

Schwarcz Tibor

KOMPUTERGRAFIKAI ALAPOK

Digitális Filmtechnika

szakirányú továbbképzési szak részére

Tartalom

1	Bevezetés.....	3
2	Leképezések és vetítő modellek.....	4
2.1	Homogén koordináták	4
2.2	Centrális vetítés 1.	5
2.3	Párhuzamos vetítés 1.	6
2.4	Centrális vetítés 2.	6
2.5	Párhuzamos vetítés 2.	7
2.6	I. Vetítési rendszer.....	7
2.7	II. Vetítési rendszer	10
2.8	III. Vetítési rendszer	12
2.9	IV. Vetítési rendszer.....	12
2.10	V. Vetítési rendszer	16
3	B-spline görbe előállítás.....	17
4	Felületek.....	18
4.1	Bilineárisan súlyozott Coons-foltok.....	18
4.2	Bikubikusan súlyozott Coons-foltok.....	20
4.3	Gordon felület.....	21
4.4	Tenzor-szorzat felületek.....	23
4.4.1	Bezier felület	23
4.4.2	Bezier felület mátrix-reprezentáció	23
4.4.3	Interpoláló Bezier felület.....	24

1 Bevezetés

Jelen jegyzet Digitális Filmtechnika szakirányú továbbképzési szak részére készült. Bár a jegyzet címe KOMPUTERGRAFIKAI ALAPOK, tartalmát tekintve mégsem bevezető jellegű ismeretekről lesz szó. Informatikai alapképzésen (Bsc) túljutott hallgatók általában tanultak már Számítógépi grafikát. Jelen kurzus a bevezető tananyagon túlmutat, feltételezván, hogy a kurzus hallgatói a megkívánt grafikai ismeretekkel már rendelkeznek.

A Debreceni Egyetem informatikai alapképzésében szerepel a „Bevezetés a számítógépi grafikába” című kötelező tárgy. Ennek anyagát tekintjük kiindulásnak.

2 Leképezések és vetítő modellek

Ha raszteres képpé konvertálva a 3D-s tárgyakat meg akarjuk jeleníteni a monitor képernyőjén, akkor ezeket a 3D-s modelltérből egy 2D-s nézetre kell leképezni. Ezért a számítógépes grafikában kiemelt jelentőségű transzformációk a vetítések. Vetítésnek nevezzük azokat a dimenzióvesztéssel járó pont-transzformációkat, amelyeknél a képpont és a neki megfelelő tárgypont egy egyenesen helyezkedik el. A tárgy- és képpontokon áthaladó egyenest vetítősugárnak nevezzük. A vetítés eredménye a vetület, ami a képsíkon képződik. Az egyes tárgypontok képe a vetítősugarak dőféspontja a képsíkkal. A vetítés két alaptípusa a párhuzamos és a középpontos vetítés. Párhuzamos vetítésről beszélünk, ha a vetítősugarak egymással párhuzamosak. Ha ezen kívül a vetítősugarak még merőlegesek is a képsíkra, akkor merőleges a vetítés, egyébként pedig a ferde vetítés elnevezést használjuk. Középpontos vetítés esetén a vetítősugarak mindegyike áthalad a vetítési középponton, a centrumon. Perspektivikus hatás elsősorban a tárgy és a centrum és a pont távolságától függ. Ha ez a távolság minden határon túl nő, a középpontos vetítés párhuzamos vetítésbe megy át.

A vetítőmodellek minimális feladata, hogy megfelelő paraméterek alapján transzformációk egymásutánján keresztül lehetőség nyíljon a 3D-s világkoordináta-rendszerbeli objektumok pontjait a képsíkra leképezni.

2.1 Homogén koordináták

A transzformációk egységes kezelése miatt úgynevezett homogén koordinátákat vezetünk be. A 3 dimenziós projektív teret a valós 4 dimenziós vektortérbe ágyazzuk be, a projektív tér pontjainak reprezentálása a zérus vektortól különböző 4 dimenziós vektortér vektorainak egy-egy osztályával történik. Egy osztályba tartoznak a lineárisan függő vektorok, vagy másképp az egymással arányos számnégyesek ugyanazt a pontot reprezentálják. Ezeket a koordinátákat nevezzük homogén koordinátáknak. Ha a pont negyedik koordinátája nem zérus, akkor a pont $\mathbb{E}^3$ -nak is pontja, egyébként a pontot végtelen távoli pontnak nevezzük. A végesben lévő pontok inhomogén koordinátáit megkapjuk, ha a negyedik

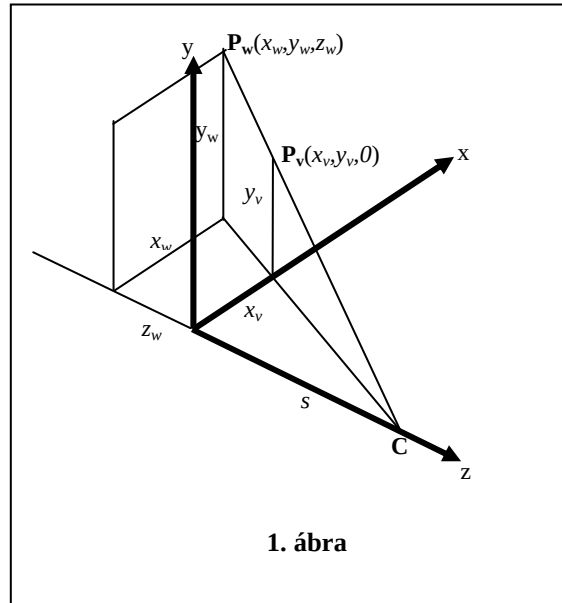
koordinátával elosztjuk a pont első három koordinátáját: $y_i = \frac{x_i}{x_4}$, ahol $x_4 \neq 0$. A

síkbeli homogén koordinátákat hasonlóan értelmezzük, a pontokat és az egyeneseket valós számhármassok egy-egy osztályával jellemezzük.

2.2 Centrális vetítés 1.

A legegyszerűbb egy paraméteres modell esetében a világ és a rajzkoordináta-rendszer nem válik szét. A képsík legyen a világkoordináta-rendszer $\{x, y\}$ koordinátasíkja, a vetítési centrum pedig a z tengely pozitív felén helyezkedik el (1. ábra). A leképezés egyetlen mátrixszal leírható. A megfelelő hasonló

háromszögekből: $x_v = x_w \frac{s}{s - z_w}$; $y_v = y_w \frac{s}{s - z_w}$;



Ugyan ez homogén koordinátákkal mátrix-reprezentációban:

$$\begin{bmatrix} x_v \\ y_v \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{s} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \\ 1 - \frac{z_w}{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_w \frac{s}{s - z_w} \\ y_w \frac{s}{s - z_w} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2.3 Párhuzamos vetítés 1.

A képsík a centrális esethez hasonlóan az $\{x,y\}$ koordinátasík. Legyen a vetítés iránya a $\mathbf{v}$ vektorral megadva. Ekkor:

$$P_v = P_w + \lambda \mathbf{v} \text{ alapján}$$

$$x_v = x_w + \lambda v_x, y_v = y_w + \lambda v_y, z_v = z_w + \lambda v_z = 0, \text{ amiből}$$

$$\lambda = -\frac{z}{v_z} \rightarrow x_v = x_w - \frac{z}{v_z} v_x, y_v = y_w - \frac{z}{v_z} v_y$$

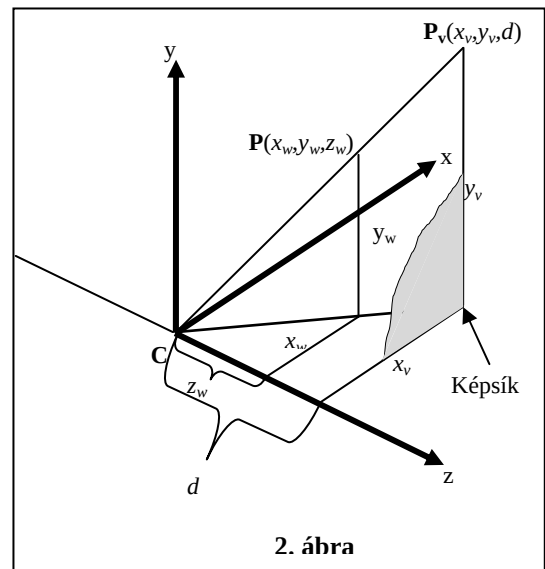
$$\begin{bmatrix} x_v \\ y_v \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{v_x}{v_z} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{v_y}{v_z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_w - \frac{z_w}{v_z} v_x \\ y_w - \frac{z_w}{v_z} v_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2.4 Centrális vetítés 2.

Helyezzük el a vetítési centrumot a világkoordináta-rendszer kezdőpontjában. A képsík legyen a világkoordináta-rendszer $\{x,y\}$ koordinátasíkjával párhuzamos, attól d távolságra, azaz a képsík egyenlete legyen $z=d$. A képsíkon értelmezett koordinátarendszer a világkoordináta rendszer tengelyivel párhuzamosan. A megfelelő hasonló háromszögekből leolvasható (2. ábra):

$$\frac{x_v}{x_w} = \frac{y_v}{y_w} = \frac{d}{z_w}; \Rightarrow$$

$$x_v = x_w \frac{d}{z_w}; y_v = y_w \frac{d}{z_w}; z_v = d$$



Homogén koordináták alak mátrix-reprezentációban:

$$\begin{bmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{d} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \\ \frac{z_w}{d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_w \frac{d}{z_w} \\ y_w \frac{d}{z_w} \\ d \\ 1 \end{bmatrix}$$

2.5 Párhuzamos vetítés 2.

A képsík elhelyezése ugyanaz, mint a 2. típusú centrális vetítésnél. A vetítési irány ismét a $\mathbf{v}$ vektorral adott. A kép az origót a vetítendő ponttal összekötő egyenesnek és a képsíknak a metszéseként áll elő.

$$P_v = P_w + \lambda \mathbf{v} \text{ alapján}$$

$$x_v = x_w + \lambda v_x, y_v = y_w + \lambda v_y, z_v = z_w + \lambda v_z = d, \text{ amiből}$$

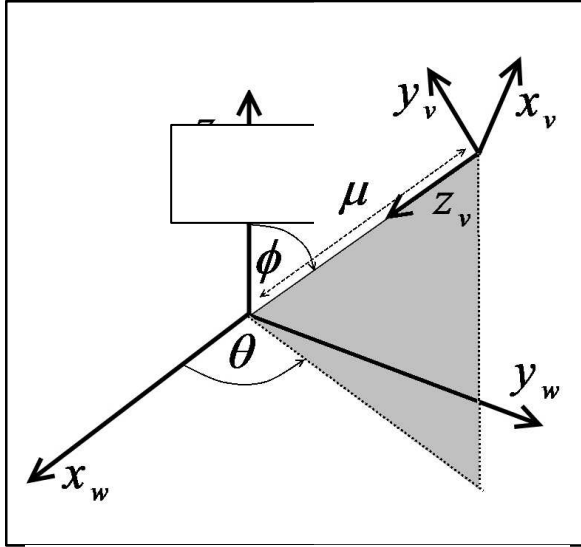
$$\lambda = \frac{d - z_w}{v_z} \rightarrow x_v = x_w + (d - z_w) \frac{v_x}{v_z}, y_v = y_w + (d - z_w) \frac{v_y}{v_z}, z_w = d$$

$$\begin{bmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{v_x}{v_z} & d \frac{v_x}{v_z} \\ 0 & 1 & -\frac{v_y}{v_z} & d \frac{v_y}{v_z} \\ 0 & 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_w + \frac{d - z_w}{v_z} v_x \\ y_w + \frac{d - z_w}{v_z} v_y \\ d \\ 1 \end{bmatrix}$$

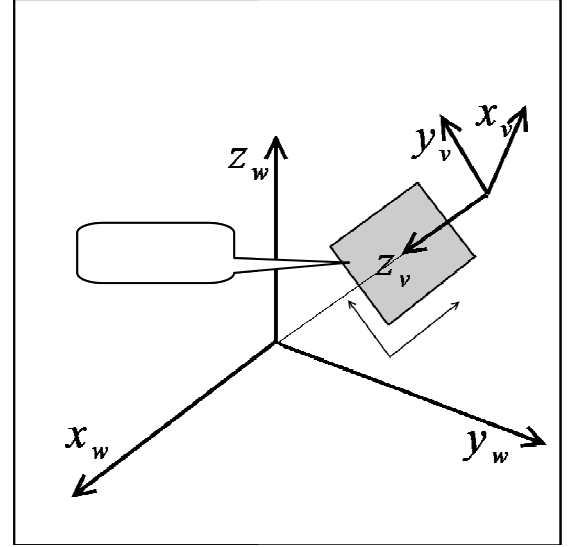
Ha d értékét nullának választjuk, azaz a képsík az $\{x, y\}$ koordinátasík, természetesen visszakapjuk a 2.3-as esetet.

2.6 I. Vetítési rendszer

A kamera-koordinátarendszert a világ-koordinátarendszer 3 paraméterrel leírható mozgásával hozzuk létre. A kamera-rendszer kezdőpontját gömbi koordinátákkal adjuk meg. A kamera-rendszer z_v tengelye a világ-koordinátarendszer kezdőpontjába mutat.



3. ábra



4. ábra

A kamera-koordinátarendszer meghatározó paramétereit a 3. ábrán látjuk. A kamera-koordinátarendszer kezdőpontjának koordinátái:

$$\mathbf{O}_v = \begin{bmatrix} \mu \cos \theta \sin \phi \\ \mu \sin \theta \sin \phi \\ \mu \cos \phi \end{bmatrix}$$

A megfelelő koordináta-transzformáció lépései és a szükséges koordináta-transzformációk mátrixai:

1. Eltolás $\mathbf{O}_v$ -be

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\mu \cos \theta \sin \phi \\ 0 & 1 & 0 & -\mu \sin \theta \sin \phi \\ 0 & 0 & 1 & -\mu \cos \phi \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Forgatás z tengely körül $\frac{\pi}{2} - \theta$ szöggel az óramutató járásának megfelelő irányban. Így az új x tengely merőleges lesz a z -t és az új kezdőpontot tartalmazó síkra).

$$\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} \sin \theta & -\cos \theta & 0 & 0 \\ \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. A koordinátarendszer forgatása $\pi - \phi$ szöggel az óramutató járásával ellentétes irányba az új x tengely körül

$$\mathbf{T}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos \phi & \sin \phi & 0 \\ 0 & -\sin \phi & -\cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 1 \end{bmatrix}$$

4. Orientáció váltás

$$\mathbf{T}_4 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5. A teljes összetett transzformáció:

$$\mathbf{T}_{\text{view}} = \mathbf{T}_4 \mathbf{T}_3 \mathbf{T}_2 \mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ -\cos \phi \cos \theta & -\cos \phi \sin \theta & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi \cos \theta & -\sin \phi \sin \theta & -\cos \phi & \mu \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ezek után alkalmazhatjuk a 2.4 centrális vetítést vagy a 2.5 párhuzamos vetítést.

A leképezés síkja merőleges z_v -re és a nézőponttól d távolságra helyezkedik el.

Centrális vetítés esetében egyetlen mátrixba sűrítve az eredmény:

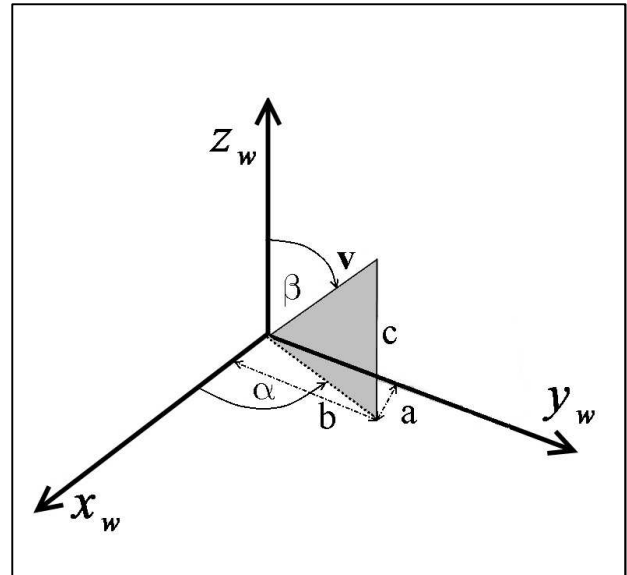
$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{d} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{T}_{\text{view}} = \begin{bmatrix} -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ -\cos \phi \cos \theta & -\cos \phi \sin \theta & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi \cos \theta & -\sin \phi \sin \theta & -\cos \phi & \mu \\ \frac{-\sin \phi \cos \theta}{d} & \frac{-\sin \phi \sin \theta}{d} & \frac{-\cos \phi}{d} & \frac{\mu}{d} \end{bmatrix}$$

2.7 II. Vetítési rendszer

Adott a C pont, ez lesz a kamera-koordináta-rendszer kezdőpontja és az F pont, ezen pont definiálja a kamera-irányt, azaz a kamera-rendszer z tengelye fog a CF irányba mutatni. Jelölje $\mathbf{v}(a,b,c)$ a CF irányú egységnyi hosszúságú vektort. Első lépésként elforgatjuk a rendszert a világkoordináta rendszer z tengelye körül úgy, hogy az x tengely forgatottja fedésbe kerüljön a $\mathbf{v}$ vektor $\{x,y\}$ síkra eső merőleges vetületével. A forgatás $\mathbf{v}(a,b,c)$ szögének koszinusza és szinusza egyszerűen számolható a megfelelő derékszögű háromszögekből. Figyelembe véve, hogy $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, adódik:

$$\sin(\alpha) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{b}{\sqrt{1 - c^2}}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{a}{\sqrt{1 - c^2}}$$



5. ábra

A megfelelő forgatási mátrix:

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} \frac{a}{\sqrt{1-c^2}} & \frac{b}{\sqrt{1-c^2}} & 0 & 0 \\ \frac{-b}{\sqrt{1-c^2}} & \frac{a}{\sqrt{1-c^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A következő lépésben y tengely körül forgatunk megfelelő β szöggel az óramutató járásával megegyező irányban. Így az új z tengely párhuzamos lesz az adott $\mathbf{v}$ iránnyal. A β szög szinusza és koszinusza az ábra alapján, figyelembe véve, hogy $|\mathbf{v}| = 1$:

$$\sin(\beta) = \sqrt{1-c^2}, \cos(\beta) = c$$

A koordináta transzformáció mátrixa:

$$\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} c & 0 & -\sqrt{1-c^2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sqrt{1-c^2} & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Orientációt váltunk, hogy rendszerünk bal-sodrású legyen:

$$\mathbf{T}_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Biztosítjuk, hogy a kamera forgatható legyen az új z tengely körül. Jelölje θ a forgatás szögét, ekkor az ehhez tartozó mátrix:

$$\mathbf{T}_4 = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) & 0 & 0 \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Végül eltoljuk a rendszert a kamera-rendszer $\mathbf{C}$ kezdőpontjába. Ehhez azonban meg kell határoznunk $\mathbf{C}$ koordinátáit az új bázisra vonatkozóan. Jelölje c_1, c_2, c_3 a $\mathbf{C}$ pont eredeti koordinátáit. A transzformációs mátrix: $\mathbf{T} = \mathbf{T}_4 \mathbf{T}_3 \mathbf{T}_2 \mathbf{T}_1$. Az új előállítás: $\mathbf{C}_{\text{view}} = \mathbf{T}\mathbf{C}$, és mivel koordináta-transzformációról van szó, ennek -1-szerese lesz az eltolási vektor. A $\mathbf{T}$ és $-\mathbf{C}_{\text{view}}$ -hoz tartozó eltolást leíró mátrixok szorzataként kapjuk a vetítési transzformáció mátrixát. Az eredmény a mellékletben megtalálható.

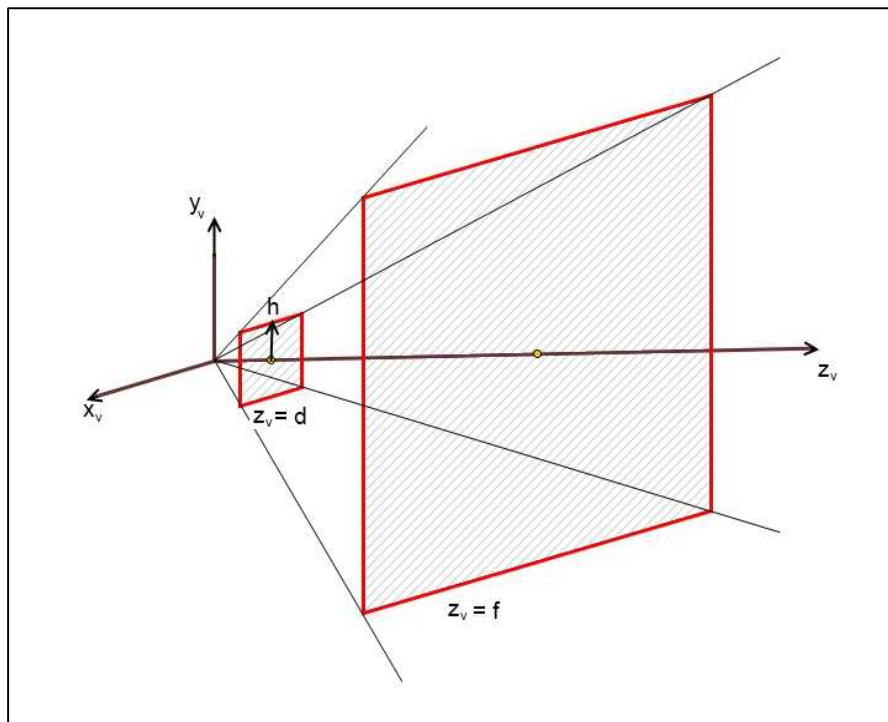
2.8 III. Vetítési rendszer

Lényegében megegyezik a II. vetítési rendszerrel. Adott a kamera-koordinátarendszer kezdőpontja, C . A vetítési irányt a II. rendszertől eltérően egy N egységvektorral adjuk meg. Ezzel lesz párhuzamos a vetítési rendszer z_v tengelye. A leképezés síkja merőleges N -re, centrális vetítés esetében pl. a 2.4-beli szokásos elrendezés szerint. Megadunk még egy „felfelé” mutató irányt a V egységvektorral, amely merőleges N -re. Ezt a merőlegességet biztosítani kell alkalmas felhasználó interfészen keresztül. Ennek egy lehetséges módja, hogy a felhasználó megad egy „körülbelüli” V' -vel jelölt felfelé irányt, amiből a rendszer számolja ki a tényleges V vektort: $V = V' - (V'N)N$. A kamera-rendszer harmadik vektora $U = N \times V$. Lényegében tehát egy egyszerű koordináta-transzformációt leíró mátrix az eredmény:

$$T_{view} = \begin{bmatrix} U_x & U_y & U_z & -U_x C_x - U_y C_y - U_z C_z \\ V_x & V_y & V_z & -V_x C_x - V_y C_y - V_z C_z \\ N_x & N_y & N_z & -N_x C_x - N_y C_y - N_z C_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.9 IV. Vetítési rendszer

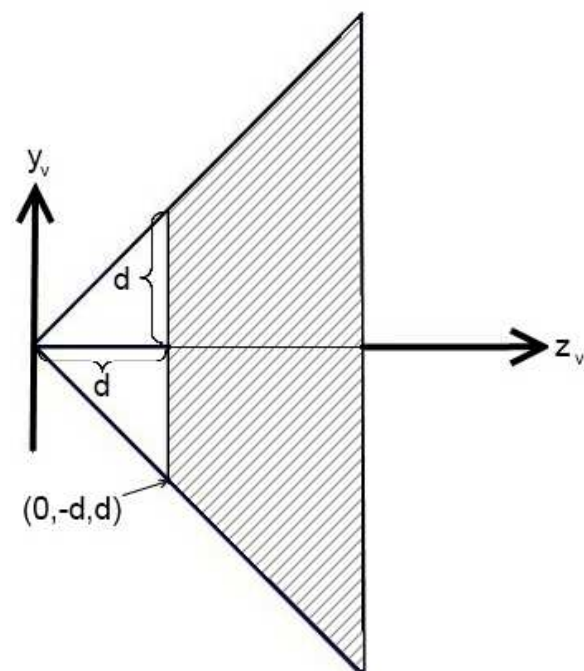
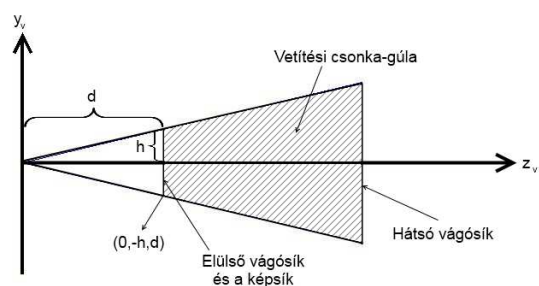
Kiindulási rendszerünk a kamera-koordinátarendszer lesz. A vetítési centrum ezen rendszer origója. Az origótól d távolságra a z_v tengelyre merőleges a képsík, ami egyben a közeli vágósík is. Megadunk egy távoli vágósíkot, mely az origótól f távolságra van, szintén a z_v -re merőleges. Adott továbbá egy $2h$ oldalhosszúságú négyzet a képsíkon, a 6. ábrán látható módon szimmetrikusan elhelyezve, középpontja a z_v tengelyre esik. Ezen négyzet centrumból történő vetítő gúlájából az elülső és hátsó határoló síkok kivágnak egy csonka gúlát. A célunk az, hogy több lépésben olyan transzformáció-sorozatot adjunk meg, melynek eredményeképpen a vetítési gúla egy speciális hasábbá transzformálódik. A centrális vetület számítása helyett a kép a pontok z koordinátáinak elhagyásával keletkezik, a vetítősugarak pedig a z tengellyel lesznek párhuzamosak. Ezen transzformáció jelentős hatékonyság-növelő eszköz akár a Z-puffer, akár a sugárkövető algoritmusok terén.



6. ábra

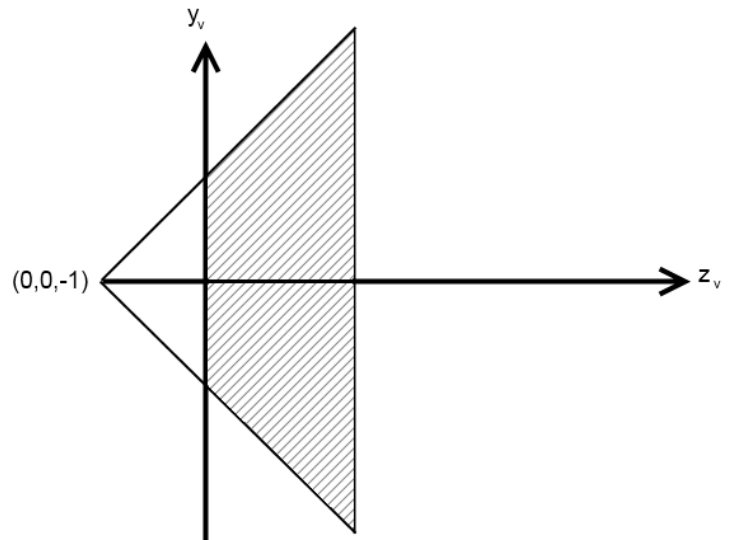
Első lépésként bevezetünk egy skálázási transzformációt, mely a $2h$ oldalú négyzetet $2d$ oldalú négyzetbe viszi. Ezt követi egy z irányú d faktorú zsugorítás, a képsíkot a $z=1$ síkba viszi. A két transzformáció együtt:

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{h} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{h} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{d} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Eltolás következik z mentén, a gúla csúcspontja (0,0,-1), a képsík pedig az {x,y} koordinátasík lesz.

$$\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



A vetítő sugarakat párhozamossá transzformáljuk, a gúla négyzet alapú hasábbá transzformálódik. Figyeljük meg, hogy $s=-1$ mellett „csaknem” a 2.2 beli centrális vetítés mátrixát használjuk, a különbség csak a 3. sorban van, csupa nulla helyett a harmadik oszlopban 1-es áll.

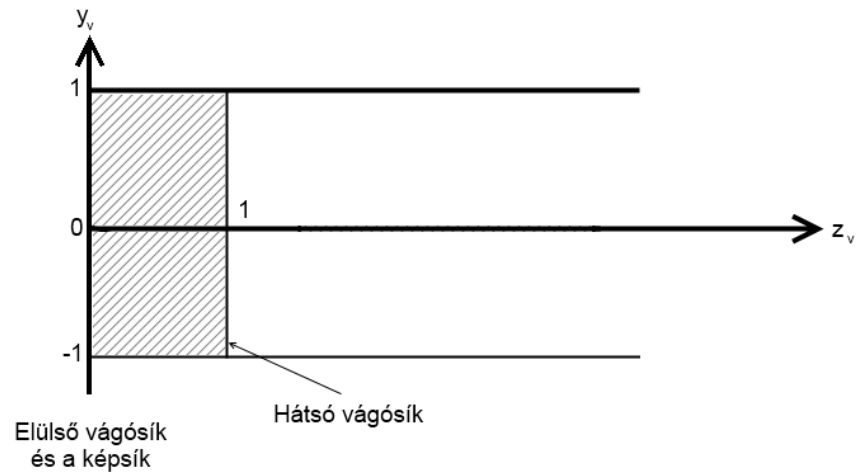
$$\mathbf{T}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Utolsó lépésként a távoli vágósíkot hozzuk egységnyi távolságra a képsíktól, a skálázási faktor $\frac{f}{f-d}$:

$$\mathbf{T}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{f}{f-d} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Végül az eredmény:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_4 \mathbf{T}_3 \mathbf{T}_2 \mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{h} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{h} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{f}{(f-d)d} & \frac{-f}{f-d} \\ 0 & 0 & \frac{1}{d} & 0 \end{bmatrix}$$



A $\mathbf{T}$ transzformációt hajtva a vágás igen leegyszerűsödik, a vágási határok az alábbiak lesznek:

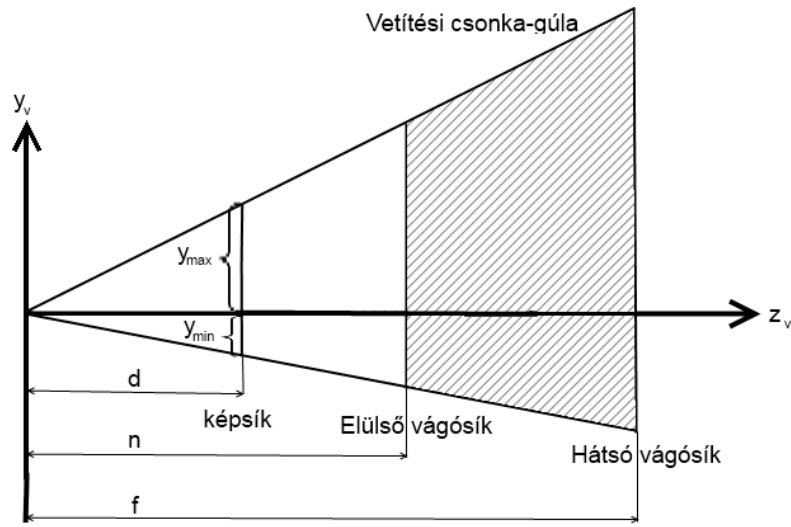
$$-1 \leq x \leq 1$$

$$-1 \leq y \leq 1$$

$$0 \leq z \leq 1$$

2.10 V. Vetítési rendszer

Hasonló a IV. rendszerhez. A különbség a kiindulásban van. A képsík nem egyezik meg az elülső határoló síkkal, de ugyanúgy helyezkedik el, mint a IV.-es rendszerben. Az ábra jelöléseinek megfelelően a képsík, elülső határoló sík, valamint a hátsó határoló sík origótól vett távolsága rendre d, n, f . Adott továbbá a képsíkon egy a koordinátatengelyekkel párhuzamos oldalú téglalap, melyet a balalsó és jobb felső csúcsa határoz meg, az $(x_{\min}, y_{\min}, d)$ és $(x_{\max}, y_{\max}, d)$ koordinátákkal.



A megadott paraméterek alapján a normalizált vetítési transzformáció mátrixa az alábbi:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{2}{x_{\max} - x_{\min}} & 0 & -\frac{x_{\max} + x_{\min}}{(x_{\max} - x_{\min})d} & 0 \\ 0 & \frac{2}{y_{\max} - y_{\min}} & -\frac{y_{\max} + y_{\min}}{(y_{\max} - y_{\min})d} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-f}{(n-f)d} & \frac{nf}{(n-f)d} \\ 0 & 0 & \frac{1}{d} & 0 \end{bmatrix}$$

A részletes számítások a mellékletben találhatóak.

3 B-spline görbe előállítás

Legyenek t_i és t_{i+1} skalárok úgy, hogy $t_i \leq t_{i+1}$, $t_i \in \mathbb{R}$, $i = -\infty, \dots, \infty$

Az alábbi rekurzív függvényt normalizált b-spline bázis vagy alap függvénynek nevezzük:

$$N_i^1(t) = \begin{cases} 1 & t_i \leq t < t_{i+1} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

$$N_i^k(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+k-1} - t_i} N_i^{k-1}(t) + \frac{t_{i+k} - t}{t_{i+k} - t_{i+1}} N_{i+1}^{k-1}(t)$$

Az $N_i^k(t)$ tehát egy legfeljebb $k-1$ -ed fokú polinom. Az előforduló $\frac{0}{0}$ hányadost 0-nak tekintjük.

Legyen adott a $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_n$ pontsorozat, azaz $n+1$ pont.

A $Q(t) = \sum_{i=0}^n N_i^k(t) \mathbf{P}_i$, $t_{k-1} \leq t \leq t_{n+1}$ görbét k -ad rendű ($k-1$ -ed fokú) b-spline görbének nevezzük.

Tétel: $N_i^k(t) = 0$, ha $t \notin [t_i, t_{i+k}]$

Tétel: $N_i^k(t) \geq 0$, $\forall t$

Tétel: $\sum_{i=0}^n N_i^k(t) \equiv 1, \forall k$

4 Felületek

4.1 Bilineárisan súlyozott Coons-foltok

Adott 4, egymást páronként metsző térgörbe, melyeknek ismerjük a skalárvektoros előállítását. Ezek a görbék legyenek:

$$\mathbf{a}_1(u), \mathbf{a}_2(u), u \in [0,1] \text{ és} \\ \mathbf{b}_1(v), \mathbf{b}_2(v), v \in [0,1]$$

Ezek egy térbeli négyszöget alkotnak, amelyre illeszteni akarjuk az $\mathbf{r}(u,v)$ felületet, ahol $u, v \in [0,1]$. A felületet úgy kell meghatározni, hogy a határokon pontosan a határoló görbéket adja vissza. Vagyis:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(u, 0) &= \mathbf{a}_1(u) \\ \mathbf{r}(u, 1) &= \mathbf{a}_2(u) \\ \mathbf{r}(0, v) &= \mathbf{b}_1(v) \\ \mathbf{r}(1, v) &= \mathbf{b}_2(v) \end{aligned}$$

A coons-foltot 3 felületből állítjuk elő. Ebből kettő az $\mathbf{a}_1$ és $\mathbf{a}_2$, valamint a $\mathbf{b}_1$ és $\mathbf{b}_2$ által meghatározott vonalfelület, a harmadik pedig egy nyeregfelület.

Vonalfelületek leírása:

Adott $\mathbf{a}_1(u)$ és $\mathbf{a}_2(u)$ térgörbe, melyek ugyanazon az intervallumon kell hogy legyenek definiálva, ez általában: $u \in [0,1]$, de tetszőleges $[a,b]$ intervallum is lehet. A két görbe adott u értékekhez tartozó pontjait kötjük össze, azaz a paramétervonalak egyenes szakaszok. A két térgörbe által kifeszített $\mathbf{I}_a(u,v)$, ahol $u, v \in [0,1]$ felület egyenesekből áll és igaz rá, hogy

$$\mathbf{I}_a(u, 0) = \mathbf{a}_1(u), \text{ és } \mathbf{I}_a(u, 1) = \mathbf{a}_2(u)$$

A felület az $\mathbf{a}_1(u)$ és $\mathbf{a}_2(u)$ térgörbék lineáris interpolációja, melynek egyenlete:

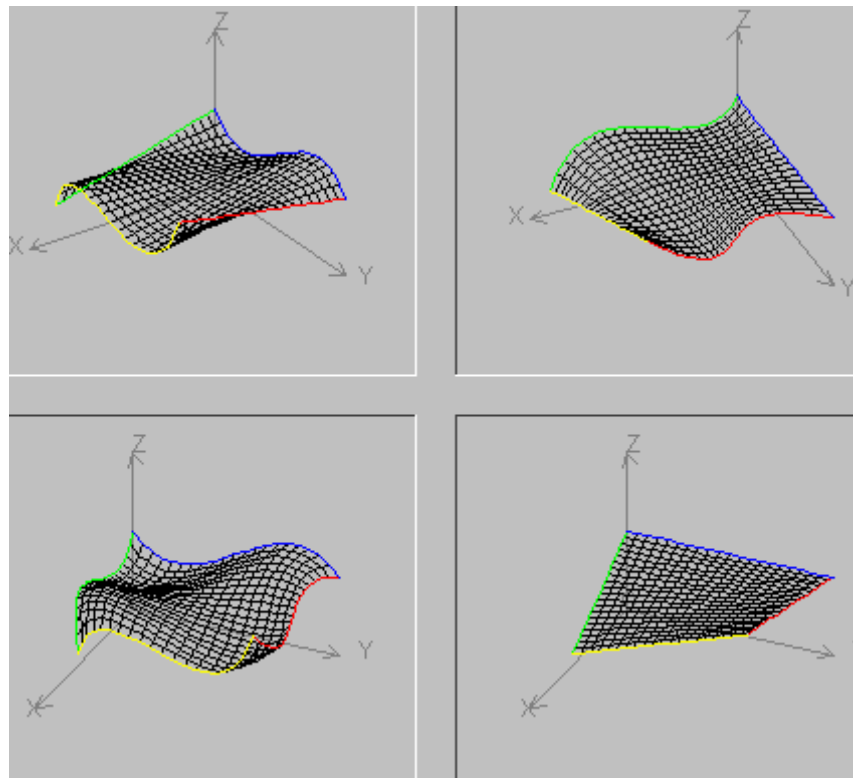
$$\mathbf{I}_a(u, v) = (1-v)\mathbf{a}_1(u) + v\mathbf{a}_2(u)$$

A felület az $\mathbf{a}_1(u)$ és $\mathbf{a}_2(u)$, egymással szemben fekvő két görbét interpolálja, de a másik két határoló görbén $\mathbf{b}_1(v)$, $\mathbf{b}_2(v)$ -n nyilván nem halad át. A $\mathbf{b}_1(v)$, $\mathbf{b}_2(v)$ által meghatározott vonalfelület hasonlóképpen állítható elő. Ennek egyenlete: $\mathbf{I}_b(u, v) = (1-u)\mathbf{b}_1(v) + u\mathbf{b}_2(v)$

A négy görbe metszéspontjai négy pontot határoznak meg a térben, melyek meghatároznak egy nyeregfelületet, a kitérő egyenesek affin pontsorai megfelelő elemeinek összekötése által. A négy metszéspont bilineáris interpolációja:

$$\mathbf{I}_{ab}(u, v) = \begin{bmatrix} 1-u & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r}(0,0) & \mathbf{r}(0,1) \\ \mathbf{r}(1,0) & \mathbf{r}(1,1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-v \\ v \end{bmatrix}$$

A coons-foltot a 3 felületből úgy kapjuk meg, hogy a két vonalfelület összegéből kivonjuk a nyeregfelületet: $\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{I}_a(u, v) + \mathbf{I}_b(u, v) - \mathbf{I}_{ab}(u, v)$



Azaz:

$$\mathbf{r}(u, v) = [1-u \quad u] \begin{bmatrix} \mathbf{r}(0, v) \\ \mathbf{r}(1, v) \end{bmatrix} + [\mathbf{r}(u, 0) \quad \mathbf{r}(u, 1)] \begin{bmatrix} 1-v \\ v \end{bmatrix} - [1-u \quad u] \begin{bmatrix} \mathbf{r}(0, 0) & \mathbf{r}(0, 1) \\ \mathbf{r}(1, 0) & \mathbf{r}(1, 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-v \\ v \end{bmatrix}$$

Ha a lineáris súlyfüggvények helyett tetszőleges súlyfüggvényeket alkalmazunk, melyekre $f_1(u) + f_2(u) \equiv 1$ és $g_1(v) + g_2(v) \equiv 1$ teljesedik, akkor az bilineárisan súlyozott Coons-folt általános alakját kapjuk:

$$\mathbf{r}(u, v) = [f_1(u) \quad f_2(u)] \begin{bmatrix} \mathbf{r}(0, v) \\ \mathbf{r}(1, v) \end{bmatrix} + [\mathbf{r}(u, 0) \quad \mathbf{r}(u, 1)] \begin{bmatrix} g_1(v) \\ g_2(v) \end{bmatrix} - [f_1(u) \quad f_2(u)] \begin{bmatrix} \mathbf{r}(0, 0) & \mathbf{r}(0, 1) \\ \mathbf{r}(1, 0) & \mathbf{r}(1, 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1(v) \\ g_2(v) \end{bmatrix}$$

4.2 Bikubikusan súlyozott Coons-foltok

Adott 4, egymást páronként metsző térgörbe, valamint ezek mentén az $\mathbf{a}_{1v}(u), \mathbf{a}_{2v}(u)$ valamint $\mathbf{b}_{1u}(v), \mathbf{b}_{2u}(v)$ érintő-szalagok. Meghatározandó olyan $\mathbf{r}(u, v)$ felület, amelyeknek az adott görbék a határoló görbéi, és ezek mentén a másik irányhoz tartozó deriváltjai a megadott érintőszalagok lesznek. Azaz

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(u, 0) &= \mathbf{a}_1(u) & \mathbf{r}_v(u, 0) &= \mathbf{a}_{1v}(u) \\ \mathbf{r}(u, 1) &= \mathbf{a}_2(u) & \mathbf{r}_v(u, 1) &= \mathbf{a}_{2v}(u) \\ \mathbf{r}(0, v) &= \mathbf{b}_1(v) & \mathbf{r}_u(0, v) &= \mathbf{b}_{1u}(v) \\ \mathbf{r}(1, v) &= \mathbf{b}_2(v) & \mathbf{r}_u(1, v) &= \mathbf{b}_{2u}(v) \end{aligned}$$

A bilineáris Coons-foltban szereplő vonalfelületek helyett harmadrendű felületeket használunk, a görbe-interpolációnál szereplő két pont és két érintő által meghatározott Hermite-ív segítségével. Az ívhez tartozó $\mathbf{M}_H$ mátrix:

$$\mathbf{M}_H = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ez alapján:

$$\mathbf{C}_a(u, v) = [\mathbf{a}_1(u) \quad \mathbf{a}_2(u) \quad \mathbf{a}_{1v}(u) \quad \mathbf{a}_{2v}(u)] \mathbf{M} \cdot \mathbf{V},$$

$$\mathbf{C}_b(u, v) = \mathbf{U} \mathbf{M}^T \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1(v) \\ \mathbf{b}_2(v) \\ \mathbf{b}_{1u}(v) \\ \mathbf{b}_{2u}(v) \end{bmatrix}$$

Mátrixos jelöléssel a harmadrendű Hermite-felület:

$$C_{uv}(u, v) = \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{M}_H^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{M}_H \cdot \mathbf{V}, \text{ ahol}$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}(0,0) & \mathbf{r}(0,1) & \mathbf{r}_v(0,0) & \mathbf{r}_v(0,1) \\ \mathbf{r}(1,0) & \mathbf{r}(1,1) & \mathbf{r}_v(1,0) & \mathbf{r}_v(1,1) \\ \mathbf{r}_u(0,0) & \mathbf{r}_u(0,1) & \mathbf{r}_{uv}(0,0) & \mathbf{r}_{uv}(0,1) \\ \mathbf{r}_u(1,0) & \mathbf{r}_u(1,1) & \mathbf{r}_{uv}(1,0) & \mathbf{r}_{uv}(1,1) \end{bmatrix}$$

Végül a felület előállítás: $\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{C}_a(u, v) + \mathbf{C}_b(u, v) - \mathbf{C}_{ab}(u, v)$

4.3 Gordon felület

Adottak az $\mathbf{a}_j(u) (j = 0, 1, 2, \dots, m)$ és a $\mathbf{b}_i(v) (i = 0, 1, 2, \dots, n)$ görbeseregek valamint a $u_0, u_1, \dots, u_m$ és $v_0, v_1, \dots, v_n$ skalárok. A görbék egymást rendre páronként metszik az (u_i, v_j) paraméterpárhoz tartozó pontokban.

Olyan felületet kívánunk meghatározni, melynek u és v irányú paramétervonalai rendre a megadott görbék, azaz

$$\mathbf{r}(u_i, v) = \mathbf{b}_i(v) \text{ és } \mathbf{r}(u, v_j) = \mathbf{a}_j(u)$$

A megoldás: a Coons-feltnál használt ötlet alapján egy interpoláló felületet illesztünk a v irányú paramétervonalakra, ehhez hozzáadunk egy az u irányú paramétervonalakra illesztett felületet, majd kivonjuk belőlük a paramétervonalak metszéspontjaira illeszkedő felületet. Legyen

$$L_i^n(u_j) = 1 \text{ és } L_i^n(u_j) = 0, \text{ ha } i \neq j$$

$$\mathbf{r}_b(u, v) = \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i(v) L_i^n(u) = \sum_{i=0}^n \mathbf{r}(u_i, v) L_i^n(u) \text{ valamint}$$

$$\mathbf{r}_a(u, v) = \sum_{j=0}^m \mathbf{a}_j(u) L_j^m(v) = \sum_{j=0}^m \mathbf{r}(u, v_j) L_j^m(v)$$

$$\mathbf{r}_{ab}(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \mathbf{r}(u_i, v_j) L_i^n(u) L_j^m(v)$$

Végül a Gordon felület előállítás:

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{r}_a(u, v) + \mathbf{r}_b(u, v) - \mathbf{r}_{ab}(u, v)$$

Az eredeti megoldásban Gordon a vonalfelületek általánosítása képen Lagrange-interpolációt használt, melyet az alábbi egyenlőség definiál:

$$L_i^n(u) = \frac{\prod_{j=0, j \neq i}^n (u - u_j)}{\prod_{j=0, j \neq i}^n (u_i - u_j)}(u)$$

Természetesen más interpolációs módszer is szóba jöhet, például Hermite-féle.

4.4 Tenzor-szorzat felületek

4.4.1 Bezier felület

Egy (n,m) rendű Bezier felületet $(n+1) \times (m+1)$ kontrollponttal (kontroll háló) adunk meg. A felületet előállító 2 változós vektor-skalár függvény az alábbi:

$$\mathbf{r}(u,v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_i^n(u) B_j^m(v) \mathbf{P}_{i,j}, \quad u,v \in [0,1]$$

A képletben szereplő Bernstein polinomok definíciója:

$$B_i^n(u) = \binom{n}{i} u^i (1-u)^{n-i}$$

Általában tenzor-szorzat felületről beszélünk, ha a Bernstein-polinomok helyett más bázis-függvényt használunk, pl. Lagrange, B-spline, racionális B-spline alapfüggvényeket. Az is megengedett, hogy a különböző irányú paramétervonalakhoz különböző fajta alap-függvények tartozzanak.

4.4.2 Bezier felület mátrix-reprezentáció

Az n -ed fokú Bernstein polinomok az n -ed fokú polinomok terének egy bázisát alkotják. Ezen tér természetes bázisa és a polinomok bázisa közötti kapcsolat (bázis transzformáció) mátrixa legyen $\mathbf{M}$. Ekkor

$$\begin{bmatrix} B_0^n(t) & B_1^n(t) & \dots & B_n^n(t) \end{bmatrix} = \mathbf{M} \begin{bmatrix} t^n \\ t^{n-1} \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Bizonyítható, hogy ekkor az $\mathbf{M}$ mátrix i,j elemére fenn áll:

$$m_{i,j} = (-1)^{n-i-j} \binom{n}{i} \binom{n-i}{j}$$

A felület előállítás a bikubikus felületekhez hasonlóan történik. Egy (n,m) rendű Bezier felület

$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{V}$, ahol $\mathbf{U}, \mathbf{V}$ jelentik a megfelelő n-ed illetve m-ed fokú polinom-tér természetes bázisait oszlopvektorba rendezetten, $\mathbf{N}$ és $\mathbf{M}$ pedig a megfelelő nxn-es illetve mxm-es kvadratikus transzformációs mátrixokat.

4.4.3 Interpoláló Bezier felület

Legyen adva (n+1) x (m+1) kontrollpont, melyet jelöljön $\mathbf{P}_{i,j}$, valamint a hozzájuk tartozó $(u_i, v_j), (i = 0, 1, \dots, n; j = 0, 1, \dots, m)$ paraméterek. Keressük azt a $\mathbf{B}_{i,j}$ kontrollhálót, melyhez tartozó $\mathbf{r}(u, v)$ Bezier-felület illeszkedik az adott pontokra, azaz:

$$\mathbf{r}(u_k, v_l) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_i^n(u) B_j^m(v) \mathbf{B}_{i,j} = \mathbf{P}_{k,l}, \quad k = 0, 1, \dots, n; l = 0, 1, \dots, m$$

Vezessük be az alábbi jelöléseket:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{0,0} & \mathbf{P}_{0,0} & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{P}_{0,m} \\ \mathbf{P}_{1,0} & \mathbf{P}_{1,1} & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{P}_{1,m} \\ \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot \\ \mathbf{P}_{n,0} & \mathbf{P}_{n,1} & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{P}_{n,m} \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{0,0} & \mathbf{B}_{0,0} & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{B}_{0,m} \\ \mathbf{B}_{1,0} & \mathbf{B}_{1,1} & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{B}_{1,m} \\ \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot \\ \mathbf{B}_{n,0} & \mathbf{B}_{n,1} & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{B}_{n,m} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} B_0^n(u_0) & B_1^n(u_0) & \cdot & \cdot & \cdot & B_n^n(u_0) \\ B_0^n(u_1) & B_1^n(u_1) & \cdot & \cdot & \cdot & B_n^n(u_1) \\ \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot \\ B_0^n(u_n) & B_1^n(u_n) & \cdot & \cdot & \cdot & B_n^n(u_n) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} B_0^m(v_0) & B_0^m(v_1) & \cdot & \cdot & \cdot & B_m^m(v_m) \\ B_1^m(v_0) & B_1^m(v_1) & \cdot & \cdot & \cdot & B_m^m(v_m) \\ \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot \\ B_m^m(v_0) & B_m^m(v_1) & \cdot & \cdot & \cdot & B_m^m(v_m) \end{bmatrix}$$

A jelöléseknek megfelelően a következő egyenletrendszert kapjuk a $\mathbf{B}_{i,j}$ ismeretlenekre nézve: $\mathbf{P} = \mathbf{UBV}$, amiből $\mathbf{B} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{PV}^{-1}$

