- Lebegőpontos számok:

$\varepsilon_0 = a^{k_- -1}$ $\qquad \varepsilon_1 = \varepsilon_0 + a^{k_- -1+1-t} = \varepsilon_0(1+a^{1-t})$

$M_\infty = a^{k_+}(1-a^{-t})$ $\qquad M_{\infty-1} = M_\infty - a^{k_+ -t}$

A lebegőpontos számok közötti lépésköz: $a^{k_- -t}$

1., Az 1 bal- illetve jobboldali szomszédja:

$1-a^{k_- -t}$ // Az 1 mindig lebegőpontos szám

$1+a^{k_- -t}$

2., Hány lebegőpontos szám írható fel:

$2\cdot\left(\frac{M_\infty-\varepsilon_0}{a^{k_- -t}}\right)+1$ // A 0 is lebegőpontos szám

3., Számábrázolás:

$\frac{3}{16} = \frac{1}{16}+\frac{1}{8} \Rightarrow 2^{-2}\cdot\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right] = \frac{1}{4}\cdot\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right] = \frac{1}{8}+\frac{1}{16} = \underline{\frac{3}{16}}$

$3.25 = 3+\frac{1}{4} \Rightarrow 2^{2}\cdot\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}\right] = 2\cdot\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}\right] = 2+1+\frac{1}{4} = \underline{\underline{3.25}}$

$\frac{15}{128} = \frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128} \Rightarrow 2^{-3}\cdot\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\right] = \frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128} = \underline{\underline{\frac{15}{128}}}$

$\frac{5}{8} = \frac{1}{8}+\frac{4}{8} = \frac{1}{8}+\frac{1}{2} \Rightarrow 2^{0}\cdot\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\right] = \frac{1}{2}+\frac{1}{8} = \underline{\underline{\frac{5}{8}}}$

4., Kerekítés:

$a=2 \quad k_-=-3$

$t=4 \quad k_+=3$

$\frac{1}{3} = \frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{48}+\cancel{\frac{1}{192}}$ // $t=4$ miatt!

$\frac{1}{3} = \frac{1}{3}-\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{12}$

$\frac{1}{12}-\frac{1}{16} \Rightarrow \frac{1}{48}$

$\frac{1}{48}-\frac{1}{64} = \frac{1}{192}$

$2^k\left[\frac{1}{2}+\frac{?}{4}+\frac{?}{8}+\frac{?}{16}\right]$ mintára kell felírni.

- Levágás:

$\frac{1}{3} = 2^{-1}\cdot\left[\frac{1}{2}+\frac{0}{4}+\frac{1}{8}+\frac{0}{16}\right]$ // Levágás során lefelé kerekítünk. Jelen esetben azért, mert az $\frac{1}{16}$-od nagyobb, mint az $\frac{1}{192}$.

$\frac{1}{3} = \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\right] = \frac{1}{4}+\frac{1}{16} = \frac{5}{16} \approx 0,3125$

- Kerekítés:

$\frac{1}{3} = 2^{-1}\cdot\left[\frac{1}{2}+\frac{0}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\right] = \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\right] = \frac{11}{32}$

// Kerekítésnél felírjuk abban az alakban is, amelyben $\frac{1}{16}$-od is szerepel és megnézzük, hogy melyik áll közelebb $\frac{1}{3}$-hoz.

$\frac{5}{16} \underset{0,020..}{<} \frac{1}{3} \underset{0,010...}{<} \frac{11}{32}$ → Ez lesz a közelebbi alak, ezért:

$\frac{1}{3} = 2^{-1}\cdot\left[\frac{1}{2}+\frac{0}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\right]$

5., Az összes pozitív lebegőpontos szám:

$a=2 \quad k_-=-3$

$t=4 \quad k_+=2$

$\varepsilon_0 = 2^{-3}\cdot\left[\frac{1}{2}\right] = \frac{8}{128}$

$\varepsilon_1 = 2^{-3}\cdot\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{16}\right] = \frac{9}{128}$

$\vdots$

$\frac{15}{128} = 2^{-3}\cdot\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\right]$

$2^{-2}\cdot\left[\frac{1}{2}\right] = \frac{8}{64}$

$2^{-2}\cdot\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{16}\right] = \frac{9}{64}$

$\vdots$

$\frac{15}{64} = 2^{-2}\cdot\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\right]$

. . . . .

$2^{1}\cdot\left[\frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2} = \frac{8}{16}$

$2^{1}\cdot\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{16}\right] = \frac{9}{16}$

$\vdots$

$\frac{15}{16} = 2^{1}\cdot\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\right]$

$2^{2}\cdot\left[\frac{1}{2}\right] = 1$

$2^{2}\cdot\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{16}\right] = 2.25$

$\vdots$

$3.75 = 2^{2}\cdot\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\right]$

7., Alulcsordulás:

$a=2$, $t=4$, $k_-=-4$, $k_+=4$

$\varepsilon_0 = \frac{8}{256} \quad M_\infty = 15$

$\varepsilon_1 = \frac{9}{256} \quad M_{\infty-1} = 14$

a, $x \neq y$ és $fl(x-y)=0 \Rightarrow x=\varepsilon_1,\ y=\varepsilon_0$

b, $fl(x+y)=x \Rightarrow x=M_{\infty-1},\ y=\varepsilon_0$

c, $x+y \in [-M_\infty, M_\infty]$, de x,y nem lebegőpontos $\Rightarrow x=M_{\infty-1},\ y=\varepsilon_0$

Normák, kondíciószámok:

- p-norma:

$$\|x\|_p = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, & \text{ha } p > 1 \\ \max |x_i|, & \text{ha } p = \infty \end{cases}$$

3., Mátrixnorma:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$\|A\|_1 = |-1| + 3 = 4$ (legnagyobb oszlopösszeg)

$\|A\|_\infty = 3 + |-2| = 5$ (legnagyobb sorösszeg)

$\|A\|_2 = \sqrt{\varrho(A^TA)} = \sqrt{9 + \sqrt{65}}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}}_{A^T}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -8 \\ -8 & 8 \end{pmatrix}$$

$$P_A(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 10-\lambda & -8 \\ -8 & 8-\lambda \end{pmatrix} = (80 - 18\lambda + \lambda^2) - 64 = \lambda^2 - 18\lambda + 16$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{18 \pm \sqrt{18^2 - 4\cdot 16}}{2} = 9 \pm \sqrt{65}$$

11., Kondíciószámítás:

$$\mathrm{cond}_p(A) = \|A\|_p \cdot \|A^{-1}\|_p$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \quad \det(A) = 10 \quad A^{-1} = \frac{1}{10}\cdot\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$\|A\|_1 = 1 + 4 = 5$ $\qquad \|A^{-1}\|_1 = \left|\frac{-2}{10}\right| + \left|\frac{-4}{10}\right| = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ $\qquad \mathrm{cond}_1(A) = 5 \cdot \frac{3}{5} = \underline{\underline{3}}$

$\|A\|_\infty = 4 + |-2| = 6$ $\qquad \|A^{-1}\|_\infty = \left|-\frac{4}{10}\right| + \left|\frac{1}{10}\right| = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ $\qquad \mathrm{cond}_\infty(A) = 6 \cdot \frac{1}{2} = \underline{\underline{3}}$

Lineáris egyenletrendszerek megoldása, mátrixok felbontása:

1., Gauss-Jordan elimináció:

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} -(1) \\ (2)+2\cdot(1) \\ (3)+(1) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 5 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -5 & -3 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} (1)+2\cdot(2) \\ \\ (3)-3\cdot(2) \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -7/6 & -1/2 & 5/6 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 5/6 & 1/2 & -1/6 \end{array}\right)\begin{array}{l} (1)+\frac{5}{6}\cdot(3) \\ (2)+1/2\cdot(3) \\ (3)\backslash 6 \end{array}$$

2., LU-felbontás és lineáris egyenletrendszer megoldása:

$$\det(A) = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \\ -4 & -10 & -5 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 0 \\ \boxed{2} & 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|cc} -2 & -1 & 4 \\ \hline 0 & 2 & 3 \\ 0 & -8 & -13 \end{array}\right) = \underbrace{\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ \hline 2 & -4 & 1 \end{array}\right)}_{L}\underbrace{\left(\begin{array}{cc|c} -2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 0 & -1 \end{array}\right)}_{U}$$

$(-2)\cdot\square = (-4)$

Főátlók szorzata:
$(1\cdot 1\cdot 1) \cdot ((-2)\cdot 2\cdot(-1)) = 1\cdot 4 = \underline{\underline{4}}$
$\det(A) = \underline{4}$

$$b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -12 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} Ax = b \\ A = LU \end{array} \qquad \begin{array}{ll} Ly = b & (1) \\ Ux = y & (2) \end{array}$$

(1) $Ly = b$: // L egyes soraiból következik

$$\left.\begin{array}{r} y_1 = 3 \\ -y_1 + y_2 = 1 \\ 2y_1 - 4y_2 + y_3 = -12 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y_1 = 3 \\ y_2 = 4 \\ y_3 = -2 \end{array}$$

(2) $Ux = y$:

$$\left.\begin{array}{r} -2x_1 - x_2 + 4x_3 = 3 \\ 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ -x_3 = -2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x_1 = 3 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 14 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}^*$$

3., PLU-felbontás:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & -28 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{P_1}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 4 & 2 & -28 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = P_1 \cdot \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 4 & 14 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -63 \\ 0 & 0 & -5 & 15 \end{array}\right) = P_1 \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 14 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & -63 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 1 & 0 \\ 4 & 14 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Előállítja a *-ozott mátrixot!}}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & -63 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 1 & 0 \\ 4 & 14 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & -63 \end{pmatrix}$$

Ha egy mátrixot balról szorozzuk a permutációs mátrixal: sorcsere!
Ha -//- jobbról szorozzuk -//- : oszlopcsere!

5.) LDL^T- felbontás:

kiemeltük a főátló elemeit!

Ez a felbontás csak szimmetrikus mátrixok esetén alkalmazható.

$$\begin{pmatrix} 4 & -8 & 2 \\ -8 & 12 & 0 \\ 2 & 0 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -8 & 2 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 4 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -8 & 2 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{L}\underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}}_{D}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{L^T}$$

6.) Cholesky-felbontás:

Ez a felbontás is csak szimmetrikus mátrixok esetén alkalmazható.

$$\begin{pmatrix} 9 & -3 & -6 \\ -3 & 5 & 4 \\ -6 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/3 & 1 & 0 \\ -2/3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & -3 & -6 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/3 & 1 & 0 \\ -2/3 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & -3 & -6 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/3 & 1 & 0 \\ -2/3 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}}_{L}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Főátló elemeinek gyökei kiemelve.}}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1/3 & -2/3 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{L^T}$$

• Polinomok:

1.) Polinom gyökvizsgálat:

$P(x) = x^3 - x^2 - 10x - 8$

	1	-1	-10	-8	
-4	1	-5	10	-48	=> -4 nem gyöke!
-2	1	-3	-4	0	=> -2 gyöke!

$-10 + (-2)\cdot(-3) = \underline{\underline{-4}}$

$-1 + (-2)\cdot 1 = \underline{\underline{-3}}$

$1 + (-2)\cdot 0 = \underline{\underline{1}}$

2.) Polinomok osztása:

$(x^3 - x^2 - 10x - 8) : (x+2) = x^2 - 3x - 4$

$-\ \underline{(x^3 + 2x^2)} \leftarrow x^2\cdot(x+2)$

$-3x^2 - 10x - 8$

$-\ \underline{(-3x^2 - 6x)} \leftarrow -3x\cdot(x+2)$

$-4x - 8$

$-\ \underline{(-4x - 8)} \leftarrow -4\cdot(x+2)$

0 ← nincs maradék!

$x_1 = -2$

$x_{2,3} = \dfrac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2}$ ↗ $x_2 = 4$ ↘ $x_3 = -1$

$\Rightarrow (x^3 - x^2 - 10x - 8) = (x+2)\cdot(x-4)\cdot(x+1)$

• Nemlineáris egyenletek és egyenletrendszerek:

11.) Megoldható-e az egyenlet:

$Tx = x$ $\quad -4x + \cos(2x-y) = 3 \qquad -\frac{3}{4} + \frac{\cos(2x-y)}{4} = x \ \}\ f$

$\quad -3y + \sin(x) = 2 \qquad -\frac{2}{3} + \frac{\sin(x)}{3} = y \ \}\ g$

$x, y \in [-\pi, \pi]$

$T : [-\pi,\pi] \times [-\pi,\pi] \to [-\pi,\pi]$ (jól képez)

$$T(x,y) = \Big(\underbrace{-\frac{3}{4} + \frac{\cos(2x+y)}{4}}_{f}\ ,\ \underbrace{-\frac{2}{3} + \frac{\sin(x)}{3}}_{g}\Big)$$

• Kompakt-e?

$$\exists T\ (x,y) = \begin{pmatrix} \overset{|f'(x)|}{\dfrac{-\sin(2x-y)}{2}} & \overset{|f'(y)|}{\dfrac{\sin(2x-y)}{4}} \\ \dfrac{\cos(x)}{3}\ |g'(x)| & 0\ |g'(y)| \end{pmatrix}$$

$\| \exists T\ (x,y) \|_\infty = \underline{\underline{\frac{3}{4}}}$ ← Kontrakció lesz $\frac{3}{4}$-eddel!

• Megoldás Newton-módszerrel:

$f(x) = 0 \qquad -4x + \cos(2x-y) = 3 \qquad -4x + \cos(2x-y) - 3 = 0 \ \}\ f$

$\qquad\qquad -3y + \sin(x) = 2 \qquad -3y + \sin(x) - 2 = 0 \ \}\ g$

$$f(x,y) = \Big(\overbrace{-4x + \cos(2x-y) - 3}^{f}\ ,\ \overbrace{-3y + \sin(x) - 2}^{g}\Big)$$

$\sin(2\cdot 0 - 0) = 0$

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} -4 - 2\sin(2x-y) & \sin(2x-y) \\ \cos(x) & -3 \end{pmatrix} \xRightarrow{f(0,0)} \begin{pmatrix} -4 & \boxed{0} \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$x_1 = -\frac{1}{2}$

$y_1 = -\frac{5}{6}$

• Legkisebb négyzetek módszere:

1., Legjobban közelítő egyenes egyenlete:

t_i	-1	0	1	2
f_i	-1	$-1/2$	$1/2$	$1/3$

m = pontok száma

$m = 4$

$$\begin{pmatrix} m & \Sigma t_i \\ \Sigma t_i & \Sigma t_i^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma f_i \\ \Sigma t_i \cdot f_i \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 13/6 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} 4a + 2b &= -2/3 \\ 2a + 6b &= 13/6 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} 4a + 2b &= -2/3 \\ 4a + 12b &= 13/3 \end{aligned}\right] \quad -10b = \frac{-15}{3} \quad \underline{\underline{b = \frac{1}{2}}}$$

$$4a + 2\cdot\frac{1}{2} = -\frac{2}{3} \Rightarrow \underline{\underline{a = -\frac{5}{12}}}$$

$\frac{1}{2} - \frac{5}{12}$ tehát a legjobban közelítő egyenes egyenlete.

2., Legjobban közelítő másodfokú polinom:

t_i	-1	0	1	2
f_i	-1	1	$3/2$	1

$A^T A x = A^T f$

$A = (\varphi_i(x_i))$

$\varphi_1(t) = 1$

$\varphi_2(t) = t$

$\varphi_3(t) = t^2$

$$A = \begin{pmatrix} \varphi_1(x_1) & \varphi_1(x_2) & \varphi_1(x_3) & \varphi_1(x_4) \\ \varphi_2(x_1) & \varphi_2(x_2) & \varphi_2(x_3) & \varphi_2(x_4) \\ \varphi_3(x_1) & \varphi_3(x_2) & \varphi_3(x_3) & \varphi_3(x_4) \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ (-1)^2 & 0^2 & 1^2 & 2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 9/2 \\ 9/2 \end{pmatrix} \\ &\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}}_{A^T} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 8 \\ 6 & 8 & 18 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 6 & 5/2 \\ 2 & 6 & 8 & 9/2 \\ 6 & 8 & 18 & 9/2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 8 & 9/2 \\ 0 & -10 & -10 & -13/2 \\ 0 & -10 & -6 & -9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 8 & 9/2 \\ 0 & -10 & -10 & -13/2 \\ 0 & 0 & 4 & -5/2 \end{array}\right)$$

$x_1 = \frac{47}{40}$

$x_2 = \frac{51}{40}$

$x_3 = -\frac{5}{8}$

$\frac{47}{40} + \frac{51}{50}t + \left(-\frac{5}{8}t^2\right)$ a legjobban közelítő másodfokú polinom!

• Lagrange-interpoláció:

1., Minimális fokszámú illeszkedő polinom:

-3	-6				
		-11			
-2	-17		10		
		9		-3	
-1	-8		-2		1
		3		6	
1	-2		6		
		21			
2	19				

$\hookrightarrow (21-3) : (2-(-1)) = 6$

$-6 - 11(x+3) + 10(x+3)(x+2) - 3(x+3)(x+2)(x+1) + 1(x+3)(x+2)(x+1)(x-1)$

lesz a minimális fokszámú illeszkedő polinom a megadott pontokra.

3., Közelítés hibája:

$f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \quad x \in [-1, 1]$

• másodfokú polinommal közelítünk

-1	$\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot(-1)\right) = 0$			
		1		
0	$\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot 0\right) = 1$		-1	
		-1		
1	$\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot 1\right) = 0$			

$0 + 1(x+1) - 1(x+1)(x-0) = (x+1) - (x+1)(x)$

$$|f(x) - L_n(x,f)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

• Most: $n = 2$, $\left.\begin{aligned} a &= -1 \\ b &= 1 \end{aligned}\right\}$ intervallum

M_{n+1} jelentése $f(n+1)$-edik deriváltjának lehető legnagyobb felvehető értéke, azaz $M_n = \max_{x\in[a,b]} |f^{(n)}(x)|$

$f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

$f'(x) = -\frac{\pi}{2}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

$f''(x) = -\frac{\pi}{4}^2\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

$|f'''(x)| = \left|\frac{\pi^3}{8}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right| \le \frac{\pi^3}{8}$

• Tehát:

$$\left|\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - L_2(x,f)\right| \le \frac{\pi^3}{\cancel{8}}\cdot\frac{1}{3!}\cdot\cancel{2^3} = \underline{\underline{\frac{\pi^3}{6}}}$$

5., Maximális hiba becslése:

$f(x) = e^{-x} \qquad x \in [-1,1]$

$f'(x) = -e^{-x}$

$f''(x) = e^{-x}$

$f'''(x) = -e^{-x}$

$\max |f'''(x)| \Rightarrow M_n := \max\limits_{x\in[a,b]} |f^{(n)}(x)|$

$M_3 = \max\limits_{x\in[-1,1]} |-e^{-x}| = e$

$$|f(x) - L_n(x,f)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

$$|f(x) - L_2(x,f)| \le e\cdot\frac{1}{3!}\cdot 2^3 = \underline{\underline{\frac{4}{3}e}}$$

4., Hiba javítása:

• Legyen másodfokú a közelítő polinom!

$$\begin{array}{cccccccc}
-2 & 15 & & & & & & \\
 & & -6 & & & & & \\
-1 & 9 & & 1 & & & & \\
 & & -4 & & 0 & & & \\
0 & 5 & & 1 & & & & \\
 & & -2 & & \boxed{} & \leftarrow \text{ide 0-nak kell kerülnie!} & & \\
1 & 3 & & 1/2 & & & & \\
 & & -1 & & & & & \\
2 & 2 & & 2 & \text{↖ ide 1-nek!} & & & \\
 & & 3 & & & & & \\
3 & 5 & & & & & &
\end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{ccccccc}
-2 & 15 & & & & & \\
 & & -6 & & & & \\
-1 & 9 & & 1 & & & \\
 & & -4 & & 0 & & \\
0 & 5 & & 1 & & 0 & \\
 & & -2 & & 0 & & 0 \\
1 & 3 & & 1 & & 0 & \\
 & & 0 & & 0 & & \\
2 & 3 & & 1 & & & \\
 & & 2 & & & & \\
3 & 5 & & & & &
\end{array}$$

$15 - 6(x+2) + 1(x+2)(x+1)$

↑ ez már valóban másodfokú!

7., Beosztás sűrűsége:

$[x_i, x_{i+1}]$ intervallum.

$$|f(x) - L_1(x,f)| \le \frac{M_2}{2^3}\cdot\underbrace{(x_{i+1} - x_i)^2}_{h:\ \text{egy beosztás mérete}}$$

$f(x) = \cos(x)$

$f'(x) = -\sin(x)$

$|f''(x)| = |-\cos(x)| \le 1$

$$\frac{h^2}{8} \le \frac{1}{20\,000}$$

$$h^2 \le \frac{8}{20\,000} = \frac{1}{2500}$$

$h \le \frac{1}{50}$ } Legfeljebb 50 egyforma részre kell bontani.

• Hermite-interpoláció:

x_i	-1	1	2
$f(x_i)$	4	6	94
$f'(x_i)$	9	17	213

$$\begin{array}{cccccccc}
-1 & 4 & & & & & & \\
 & & 9 & & & & & \\
-1 & 4 & & -4 & & & & \\
 & & 1 & & 6 & & & \\
1 & 6 & & 8 & & 5 & & \\
 & & 17 & & 21 & & \underline{\underline{2}} & \\
1 & 6 & & 71 & & 11 & & \\
 & & 88 & & 54 & & & \\
2 & 94 & & 125 & & & & \\
 & & 213 & & & & & \\
2 & 94 & & & & & &
\end{array}$$

$$4 + 9(x+1) - 4(x+1)^2 + 6(x+1)^2(x-1) + 5(x+1)^2(x-1)^2 + 2(x+1)^2(x-1)^2(x-2)$$

x_i	-1	1	2
$f(x_i)$	4	2	91
$f'(x_i)$	5	9	269
$f''(x_i)$		42	

$$\begin{array}{ccccccccc}
-1 & 4 & & & & & & & \\
 & & 5 & & & & & & \\
-1 & 4 & & -3 & & & & & \\
 & & -1 & & 4 & & & & \\
1 & 2 & & 5 & & 2 & & & \\
 & & 9 & & 8 & & 5 & & \\
1 & 2 & & 21^{*} & & 17 & & \underline{\underline{1}} & \\
 & & 9 & & 59 & & 8 & & \\
1 & 2 & & 80 & & 41 & & & \\
 & & 89 & & 100 & & & & \\
2 & 91 & & 180 & & & & & \\
 & & 269 & & & & & & \\
2 & 91 & & & & & & &
\end{array}$$

$$4 + 5(x+1) - 3(x+1)^2 + 4(x+1)^2(x-1) + 2(x+1)^2(x-1)^2 + 5(x+1)^2(x-1)^3 + 1(x+1)^2(x-1)^3(x-2)$$

$* \; 21 = \frac{42}{2!}$ (mivel második derivált érték)

2., Érintő egyenlete:

$$\begin{array}{c} x_0 \\ \hline f(x_0) \\ f'(x_0) \end{array} \qquad
\begin{array}{ccc} x_0 & f(x_0) & \\ & & f'(x_0) \\ x_0 & f(x_0) & \end{array} \qquad f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

3., $\cos x - x^2 - 3x$, $x = 0$ pontbeli érintőjének egyenlete:

$f(x) = \cos x - x^2 - 3x$

$f'(x) = -\sin x - 2x - 3$

x_i	0	
$f(x_i)$	1	$\leftarrow \cos(0) - 0^2 - 3\cdot 0 = 1$
$f'(x_i)$	-3	$\leftarrow -\sin(0) - 2\cdot 0 - 3 = -3$

$$\begin{array}{ccc} 0 & 1 & \\ & & -3 \\ 0 & 1 & \end{array}$$

$1 - 3(x - 0)$ az érintő egyenlete.

4., Hermite-polinom meghatározás:

$$\begin{array}{cccc}
x_0 & f(x_0) & & \\
 & & f'(x_0) & \\
\vdots & \vdots & & \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \\
 & & f'(x_0) & \\
x_0 & f(x_0) & &
\end{array}
\qquad f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0) - (x - x_0)^n}{n!}$$

5.) Spline - interpoláció:

$$H(x) = \begin{cases} H_1(x), & \text{ha } x \in [-1,1] \\ H_2(x), & \text{ha } x \in (1,3] \end{cases}$$

x_0	-1	1	3
$f(x_0)$	4	6	12
$f'(x_0)$	-3	13	9

$$\begin{array}{cccccc} -1 & 4 & & & & \\ & & -3 & & & \\ -1 & 4 & & 2 & & \\ & & 1 & & 2 & \\ 1 & 6 & & 6 & & \\ & & 13 & & & \\ 1 & 6 & & & & \end{array} \qquad \begin{array}{cccccc} 1 & 6 & & & & \\ & & 13 & & & \\ 1 & 6 & & 5 & & \\ & & 3 & & -1 & \\ 3 & 12 & & 3 & & \\ & & 9 & & & \\ 3 & 12 & & & & \end{array}$$

$$H_1 = 4 - 3(x+1) + 2(x+1)^2 + 2(x+1)^2(x-1)$$
$$H_2 = 6 + 13(x-1) + 5(x-1)^2 - 1(x-1)^2(x-3)$$

• közelítő integrálás:

- Trapéz - szabály: $\int_a^b f(x)\,dx \approx (b-a)\dfrac{f(a)+f(b)}{2}$
- Simpson - formula: $\int_a^b f(x)\,dx \approx \dfrac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$

1.) közelítés és hibabecslés:

$\int_0^{1.5} x\cdot\sin x\,dx$

$m=5$

$f(x) = x\cdot\sin x$
$f'(x) = \sin x + x\cdot\cos x$
$f''(x) = 2\cdot\cos x - x\cdot\sin x$
$f'''(x) = -3\cdot\sin x - x\cdot\cos x$
$f^{(4)}(x) = -4\cdot\cos x + x\cdot\sin x$

$$M_2 = \max_{x\in[0,1.5]} |2\cdot\cos x - x\cdot\sin x| \le (2+1.5) = 3.5$$
$$M_4 = \max_{x\in[0,1.5]} |-4\cdot\cos x + x\cdot\sin x| \le (4+1.5) = 5.5$$

$$|I(f) - I_{m\,T_2}(f)| \le \frac{M_2}{12\cdot m^2}(b-a)^3 = \frac{3.5}{12\cdot 25}(1.5)^3$$
$$|I(f) - I_{m\,T_3}(f)| \le \frac{M_4}{2880\cdot m^4}(b-a)^5 = \frac{5.5}{2880\cdot 625}(1.5)^5$$

$$\int_0^{1.5} x\cdot\sin x\,dx \approx \frac{0,3}{2}\left[0\cdot(\sin 0) + 2\cdot 0,3\cdot\sin(0.3) + \ldots + 2\cdot 1.5\cdot\sin(1.5)\right]$$ // m=5 esetén $h = \frac{1.5}{5} = 0,3$

• sablon: $\dfrac{h}{2}\left[f(x_0) + 2\cdot f(x_1) + \ldots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]$

2.) közelítés megadott hibával:

$\int_1^2 x^2 \ln x\,dx$ közelítése úgy, hogy a hiba kisebb legyen, mint $0,5\cdot 10^{-4}$.

$f(x) = x^2\cdot\ln x$
$f'(x) = 2x\cdot\ln x + x^2\cdot\frac{1}{x} = x\cdot(2\ln x + 1)$
$f''(x) = 2\ln x + 1 + x\left(\frac{2}{x}\right) = 2\ln x + 3$
$f'''(x) = \frac{2}{x}$
$f^{(4)}(x) = -\frac{2}{x^2}$

$$\frac{M_2}{m^2\cdot 12}(b-a)^3 \le 0.5\cdot 10^{-4}$$
$$M_2 = \max_{x\in[1,2]} |2\ln x + 3| = \ln 4 + 3$$
$$\frac{\ln 4 + 3}{m^2\cdot 12} \le \frac{1}{2\cdot 10000}$$
$$\frac{10000}{6}\cdot(\ln 4 + 3) \le m^2$$
$$\frac{100}{\sqrt{6}}\cdot\sqrt{\ln 4 + 3} \le m$$
$$m \ge \left[\frac{100}{\sqrt{6}}\cdot\sqrt{\ln 4 + 3}\right] + 1$$

$$\frac{M_4}{m^4\cdot 2880}(b-a)^5 \le 0.5\cdot 10^{-4}$$
$$M_4 = \max_{x\in[1,2]} \left|\frac{-2}{x^2}\right| = 2$$
$$\frac{2}{m^4\cdot 2880} \le \frac{1}{20000} \iff \frac{40000}{2880} \le m^4$$
$$\frac{1000}{72} \le m^4$$
$$\frac{250}{18} \le m^4$$
$$\frac{125}{9} \le m^4$$
$$\sqrt{\frac{5\cdot\sqrt{6}}{3}} \le m$$

3.) ln2 közelítése megadott hibával:

• A hiba legyen kisebb, mint $0.5\cdot 10^{-3}$.

- minek az integrálja lesz ln2 ?

$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = \ln 2$

$f(x) = \frac{1}{x}$
$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f''(x) = \frac{2}{x^3}$

$$M_2 = \max_{x\in[1,2]} \left|\frac{2}{x^3}\right| = 2$$
$$\frac{2}{m^2\cdot 12} \le \frac{1}{2000}$$
$$\frac{4000}{12} \le m^2$$
$$\frac{10\cdot\sqrt{10}}{\sqrt{3}} \le m \Rightarrow m \ge \left[\frac{10\cdot\sqrt{10}}{\sqrt{3}}\right] + 1$$

$$\int \ln 2\,dx \approx \frac{1}{40}\left[1 + 2\cdot\frac{20}{21} + 2\cdot\frac{20}{22} + \ldots + 2\cdot\frac{20}{39} + \frac{1}{2}\right]$$