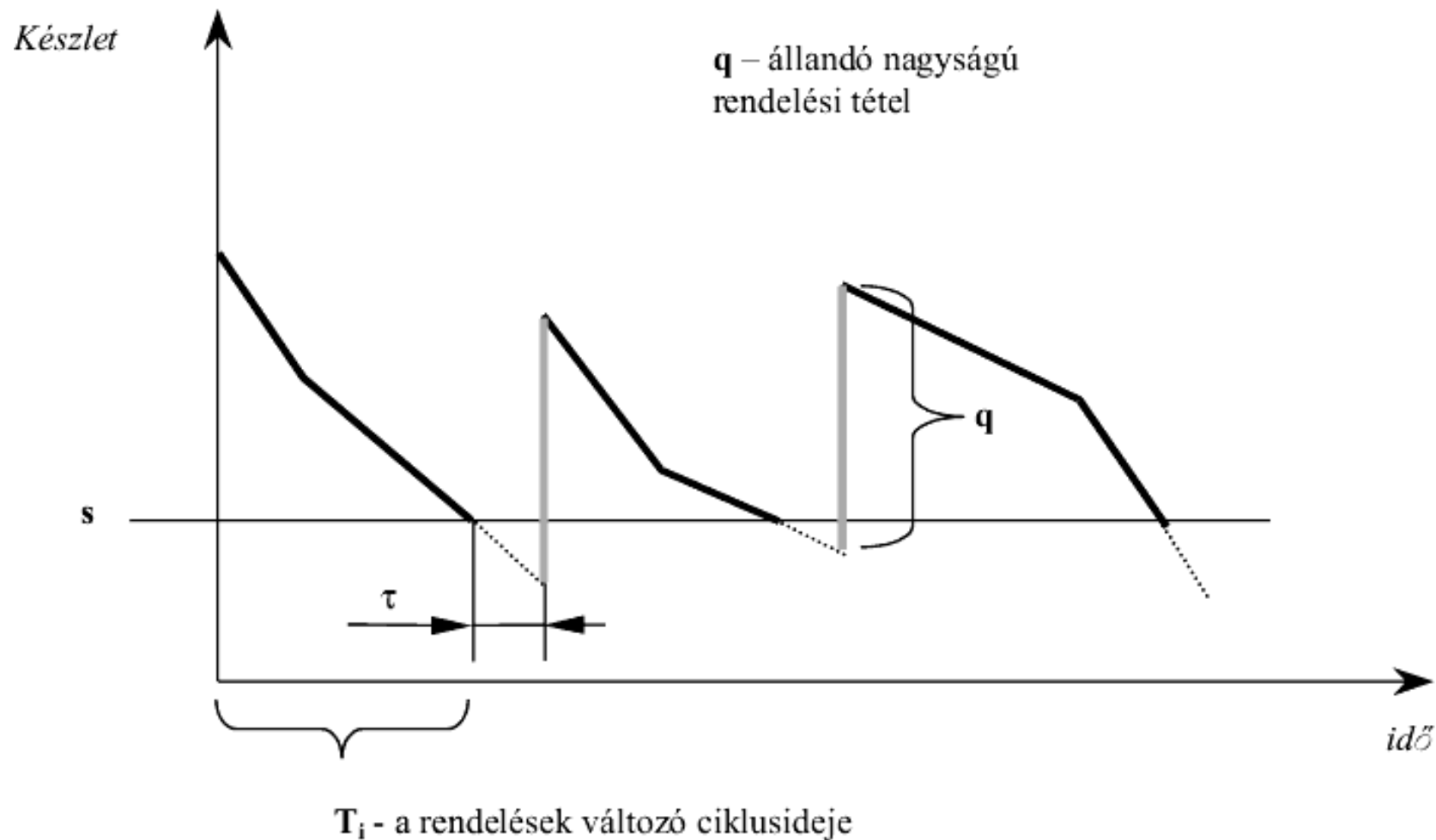
q_i – változó nagyságú rendelési tétel



Az s - q (kétraktáros) készletezési modell

- A minimális (s) készletszint és a rendelési tételek (q) nagysága egyaránt előre meghatározott.
- Folyamatos készletfigyelést igényel. Az „ s ”-hez tartozó készletszint elérése – mint a rendszer jelzése – indítja el a „ q ” mennyiségű készlet megrendelését.
- Itt is fontos a felhasználási rátának (α) a késedelmi idő (τ) miatti pontos becslése.
- Pontosabb becslés és kiszámíthatóbb felhasználási ütem, valamint rövidebb rendelés feladási idő alacsonyabb „ s ” készletszintet tesz lehetővé, így használata előnyös lehet.
- Bármely paraméter növekedése nagyobb biztonsági készletet, így magasabb készlettartási költségeket tesz szükségesé.
- Alkalmazása előnyös lehet kis ingadozást mutató igények, rövid „ τ ” esetén, valamint nagy hiányköltséget jelentő készleteknél.

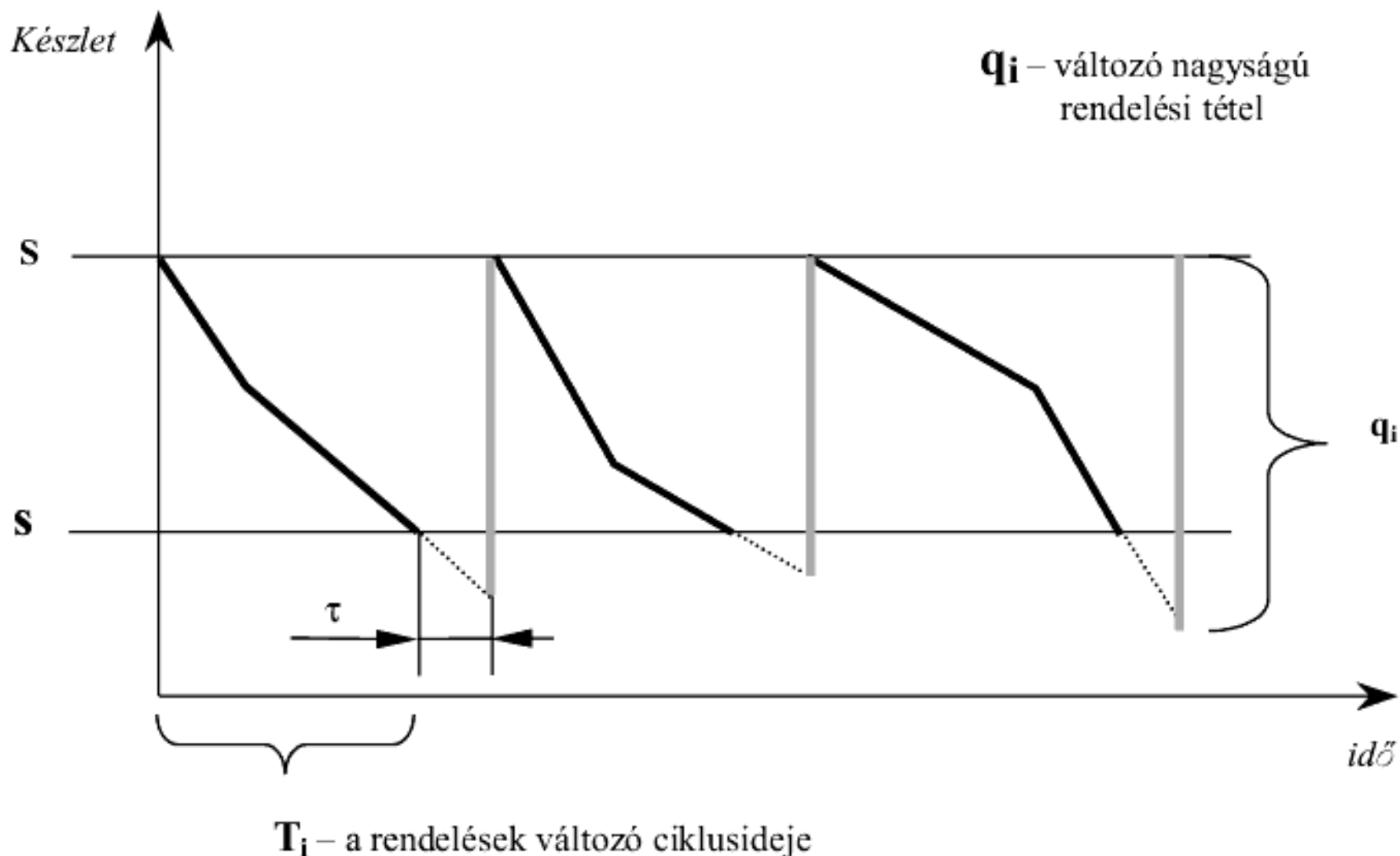
Az s - q (kétraktáros) készletezési modell



Az *S-s* (csillapításos) készletezési modell

- Szabályozott modell
- A készletfeltöltésre vonatkozó jelzés a minimális készlet szint (s) elérése. A maximális készletre (S) való töltéskor lényegében a $(s-q)$ modellnél megismert készlet szintnek a nagymértékű kilengéseit csillapítjuk, megakadályozva ezzel a túlzott készletek kialakulását.
- Ebből eredően a készletrendelés ciklusideje (T) és a megrendelt mennyiségek (q) egyaránt valószínűségi változók lesznek.
- Megkövetelt a folyamatos készletfigyelés, és a készlet felhasználási rátájának „ T ”-nak a becslése
- Alkalmazása ott javasolt, ahol pontos készletkövetést alakítottak ki a magas hiányköltségek kiküszöbölésére. Jellemzőiben együtt fedezhetők fel a kétraktáros és a ciklikus modell előnyei.

Az *S-s* (csillapításos) készletezési modell



Az újságárus modell

Az igény szerinti tömeggyártás fő jellemzője, hogy a végterméket összeszerelő cég a komponenseket tartós és kooperatív beszállítói – készletezési kapcsolat keretei között szerzi be. Az együttműködés gyakori formája a VMI (Vendor Managed Inventory) üzleti modell, amely az SCM (Supply Chain Management) modellek számítógépes alkalmazásával valósul meg.

Az igény szerinti tömeggyártás kooperatív beszállítói rendszerének követelményéből kiinduló egy új, a gyártás – indítási (setup) költséggel bővített klasszikus „újságárus” feladatra épülő, kiterjesztett költségfüggvényű, több rendelési periódus együttes kezelésére alkalmas, sztochasztikus készletgazdálkodási modell a következő:

Az újságárus modell

$$\begin{aligned}
 K_{123\dots n}(q_{123\dots n}) = & c_f + c_v(q_{123\dots n} - I) + hE[q_{123\dots n} - D_1] + hE[q_{123\dots n} - \\
 & - D_1 - D_2] + \dots + hE[q_{123\dots n} - D_1 - D_2 - \dots - D_n] + pE[D_1 - q_{123\dots n}] \\
 & + \\
 & + pE[(D_1 + D_2) - q_{123\dots n}] + \dots + pE[(D_1 - D_2 - \dots - D_{n-1}) - q_{123\dots n}] + pE \\
 & - \quad - \quad - \quad + \\
 & [D_n + [\dots + [D_2 + [D_1 - q_{123\dots n}]]]]
 \end{aligned}$$

Ahol: c_f – a gyártás indítás (setup) költsége (Ft)

c_v – egy komponens legyártásának költsége (Ft/db)

n – a beszállítói ellátási hiányból eredő büntetés (Ft/db)

Az újságárus modell

D_i – valószínűségi változó a végszerelő által az i -edik rendelési periódusban lehívott igénye (db)

$E[y]$ – az y valószínűségi változó várható értéke

$q_{123\dots n}$ – a komponens raktározási mennyisége n darab periódus esetén (db)

I – induló raktárkészlet (db)

$[a - b]^+ = \max(a - b, 0)$

$[a - b]^- = \min(a - b, 0)$

A modell segítségével analitikus módszerekkel meghatározható:

- a beszállítói bizonytalansággal terhelt,
- a végszerelői igényt kielégítő,
- tetszőleges, véges hosszúságú gyártási időhorizontot figyelembe vevő,

- költség-optimális készletezési politika zárt alakban..

A készletpolitikát jellemző raktározási és indítandó gyártási mennyiség számítása a végszerelő gyártási igény valószínűség – eloszlás típusától független..

$$F_{123...n}(q_{123...n}) = \frac{\sum_{i=1}^n p - c_v - h F_1(q_{123...n}) - h F_{12}(q_{123...n}) - \dots - h F_{123...n-1}(q_{123...n})}{p + h}$$

A feladat megoldásában $F_{123...i}()$ jelenti az $i - k$ darab rendelési periódus igény összegeinek együttes eloszlás függvényét.

A $q_{123...n}$ az optimális komponensraktározási mennyisége n darab periódus esetén.

Ez a készletgazdálkodási modell lehetővé teszi a túl kevés vagy túl sok komponens legyártásával keletkező járulékos beszálítói költségek minimalizálását.