1. Készletgazdálkodási modellek

1.1. Bevezetés

Készleteket rendszerint azért tartunk, hogy valamely szükségletet, igényt kielégítsünk. A szóban forgó anyag, cikk iránti igény, kereslet a készlet fogyását idézheti elő. Gondoskodnunk kell tehát időben a raktárkészlet pótlásáról, feltöltéséről. A megrendelés feladásától a megrendelt mennyiség raktárba érkezéséig eltelt időt *utánpótlási időnek* vagy röviden *pótlási időnek* nevezik. Az utánpótlási idő alatt is történhet kivétel a raktárból, a megrendelési időpontokat tehát úgy kell megválasztani, hogy a raktárkészlet az utánpótlási idő alatt is fedezze a szükségletet.

Az árubeérkezés és az árukivét, más szóval a beáramlás és a kiáramlás együttesen meghatározzák a raktárkészlet időbeli alakulását, amelyet egy koordináta rendszerben is ábrázolhatunk.

A vízszintes tengelyen az idő t, a függőleges tengelyen pedig a raktárkészlet $y(t)$ szerepel (abban az egységben kifejezve, amely a vizsgált árucikk természetéből következik).

A készlettartás, a készlet pótlása, a beszerzési lehetőségek mérlegelése idő- és költségigényes, de ugyanúgy gazdasági konzekvenciái vannak az igények ki nem elégítésének is. A készletgazdálkodással kapcsolatos a költségek jelentős szerepet játszanak a készletmodellekben.

Három alapvető csoportba oszthatók

a, Az utánpótlással, a raktárfeltöltéssel kapcsolatos költségek, ezek az ún. *beszerzési*, illetve *előállítási költségek*,

b, A raktár fenntartásának a költsége, a raktárkészletben lekötött eszközök költsége, kamat, eszközlekötési járulék, a készlet elévülésével, romlásával együttjáró veszteségek stb. melyeket gyűjtőnéven *raktározási költségnek* nevezünk,

c, A raktárhiány okozta termeléskiesés, pótlólagos beszerzéssel együttjáró többletköltség, vagy a hiány miatti nyereségkiesés stb. gyűjtőnéven a *hiányköltség*.

E költségek számszerű nagyságának, függvényalakjának a meghatározása nem egyszerű feladat, tény azonban, hogy e meggondolások hiányában optimális készletezési eljárásról csak nagyon kivételes és leszűkített esetekben beszélhetünk. A figyelembe veendő költségeket az is meghatározza, hogy milyen gazdasági célt, gazdasági eredményt kívánunk megvalósítani a készletezéssel. Előfordulhat pl., hogy mindenképpen 100%-os szükségletkielégítést kell elérnünk. Nyilvánvaló, hogy ebben az esetben nem kell foglalkoznunk sem a hiányköltség számszerű nagyságával, sem azzal, hogy a raktárkészlet időbeli alakulásával ez milyen függvényszerű kapcsolatban áll. Bár meggondolásainkban a hiányköltség ekkor látszólag nem szerepel, mégis látni fogjuk, hogy bizonyos modellekben valójában nagyságrendileg nagyobb minden más tekintetbe vett költségfajtánál .

A beszerzési költségek két egyszerű típusa a tétel *nagyságától független*, és a tétel *nagyságával egyenes arányban* lévő költség. Az előbbire példa a tétel átvizsgálási költsége, sorozatgyártásnál a sorozat beindítási költsége stb. Az utóbbi lehet pl. egy termék anyagköltsége vagy az áru egy egységének beszerzési ára. A raktározási költséget többnyire a készlet raktáron eltöltött idejével arányos költségként definiáljuk, mégpedig a készlet egységnyi mennyisége vagy egységnyi értéke időegységre eső költségét adjuk meg. Ekkor egy $[0, T]$ időintervallum (pl. negyedév, félév) raktározási költségét úgy számoljuk ki, hogy a raktárkészlet (illetve annak értéke) időbeli alakulását reprezentáló görbe és az időtengely $[0, T]$ intervalluma által meghatározott területet kiszámítjuk és megszorozzuk az idő és áruegységre (idő és értékegységre) eső raktározási költséggel. Ez a következőképpen látható be:

A vizsgált $[0, T]$ időtartam alatti raktározási időt megkapjuk, ha a készlet (illetve értéke) minden egységéről megállapítjuk, mennyi ideig tartózkodott a raktárban, azaz megállapítjuk, hogy mennyi idő telt el a raktárba érkezése idő pontjától a T időpontig, illetve a kivét időpontjáig. Ezeket az időtartamokat összegezve megkapjuk az összes raktározási időt. Ennél az eljárásnál azonban célszerűbb a következőképpen okoskodnunk. Osszuk be az időtengelyt egységekre és nézzük meg, hogy mindegyik időegység alatt mennyi áru volt a raktáron. E mennyiségeknek az időegységgel való szorzata megadja az illető időegységre eső raktározási időt, s ezek összege T időpontig a raktározási időt. Ha az időtengely felbontását minden határon túl finomítjuk, s $y(t)$ jelenti a raktárkészlet pillanatnyi nagyságát, akkor a T időszakra eső összes raktározási idő nem más, mint $\int_0^T y(t)dt$, azaz a raktárkészlet görbének az időtengellyel bezárt területe a T időpontig. Hasonlóképpen határozható meg a hiányköltség is, ha ez az egységnyi hiány időegységre eső költségként van megadva. Valójában tehát folytatnunk kellene a raktárkészlet görbét akkor is, midőn a készlet kifogyott, tehát a „hiány görbéjét”, a „túlkereslet görbéjét” kell felvennünk, mégpedig az időtengelyt reprezentáló vízszintes alatt. A készletgörbe negatív ágának az időtengellyel bezárt területe szorozva a hiányköltség idő- és áruegységre eső értékével adja a hiányköltséget.

A raktározás tárgyát képező anyag, cikk iránti kereslet, szükséglet, tehát az *output folyamata*, valamint az elérendő cél — pl. teljes igénykielégítés, csak részleges igénykielégítés — s az utánpótlási, feltöltési lehetőségek, tehát az *input folyamata* együttesen határozzák meg a készletáramlás lehetséges alakulásait.

A készletáramlás szóba jövő, lehetséges alakulásait a *készletezési modellek* írják le. A készletezési modellek alapján — a kitűzött cél szem előtt tartásával — meghozzuk azokat a döntéseket, amelyek a lehetséges *készletezési politikák*, *készletezési eljárások* (pl. mikor és mennyit rendeljünk) közül azt a készletezési eljárást politikát alakítják ki, melyek a tekintetbe vett körülmények között a célt legjobban megvalósítja. Ezt az eljárást *optimális készletezési* eljárásnak fogjuk nevezni.

A készletezési modellek osztályozási szempontjai igen különbözőek. Egyik alapvető osztályozási elv az, hogy mind a beáramlással, mind a kiáramlással, valamint a költségekkel kapcsolatos minden információ megadható-e előre teljes bizonyossággal, vagy pedig ezek között szerepelnek-e olyanok is, amelyekre csupán statisztikai törvényszerűségek állnak fenn. Az előbbi esetben ugyanis ún. *determinisztikus modellel* van dolgunk, míg az utóbbi esetben az ún. *sztochasztikus modellel*.

A véletlen (sztochasztikus) jelenségekre vonatkozó ismereteink, ítéleteink csupán valószínűségi jellegűek; nagyszámú megfigyelés, kísérleti tapasztalat s a kísérleteknek a matematikai statisztika és a valószínűségszámítás törvényein alapuló értékelése teszi lehetővé törvényszerűségeinek megismerését, feltárását. Valószínűségi ítéleten, következtetésen azt értjük, hogy állításunk nem logikai bizonyossággal, csak valószínűségi biztonsággal, azaz legfeljebb igen nagy valószínűséggel érvényes. Ha például egy véletlen mennyiségről, valószínűségi változóról azt állítjuk, hogy 0.95 valószínűséggel esik 100 és 150 közé, akkor ez azt jelenti, hogy a jelenségre vonatkozó megfigyeléseinket, méréseinket egymástól függetlenül sokszor megismételve, a szóban forgó véletlen mennyiség ezen megfigyelések kb. 95% -ban fog az említett határok közé esni.

Az osztályozás másik szempontja az, hogy az optimális készletezési politika egy vagy több időszakasz egymásutánjára vonatkozik-e. Az egy időszakaszt átfogó modellt *statikus modellnek*, a döntés egymásutánjaira vonatkozó modellt pedig *dinamikus modellnek* nevezzük.

Szokásos osztályozási elv még az is, amely aszerint tesz különbséget az egyes modellek között, hogy az idő, illetve döntési változó (amely rendszerint a raktárkészlettel kapcsolatos) *folytonos* vagy *diszkrét* értéket vesz-e fel. Ilyen értelemben beszélnek *folytonos időparaméterű diszkrét*, *folytonos időparaméterű folytonos* készletmodellekről, illetve *diszkrét időparaméterű folytonos* és *diszkrét időparaméterű diszkrét* modellekről.

Sok más osztályozási elv is ismeretes a szakirodalomban, ilyen pl. a költségtípusok szerinti megkülönböztetés, továbbá a hiány kezelése szerinti különbözőségek. Készlethiány esetén ugyanis két eljárás lehetséges. Az egyiknél a korábbi hiányt pótolják a beérkező készletből, a másiknál a kielégítetlen kereslet elvész, tehát a tervezettnél nagyobb zárókészlettel kell számolni.

A készletezési modellek sok fajtája és típusa alakult ki, már csak a fellépő véletlen törvényszerűségek sokféleségét tekintve is, nem beszélve a gyakorlati élet bonyolult szituációiról, a költségek, célok különbözőségeiről stb. A készletgazdálkodási modell - mint általában minden modell - a sokrétű valóságnak csak néhány jellemzőjét ragadhatja meg, hogy azután matematikai módszerek és logikai következtetések útján olyan mennyiségi összefüggéseket tárjon fel, amelyek elemzése, értékelése alapján a döntésre sor kerül.

A következő részekben néhány alapvető egyszerű statikus és sztochasztikus modellt mutatunk be, melyek segítségével megadunk néhány optimális eljárást.

1.2. Determinisztikus modellek

1.2.1. Optimális tételnagyság (sorozatnagyság) modellje

Valamely árucikkből, anyagból egy T időszak alatt összesen R egységre van szükség, mégpedig időegységenként mindig r egységre. A kivét, a raktárból való kiáramlás tehát időben egyenletes, hiány nem engedett meg.
A következő költségeket vesszük figyelembe:

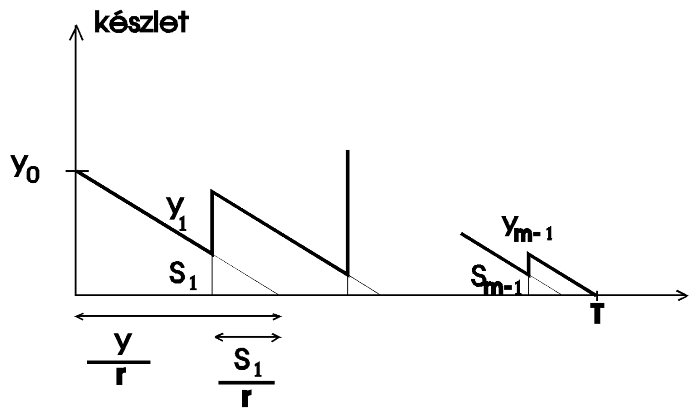
a, Egy tétel beszerzésének – előállításának – tételben foglalt mennyiségtől független költsége, jelölje c_1; (c_1 Ft)

b, A szóban forgó anyag, cikk egy egységének időegységre eső raktározási költsége, jelölje c_2 (c_2 Ft/db/idő)

Célunk olyan raktározási politika kialakítása, amely egyfelől biztosítja az időegységenként r árumennyiség meglétét, másfelől a beszerzéssel és raktározással kapcsolatos költségeket minimalizálja.

Induljunk ki abból, hogy a feltöltések szabálytalan időközönként, szabálytalan mennyiségben történnek. Tegyük fel, hogy T idő alatt m feltöltés történik. Akkor a rendelési költség $m \cdot c_1$. Ehhez adódik hozzá a raktározási költség, amely egyenlő az összraktározási idő$\cdot c_2$. A 0 időpontban y_0 készlet áll rendelkezésre, továbbá $m-1$ alkalommal $y_1, y_2, ..., y_{m-1}$ készlet érkezik a raktárba. A rendelések érkezésekor raktáron lévő mennyiségek legyenek $S_1, ..., S_{m-1}$. A készletszintet egy „fűrészfoggörbe” jelzi. A raktározási időt a „fűrészfoggörbe” alatti terület adja meg. Az egyenesek meredeksége állandó (r), ami egységnyi idő alatt elvitt mennyiséget jelent. (Lásd az alábbi ábrát.)

A görbe alatti területet úgy kapjuk meg, hogy az $y_i + S_i$, $\frac{y_i+S_i}{r}$ befogókkal rendelkező derékszögű háromszögek területéből kivonjuk az S_{i+1}, $\frac{S_{i+1}}{r}$ befogókkal rendelkező derékszögű háromszög területét $i = 0, ..., m-1$,



$S_0 = 0,\ S_m = 0$. Könnyű látni, hogy a teljes terület

$$t = \frac{y_0^2}{2r} - \frac{S_1^2}{2r} + \frac{(S_1 + y_1)^2}{2r} - \frac{S_2^2}{2r} + ... + \frac{(S_{m-1} + y_{m-1})^2}{2r} =$$

$$\frac{1}{2r}\sum_{i=0}^{m-1} y_i^2 + \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{m-1} S_i y_i.$$

Így a teljes költség:

$$K_T(y_0, y_1, ...y_{m-1}; S_1, ..., S_{m-1}) = m \cdot c_1 + t \cdot c_2 =$$

$$mc_1 + c_2\frac{1}{2r}\sum_{i=0}^{m-1} y_i^2 + c_2\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{m-1} S_i y_i.$$

Nyilván ez a költség csökken ha $S_i = 0, \qquad i = 1, ..., m-1$, ami azt jelenti, hogy akkor történik szállítás, ha az árukészlet elfogyott, vagyis nincs maradék raktárkészlet. Kérdés, hogy a

$$K_T(y_0, y_1, ..., y_{m-1}) = m \cdot c_1 + c_2\frac{1}{2r}\sum_{i=0}^{m-1} y_i^2$$

függvény mikor lesz minimális. Vizsgáljuk meg a

$$\sum_{i=0}^{m-1} y_i^2$$

függvényt. Mellékfeltételként

$$\sum_{i=0}^{m-1} y_i = R,$$

ami a beszerzendő készlet nagysága. Az y_i értékek matematikai közepe, vagy átlaga $\frac{R}{m}$.
Legyen $x_i \doteq y_i - \frac{R}{m}$, így $y_i = x_i + \frac{R}{m}$, továbbá

$$\sum_{i=0}^{m-1} y_i = \sum (x_i + \frac{R}{m}) = \sum x_i + R = R,$$

vagyis $\sum x_i = 0$.
Ezt felhasználva

$$\sum y_i^2 = \sum \left(\frac{R}{m} + x_i\right)^2 = m\frac{R^2}{m^2} + \frac{2R}{m}\sum x_i + \sum x_i^2 = \frac{R^2}{m} + \sum x_i^2.$$

Látszik, hogy $\sum y_i^2$ akkor minimális, ha $\sum x_i^2 = 0$, ebből $x_i = 0$ következik. Így $y_i = \frac{R}{m}, \;\; i = 0, ..., m-1$.
Jelölje ezt az állandó tételnagyságot $q \doteq \frac{R}{m}$. Könnyű látni, hogy a készletgörbe szabályos fűrészfoggörbe q ugrásokkal, az időköz $\frac{q}{r}$. Ekkor

$$K_T(m) = mc_1 + \frac{c_2}{2r}\frac{R^2}{m}.$$

Meg kell határozni $K_T(m)$ minimumát!

$$\frac{d}{dm}K_T(m) = c_1 - \frac{c_2}{2r}R^2\frac{1}{m^2} \;\; ,$$

melynek zérushelye

$$m_0 = R\sqrt{\frac{c_2}{c_1 2r}},$$

$$K_T''(m_0) = \frac{c_2 R^2}{rm^3} \;\; , \;\; K_T''(R\sqrt{\frac{c_2}{c_1 2r}}) \geq 0,$$

ezért a minimumhely az $m_0 = R\sqrt{\frac{c_2}{c_1 2r}} \qquad q_0 = \frac{R}{m_0} = \sqrt{\frac{2rc_1}{c_2}}$. Így az optimális tételnagyság $q_0 = \sqrt{\frac{2rc_1}{c_2}}$.

Más megoldás:
A számtani és mértani közép között fennálló egyenlőtlenség miatt

$$K_T(m) = \frac{2mc_1 + \frac{c_2R^2}{rm}}{2} \geq \sqrt{2mc_1 \cdot \frac{c_2R^2}{rm}} = R\sqrt{2\frac{c_2c_1}{r}} = \sqrt{2c_1c_2RT}$$

$$K_T(m) \text{ minimális } \iff 2mc_1 = \frac{c_2R^2}{rm}.$$

Így

$$m_0 = R\sqrt{\frac{c_2}{2rc_1}}\ .$$

$$\text{Ebből } m_0 = R\sqrt{\frac{c_2}{2rc_1}} \text{ és } q_0 = \sqrt{\frac{rTc_1}{\frac{c_2T}{2}}} = \sqrt{2r\frac{c_1}{c_2}}.$$

Így az optimális tételnagyság $q_0 = \sqrt{\frac{2rc_1}{c_2}}$,
melyet szokás **Wilson-formula**, **Andler-formula**, **négyzetgyök-törvénynek** is nevezni.
Ebből az optimális rendelési időhöz

$$t_0 = \frac{q_0}{r} = \sqrt{\frac{2c_1}{rc_2}},$$

míg a minimális költség

$$K_0 = \sqrt{2RTc_1 \cdot c_2} = \sqrt{2rtT^2c_1 \cdot c_2}.$$

Összefoglalva eddigi eredményeinket megállapíthatjuk, hogy ha

(i) Ismert egy T időtartam összszükséglete,

(ii) Az igénykielégítés konstans intenzitású,

(iii) Két költségtényezőt veszünk figyelembe (beszerzés, raktározás),

(iv) A beáramlási folyamat determinisztikus,

akkor az optimális a raktárfeltöltési eljárás az hogy, szabályos időközönként az optimális tételnagyságra töltjük a készletet.

Az optimális eljárás megkeresése az esetek túlnyomó részében nem ilyen egyszerű és sokszor csak közelítő algoritmussal határozható meg. A közelítő megoldások is hasznosak, de lényegesen mélyebb matematikai módszereket és meggondolásokat igényelnek, mint a most bemutatott. Mégis az itt követett eljárás sok szempontból jellegzetes. Nevezetesen:

(i) Meg kell ismerkedni a beáramlás és a kiáramlás sajátosságaival, a vizsgálatba vonható költségekkel,

(ii) Meg kell határoznunk az elérni kívánt célt vagy célokat,

(iii) Matematikai összefüggések segítségével felírjuk a feltételeket és az célfüggvényt,

(iv) A lehetséges eljárások közül kiválasztjuk az optimálisat,

(v) Meghatározzuk az optimális eljárás azon paramétereit, amelyek az ezen eljáráshoz tartozó célfüggvényt optimalizálják.

A készletgazdálkodási modellek az esetek túlnyomó részében valamely optimumszámítási feladatra vezetnek, gyakran lineáris és nem lineáris programozási feladatra.

Vegyük észre, hogy ha a beszerzési költség $by + c_1$ alakú, ahol b Ft/db dimenziójú költség, akkor a költségfüggvény $K^* = K + b \cdot R$, ahol K az előző modell költségfüggvénye. Így az optimális beszerzési politika változatlan marad. Vagyis ha egy db áru eladási ára h Ft, akkor látható, hogy a teljes mennyiség eladási ára $K \cdot h$. Így a nyereség

$$K \cdot h - K^*,$$

vagyis a nyereség akkor maximális, ha a kiadás minimális.

Példák

1. 5 hónap alatt 100 db árucikk szükséges, a fogyasztó rendelése egyenletes, havonta 20 db-ot igényel. Egy tétel rendelési költsége 400 Ft, havi raktározási költsége 10 Ft. Mi a minimális költséggel járó politika?

   Megoldás:

$$q_0 = \sqrt{2\frac{100}{5} \cdot \frac{400}{10}} = 40 \text{ db},$$

$$t_0 = \frac{40}{20} = 2 \text{ havonként},$$

$$K_0 = \sqrt{2 \cdot 100 \cdot 5 \cdot 400 \cdot 10} = 20000 \text{ Ft}.$$

2. Előállítandó 12000 db alkatrész 1 év alatt folyamatosan, sorozatgyártással. Egy-egy sorozat legyártásával kapcsolatos állandó költség — a sorozatnagyságtól függetlenül — 20000 Ft, raktározási költség 30 fillér/db naponta. Meghatározandó az optimális sorozatnagyság!

   Megoldás: Vegyük észre, hogy a gyártási folyamat a rendelési folyamat fordítottja, ezért ugyanazok érvényesek. Így

$$q_0 = \sqrt{2 \cdot \frac{12000}{365} \cdot \frac{20000}{0,3}} = 662 \text{ db},$$

$$t_0 = \sqrt{2 \cdot \frac{365}{12000} \cdot \frac{2000}{0,3}} = 20,14 \text{ nap},$$

$$K_0 = \sqrt{2 \cdot 365 \cdot 12000 \cdot 2000 \cdot 0,3} = 72498,28 \text{ Ft.}$$

3. Elkészítendők egy árucikknél az utánrendelési idők, ha az utánpótlási időtartam 30 nap, március 1-től napi 20 egységű fogyasztást kell ellátni, egy tétel rendelési költsége (tételmennyiségtől függetlenül) 500 Ft, a raktározási költség 0,5 Ft.

   Megoldás: $(r = 20, c_1 = 500, c_2 = 0,5)$ $q_0 = 200\ db, t_0 = 10,$ mivel a rendeléstől számított 30 nap múlva érkezik az áru, ezért az előző 200 tételt 30 nappal, a másodikat 20 nappal, a harmadikat 10 nappal március 1-e előtt rendeljük meg. Március 1-én ettől kezdve 10 naponként egy-egy tételt rendelünk.

1.2.2. Optimális tételnagyság modell az önköltségi beszerzési árral arányos raktározási költséggel

Feltételek:

- A $[0, T]$ időszakban összszükséglete R,
- Minden időegységben pontosan r egység áramlik ki a raktárból,
- Egy y tétel beszerzési (előállítási költsége) $by + c_1$, ahol b a tétel egy egységének beszerzési ára és c_1 a tételben foglalt mennyiségtől független költség,
- A raktározási költség w, a raktárkészlet 1Ft értékének egy időegységre eső költsége (Ft/Ft/idő),
- A rendelési és utánrendelési politika tőlünk függ.

Az a körülmény, hogy egy adott időintervallum minden időegységében r egység áramlik ki a raktárból, meghatározza a kiáramló görbéjét. Most a függvényértékek nem mennyiséget, hanem Forintban kifejezett pénzösszeget jelentenek. Nem nehéz belátni, hogy az optimális készletezési eljárás most is az, hogy szabályos időközönként mindig ugyanarra a szintre töltjük fel a raktárkészletet. Ehhez az optimális eljáráshoz tartozó $K_T(q)$ összköltség kiszámítási módja jelen esetben egy kicsit módosul. A raktározási költségtényező most ugyanis nem áru- és időegységre, hanem a beszerzési költség egy egységének időegységre eső részeként van megadva. Egy q tétel beszerzése $bq + c_1$ Ft, s minthogy időegységenként r egység hagyja el raktárunkat, $\frac{q}{r}$ idő múlva ennek a tételnek 0 az értéke. Ehhez a tételnagysághoz tartozó átlagos lekötött forintérték, tehát $\frac{bq+c_1+0}{2}$, amelyet $\frac{q}{T}$ idővel szorozva megkapjuk a raktárkészlet átlagos értékét, s ennek w-szerese adja a raktározási költséget. Abban az esetben, ha m alkalommal kerül sor raktárfeltöltésre, tehát $R = mq$, az optimális eljáráshoz tartozó összköltség

$$K_T(q) = mc_1 + m(\frac{q}{r} \cdot \frac{bq + c_1}{2})w + bR.$$

A $b \cdot R$ tag független attól, hogy m ill. q mekkora értéket vesz fel. Az $m = \frac{rT}{q}$ helyettesítés után T-vel osztva az egyenlet mindkét oldalát, megkapjuk az időegységre eső költséget:

$$k(q) = \frac{K_T(q)}{T} = \frac{rc_1}{q} + \frac{1}{2}bwq + \frac{1}{2}c_1w + br.$$

Nem nehéz megmutatni, hogy a $k(q)$ függvény akkor veszi fel minimumát, ha $q_0 = \sqrt{2r\frac{c_1}{bw}}$, illetve $q_0 = \sqrt{2\frac{R}{T}\frac{c_1}{bw}}$. Ennek megfelelően

$$t_0 = \frac{q_0}{r} = \sqrt{2\frac{c_1}{rbw}} = \sqrt{2\frac{T}{R}\frac{c_1}{bw}}.$$

Innen $k(q_0) = \sqrt{2rbc_1w} + br + \frac{1}{2}c_1w.$
A T idő alatti összköltséget megkapjuk, ha mindkét oldalt T-vel megszorozzuk.
Így $K_T(q_0) = \sqrt{2RTbc_1w} + bR + \frac{T}{2}c_1w$. Könnyű észrevenni, hogy a q_0, t_0-nál az előző feladatbeli c_2 szerepét a $b \cdot w$ mennyiség vette át.

1.2.3. Az optimális tételnagyság modell árengedménnyel

Ismét tételezzük fel, hogy a T idő alatti összszükséglet R, amelyet $r = \frac{R}{T}$ időegységre eső intenzitással elégítünk ki az egész T időtartam folyamán. Jelölje Q azt a mennyiséget, amely felett árengedményt adnak, vagyis kapunk. Tegyük fel, hogy egy y tétel beszerzése a következő költséggel jár:

$$\begin{array}{ll} b_1y + c_1, & \text{ha } 0 < y < Q, \\ b_2y + c_1, & \text{ha } Q \leq y, \;\; b_1 > b_2. \end{array}$$

A készlettartás időre és forintra eső költsége legyen ismét w.
Határozzuk meg az optimális beszerzési politikát.
A következőképpen kell eljárnunk: Mintmár az előző modelleknél is megállapítottuk, hogy az adott feltételek mellett az optimális eljárás az, ha szabályos időközönként q_0 tétel raktárba érkezéséről gondoskodunk. Tudjuk továbbá, hogy ezen eljáráshoz tartozó összköltséget a

$$K_T(q_0) = \sqrt{2RTbwc_1} + bR + \frac{T}{2}c_1w$$

összefüggés adja meg. Határozzuk meg ezért a b_2 egységárhoz tartozó optimális tételnagyságot, jelölje ezt q_2. Ekkor $q_2 = \sqrt{2r\frac{c_1}{b_2w}}$.
Két eset lehetséges:

a, $q_2 \geq Q$, ekkor q_2 optimális tételnagyság,

b, $q_2 < Q$.

Ez esetben q_2 nem lehet az optimális tételnagyság, hiszen $q_2 < Q$ tételnagyságot b_2 egységáron nem vásárolhatunk. Ki kell számítani tehát a b_1 árhoz tartozó tételnagyságot. Ez $q_1 = \sqrt{2r\frac{c_1}{b_1w}}$. Nyilvánvaló, hogy ha q_2 már kisebbnek bizonyult Q-nál, akkor a $b_1 > b_2$ reláció miatt

$$Q > q_2 = \sqrt{2r\frac{c_1}{b_2w}} > \sqrt{2r\frac{c_1}{b_1w}} = q_1.$$

A már ismert képletek alapján q_1 és Q tételnagysághoz tartozó időegységre jutó összköltségek

$$k(q_1) = \frac{rc_1}{q_1} + \frac{1}{2}c_1w + \frac{1}{2}b_1wq_1 + b_1r\ ,$$

$$k(Q) = \frac{rc_1}{Q} + \frac{1}{2}c_1 w + \frac{1}{2}b_2 wQ + b_2 r.$$

A $b_1 > b_2, q_1 < q_2 < Q$ reláció miatt

$$\frac{rc_1}{q_1} > \frac{rc_1}{Q}, \qquad b_1 r > b_2 r,$$

de

$$\frac{1}{2}b_1 w q_1 \overset{\leq}{\underset{\geq}{=}} \frac{1}{2}b_2 wQ$$

relációk bármelyike fennállhat.
Így ismét két esetet kell megkülönböztetnünk:

(i) $k(q_1) \geq k(Q)$,

(ii) $k(q_1) < k(Q)$.

Tekintettel arra, hogy költségminimumra törekszünk, az (i) esetben Q az optimális tételnagyság, (ii) esetben pedig q_1. Így az érkezési időközöket is a megfelelő tételnagyság alapján határozzuk meg.

Példák

1. Valamely cikkből összesen 2400 db-ra van szükség 12 hónap alatt: T=12 hónap, R=2400, c_1=350 Ft, w=0,02(Ft/Ft/idő),

$$\left.\begin{array}{l} b_1 = 10 \text{ Ft, ha } 1 \leq q < 500 \\ b_2 = 9,25 \text{ Ft, ha } q \geq 500 \end{array}\right\} Q = 500.$$

   Így

$$q_2 = \sqrt{2\frac{2400}{12}\frac{350}{9,25 \cdot 0,02}} \approx 870.$$

   Tehát $q_2 > Q$, az optimális tételnagyság 870 db. Ezzel az értékkel már továbbszámolható az optimális időköz és a minimális költségfüggvény.

2. Az első példa adatai közül egyedül a c_1=100 Ft adatot változtassuk meg. Ekkor

$$q_2 = \sqrt{2\frac{2400}{12}\frac{100}{9,25 \cdot 0,02}} \approx 465 < Q = 500.$$

   Ezért meg kell határozni q_1-et is

$$q_1 = \sqrt{2\frac{2400}{12}\frac{100}{9,25 \cdot 0,02}} \approx 447.$$

Hasonlítsuk össze a $K_T(q_1)$ és K(Q) értékeket!

$$K_T(q_1) = K_T(447) = \sqrt{2 \cdot 2400 \cdot 12 \cdot 10 \cdot 100 \cdot 0,02} +$$

$$+2400 + \frac{1}{2} 100 \cdot 12 \cdot 0,02 = 25085,$$

míg

$$K_T(500) = \frac{100 \cdot 2400}{500} + 9,25 \cdot 2400 + \frac{1}{2} 100 \cdot 12 \cdot 0,02 +$$

$$+\frac{1}{2} 9,25 \cdot 12 \cdot 0,02 \cdot 500 = 23247.$$

Azt kaptuk, hogy $K_T(500) < K_T(447)$ így az optimális tételnagyság Q=500. Ebből számolható ki az optimális időköz is.

$t_0 = \frac{500}{200} = \frac{5}{2}$ hónap.

3. Az első példa adataival dolgozunk kivéve

$$c_1 = 100, \quad Q = 3000.$$

Ezért $q_2 = 465 < 3000$, $q_1 = 447$, $K(447) = 25085$, $K(3000) = 25622, K(447) < K(3000)$.

Az optimális tételnagyság 447. $b = \frac{447}{200}$ hónap.

Megjegyzés:
Három esetben következzen be mennyiségi korláttól függő árengedmény, mégpedig

$$\begin{array}{ll} b_1, \text{ ha } 0 < q < Q_1 , & \\ b_2, \text{ ha } Q_1 \leq q < Q_2 , & \qquad b_1 > b_2 > b_3, \\ b_3, \text{ ha } Q_2 \leq q . & \end{array}$$

A követendő eljárás most a következő:

a, Kiszámítjuk q_3-t, azaz a b_3 egységárhoz tartozó optimális tételnagyságot. Ha $q_3 \geq Q_2$, akkor q_3 a keresett optimális nagyság.

b, Ha $q_3 < Q_2$, akkor kiszámítjuk a q_2-t. Minthogy $b_3 < b_2$, így $q_2 < q_3$. Ennek következtében $q_2 < Q_1$ vagy $Q_1 \leq q_2 < Q_2$. Ha $q_3 < Q_2$ és $Q_1 \leq q_2 < Q_2$, akkor a helyzet ugyanaz, mint a már tárgyalt előző esetben, vagyis össze kell hasonlítani a $K(q_2)$ költségeit a $K(Q_2)$ költséggel, eldöntendő, hogy a q_2 vagy a Q_2 a keresett optimális tételnagyság.

c, Ha $q_3 < Q_2$ és $q_2 < Q_1$, akkor ki kell számítani a q_1-t, amire szükségképpen igaz $q_1 < q_2 < Q_1$. Ebben a helyzetben $K(q_1)$-et kell összehasonlítani $K(Q_1)$-el, és eldönteni melyik a keresett optimális tételnagyság.

1.2.4. Az optimális tételnagyság modell hiány esetén

Tekintsük ismét az 1.2.1 részben tárgyalt feladatot, azzal a különbséggel, hogy most nem törekszünk az $R = r \cdot T$ szükségletet T idő alatti teljes, hanem csak részbeni kielégítésére. A raktárhiány tehát megengedett, és jelöljük a hiány áru és időegységre eső költségét c_3-mal. (c_3 Ft/db/idő)

Foglaljuk össze az adott feltételeket:

- A $[0, T]$ időszakasz össz-szükséglete R,
- Minden időegység alatt pontosan r egységre van szükség,
- c_1 Ft a tételben foglalt egységektől függetlenül, állandó beszerzési költség,
- A készlet egységének időegységre eső raktározási költsége c_2 Ft (c_2 Ft/db/idő),
- A hiány időegységre eső raktározási költsége (kára) c_3 Ft (c_3 Ft/db/idő),

Az a körülmény, hogy ha rendelkezünk készlettel, ez időegységként r egységnyi intenzitással áramlik ki a raktárunkból, ismét determinálja a kiáramlási görbét. Az időtengely alatti görbeterületnek a c_3 költségtényezővel való szorzata adja a hiányköltséget. A készlet mennyisége megnő, ha beérkezés történik, de ha a hiányt ekkor sem elégítjük ki, elvész. Az 1.2.1 részben követett gondolatmenet alapján nem nehéz belátni, hogy az optimális készletezési eljárás most is a szabályos fűrészfog-görbével ábrázolható raktárfeltöltési politika, csakhogy most nem az egész R igényt elégítjük ki, hanem annak egy részét. Nyilvánvaló, hogy az x tengely alatt elhelyezkedő derékszögű háromszög területe a hiánnyal kapcsolatos raktározási idő. Az optimális készletezési eljárás tehát most is az, hogy egyenlő időközönként ugyanarra a szintre töltjük fel raktárkészletünket, csakhogy most nem q, hanem valamely q-nál kisebb S mennyiséget szerzünk be. S és q aránya a költségtényezők egymáshoz való arányától függ.

Meghatározandó S és q azon mennyisége (jelöljük ezt S_0, q_0-val) amely mellett az összköltség mint e két mennyiség függvénye minimális. A költségfüggvényt a következő módon számolhatjuk ki. Ha q egységet szerzünk be, akkor $\frac{q}{r}$ időközönként $\frac{rT}{q}$ számú beszerzéssel a teljes igényt ki tudjuk elégíteni. Most azonban $\frac{q}{r}$ időközönként csupán $S < q$ mennyiséget szerzünk be, ez $\frac{S}{r}$ ideig fedezi a szükségletet. Ebből nyilvánvaló, hogy készlet az $\frac{S}{r}$ időtartam felett, hiányt pedig a $\frac{q}{r} - \frac{S}{r} = \frac{q-S}{r}$ időszak alatt jelentkezik. Az előbbiek figyelembevételével könnyen felírhatjuk az összköltséget

$$K(q, S) = \frac{rT}{q} \left[c_1 + \frac{S^2}{2r} c_2 + \frac{(q-S)^2}{2r} c_3 \right].$$

Az analízis ismert módszereivel megoldva ezen minimalizálási feladatot a minimumhelyekre a következő értékek adódnak:

$$q_0 = \sqrt{2r\frac{c_1}{c_2}}\sqrt{\frac{c_2+c_3}{c_3}},$$

illetve az $r = \frac{R}{T}$ helyettesítéssel

$$q_0 = \sqrt{2\frac{Rc_1}{Tc_2}}\sqrt{\frac{c_2+c_3}{c_3}},$$

$$S_0 = \sqrt{2r\frac{c_1}{c_2}} \cdot \sqrt{\frac{c_3}{c_2+c_3}},$$

illetve

$$S_0 = \sqrt{2\frac{Rc_1}{Tc_2}} \cdot \sqrt{\frac{c_3}{c_2+c_3}}.$$

Ezeket az értékeket az

$$\frac{\partial K(q,S)}{\partial S} = \frac{STc_2}{q} - \frac{T(q-S)}{q}c_3 = 0,$$

$$\frac{\partial K(q,S)}{\partial q} = \frac{rTc_1}{q^2} - \frac{S^2Tc_2}{2q^2} + \frac{2q(q-S)-(q-S)^2}{2q^2}Tc_3 = 0$$

egyenletrendszer megoldásaiként kaptunk. Raktárfeltöltésre $\frac{q_0}{r}$ időközönként kerül sor, jelölje ezt $t_0(q_0, S_0)$, ekkor

$$t_0(q_0,S_0) = \sqrt{\frac{2c_1}{rc_2}}\sqrt{\frac{c_2+c_3}{c_3}},$$

illetve

$$t_0(q_0,S_0) = \sqrt{2\frac{Tc_1}{Rc_2}}\sqrt{\frac{c_2+c_3}{c_3}}.$$

Az összköltség az egész időtartamra

$$K(q_0,S_0) = \sqrt{2RTc_1c_2}\sqrt{\frac{c_3}{c_2+c_3}} = T\sqrt{2rc_1c_2}\sqrt{\frac{c_3}{c_2+c_3}}.$$

Tehát az optimális eljárás az, hogy $t_0(q_0, S_0)$ időközönként a raktárkészletet S_0 mennyiséggel töltjük fel, ekkor a minimális összköltség $K(q_0, S_0)$ Ft lesz.

Megjegyzés:

Jelöljük q_0 második tényezőjének a gyökjel alatt szereplő $\frac{c_3}{c_2+c_3}$ mennyiséget ϱ-val ($\varrho < 1$ általában) Ha $\varrho \approx 1$ akkor $\frac{1}{\varrho} \approx 1$. Ebben az esetben a 1.2.1 részben szereplő képletek megegyeznek az itt szereplő képletek megfelelőivel. A $\varrho \approx 1$ akkor áll fenn, ha $c_2 \ll c_3$, azaz a hiányköltség nagyon nagy a raktározási költséghez képest. Ekkor hiányt nem szabad megengednünk, így ez a modell valóban a fenn említett modellnek felel meg. Így az 1.2.1 rész ezen modell speciális esete $c_3 = \infty$ helyettesítéssel. Ekkor $S_0 = q_0$, amely az optimális feltöltési egység. Az összefüggésekből leolvasható, hogy

$$\sqrt{2RTc_1c_2} = K(q_0) \geq K(q_0, S_0) = \sqrt{2RTc_1c_2}\sqrt{\frac{c_3}{c_2+c_3}},$$

azaz az itt követett optimális eljárás mindig kisebb összköltséget ad. Egyenlőség csak a $\varrho = 1$ esetben áll fenn.

Könnyű látni, hogy ha a beszerzési költség $c_1 + bq$ alakú, akkor a költségfüggvény

$$m\Big[c_1 + \frac{S^2}{2r}c_2 + \frac{(q-S)^2}{2r}c_3 + Sb\Big],$$

majd $m = \frac{R}{q}$ bevezetésével

$$K(q,S) = \frac{R}{q}\Big[c_1 + \frac{S^2}{2r}c_2 + \frac{(q-S)^2}{2r}c_3 + Sb\Big].$$

így

$$\frac{\partial K}{\partial S} = \frac{RS}{rq}c_2 - \frac{R}{qr}(q-S)c_3 + b = 0,$$

$$\frac{\partial K}{\partial q} = -\frac{R}{q^2}(c_1 + \frac{S^2}{2r}c_2 + \frac{(q-S)^2}{2r}c_3 + Sb) + \frac{R}{q}\frac{q-S}{r} = 0.$$

Ezen egyenletrendszer megoldása

$$q_0 = \sqrt{\frac{2rc_1(c_2+c_3) - r^2b^2}{c_2c_3}},$$

$$S_0 = \frac{\sqrt{c_3\frac{2rc_1(c_2+c_3)-r^2b^2}{c_2}} - br}{c_2+c_3}.$$

Példa:
Előállítandó 12000 db alkatrész 1 év alatt folyamatosan, sorozatgyártással. Egy-egy sorozat legyártásával kapcsolatos költség c_1 a sorozatnagyságtól függetlenül 2000 Ft. Raktározási költség $c_2 = 0.3$ Ft/db/nap, hiányköltség $c_3 = 0.1$ Ft/db/nap. Meghatározandó az optimális sorozatnagyság, és összköltség.

Megoldás: Az összefüggések alapján

$$q_0 = \sqrt{2\frac{12000 \cdot 2000}{365 \cdot 0,30}}\sqrt{\frac{0,3+0,1}{0,1}} \approx 1324\text{db},$$

$$S_0 = \sqrt{2\frac{12000 \cdot 2000}{365 \cdot 0,30}}\sqrt{\frac{0,1}{0,3+0,1}} \approx 331\text{db},$$

$$t(q_0, S_0) = \sqrt{2\frac{365 \cdot 2000}{12000 \cdot 0,3}}\sqrt{\frac{0,3+0,1}{0,1}} \approx 40\text{nap},$$

$$K(q_0, S_0) = \sqrt{2 \cdot 365 \cdot 12000 \cdot 2000 \cdot 0,30}\sqrt{\frac{0,1}{0,3+0,1}} \approx 36249\text{Ft}.$$

Tehát a következő eljárást követjük: Kb 40 naponként a szóbanforgó mennyiségből előállítunk 331 db-ot, 1324-331=993 db hiánnyal, de az összköltség fele annak, mint amikor a teljes szükséglet kielégítésére törekszünk. Ezt az 1.2.1 rész első példájaként kaptuk meg $K(q_0) = 72498$ Ft.