Az informatika logikai alapjai

Várterész Magda

DE, Informatikai Kar

PTI BSc és informatikatanár
hallgatók számára
2017.

A formális nyelv fogalma

Az ábécé betűk (karakterek, jelek) egy nemüres, véges halmaza.

Az ábécé feletti szó az ábécé betűinek véges sorozata. A betűsorozat betűit egymás mellé szoktuk írni.

Az ábécé feletti (formális) nyelv az ábácé feletti szavak egy halmaza.

Az ábécé

Az ítéletlogikában egy logikai nyelv **ábécéje** tartalmaz

- logikai (összekötő) jeleket – most $\neg, \wedge, \vee, \supset$,
- elválasztó jeleket – most a nyitó- és a záró-zárójel,
- ítéletváltozókat – most az $X, Y, Z, \ldots$ betűk, továbbá ezek indexelve.

Az ítéletlogikai formula

A rögzített ábécé betűiből az alábbi szabályok betartásával készítünk **formulákat** (számunkra érdekes szavakat):

1. Az ábécé minden ítéletváltozója formula. Ezeket a formulákat *atomi formuláknak* nevezzük.
2. Ha az A szó formula, akkor a $\neg A$ szó is az.
3. Ha az A és B szavak formulák, akkor a $(A \wedge B)$, a $(A \vee B)$ és a $(A \supset B)$ szavak is formulák.
4. Minden formula a fenti szabályok véges sokszori alkalmazásával áll elő.

Egy rögzített ábécé feletti formulák halmazát nevezzük az ábécé feletti **ítéletlogikai nyelvnek**.

A szerkezeti indukció elve

Ahhoz, hogy igazoltnak tekintsük, hogy egy rögzített ábécé feletti ítéletlogikai nyelv minden formulája $\mathcal{T}$ tulajdonságú, elég belátni a következőket:

(alaplépés:) A nyelv minden atomi formulája $\mathcal{T}$ tulajdonságú.

(indukciós lépések:)

(i_1) Ha a nyelv egy A formulája $\mathcal{T}$ tulajdonságú, akkor $\neg A$ is $\mathcal{T}$ tulajdonságú.

(i_2) Ha az A és B formulák $\mathcal{T}$ tulajdonságúak és $\circ \in \{\wedge, \vee, \supset\}$, akkor $(A \circ B)$ is $\mathcal{T}$ tulajdonságú.

Az egyértelműen elemezhetőség

Egy ítéletlogikai nyelvhez rögzített ábécé feletti tetszőleges szóra a következő állítások közül pontosan egy igaz.

1. A formula atomi formula.
2. A formula a nyelv egy egyértelműen meghatározható A formulájának a negáltja, azaz $\neg A$ alakú.
3. A formula a nyelv két, egyértelműen meghatározható A és B formulájának a konjunkciója, azaz $(A \wedge B)$ alakú.
4. A formula a nyelv két, egyértelműen meghatározható A és B formulájának a diszjunkciója, azaz $(A \vee B)$ alakú.
5. A formula a nyelv két, egyértelműen meghatározható A és B formulájának az implikációja, azaz $(A \supset B)$ alakú.
6. A szó nem formula.

A formula közvetlen részformulája

Egy rögzített ábécé feletti ítéletlogikai nyelvben

1. egyetlen atomi formulának sincs **közvetlen részformulája**,
2. egy $\neg A$ alakú formula egyetlen közvetlen részformulája az A formula,
3. egy $(A \circ B)$ alakú formula közvetlen részformulái az A és a B formulák.
   Az $(A \circ B)$ formulának az A formula a bal oldali, a B formula pedig a jobb oldali közvetlen részformulája.

A formula részformuláinak halmaza

Egy rögzített ábécé feletti ítéletlogikai nyelvben az A **formula részformuláinak halmaza** a legszűkebb olyan halmaz, melynek

1. eleme maga A, és
2. ha egy C formula eleme a halmaznak, akkor elemei C közvetlen részformulái is.

A szerkezeti rekurzió elve

Pontosan egy olyan, az ítéletlogikai nyelv formuláin értelmezett $\mathcal{F}$ függvény van, melynek

(alaplépés:) értékeit rögzítjük az atomi formulákon, és megmondjuk,
hogy az $\mathcal{F}$ függvénynek

(indukciós lépések:)

(r_1) egy $\neg A$ alakú formulán felvett értéke az A formulához rendelt függvényértékből, illetve

(r_2) egy $(A \circ B)$ alakú formulán felvett értéke az A és a B formulákhoz rendelt értékekből

hogyan származtatható.

Formula összetettsége

Jelöljük az ítéletlogikai nyelvünket $\mathcal{L}$-lel.

Határozzuk meg az $\ell\colon \mathcal{L} \to \mathbf{N}_0$ függvényt a következőképpen:

1. ha A atomi formula, $\ell(A)$ legyen 0,
2. $\ell(\neg A)$ legyen $\ell(A) + 1$,
3. $\ell(A \circ B)$ pedig legyen $\ell(A) + \ell(B) + 1$.

Ekkor az $A \in \mathcal{L}$ formulához rendelt $\ell(A)$ függvényértéket az A formula **logikai összetettségének** nevezzük.

Logikai jel hatásköre, fő logikai jel

Egy formulában egy **logikai összekötőjel hatásköre** a formulának azon részformulái közül a legkisebb logikai összetettségű, amelyekben az adott logikai összekötőjel is előfordul.

Egy **formula fő logikai összekötőjele** az az öszszekötőjel, melynek hatásköre maga a formula.

Zárójelhasználat, rövidítések

A formulák leírásakor szokásos rövidítések:

- formula-kombinációk helyett speciális jelölések;
  Példa.
  $$(A \equiv B) \rightleftharpoons ((A \supset B) \wedge (B \supset A))$$
- külső zárójelek elhagyása;
- logikai jelek prioritása csökkenő sorrendben:

$$\neg \quad \begin{matrix} \vee \\ \wedge \end{matrix} \quad \supset$$