

Az informatika logikai alapjai

Várterész Magda

DE, Informatikai Kar

PTI BSc és informatikatanár
hallgatók számára
2017.

Formula szemantikai tulajdonságai

Egy A ítéletlogikai formula **kielégíthető**, ha van a nyelvnek olyan interpretációja, melyben A igaz.

Ha az A formula a nyelv minden interpretációjában hamis, akkor A **kielégíthetetlen**, vagy másképp **logikai ellentmondás**.

Ha pedig A a nyelv minden interpretációjában igaz, akkor azt mondjuk, hogy A **logikai törvény**.

Jelölése: $\models A$.

Példa

- 1 A $\neg X$ formula kielégíthető, mert az olyan \mathcal{I} interpretációkban, melyekben $\mathcal{I}(X) = h$, $\neg X$ igaz. Ezek az interpretációk $\neg X$ modelljei.
- 2 Az $X \wedge \neg X$ formula kielégíthetetlen, mert azokban az \mathcal{I} interpretációkban,
 - melyekben $\mathcal{I}(X) = h$, a formula bal oldali,
 - melyekben $\mathcal{I}(X) = i$, a formula jobb oldaliközvetlen részformulája hamis, így a konjunkciós formula minden interpretációban hamis.
- 3 Az $X \vee \neg X$ formula logikai törvény, mert azokban az \mathcal{I} interpretációkban,
 - melyekben $\mathcal{I}(X) = i$, a formula bal oldali,
 - melyekben $\mathcal{I}(X) = h$, a formula jobb oldaliközvetlen részformulája igaz, így a diszjunkciós formula minden interpretációban igaz.

A tautológia

Ha egy ítéletlogikai formula igazságtáblájában a formula (fő logikai jel) oszlopában csupa i igazságérték jelenik meg, azt mondjuk, hogy a formula **tautológia**.

Egy ítéletlogikai formula akkor és csakis akkor logikai törvény, ha tautológia.

Egy ítéletlogikai formula akkor és csakis akkor kielégíthetetlen, ha a negáltja tautológia.

Példa

X	$\neg X$	$X \vee \neg X$
i	h	i
h	i	i

X	$\neg X$	$X \wedge \neg X$
i	h	h
h	i	h

Néhány nevezetes logikai törvény

Ha A , B és C formulák, az alábbi formulák logikai törvények:

azonosság

$$\models A \supset A$$

bővítés előtaggal

$$\models A \supset (B \supset A)$$

ellentmondásból bármi

$$\models A \supset (\neg A \supset B)$$

reductio ad absurdum

$$\models (A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A)$$

kétszeres tagadás

$$\models \neg\neg A \supset A$$

kizárt harmadik

$$\models A \vee \neg A$$

ellentmondás

$$\models \neg(A \wedge \neg A)$$

$$\models A \supset (B \supset A \wedge B)$$

$$\models A \wedge B \supset A \quad \text{és} \quad \models A \wedge B \supset B$$

$$\models (A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset (A \vee B \supset C))$$

$$\models A \supset A \vee B \quad \text{és} \quad \models B \supset A \vee B$$

Ekvivalens formulák

Azt mondjuk, hogy az A formula **ekvivalens** a B formulával, ha a nyelv minden egyes interpretációjában az A igazságértékével megegyezik a B igazságértéke.

Ezt a tényt úgy jelöljük, hogy $A \sim B$.

Bármely A , B és C formula esetén

- $A \sim A$,
- ha $A \sim B$, akkor $B \sim A$, és
- ha $A \sim B$ és $B \sim C$, akkor $A \sim C$.

Az ítéletlogikai formulák közötti binér \sim reláció tehát ekvivalenciareláció. Ez a reláció az ítéletlogikai nyelv formuláinak egy osztályozását generálja, az egymással ekvivalens formulák logikai jelentése megegyezik.

Példa

Az $X \supset Y$ formula ekvivalens a $\neg X \vee Y$ formulával, mert abban az interpretációban, melyben

- $X \supset Y$ hamis, X igaz és Y hamis, de ekkor $\neg X$ is hamis, és így a $\neg X \vee Y$ formula is hamis,
- $\neg X \vee Y$ hamis, $\neg X$ és Y is hamis, de ekkor X igaz kellett legyen, tehát a $X \supset Y$ formula hamis lesz.

Az A és B ítéletlogikai formulák pontosan akkor ekvivalensek egymással, ha **közös** igazságtáblájukban A és B oszlopában minden sorban azonos igazságértékek jelennek meg.

X	Y	$X \supset Y$	$\neg X \vee Y$
i	i	i	i
i	h	h	h
h	i	i	i
h	h	i	i

Néhány nevezetes ekvivalencia 1

asszociativitás

$$A \wedge (B \wedge C) \sim (A \wedge B) \wedge C$$

$$A \vee (B \vee C) \sim (A \vee B) \vee C$$

kommutativitás

$$A \wedge B \sim B \wedge A$$

$$A \vee B \sim B \vee A$$

disztributivitás

$$A \wedge (B \vee C) \sim (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

$$A \vee (B \wedge C) \sim (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

idempotencia

$$A \wedge A \sim A$$

$$A \vee A \sim A$$

elimináció (elnyelés)

$$A \wedge (B \vee A) \sim A$$

$$A \vee (B \wedge A) \sim A$$

De Morgan törvényei

$$\neg(A \wedge B) \sim \neg A \vee \neg B$$

$$\neg(A \vee B) \sim \neg A \wedge \neg B$$

Néhány nevezetes ekvivalencia 2

logikai jelek közti kapcsolatok

$$A \wedge B \sim \neg(\neg A \vee \neg B)$$

$$A \vee B \sim \neg(\neg A \wedge \neg B)$$

$$A \supset B \sim \neg(A \wedge \neg B)$$

kétszeres tagadás

kontrapozíció

negáció az implikációban

$$A \supset \neg A \sim \neg A$$

implikációs előtag-csere

\supset *konjunkciós előtaggal*

esetelemzés

$$A \wedge B \sim \neg(A \supset \neg B)$$

$$A \vee B \sim \neg A \supset B$$

$$A \supset B \sim \neg A \vee B$$

$$\neg\neg A \sim A$$

$$A \supset B \sim \neg B \supset \neg A$$

$$\neg A \supset A \sim A$$

$$A \supset (B \supset C) \sim B \supset (A \supset C)$$

$$A \wedge B \supset C \sim A \supset (B \supset C)$$

$$A \vee B \supset C \sim (A \supset C) \wedge (B \supset C)$$

További ekvivalenciák

$A \sim B$ pontosan akkor, ha

$$\models (A \supset B) \wedge (B \supset A).$$

Jelöljön \top logikai törvény, \perp pedig kielégíthetetlen formulát.

$$\begin{array}{ll} A \wedge \top \sim A & A \wedge \perp \sim \perp \\ A \vee \top \sim \top & A \vee \perp \sim A \\ A \supset \top \sim \top & A \supset \perp \sim \neg A \\ \top \supset A \sim A & \perp \supset A \sim \top \end{array}$$

Formulahalmaz szemantikai tulajdonságai 1

Ítéletlogikai formulák egy Γ halmaza **kielégíthető**, ha van a nyelvnek olyan interpretációja, melyben minden Γ -beli formula igaz.

Ha nincs a nyelvnek ilyen interpretációja, akkor a Γ formulahalmaz **kielégíthetetlen**.

Egy véges $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ ($n \geq 2$) formulahalmazt pontosan azok az interpretációk elégítik ki, mely interpretációkban az $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n$ formula igaz.

Másképp fogalmazva: az $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ formulahalmaz pontosan akkor kielégíthetetlen, ha az $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n$ formula is kielégíthetetlen.

Formulahalmaz szemantikai tulajdonságai 2

Egy véges $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ ($n \geq 2$) formulahalmaz pontosan akkor kielégíthető, ha a formulák **közös** igazságtáblájában van olyan sor, melyben minden formula alatt *i* igazságérték jelenik meg.

Az $\{X, X \supset Y, \neg Y\}$ formulahalmaz például kielégíthetetlen.

X	Y	X	$X \supset Y$	$\neg Y$
i	i	i	i	h
i	h	i	h	i
h	i	h	i	h
h	h	h	i	i

A következmény-reláció

Legyen Γ ítéletlogikai formulák egy halmaza és B pedig egy formula.

Azt mondjuk, hogy B **következménye** a Γ -beli formuláknak, amennyiben B igaz minden olyan interpretációban, melyben minden Γ -beli formula igaz.

Jelölése: $\Gamma \models B$.

A Γ -beli formulák a feltételformulák (premissza),
a B formula a következményformula (konklúzió).

Példa 1

Döntsük el, hogy az $\{X \supset Y, X \supset \neg Y\}$ formulahalmaznak következménye-e a $\neg X$ formula.

- 1 Határozzuk meg azokat az interpretációkat, melyek kielégítik a premisszákat:
 $\mathcal{I}_1(X) = h, \mathcal{I}_1(Y) = i$ és $\mathcal{I}_2(X) = h, \mathcal{I}_2(Y) = h$.
- 2 Ellenőrizzük ezekben az interpretációkban a konklúziót:
 $\mathcal{I}_1 \models \neg X$ és $\mathcal{I}_2 \models \neg X$.

Tehát $\{X \supset Y, X \supset \neg Y\} \models \neg X$.

Példa 2

Döntsük el, hogy az $\{X \supset Y, X \supset \neg Y\}$ formulahalmaznak következménye-e a $\neg X$ formula.

- 1 Határozzuk meg azokat az interpretációkat, melyekben hamis a konklúzió: $\mathcal{I}(X) = i$.
- 2 Ellenőrizzük, hogy van-e ezek között az interpretációk között olyan, mely kielégíti a premisszákat:
 ha $\mathcal{I}(Y) = i$, akkor $X \supset \neg Y$ hamis \mathcal{I} -ben,
 ha $\mathcal{I}(Y) = h$, akkor pedig $X \supset Y$ hamis \mathcal{I} -ben.

Tehát $\{X \supset Y, X \supset \neg Y\} \models \neg X$.

Példa 3

Lássuk be, hogy

$$\{\neg Z, X \vee V, X \supset Y, Y \supset Z, V \supset W \supset Z\} \models \neg X.$$

Tegyük fel, hogy \mathcal{I} olyan interpretáció, melyben minden premissza igaz.

- 1 Mivel $\neg Z$ premissza, ezért $\mathcal{I}(Z) = h$ lehet csak.
- 2 $\mathcal{I}(Z) = h$ mellett az $Y \supset Z$ premissza csak akkor lehet igaz, ha $\mathcal{I}(Y) = h$.
- 3 $\mathcal{I}(Z) = h$ és $\mathcal{I}(Y) = h$ mellett az $X \supset Y$ pedig csak $\mathcal{I}(X) = h$ választás esetén lesz igaz.
- 4 Ha $\mathcal{I}(Z) = \mathcal{I}(Y) = \mathcal{I}(X) = h$, akkor az $X \vee V$ igazgá válásához $\mathcal{I}(V) = i$ szükséges.
- 5 A rögzített $\mathcal{I}(Z) = \mathcal{I}(Y) = \mathcal{I}(X) = h$ és $\mathcal{I}(V) = i$ igazságértékek esetén a $V \supset W \supset Z$ formula igazgá válásához az $\mathcal{I}(W) = h$ kell.

Példa 4

A fenti lépéseket végigkövethetjük egy táblázatban is.

X	Y	Z	V	W	$\neg Z$	$X \vee V$	$X \supset Y$	$Y \supset Z$	$V \supset W \supset Z$	$\neg X$
-	-	h	-	-	i					
-	h	h	-	-	i			i		
h	h	h	-	-	i		i	i		i
h	h	h	i	-	i	i	i	i		i
h	h	h	i	h	i	i	i	i	i	i

$\{A_1, A_2, \dots, A_n\} \models B$ pontosan akkor, ha

1. az $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n \supset B$ formula logikai törvény.
2. az $\{A_1, A_2, \dots, A_n, \neg B\}$ formulahalmaz kielégíthetetlen.
3. az $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n \wedge \neg B$ formula kielégíthetetlen.
4. az A_1, A_2, \dots, A_n és B formulák közös igazságtáblájában azokban a sorokban, ahol minden premissza alatt i igazságérték jelenik meg, ott B alatt is i igazságérték van.

Példa

A $\{\neg Y, X \vee Y, X \supset Z\}$ formulahalmaz következménye Z , ahogy azt közös igazságtáblájuk mutatja.

X	Y	Z	$\neg Y$	$X \vee Y$	$X \supset Z$		Z
i	i	i	h	i	i		i
i	i	h	h	i	h		h
i	h	i	i	i	i	*	i
i	h	h	i	i	h		h
h	i	i	h	i	i		i
h	i	h	h	i	i		h
h	h	i	i	h	i		i
h	h	h	i	h	i		h

A helyes következtetésforma

Legyen $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ tetszőleges formulahalmaz, és B egy formula.

Az $(\{A_1, A_2, \dots, A_n\}, B)$ párt **következtetésformának** nevezzük.

Az $(\{A_1, A_2, \dots, A_n\}, B)$ pár **helyes következtetésforma**, ha $\{A_1, A_2, \dots, A_n\} \models B$.

Legyenek A , B és C tetszőleges ítéletlogikai formulák. Az alábbiakban felsorolt következtetésformák helyesek:

<i>modus ponens</i>	$(\{A \supset B, A\}, B)$
<i>modus tollens</i>	$(\{A \supset B, \neg B\}, \neg A)$
<i>reductio ad absurdum</i>	$(\{A \supset B, A \supset \neg B\}, \neg A)$
<i>az indirekt bizonyítás</i>	$(\{\neg A \supset B, \neg A \supset \neg B\}, A)$
<i>feltételes szillogizmus</i>	$(\{A \supset B, B \supset C\}, A \supset C)$
<i>esetszétválasztás</i>	$(\{A \vee B, A \supset C, B \supset C\}, C)$
<i>modus tollendo ponens</i>	$(\{A \vee B, \neg A\}, B)$
	$(\{A\}, A \vee B)$ és $(\{B\}, A \vee B)$
	$(\{A, B\}, A \wedge B)$
	$(\{A \wedge B\}, A)$ és $(\{A \wedge B\}, B)$
	$(\{B\}, A \supset B)$
	$(\{\neg\neg A\}, A)$ és $(\{A\}, \neg\neg A)$