1. Gépi számítás:

1. Egész számok:

- Hibamentesen használhatóak
- 2 vagy 4 bájtos tárolás, ahol egy bájt 8 bitet tartalmaz
- 1 bájtos tárolás esetén: 0000 1001 -> +9
  0111 1111 -> +127 (2^7-1)
  - az első bit az előjel bit: 0 = pozitív
    1 = negatív
  - negatív egész szám kiszámítása: 2^8+x
    Ha $x=(-10)$, akkor $x = 2^8-10 = 246 = 1111\ 0110 = \underline{-10}$ (kettes komplemens)

- Maradékosztályok: Adjuk össze a 77 és 101 számokat.
  77: 0100 1101
  101: 0110 0101
  0100 1101 + 0110 0101 = 1011 0010, amely nem 178, hanem −78, az előjelbit miatt.
  Tehát elmondható, hogy $-78 \equiv 178 \pmod{2^8}$

- Kivonás: (a−b esetén)
  Ha $a=-47$, $b=22$:
  $a = 2^8-47 = 1101\ 0001$
  $b = 22 = 0001\ 0110$ -> kettes komplemens -> 1110 1010
  $$\begin{array}{r} 1101\ 0001 \\ +\ 1110\ 1010 \\ \hline 1011\ 1011 = 187 \end{array}$$
  $2^8+x = 187$
  $x = -69$

- Szorzás:
  Összeadáson alapszik.
  2-vel való szorzás esetén a számjegyek balra csúsztatásával egyenértékű a művelet.

2. Lebegőpontos számok:

- A nemnulla lebegőpontos számok alakja: $\pm a^k\left(\frac{a_1}{a}+\frac{a_2}{a^2}+\ldots+\frac{a_t}{a^t}\right)$, ahol a az alap, t a számjegyek, k a kitevő.
  - az "a" leggyakrabban 2, 10, 16 és $a>1$.
  - $1 \le a_1 \le a-1$ (azaz kettes számrendszerbeli ábrázolásnál ez mindig 1)
  - $0 \le a_i \le a-1$, ahol $i=2,\ldots,t$
- Nulla esetén:
  - $k=a_1=a_2=\ldots=a_t=0$
  - az előjel általában pozitív, azaz 0 bit.
- Lebegőpontos számok tárolási formája:
  $[\pm, k, a_1, \ldots, a_t]$, ahol $(a_1,\ldots,a_t) := m$ a mantissza
  k a karakterisztika
  - m tárolására 4, 8 vagy 16 bájt áll rendelkezésre (egyszerű, dupla, négyszeres)
  - k értékkészlete m-mel párhuzamosan növekszik
    $k_- \le k \le k_+$, ahol $k_- \le 0$ és $k_+ \ge 0$, valamint $|k_-| \approx |k_+|$
- Legnagyobb ábrázolható szám:
  $M_\infty = a^{k_+}\cdot\sum_{i=1}^{t}\frac{a-1}{a^i} = a^{k_+}(1-a^{-t})$

  Egy adott ábrázolás esetén a lebegőpontos számok halmaza:
  $[-M_\infty, M_\infty]$, amely a 0-ra szimmetrikus
- Legkisebb ábrázolható szám:
  $\varepsilon_0 = a^{k_-}\cdot\frac{1}{a} = a^{k_- -1}$
  - A $]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[$ intervallumban a 0 számon kívül nincs más ábrázolható lebegőpontos szám.
  - ε_0 után következő ábrázolható lebegőpontos szám:
    $$a^{k_-}\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a^t}\right) = a^{k_- -1} + a^{k_- -t} = \varepsilon_0 + a^{k_- -t} = \varepsilon_0 + \underbrace{a^{k_- -1}}_{\varepsilon_0}{}^{+1-t} = \varepsilon_0(1+a^{1-t})$$
- Az 1 mindig lebegőpontos szám:
  $1 = [+, 1, 1, 0, \ldots, 0]$
  - Az 1 után következő ábrázolható lebegőpontos szám:
    $\varepsilon_1 = a\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a^t}\right) = 1+a^{1-t}$ (relatív pontosság)
- $a=2$, $t=4$, $k_-=-2$, $k_+=3$ esetén:
  $\frac{5}{32} = \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\right)$
  - Az $\frac{5}{32}$ után következő ábrázolható lebegőpontos szám: $\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\right) = \frac{11}{64}$

- Lebegőpontos számok kerekítése:

Legyen x valós szám és $|x| \le M_\infty$.
Jelöljük $fl(x)$-szel az x-hez rendelt lebegőpontos számot.

$$fl(x) := \begin{cases} 0, & \text{ha } |x| < \varepsilon_0 \\ \text{Az x-hez legközelebbi lebegőpontos szám,} & \text{ha } \varepsilon_0 \le |x| \le M_\infty \end{cases}$$

$$|fl(x) - x| \le \begin{cases} \varepsilon_0, & \text{ha } |x| < \varepsilon_0 \\ \frac{1}{2}\varepsilon_1 |x|, & \text{ha } |x| \ge \varepsilon_0 \end{cases}$$

$$|fl(x \diamond y) - x \diamond y| \le \begin{cases} \varepsilon_0, & \text{ha } |x \diamond y| < \varepsilon_0 \\ \frac{1}{2}\varepsilon_1 |x \diamond y|, & \text{ha } |x \diamond y| \ge \varepsilon_0 \end{cases}$$

- Levegás esetén:

$$|fl(x \diamond y) - x \diamond y| \le \varepsilon_1 \cdot |x \diamond y|$$

- Más alakban:

$$fl(x \diamond y) = (x \diamond y) \cdot (1 + \varepsilon_0), \quad |\varepsilon_0| \le \varepsilon_1$$

$\diamond$ jelentése a négy alapművelet, tehát: $+, -, *, /$

Feltételezzük, hogy a gép először pontosan hajtja végre a műveleteket és csak utánna rendel hozzájuk az fl függvénnyel lebegőpontos számot.

- Intervallum aritmetika:
  - monotonitás: Ha $a \le b$ és $fl(a+c)$ és $fl(b+c)$ léteznek, akkor $fl(a+c) \le fl(b+c)$

- Hiba:
  - Legyen $\tilde{x}$ a lebegőpontos számítás eredménye
  - abszolút hiba: $|\tilde{x} - x|$
  - relatív hiba: $\left|\frac{\tilde{x} - x}{x}\right|$

- Egy feladatosztályban a végső és a kiindulási hiba hányadosának suprémuma véges.
- Az abszolút hibából ered az abszolút kondíciószám
  - Kivonás hibája:

    Legyen x és y kiindulási adat, hibájuk rendre ε_x és ε_y, ahol $|\varepsilon_x|, |\varepsilon_y| < \varepsilon$.

    $x(1+\varepsilon_x) - y(1+\varepsilon_y) - (x-y) = x \cdot \varepsilon_x - y \cdot \varepsilon_y$
    - A relatív hiba becslése:

      $$\left|\frac{x\varepsilon_x - y\varepsilon_y}{x-y}\right| \le \varepsilon \cdot \left|\frac{x+y}{x-y}\right|$$
    - Abszolút hiba:

      $$|\varepsilon_x - \varepsilon_y| \le 2 \cdot \varepsilon$$
  - Skalárszorzat hibája:

    $$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

    $$\left.\begin{aligned} \tilde{x}_i &= x_i(1+\alpha_i) \\ \tilde{y}_i &= y_i(1+\beta_i) \end{aligned}\right\} \text{ ahol } |\alpha_i|, |\beta_i| \le \varepsilon_1$$

    $$\tilde{x}_i \cdot \tilde{y}_i = x_i y_i (1+\alpha_i) \cdot (1+\beta_i) \cdot (1+\varepsilon_*) \cong x_i y_i \cdot (1+\gamma_i), \text{ ahol } |\gamma_i| \le 3 \cdot \varepsilon_1$$

    ε_*: a műveletre jellemző hiba

2. Lineáris egyenletrendszerek:

$$Ax = b, \text{ ahol } A \in \mathcal{M}^{m \times n}(\mathbb{R}), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad b \in \mathbb{R}^m$$

- Vektortér: Egy $V \ne 0$ halmazt vektortérnek nevezünk, ha
  - V a $\mathbb{T}$ komplex/valós test felett értelmezett
  - $\forall \underline{a}, \underline{b} \in V$ esetén: $\underline{a} + \underline{b} \in V$
  - $\forall \alpha \in \mathbb{T}$ esetén: $\alpha \cdot \underline{a} \in V$
  - összeadásra nézve Abel-csoportot alkot:
    - asszociatív: $(\underline{x} + \underline{y}) + \underline{z} = \underline{x} + (\underline{y} + \underline{z})$, $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z} \in V$
    - $\exists$ zéruselem: $\underline{x} + 0 = 0 + \underline{x} = \underline{x}$
    - $\underline{x} \in V$ esetén: $\exists$ inverz elem, azaz $\underline{x} + (-\underline{x}) = 0$
    - kommutatív: $\underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a}$
  - A skalárszorzás tulajdonságai:
    - $\alpha, \beta \in \mathbb{T}$ esetén:
      - $(\alpha + \beta) \cdot \underline{x} = \alpha\underline{x} + \beta\underline{x}$
      - $\alpha(\underline{x} + \underline{y}) = \alpha\underline{x} + \alpha\underline{y}$
      - $(\alpha\beta)\underline{x} = \alpha(\beta\underline{x})$
      - $1 \cdot \underline{x} = \underline{x}$ ($\exists$ egységelem)

- Metrikus tér:

A $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ függvény metrikus teret alkot, ha:

- $d(x,y) \geq 0$ és $d(x,y) = 0 \iff x = y$
- $d(x,y) = d(y,x)$ /szimmetrikus/
- $d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$ /háromszög egyenlőtlenség/

- Normált tér:

A $(V, \|\cdot\|)$ kettőst normált térnek nevezzük, ha V vektortér a $\mathbb{T}$ számtest felett, a $\|\cdot\|: V \rightarrow \mathbb{R}$ függvény pedig norma, amely teljesíti az alábbi tulajdonságokat:

- $\forall x \in V$ esetén $\|x\| \geq 0$
- $\|x\| = 0 \iff x = 0$
- $\forall \alpha \in \mathbb{T}$ és $\forall x \in V$ esetén: $\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$
- $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

- Belső szorzat:

$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$

$d(x,y) = \|x-y\|$, ahol d a távolságra utal.

Minden belső szorzat-tér egyben normált tér is, és minden normált tér egyben metrikus tér is.

- Fontos normák:

- p-norma: $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$, ha $p = 1$: egynorma
  $p = 2$: euklideszi norma
  $p = \infty$: végtelen norma
  $\|x\|_\infty = \max(|x_i|)$, ahol $1 \leq i \leq n$

- mátrixnorma: $\|A\| := \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$

Ebből következik, hogy $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$

Egy mátrix normája az a legkisebb M szám, amelyre igaz, hogy $\underbrace{\|Ax\| \leq M \cdot \|x\|}_{\|E\| = 1}$

$\|A\|_1 = \max_j \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right)$ /max. oszlopösszeg/

$\|A\|_\infty = \max_i \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right)$ /max. sorösszeg/

$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T \cdot A)} = \sqrt{\lambda_{max}(A^T \cdot A)}$

Legyen $A \in \mathcal{M}^{n \times n} \in \mathbb{C}$.

"A" pozitív indefinit, ha $\langle Ax, x \rangle \geq 0$, ahol $x \in \mathbb{C}^n$

- Ekkor érvényes, hogy: $\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle$

- Tétel:

$\|A\|_2 = (\lambda_{max}(A^T A))^{\frac{1}{2}}$

- bizonyítás:

$\|Ax\|_2^2 = \langle Ax, Ax \rangle = \langle x, \overbrace{A^T A x}^{1} \rangle$

- $A^T A$ szimmetrikus és pozitív indefinit, tehát sajátértékei nem negatívak.
- $A^T A$ ortogonális mátrix segítségével diagonizálható, azaz $\exists\, Q \in \mathcal{M}^{n \times n}$. $Q^T Q = Q Q^T = E$ és $Q A^T \cdot A \cdot Q^T = D$.
- Megmutatjuk, hogy $\|Ax\|_2^2 = \langle x, A^T A x \rangle \leq \lambda_{max} \|x\|_2^2$
- $\|x\|_2^2$ előáll úgy, hogy $\|x\|_2^2 = \langle Q^T Q x, x \rangle = \langle Qx, Qx \rangle = \|Qx\|_2^2 \Rightarrow Q$ meghagyja a normát
- Tehát: $\langle x, A^T A x \rangle = \langle \underbrace{Qx}_{Qx = y}, Q A^T A x \rangle = \langle y, Q A^T A \underbrace{Q^T Q}_{1} x \rangle = \langle y, Q A^T A Q^T \underbrace{y}_{y = Qx} \rangle$

$\Rightarrow \langle x, A^T A x \rangle = \langle y, Dy \rangle = \sum_{i=1}^{n} d_i y_i^2 \leq d_{max} \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \lambda_{max} \|y\|_2^2 = \lambda_{max} \|\underbrace{Qx}\|_2^2 = \lambda_{max} \|x\|_2^2$

Qx normája x normája

• Spektrumsugár:

Legyen $A \in \mathcal{M}^{n\times n}$ $(\mathbb{R})$
Sajátértékei: $\lambda_i(A)$, $i=1,\dots,n$
Ekkor $\varrho(A) = \max_{1\le i\le n} |\lambda_i(A)|$
$\varrho(A) \le \|A\|$

Következésképpen szimmetrikus mátrix esetén $\varrho(A)$ norma $A^T A = A^2$

Legyen $A \in \mathcal{M}^{n\times n}$, reguláris mátrix, azaz invertálható.
Becsüljük meg a megoldás hibáját, ha b helyett a hibás $b+\delta b$ ismert.

$$\left.\begin{aligned} Ax&=b \\ A(x+\delta x)&=b+(\delta x)\end{aligned}\right\}\quad \begin{aligned} A\delta x &= \delta b \quad \text{// leosztunk } A\text{-val} \\ \delta x &= A^{-1}\delta b\end{aligned}$$

$\|b\| = \|Ax\| \le \|A\|\cdot\|x\|$
$\|\delta b\| = \|A\delta x\|$

$\boxed{\text{Az } \tilde{x}-x \text{ kifejezés eredményeként áll elő a } \delta x \text{ érték.}}$

• Abszolút hibabecslés:
$$\|\delta x\| = \|A^{-1}\delta b\| \le \|A^{-1}\|\cdot\|\delta b\|$$

• Relatív hibabecslés:
$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \le \frac{\|A^{-1}\|\cdot\|\delta b\|}{\|x\|} \le \frac{\|A^{-1}\|\cdot\|\delta b\|}{\frac{\|b\|}{\|A\|}} = \underbrace{\|A\|\cdot\|A^{-1}\|}_{\text{kondíciószám}}\cdot\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$
$\|b\| \le \|A\|\cdot\|x\|$

• Kondíciószám:

Legyen $A \in \mathcal{M}^{n\times n}$ egy reguláris mátrix.
Az "A" mátrix kondíciószáma: $\text{cond}(A) = \|A\|\cdot\|A^{-1}\|$
- függ a normától
- $1 = \|E\| = \|A\cdot A^{-1}\| \le \|A\|\cdot\|A^{-1}\| = \text{cond}(A)$ /nem lehet egynél kisebb/
- A kondíciószám azt jelenti, hogy a megoldás relatív hibája hányszorosa a jobboldali vektor relatív hibájának
- a determináns és a kondíciószám független egymástól

• Perturbációs lemma:

Legyen $S = E+R$ és $\|R\| = q < 1$.
Ekkor S reguláris (azaz invertálható) és $\|S^{-1}\| \le \frac{1}{1-q}$

• LU-felbontás:

Legyen $A \in \mathcal{M}^{n\times n}$
Ekkor A felbontható $A=LU$ alakban, ahol $L, U \in \mathcal{M}^{n\times n}$
- $U = L_{n-1} L_{n-2} \dots L_1$ / felső háromszög mátrix/
- $L = L_1^{-1} L_2^{-1} \dots L_{n-1}^{-1}$ / alsó háromszög mátrix/

$Ax=b$
$LUx=b$
$Ux=y$ ← 2. lépés
$Ly=b$ ← 1. lépés

- L_i az A_{i-1}-ből származtatható az $a_{ii} \in A_{i-1}$ főátlóbeli elem segítségével.
- $A_i = L_i \cdot A_{i-1}$

• PLU-felbontás:

Ha az a_{ii} főátlóbeli elem 0, akkor felcseréljük a sort / oszlopot, hogy LU felbontásnál ne kelljen 0-val osztani.
Mindezt az úgynevezett permutációs mátrix segítségével érhetjük el, amely jobbról szorozva oszlopot, balról szorozva sort cserél.
- $U = L_{n-1}\cdot\overline{L_{n-2}}\cdot\ldots\cdot\overline{L_1}\cdot P_1 A$
- $U = L_{n-1}\cdot\overline{L_{n-2}}\cdot\ldots\cdot\overline{L_1}\cdot\prod_{i=1}^{n-1} P_i A$
- $L = \left(L_{n-1}\cdot\overline{L_{n-2}}\cdot\ldots\cdot\overline{L_1}\right)^{-1}$ és $P := \left(\prod_{i=1}^{n-1} P_i\right)^{-1}$
- $A = PLU$

• LDU'-felbontás:

Az LU felbontás ismert.
Ha U főátlóbeli elemei nem 0, akkor kivehetőek U-ból úgy, hogy $U = DU'$, ahol $D = \text{diag}(u_{ii})$

• LDL^T-felbontás:

Ha A szimmetrikus és pozitív definit, akkor ∃ olyan felbontás, hogy $U = L^T$.
D elemei pozitívak, ezért D-ből négyzetgyököt lehet venni.
$D^{\frac{1}{2}} = \text{diag}(\sqrt{a_{ii}})$

• Cholesky-felbontás: $LDL^T = \underbrace{LD^{\frac{1}{2}}}_{L}\cdot\underbrace{D^{\frac{1}{2}}L^T}_{L^T} = L\cdot L^T$

3. Nemlineáris egyenletek és egyenletrendszerek megoldása:

- **Viète-formulák:**

Legyen $P_n(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$
a polinom gyökei pedig: $x_1, \dots, x_n$.

Ekkor: $x_1+x_2+\dots+x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$

$x_1\cdot x_2\cdot\dots\cdot x_n = (-1)^n\frac{a_0}{a_n}$ és $(x_1x_2+x_1x_3+\dots+x_1x_n)+(x_2x_3+\dots+x_2x_n)+\dots+(x_{n-1}x_n) = \frac{a_{n-2}}{a_n}$

Másodfokú egyenlet esetén: $ax^2+bx+c=0$

$x_1+x_2 = -\frac{b}{a}$

$x_1\cdot x_2 = \frac{c}{a}$

- **Descartes-féle jelszabály:**

Egy P_n polinom pozitív gyökeinek a száma az $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ sorozatban előforduló előjelváltások számával vagy páros számmal kevesebbel egyezik meg.

A negatív gyökeinek a számát hasonló módon kaphatjuk meg, csak ekkor $P(-x)$-et vizsgáljuk.

- **Racionális zérushelytétel:**

Legyen $P_n(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$.

Ekkor P_n racionális gyökei $\pm\frac{p}{q}$ alakúak, ahol $p \mid a_0$ és $q \mid a_n$ (azaz p a_0 osztója, ahogy q is a_n-nek)

- Példa: $6x^5 - 3x^3 + 2x^2 + 2 \Rightarrow \pm\frac{p}{q} = \pm\frac{1,2}{1,2,3,6}$

$5x^2+7x+2 \Rightarrow \frac{-7\pm\sqrt{49-4\cdot5\cdot2}}{10}$; $-\frac{2}{5}$; $-1 = -\frac{1}{1}$

$\pm\frac{p}{q} = \pm\frac{1,2}{1,5}$

- **Newton-tétel (gyökök felső korlátja):**

Legyen $P_n(x) = a_nx^n + \dots + a_1x + a_0$, $a_i \in \mathbb{R}$, $\forall i$-re, $a_n \neq 0$

Tegyük fel, hogy $\exists k > 0$, amelyre teljesül, hogy $f(k), f'(k), \dots, f^{(n)}(k) \geq 0$

Ekkor a k felső korlátja f pozitív gyökeinek.

- **MacLaurin Lagrange-tétel:**

Legyen $P_n(x) = a_nx^n + \dots + a_1x + a_0$, ahol $a_n > 0$, $a_i \in \mathbb{R}$, $\forall i$-re, $\exists a_i < 0$.

Jelölje: a_N: az első negatív együttható

a_m: a legkisebb együttható

Ekkor M, L a P_n polinom zérushelyeinek felső korlátja és $M = 1 - \frac{a_m}{a_n}$, $L = 1 + \sqrt[N]{\frac{a_m}{a_n}}$.

- **Komplex gyökökre vonatkozó alsó- és felső-korlát tétele:**

Legyen $P_n(x) = a_nx^n + \dots + a_1x + a_0$, ahol $a_0, a_n \neq 0$, $a_i \in \mathbb{C}$, $\forall i$-re.

Legyen továbbá $A_n = \max\{|a_{n-1}|, \dots, |a_1|, |a_0|\}$

$A_0 = \max\{|a_n|, \dots, |a_1|\}$

Ekkor minden $x \in \mathbb{C}$ gyökre igaz, hogy $\frac{|a_0|}{A_0 + |a_0|} < |x| < \frac{A_n + |a_n|}{|a_n|}$

- **Egyszerű fixpont iteráció (Banach-féle fixponttétel):**

Legyen $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Az $f(x) = 0$ egyenletrendszer megoldásait a $g(x) = x - \omega\cdot f(x)$ leképezés fixpontjaiként keressük, ahol $\omega \neq 0$ (paraméter).

Tehát, ha $g(x) = x \Rightarrow f(x) = 0$

Legyen x_0 adott.

Ekkor $x_{m+1} = g(x_m)$, ahol $m = 0, 1, \dots$

A konvergencia a Banach-féle fixponttétel miatt teljesül.

- **Banach-féle fixponttétel:**

Legyen (X, d) egy metrikus/valós tér.

Legyen a $T: X \to X$ függvény kontrakció, azaz $\exists\, 0 \leq q < 1: d(T(x), T(y)) \leq q \cdot d(x, y)$

Ekkor $\exists\, x^* \in X: T(x^*) = x^*$ és $\forall x_0 \in X: x_{n+1} = T(x_n)$, ahol $n = 0, 1, \dots$

- Definíció:

Az (x_k) sorozat p-ed rendben konvergens, ha (x_k) konvergens, továbbá

$$\lim_{k\to\infty}(x_k) = x^* \quad \text{és} \quad \lim_{k\to\infty}\frac{|x_{k+1}-x^*|}{|x_k-x^*|^p} = c \qquad // x^* = \text{az } (x_k) \text{ sorozat határértéke}$$

- Felezőmódszer származtatása és hibája:

Legyen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos $[a,b]$-n.

Ha $f(a)\cdot f(b)<0$, akkor f-nek van gyöke $]a,b[$-ben.

$\lim x_k = x^*$ $\qquad f(x^*)=0$

$\frac{x_{k-1}+x_k}{2} = x_{k+1}$

Ha $f(x_{k+1})<0$, akkor $x_{k-1}=x_{k+1}$

Ha $f(x_{k+1})>0$, akkor $x_k = x_{k+1}$

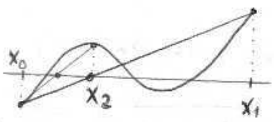
Előbb utóbb elérjük az $f(x^*) \geq 0$-t.

↑ 0-hoz legközelebbi

- Hibabecslés:

$$|x_k - x^*| \leq \frac{b-a}{2^k}, \text{ ahol } k=1,2,\dots$$

- Húrmódszer és hibabecslése:



Legyen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos $[a,b]$-n és $f(a)\cdot f(b)<0$

Becsüljük az $f(x_0)$ és $f(x_1)$ pontokat összekötő szakaszt, ahol metszi az x-tengelyt (x_2)-ben, majd ha $f(x_2)>0$, akkor alkalmazzuk az előbbi eljárást az $[x_0,x_2]$ intervallumon. Ellenkező esetben az $[x_2,x_1]$ intervallumon, kivéve, ha $f(x_2)=0$.

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)\cdot\frac{x_k - x_j}{f(x_k)-f(x_j)}$$ ahol $k>j$ és j a legnagyobb index, amelyre $f(x_k)\cdot f(x_j)<0$.

- Hibabecslése:

Legyen $f(a)\cdot f(b)<0$ és f', f'' állandó előjelű $[a,b]$-n, továbbá $0<m_1<|f'|$, $|f''|\leq M_2<+\infty$.

Ekkor a húrmódszer konvergens és hibabecslése:

$$|x_{k+1}-x^*| \leq \frac{M_2}{2m_1}\,|x_j - x^*|\cdot|x_k - x^*|$$

- Szelőmódszer:

A húrmódszer $x_j = x_{k-1}$ választásával:

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)\cdot\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k)-f(x_{k-1})}, \text{ ahol } x_0 = a,\ x_1 = b$$

- Newton-módszer:

Válasszuk meg g-t úgy, hogy $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$

Az $f(x)=0$ egyenlet gyökének x_0 közelítéséből indulva olyan δx javítást akarunk megoldani, hogy $x_0+\delta x$ már gyöke legyen.

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \text{ ahol } k=0,1,\dots$$

- Newton-módszer lokális konvergenciája:

Ha $f \in C^2[a,b]$ és

1.) f-nek létezik gyöke $]a,b[$-ben úgy, hogy $f(x^*)=0$
2.) f' állandó előjeltartó $[a,b]$-n és $0<m_1<|f'|$
3.) $f''<M_2<+\infty$
4.) Legyen $x_0 \in [a,b]$ és $|x_0 - x^*| < r = \min\left\{\frac{2\cdot m_1}{M_2}, |x^*-a|\cdot|x^*-b|\right\}$

A newton-módszer másodrendben konvergál a gyökhöz.

- Newton-módszer globális konvergenciája:

Ha $f\in C^2[a,b]$ és

1.) $\exists x^* \in]a,b[: f(x^*)=0$
2.) f' és f'' állandó előjelű $[a,b]$-n
3.) $x_0 \in [a,b]$ esetén ha $f(x_0)\cdot f''(x_0)>0$, akkor az x_0-ból indított Newton-módszer monoton konvergál f gyökeihez.

4. Leghisebb négyzetek módszere:

• A feladat ismertetése:

t_i = az időpont, amikor az i-edik kísérletet elvégeztük $(i=1,\dots,m)$
f_i = a mért érték
$\{t_i, f_i\}$ = pontfelhő a síkon

Határozzuk meg a kapcsolatot a t_i és f_i értékek között.
Egy függvényt keresünk, amely "közel" van a mért értékekhez. (Az eltérés jelenti a mérés hibáját)
Tehát: $F(t_i) \approx f_i$, ahol $i=1,\dots,m$

• Lineáris regresszió:

$F(t) = a + bt$, ahol a, b paraméterek
Algebrai alak, ha minden adat illeszkedik: $F(t_i) = a + b\cdot t_i$, ahol $i=1,\dots,m$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & t_m \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} \quad Ax = f$$

• Leghisebb négyzetek elve, általános megoldás:

$J(x) = \|Ax - f\|_2^2$
$J(x) \Rightarrow \min$
$J(x) = \sum_{i=1}^{m} \left((Ax)_i - f_i\right)^2 \quad // (Ax)_i = F(t_i) = a + b\cdot t_i$

Egy 2 változós függvény minimumhelyét keressük.
$J(a,b) = \sum_{i=1}^{m} (a + b\cdot t_i - f_i)^2$

Parciális deriváltjainak 0-val kell egyenlőnek lennie, azaz $\frac{\partial J}{\partial a} = 0$ és $\frac{\partial J}{\partial b} = 0$.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial a} &= 2 \sum_{i=1}^{m} (a + b\cdot t_i - f_i) \\ \frac{\partial J}{\partial b} &= 2 \cdot \sum_{i=1}^{m} (a + b\cdot t_i - f_i)\cdot t_i \end{aligned}\right\}$$

Tehát 2-vel lehet osztani, és így: $\sum_{i=1}^{m} (a + b\cdot t_i - f_i) = 0$
$\sum_{i=1}^{m} (a + b\cdot t_i - f_i)\, t_i = 0$

$\Downarrow$

Kiemelés után:

$$\left.\begin{aligned} m\cdot a + b\cdot \sum_{i=1}^{m} t_i &= \sum_{i=1}^{m} f_i \\ a\cdot \sum_{i=1}^{m} t_i + b\cdot \sum_{i=1}^{m} t_i^2 &= \sum_{i=1}^{m} t_i f_i, \text{ azaz} \end{aligned}\right\} \begin{pmatrix} m & \sum_{i=1}^{m} t_i \\ \sum_{i=1}^{m} t_i & \sum_{i=1}^{m} t_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{m} f_i \\ \sum_{i=1}^{m} t_i \cdot f_i \end{pmatrix}$$

- determináns: $m \cdot \sum_{i=1}^{m} t_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{m} t_i\right)^2 \geq 0$

- Szinguláris eset:

$$\begin{pmatrix} m & m\cdot t_0 \\ m\cdot t_0 & m\cdot t_0^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{m} f_i \\ t_0 \cdot \sum_{i=1}^{m} f_i \end{pmatrix} \quad // \text{Minden } t_i = t_0$$

$m\cdot a + m\cdot t_0 \cdot b = \sum_{i=1}^{m} f_i$

$a = \frac{\sum_{i=1}^{m} f_i}{m} - b\cdot t_0$, ahol b tetszőleges $\Rightarrow F(t) = a + b\cdot t = \frac{\sum_{i=1}^{m} f_i}{m} + b\cdot(t - t_0)$

Ha $b = 0 \Rightarrow F(t) = \frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^{m} f_i$

• Általános módszer:

$F(t) = \sum_{j=1}^{m} x_j f_j(t)$, ahol x_j = a keresett paraméterek
f_j = alkalmas függvényrendszer

Ismert $\{t_i, f_i\}_{i=1}^{m}$ és $m > n$
$F(t_i) \approx f_i$, $i = 1,\dots,m$
Legyen $A = (f_j(t_i)) = \begin{pmatrix} f_1(t_1) & f_2(t_1) & \dots \\ f_1(t_2) & \dots & \end{pmatrix}$
$!\, A \in \mathcal{M}^{m\times n}$
$f = (f_1, \dots, f_m)^T \quad x = (x_1, \dots, x_n)^T$

Az $Ax = f$ egyenlet általánosságban nem megoldható
- Megoldás: Leghisebb négyzetes-módszer + minimum keresés parciális deriváltakkal
$J(x) = \|Ax - f\|_2^2 = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} x_j f_j(t_i) - f_i \right) \quad // Ax = F(t) = \sum_{j=1}^{m} x_j f_j(t)$

A minimumhely ott lehet, ahol $A^T A x = A^T f$.
Ez mindig megoldható!
(szinguláris esetben elhagyjuk a lineárisan függő oszlopokat.)

5. Interpoláció:

∘ Lagrange-interpoláció:

Tekintsük f_i értékeit hibamentesnek.

Legyen adott $\{x_i\}_{i=0}^n$ és $\{f_i\}_{i=0}^n$ és $x_i \neq x_j$, ha $i \neq j$

Keressük meg azt a legfeljebb n-ed fokú polinomot, melyre $P(x_i) = f_i$ $(i = 0, .., n)$ teljesül.

$$P(x_i) = a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \dots + a_n x_i^n = f_i$$

A megoldás létezik és egyértelmű:

Legyen g és h két legfeljebb n-ed fokú polinom és megoldása az interpolációs feladatnak.

Ekkor legyen $q = g - h$ (q is legfeljebb n-ed fokú és az alappontokban zérus)

Az algebra alaptétele miatt $q \equiv 0$, mivel $n+1$ gyöke van $\Rightarrow q = h$.

A megoldás: Lagrange-polinom:

Az n-ed fokú $\prod_{j=0}^{n} (x - x_j)$ polinom minden alappontban zérus, kivéve x_i-ben.

Ekkor legyen:

$$\ell_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_{i-1})\cdot(x-x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdot(x_i-x_1)\cdot\ldots\cdot(x_i-x_{i-1})\cdot(x_i-x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x_i-x_n)}$$

egy n-ed fokú polinom és $\ell_i(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } i \neq j \\ 1, & \text{ha } i = j \end{cases}$

Legyen $L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i \ell_i(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$

Ekkor $L_n(x_k) = f_k$.

↳ $L_n(x)$ a Lagrange polinom.

• Első és k-ad rendű osztott differenciák:

Legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$

$x_1, \dots, x_n \in [a,b]$, $x_i \neq x_j$, ha $i \neq j$

Ekkor f elsőrendű osztott differenciái:

$$[x_i, x_{i+1}] f = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}, \quad \text{ahol } i = 1, .., n$$

k-ad rendű osztott differenciák:

$$[x_i, \dots, x_{i+k}] f = \frac{[x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] f - [x_i, \dots, x_{i+k-1}] f}{x_{i+k} - x_i} \quad \text{és } [x_i] f = f(x_i)$$

∘ Azaz: $b_k = [x_0, \dots, x_k] f$

• Lagrange-polinom meghatározása osztott differenciatáblázattal:

x_0	$f(x_0) = [x_0] f$	$[x_0, x_1] f$	$[x_0, x_1, x_2] f$	$[x_0, x_1, \dots, x_n] f$
x_1	$f(x_1) = [x_1] f$	$[x_1, x_2] f$		
$\vdots$				
x_n	$f(x_n) = [x_n] f$	$[x_{n-1}, x_n] f$		

$$P(x) = [x_0] f + [x_0, x_1] f \cdot (x - x_0) + [x_0, x_1, x_2] f \cdot (x-x_0)\cdot(x-x_1) + \dots + [x_0, \dots, x_n] f \cdot (x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_{n-1})$$

– Hibája:

Ha f $(n+1)$-szer folytonosan differenciálható $[a,b]$-n, akkor $\forall x \in [a,b]$-re $f(x) = L_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x)$

Ha ismerjük az $(n+1)$-edik derivált korlátját:

$$\max_{x \in [a,b]} \left| f^{(n+1)}(x) \right| \leq M_{n+1}, \quad \text{ekkor}$$

$$|f(x) - L_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}, \quad x \in [a,b]$$

Ugyanis $|\omega_{n+1}(x)| \leq (b-a)^{n+1}$

- Hermite-interpoláció, hermite-polinom:

Legyen adott $x_0, \dots, x_n$ alappont. ($x_i \neq x_j$, ha $i \neq j$)

Keressük azt a minimális fokszámú $H(x)$ polinomot, melyre:

$H^{(j)}(x_i) = f_{ij}$, ahol $j = 0, \dots, m_i - 1$
$i = 0, \dots, n$
f_{ij} adott.

- Hermite-polinom felírása osztott differencia-táblázattal:

$$\begin{array}{c|l}
x_0 & f(x_0) \\
x_1 & f(x_1) \quad [x_0, x_1]f \quad [x_0, x_1, x_2]f \quad [x_0, \dots, x_n]f \\
\vdots & \vdots \quad [x_1, x_2]f \\
x_n & f(x_n) \quad [x_{n-1}, x_n]f
\end{array}$$

Ha $x_i \neq x_{i+j} \Rightarrow [x_i, \dots, x_{i+j}]f = \dfrac{[x_{i+1}, \dots, x_{i+j}]f - [x_i, \dots, x_{i+j-1}]f}{x_{i+j} - x_i}$

De, ha $x_i = x_{i+j} \Rightarrow [x_i, \dots, x_{i+j}]f = \dfrac{f^{(j+1)}(x_i)}{(j+1)!}$

- Hibája:

$f(x) - H_{m-1}(x) = \dfrac{f^{(m)}(\xi)}{m!} \cdot \overline{\omega}_m(x)$, ahol $\xi \in (a,b]$ és

$\overline{\omega}_m(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)^{m_i}$

Tehát:

$|f(x) - H_{m-1}(x)| \leq \dfrac{M_m}{m!}(b-a)^m$, ahol $M_m \geq \max_{x \in [a,b]} |f^{(m)}(x)|$

- Szakaszonkénti polinomiális interpoláció:

Legyen $a = x_0 < x_1 < \dots < b = x_m$
$h_i = x_i - x_{i-1}$
$h = \max h_i$, $1 \leq i \leq n$ // h: legnagyobb alappont távolság

- Törött vonal interpoláció:

Minden $[x_{i-1}, x_i]$-re elkészítjük az $L_{i,1}$ elsőfokú Lagrange interpolációt.

- Hibája: $|f(x) - L_{i,1}(x)| \leq \dfrac{M_2}{2} \cdot h^2$

- Magasabb-rendű interpoláció:

Minden x_{i-1} és x_i alappontokban kellenek a derivált értékei (szakaszonkénti Hermite-interpoláció)
Ha minden pontban ismert a függvényérték és az első p derivált értéke, akkor egy $(2 \cdot p+1)$-ed fokú Hermite-polinomot kapunk, amelyet $H_{i,2p+1}$ módon jelölünk. ($i = 1, \dots, h$)

- Hibája: $|f(x) - H_{i,2p+1}(x)| \leq \dfrac{M_{2p+2}}{(2p+2)!} \cdot h^{2p+2}$

A $H_{i,2p+1}$ polinom i-re vett összege olyan függvény, amelynek első p deriváltja folytonos, de a $(p+1)$-edik deriváltja már nem.

6. Közelítő integrálás:

Az $\int_a^b f(x)\,dx$ értéket akarjuk közelíteni.

Ezt az $I_n(f) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot f(x_k)$ alakban keressük, ahol $x_k \in [a,b]$, $k = 0, \dots, n$

Legyen $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ egy folytonos függvény.

Mikor teljesül, hogy $I_n(f) \xrightarrow{n \to \infty} I(f)$

- Tétel: Ha az összes ...
és $I_n(F) = I(F)$, bármely p, legfeljebb n-edfokú polinom esetén
akkor $I_n(f) \to I(f)$ minden függvény esetén.

- Newton-Cotes formulák általános alakja:

Legyenek az $x_0, x_1, \dots, x_n$ pontok ekvidisztánsak, azaz egymástól egyenlő távolságra levőek.
Az integrálközelítést úgy végezzük el, hogy meghatározzuk az f függvény $x_0, x_1, \dots, x_n$ pontokhoz tartozó Lagrange-polinomját és ezt integráljuk.

$$I_n(f) = \int_a^b L_n(x)\,dx = \int_a^b \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n} \frac{x-x_i}{x_k-x_i}\,dx = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \underbrace{\int_a^b \prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n} \frac{x-x_i}{x_k-x_i}\,dx}_{a_k} \qquad // L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_i \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_k-x_j}$$

Ha $f \in C^{n+1}([a,b])$, azaz f $(n+1)$-szer folytonosan differenciálható, akkor a hibája:

$$R_n(f) = I(f) - I_n(f) = \frac{1}{(n+1)!} \int f^{(n+1)}(\xi(x)) \cdot \omega_{n+1}(x)\,dx$$

- Érintő-formula:

$n=0$
$x_0 = \frac{a+b}{2}$

$$I_0(f) = \int_a^b f(x_0)\,dx = \int_a^b f\left(\frac{a+b}{2}\right)dx = f\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot(b-a)$$

– Hibája:
Ha $f \in C^2[a,b]$, akkor $f(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\left(x-\frac{a+b}{2}\right) + \frac{f''(\xi(x))}{2}\cdot\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 \Rightarrow f(x)$-et integráljuk $[a,b]$-n.

$$R_0(f) = I(f) - I_0(f) = f''(\eta)\,\frac{(b-a)^3}{24}, \quad \eta \in [a,b]$$

- összetett érintő-formula:

$I_{0\times m}(f) = h\left(f_{\frac{1}{2}} + \dots + f_{\frac{m}{2}}\right)$, ahol $f_{\frac{i}{2}}$ az i-edik részintervallum felezőpontján felvett érték.

$\frac{b-a}{m} = h$ – Hibája: $R_{0\times m}(f) = \frac{(b-a)^3}{24\cdot m^2}\cdot f''(\eta)$, ahol $\eta \in [a,b]$

- Trapézformula:

$n=1$
$x_0 = a$
$x_1 = b$

- Egyszerű: $I_1(f) = \frac{f(a)+f(b)}{2}\cdot(b-a)$ – Hibája: $R_1(f) = \frac{1}{12}\cdot f''(\eta)\cdot(b-a)^3$
- összetett: $I_{1\times m}(f) = h\cdot\left(\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_m)}{2}\right)$, ahol $h = \frac{b-a}{m}$

  – Hibája: $R_{1\times m}(f) = \frac{(b-a)^3}{12\cdot m^2}\cdot f''(\eta)$

- Simpson formula:

$n=2$
$x_0 = a$
$x_1 = \frac{a+b}{2}$
$x_2 = b$

- Egyszerű: $I_2(f) = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)$ – Hibája: $R_2(f) = -\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 \cdot f^{(4)}(\eta)$
- összetett: $I_{2\times m}(f) = \frac{h}{3}\Big(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \dots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\Big)$

  – Hibája: $R_{2\times m}(f) = \frac{-(b-a)^5}{2880\cdot m^3}\cdot f^{(4)}(\eta)$

- Többdimenziós integrálok, kvadratúra képlet:

Kétdimenziós esetben az (xy) sík valamilyen Ω tartománya feletti és az $f(x,y) = z$ felület alatti térfogat kiszámítása a cél.

$I(f,\Omega) = \int_\Omega \int f(x,y)\,d(x,y)$ [Ennek a közelítése a kvadratúra képlet]

$I_n(f,\Omega) = \sum_{i=0}^{n} a_i\, f(x_i, y_i)$, $(x_i, y_i) \in \Omega$

- Visszavezetés egyváltozós integrálokra:

Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, zárt és korlátos (azaz kompakt)
$f(x,y)$ folytonos Ω-ban.

$\int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\,dy\,dx = \int_a^b g(x)$, ahol c és d folytonos függvények.

Ekkor $g(x) = \int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\,dy$, a g függvényre felírt kvadratúra: $\int_a^b g(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{m} a_i^{(m)} g(x_i^{(m)})$

A g-t definiáló integrál közelítésére ugyanolyan kvadratúrát választunk: $g(x_i^{(m)}) \approx \sum_{j=0}^{n} b_{ij}\cdot f(x_i^{(n)}, y_i^{(n)})$

- Együtt felírva: $I(f,\Omega) \approx \sum_{i=0}^{m} a_i^{(m)} \cdot \sum_{j=0}^{n} b_{ij}\cdot f(x_i^{(n)}, y_i^{(n)})$

7., Sajátérték feladatok:

Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$

keressük azt az $x \neq 0$ vektort, amelyre $Ax = \lambda x$, azaz $\det(A - \lambda E) = 0$

- Normális mátrixok:

Egy mátrix pontosan akkor normális, ha uniter (transzponált konjugáltja az inverze) mátrix segítségével diagonizálható.

Egy U mátrix uniter, ha $U^*U = E$.

- U oszlopvektorai ortonormált rendszert alkotnak.

Ekkor $U^*AU = D$

- D főátlójában A sajátértékei vannak
- U oszlopai A sajátvektorai

- A normális mátrix $\Leftrightarrow A^*A = AA^*$
- Normális mátrixtípusok:
  - Ermitikus mátrixok
  - Szimmetrikus (önadjungált) mátrixok
  - Ferdén szimmetrikus mátrixok
  - Uniter mátrixok
  - Ortogonális mátrixok

- A sajátértékek elhelyezkedése, Gersgorin-tétele:

Tetszőleges mátrix esetén igaz, hogy:

$\|A\| \cdot \|x\| > \|Ax\| = \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \Rightarrow \|A\| \geq |\lambda|$

Azaz egy A mátrix sajátértékei benne vannak a komplex síkon az origó középpontú $\|A\|$ sugarú körben.

- Gersgorin-tétele:

Legyen $v \neq 0$ az A mátrix λ sajátértékéhez tartozó sajátvektor és b_i a vektor olyan komponense, melyre $|v_i| = \max_j |v_j| = \|v\|_\infty$

Ekkor $Av = \lambda v$ átrendezve: $(a_{ii} - \lambda) v_i = -\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{ij} v_j$

Innen $|a_{ii} - \lambda| \cdot |v_i| = \left|\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{ij} v_j \right| \leq \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \cdot |v_j| \leq |v_i| \cdot \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|$

Mivel $\underbrace{|v_i| = \|v\|_\infty \neq 0}$

$$|a_{ii} - \lambda| \leq \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| = r_i$$

Az i függ λ-tól és v-től, de i, λ és v ismeretlenek. A λ sajátérték tehát olyan körben fekszik a komplex síkon, melynek középpontja a_{ii}, sugara pedig r_i.

- i-edik Gersgorin kör:

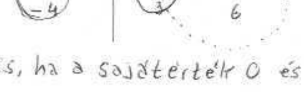
$G_i = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - a_{ii}| \leq r_i \}$

- Tétel:

Tetszőleges $n \times m$-es A mátrix minden sajátértéke a Gersgorin köreinek uniójában van.

Továbbá, ha a körök közül j darab diszjunkt $(1 \leq j \leq n)$ a többitől, akkor ezen körök uniójában j darab sajátérték van.

- Példa: $A = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 0 \\ 1 & 6 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$



$G_1 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z + 4| \leq 2 \}$

Akkor lesz szinguláris, ha a sajátérték 0 és akkor reguláris, ha egyik sajátérték sem 0.

- Hatványmódszer:

Az abszolútértékben legnagyobb sajátértékhez tartozó sajátvektort (v_n) kezelhetjük vele.

- Feltételek:
  - A legyen diagonizálható
  - $\langle y_0, v_n \rangle \neq 0$, ahol y_0: kezdeti vektor
  - teljesüljön, hogy $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \ldots \leq |\lambda_{n-1}| < |\lambda_n|$

y_0 kezdeti vektor esetén $(y_0 \neq 0)$ $y_0 = a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n$, ahol v_k a λ_k sajátértékhez tartozó sajátvektor.

Megszorozzuk y_0-t A-val:

$Ay_0 = a_1 A v_1 + \ldots + a_n A v_n = a_1 \lambda_1 v_1 + \ldots + a_n \lambda_n v_n = y_1$

$y_2 = Ay_1 = a_1 \lambda_1^2 v_1 + \ldots + a_n \lambda_n^2 v_n$

$y_m = Ay_{m-1}$

Ha van legnagyobb sajátérték, akkor ez a vektorsorozat v_n többszöröséhez fog tartani.

A túlcsordulás elkerüléséhez a vektorokat normálhatjuk.

- Sajátértékek közelítése, Rayleigh hányados:

Mikor lesz $\|Ax - rx\|^2$ min?

Ha x közelítő sajátvektor, akkor r közel lesz a megfelelő sajátértékhez.

Ez egy legkisebb négyzetek feladat:

$$J(r) = \|Ax - rx\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} ((Ax)_i - rx_i)^2$$

$$J'(r) = 2\sum_{i=1}^{n} ((Ax)_i - rx_i)\cdot(-x_i)$$

- Szélsőértéket keresünk, tehát:

$$J'(r) = 0 = -2(\langle Ax, x\rangle - r\cdot\langle x, x\rangle)$$

$$J'(r) = 0 \iff r = \frac{\langle Ax, x\rangle}{\langle x, x\rangle}$$ ← Rayleigh hányados

$$\rho(x) = \frac{\langle Ax, x\rangle}{\langle x, x\rangle}$$

- Eltolás:

Egy A mátrix helyett az $A - cE$ mátrix-al dolgozunk.
Ennek a mátrixnak a sajátvektorai ugyanazok, de: $(A - cE)x = \lambda x - cx = (\lambda - c)x$.
A sajátértékek c-vel elcsúsznak!

Alkalmas c-vel elérhető, hogy ne a korábban domináns λ_m legyen most is domináns.
$\Rightarrow$ Így az abszolútértékben legkisebb sajátérték és a megfelelő sajátvektor közelíthető.

- Inverz iteráció (hatványmódszer A^{-1}-gyel):

Az iteráció: $y_m = A^{-1}\cdot y_{m-1}$, de nem az inverzzel szorzunk, hanem megoldjuk az
$Ay_m = y_{m-1}$ egyenletrendszert LU felbontással.

Ha az A mátrix normális, és y_0 kezdeti vektor esetén $\langle y_0, v_1\rangle \neq 0$ és $|\lambda_1| < |\lambda_2| \leq \dots \leq |\lambda_n|$,
akkor az iteráció konvergál v_1 (az abszolútértékben legkisebb sajátértékhez tartozó sajátvektor) többszöröséhez.

Ha A reguláris (nincs 0 sajátértéke), akkor $Ax = \lambda x \iff \frac{1}{\lambda}x = A^{-1}x$,
azaz az inverz sajátértékei a sajátértékek reciprokai, a sajátvektorok pedig megegyeznek.

Tehát az A mátrix legkisebb abszolútértékű sajátértéke lesz A^{-1} legnagyobb abszolútértékű sajátértéke.

- Előnye: Bármely közbenső sajátérték is közelíthető (eltolást alkalmazva) és akkor a módszer a sajátvektorhoz konvergál, és az ehez a sajátvektorhoz tartozó sajátérték a legközelebbi a c eltoláshoz.