Az informatika logikai alapjai

Várterész Magda

DE, Informatikai Kar

PTI BSc és informatikatanár
hallgatók számára
2017.

Logikai műveletek

Egyváltozós logikai művelet egy $\{i, h\} \to \{i, h\}$ függvény.
Kétváltozós logikai művelet egy $\{i, h\} \times \{i, h\} \to \{i, h\}$ függvény.

a	b	$\dot{\neg} a$	$a \dot{\wedge} b$	$a \dot{\vee} b$	$a \dot{\supset} b$
i	i	h	i	i	i
i	h	h	h	i	h
h	i	i	h	i	i
h	h	i	h	h	i

Az ítéletlogikai nyelv interpretációja

Legyen a nyelv ítéletváltozóinak halmaza V.
A nyelv **interpretációja** egy

$$\mathcal{I}\colon V \to \{i, h\}$$

függvény.

A formula igazságértéke interpretációban

A logikai nyelv egy-egy $\mathcal{I}$ interpretációjában (a szerkezeti rekurzió elvét felhasználva) meghatározunk egy-egy, a nyelv formuláihoz igazságértéket rendelő függvényt.
Az A formulához rendelt igazságértéket $|A|^{\mathcal{I}}$-vel fogjuk jelölni.

1. Ha A atomi formula, akkor $|A|^{\mathcal{I}}$ legyen épp $\mathcal{I}(A)$,
2. $|\neg A|^{\mathcal{I}}$ legyen $\dot{\neg}|A|^{\mathcal{I}}$,
3. $|A \wedge B|^{\mathcal{I}}$ legyen $|A|^{\mathcal{I}} \dot{\wedge} |B|^{\mathcal{I}}$,
4. $|A \vee B|^{\mathcal{I}}$ legyen $|A|^{\mathcal{I}} \dot{\vee} |B|^{\mathcal{I}}$,
5. $|A \supset B|^{\mathcal{I}}$ legyen $|A|^{\mathcal{I}} \dot{\supset} |B|^{\mathcal{I}}$.

Ha $|A|^{\mathcal{I}} = i$, azt mondjuk, hogy az A formula az $\mathcal{I}$ interpretációban igaz (jelölve: $\mathcal{I} \models A$), egyébként pedig az A formula az $\mathcal{I}$ interpretációban hamis.

Példa

Legyenek a nyelv ítéletváltozói X, Y és Z.

Egy interpretáció $\mathcal{I}_1(X) = i$, $\mathcal{I}_1(Y) = h$ és $\mathcal{I}_1(Z) = i$.

Néhány formula igazságértéke az $\mathcal{I}_1$ interpretációban:

- $|Z|^{\mathcal{I}_1} = i$, mert $\mathcal{I}_1(Z) = i$, és $|\neg Z|^{\mathcal{I}_1} = h$, mert $\dot{\neg}\ |Z|^{\mathcal{I}_1} = h$.
- $|\neg Z \wedge X|^{\mathcal{I}_1} = h$, mert $|\neg Z|^{\mathcal{I}_1} \mathbin{\dot{\wedge}} |X|^{\mathcal{I}_1} = h$.
- $|Z \vee Y|^{\mathcal{I}_1} = i$, mert $|Z|^{\mathcal{I}_1} \mathbin{\dot{\vee}} |Y|^{\mathcal{I}_1} = i$.

Egy másik interpretáció $\mathcal{I}_2(X) = i$, $\mathcal{I}_2(Y) = h$ és $\mathcal{I}_2(Z) = h$.

Néhány formula igazságértéke az $\mathcal{I}_2$ interpretációban:

- $|Z|^{\mathcal{I}_2} = h$, mert $\mathcal{I}_2(Z) = h$, és $|\neg Z|^{\mathcal{I}_2} = i$, mert $\dot{\neg}\ |Z|^{\mathcal{I}_2} = i$.
- $|\neg Z \supset X|^{\mathcal{I}_2} = i$, mert $|\neg Z|^{\mathcal{I}_2} \mathbin{\dot{\supset}} |X|^{\mathcal{I}_2} = i$.
- $|Z \vee Y|^{\mathcal{I}_2} = h$, mert $|Z|^{\mathcal{I}_2} \mathbin{\dot{\vee}} |Y|^{\mathcal{I}_2} = h$.

A formula mint logikai függvény

Legyen S a nyelv ítéletváltozóinak egy halmaza.

Ha két különböző interpretáció ugyanazokat az igazságértékeket rendeli az S-beli ítéletváltozókhoz, akkor minden olyan formulának, amelyben csak S-beli ítéletváltozók fordulnak elő, mindkét interpretációban ugyanaz lesz az igazságértéke.

	X	Y	Z	$(\neg X \vee Y) \supset \neg X$
$\mathcal{I}_1$	i	h	i	i
$\mathcal{I}_2$	i	h	h	i

	X	Y	$(\neg X \vee Y) \supset \neg X$
$\mathcal{I}_{1-2}$	i	h	i

Formula igazságtáblája 1

X	Y	Z	$(Y \vee Z) \wedge (Z \supset \neg X)$
i	i	i	h
i	i	h	i
i	h	i	h
i	h	h	h
h	i	i	i
h	i	h	i
h	h	i	i
h	h	h	h

Formula igazságtáblája 2

X	Y	Z	$Y \vee Z$	$\neg X$	$Z \supset \neg X$	$(Y \vee Z) \wedge (Z \supset \neg X)$
i	i	i	i	h	h	h
i	i	h	i	h	i	i
i	h	i	i	h	h	h
i	h	h	h	h	i	h
h	i	i	i	i	i	i
h	i	h	i	i	i	i
h	h	i	i	i	i	i
h	h	h	h	i	i	h

Formula igazságtáblája 3

$(Y$	$\vee$	$Z)$	$\wedge$	$(Z$	$\supset$	$\neg$	$X)$
i	i	i	h	i	h	h	i
i	i	h	i	h	i	h	i
h	i	i	h	i	h	h	i
h	h	h	h	h	i	h	i
i	i	i	i	i	i	i	h
i	i	h	i	h	i	i	h
h	i	i	i	i	i	i	h
h	h	h	h	h	i	i	h