

Algoritmusok tervezése és elemzése

2012.02.08.

2 zárthelyi dolgozat: 10,10,10 illetve 15,15 pontos feladatok.

Minimum 50%-ot kell elérni. A vizsgajegybe beszámít a zh eredménye is.

Backus-Naur-formában megadott szintaxisú nyelv szavai:

- változó és term típusa megegyezik
- a program az utasítás másik neve
- a szemantika a klasszikus operátor szemantika
 - o végrehajtási sorozat
 - o eredményes befejeződés

Helyességfogalmak:

- feladat, be- és kimeneti feltételek
- parciális és totális helyesség

A (P,Q) formulapár egy feladat, ahol P a kezdeti változótartalom.

Parciális helyesség: Ha a végrehajtás befejeződik valamiért, Q változótartalom lesz a végén.

Totális helyesség: A végső változótartalomra teljesül Q.

Parciális Hoare-formula: $\{P\} C \{Q\}$

A Hoare-formulák zártak.

C egy tetszőleges utasítás, (P,Q) egy feladat.

Skip axióma séma: $\{P\} \text{skip} \{P\}$

A skip az üres utasítás.

Az értékadás axióma sémája: $\{Q_E^X\} X := E \{Q\}$

Ahol X változó, E term, Q formula.

A kalkulus mindig helyes, a teljesség azonban nem mindig teljesül.

$$\{(x-y)^2 + (x-y) = y-1\} X := X-Y \{X^2 + X = Y-1\}$$

$$X = X$$

$$E = X-Y$$

$$Q = X^2 + X = Y-1$$

Tehát a bal oldali kifejezést úgy kapjuk meg, hogy Q-ban az X helyére E-t behelyettesítjük.

$$\{X > 0\} Y := X+Y \{X > 0\} \quad (\text{ebben az esetben nincs hova beírni Y-t})$$

$$\{1 > 0\} X := 1 \{X > 0\}$$

Legyen X' az értékadás utáni X tartalma.

$$X' = E$$

$$Q_{X'}^X = Q_E^X$$

Kompozíciós szabály (ezek előadás diákban vannak leírva)
 Feltételes szabály
 Következmény szabály

Ciklus szabály

$(B * C) = \text{while } B \text{ do } C \text{ od}$

Leggyengébb formula: közelít az azonosan igazhoz (semmit mondó)

Legerősebb formula: közelít a azonosan hamishoz

$\forall P \supset Q$ = Itt P az erősebb formula, mert sokkal erősebb megszorításokat tartalmaz.

Mivel P univerzálisan van kvantálva és előfordulhat, hogy egy interpretációban hamis értéket vesz fel, így hamis igazságértéket kapunk és ezért sokkal szigorúbbnak, avagy erősebbnek vesszük.

Dekorált utasítás:

Az utasítást az utasításhatároknál (kivéve ; jel előtt) sorokra tördeljük.

Dekoráció:

Fekete színű karakterek: ezeket alaphoz tudjuk, leírtuk őket a feladat elején.

Kék szín karakterek: az alattuk levő adatokból határozzuk meg őket, vagy előre definiált szabályból.

Narancs-sárga színű karakterek: kezdeti feltétel.

Piros színű karakterek: végfeltétel (maga Q).

$\{T\} Y := X; Z := \lambda; \text{while } Y \neq \lambda \text{ do } Z := f(Y) Z; Y := t(Y); \text{od } \{Z = X^{-1}\}$

- | | |
|---|--|
| 1. $\{T\}$ | P = ciklus invariáns B = a feltétel a ciklus fejében ($Y \neq \lambda$) |
| 16. $\{X^{-1} = X^{-1}\}$ | A ciklus invariáns meghatározása nem algoritmizálható. |
| 2. $Y := X;$ | Ebben a feladatban nincs részletezve a meghatározása (később). |
| 15. $\{Y^{-1} \lambda = X^{-1}\}$ | |
| 3. $Z := \lambda;$ | |
| 9. $\{Y^{-1} Z = X^{-1}\}$ | // P (a while feletti $\{\}$ részben a P formula áll, CIKLUS SZABÁLY) |
| 4. while $Y \neq \lambda$ do | |
| 10. $\{Y^{-1} Z = X^{-1} \wedge Y \neq \lambda\}$ | // $P \wedge B$ (a while alatti $\{\}$ részben a $P \wedge B$ formula áll) |
| 14. $\{t(Y)^{-1} f(Y) Z = X^{-1}\}$ | |
| 5. $Z := f(Y) Z;$ | |
| 13. $\{t(Y)^{-1} Z = X^{-1}\}$ | |
| 6. $Y := t(Y);$ | |
| 11. $\{Y^{-1} Z = X^{-1}\}$ | // P (a do feletti $\{\}$ részben a P formula áll) |
| 7. od | |
| 12. $\{Y^{-1} Z = X^{-1} \wedge Y = \lambda\}$ | // $P \wedge \neg B$ (a do alatti $\{\}$ részben a $P \wedge \neg B$ formula áll) |
| 8. $\{Z = X^{-1}\}$ | |

Az aláhúzott formulákat **lentől-felfelé** haladva kapjuk meg úgy, hogy az alattuk álló értékadás jobb oldali kifejezését behelyettesítjük a bal oldali változó helyére az értékadás alatti formulát tekintve.

A sorszámok a sorok elején a kitöltés egy helyes sorrendjét jelölik.

Az (1;16), (10;14) és (12;8) számokkal jelölt párok között implikációs kapcsolat áll fenn, amelyet „U” betűvel jelölünk a két formula előtt, a nyitó blokkjelek között (gépelve nehéz lenne jelölni).

Ciklusszabály részletezve:

$\{P \wedge B\} C \{P\}$

Ahol P a ciklus invariáns, amelyet nekünk kell meghatározni.

 $\{P\} \text{ while } B \text{ do } C \text{ od } \{P \wedge \neg B\}$

Újabb dekorációs feladat:

$\{n \geq 0\} X := 1; Y := n; \text{ while } Y > 0 \text{ do } X := mX; Y := Y-1 \text{ od } \{X = m^n\}$

- | | | |
|---|--|--|
| 1. $\{n \geq 0\}$ | P = ciklus invariáns | B = a feltétel a ciklus fejében ($Y > 0$) |
| 16. $\{n \geq 0 \wedge 1 * m^n = m^n\}$ | $P = Y \geq 0 \wedge X m^Y = m^n$ | |
| 2. $X := 1;$ | $B = Y > 0$ | |
| 15. $\{n \geq 0 \wedge X m^n = m^n\}$ | $\neg B = Y \leq 0$ | |
| 3. $Y := n;$ | | |
| 9. $\{Y \geq 0 \wedge X m^Y = m^n\}$ | // P (a while feletti {} részben a P formula áll, CIKLUS SZABÁLY) | |
| 4. while $Y > 0$ do | | |
| 10. $\{Y \geq 0 \wedge X m^Y = m^n \wedge Y > 0\}$ | // $P \wedge B$ (a while alatti {} részben a $P \wedge B$ formula áll) | |
| 14. $\{Y-1 \geq 0 \wedge m X m^{Y-1} = m^n\}$ | | |
| 5. $X := mX;$ | | |
| 13. $\{Y-1 \geq 0 \wedge X m^{Y-1} = m^n\}$ | | |
| 6. $Y := Y-1;$ | | |
| 11. $\{Y \geq 0 \wedge X m^Y = m^n\}$ | // P (a do feletti {} részben a P formula áll) | |
| 7. od | | |
| 12. $\{Y \geq 0 \wedge X m^Y = m^n \wedge Y \leq 0\}$ | // $P \wedge \neg B$ (a do alatti {} részben a $P \wedge \neg B$ formula áll) | |
| 8. $\{X = m^n\}$ | | |

Az első gyakorlaton még nem esett szó a ciklus invariáns meghatározásának módjáról. A későbbi gyakorlatokon bővebben ki lesz fejtve a meghatározás elve. Ahhoz azonban túl bonyolult, hogy a dekorációval együtt le lehessen adni egy órán belül.