

Algoritmusok tervezése és elemzése

2012. 03. 21.

Leggyengébbelőfeltétel-kalkulus műveleti tulajdonságai:

$$\text{wp}(\text{skip}, Q) = Q$$

$$\text{wp}(X:=E, Q) = Q_E^X$$

$$\text{wp}(C_1; C_2, Q) = \text{wp}(C_1, \text{wp}(C_2, Q)) \quad (\text{kompozíciós szabály})$$

$$\text{wp}(\text{while } B \text{ do } C \text{ od}, Q) = \exists i \geq 0 . P_i, \text{ ahol } P_i \text{ annak leggyengébb előfeltétele, amely mellett a ciklus pontosan } i \text{ lépés után befejeződik és teljesül } Q.$$

$$P_0 = \neg B \wedge Q$$

$$P_{i+1} = B \wedge \text{wp}(C, P_i), i \geq 0$$

Feladatmegoldás:

$$\begin{aligned} \text{wp}(\text{while } Z \neq \lambda \text{ do } Z:=t(Z); Y:=f(Z)Yf(Z) \text{ od}; Y:=f(Y)Y, Y=X) &= (\text{kompozíciós szabályt alkalmazva}) = \\ &= \text{wp}(\text{while } Z \neq \lambda \text{ do } Z:=t(Z); Y:=f(Z)Yf(Z) \text{ od}, \text{wp}(Y:=f(Y)Y, Y=X)) = \\ &= \text{wp}(\text{while } Z \neq \lambda \text{ do } Z:=t(Z); Y:=f(Z)Yf(Z) \text{ od}, f(Y)Y=X) = \exists i \geq 0 . P_i = *^1 \end{aligned}$$

$$P_0 = Z=\lambda \wedge f(Y)Y=X$$

$$\begin{aligned} P_1 &= Z \neq \lambda \wedge \text{wp}(Z:=t(Z); Y:=f(Z)Yf(Z), Z=\lambda \wedge f(Y)Y=X) = \\ &= Z \neq \lambda \wedge \text{wp}(Z:=t(Z), \text{wp}(Y:=f(Z)Yf(Z), Z=\lambda \wedge f(Y)Y=X)) = \\ &= Z \neq \lambda \wedge \text{wp}(Z:=t(Z), Z=\lambda \wedge f(f(Z)Yf(Z))f(Z)Yf(Z)=X) = \end{aligned}$$

(az aláhúzott formulánál $f(Z)=\lambda$, hiszen $Z=\lambda$, illetve a félkövérrel jelölt rész maga $f(Y)$)

$$\begin{aligned} &= Z \neq \lambda \wedge \text{wp}(Z:=t(Z), Z=\lambda \wedge f(Y)Y=X) = Z \neq \lambda \wedge t(Z)=\lambda \wedge f(Y)Y=X = (\text{ha } t(Z)=\lambda, \text{ akkor } Z \text{ hossza } 1) = \\ &= |Z|=1 \wedge f(Y)Y=X \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_2 &= Z \neq \lambda \wedge \text{wp}(Z:=t(Z); Y:=f(Z)Yf(Z), |Z|=1 \wedge f(Y)Y=X) = \\ &= Z \neq \lambda \wedge \text{wp}(Z:=t(Z), \text{wp}(Y:=f(Z)Yf(Z), |Z|=1 \wedge f(Y)Y=X)) = \\ &= Z \neq \lambda \wedge \text{wp}(Z:=t(Z), |Z|=1 \wedge f(f(Z)Yf(Z))f(Z)Yf(Z)=X) = (\text{a pirossal jelöltek egyenlők } Z\text{-vel}) = \\ &= Z \neq \lambda \wedge \text{wp}(Z:=t(Z), |Z|=1 \wedge f(\underline{ZY}Z)ZY=X) = (\text{az aláhúzott rész egyenlő } Z\text{-vel}) = \\ &= Z \neq \lambda \wedge \text{wp}(Z:=t(Z), |Z|=1 \wedge \mathbf{ZZYZ}=X) = (\text{egyszerűsítés}) = \\ &= Z \neq \lambda \wedge \text{wp}(Z:=t(Z), |Z|=1 \wedge \mathbf{Z}^2YZ=X) = (\text{értékadás}) = \\ &= Z \neq \lambda \wedge |t(Z)|=1 \wedge t(Z)^2Yt(Z)=X = (\text{ha } t(Z)=1, \text{ akkor } Z \text{ hossza } 2) = \\ &= |Z|=2 \wedge t(Z)^2Yt(Z)=X \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_3 &= Z \neq \lambda \wedge \text{wp}(Z:=t(Z); Y:=f(Z)Yf(Z), |Z|=2 \wedge t(Z)^2Yt(Z)=X) = \\ &= Z \neq \lambda \wedge \text{wp}(Z:=t(Z), \text{wp}(Y:=f(Z)Yf(Z), |Z|=2 \wedge t(Z)^2Yt(Z)=X)) = \\ &= Z \neq \lambda \wedge \text{wp}(Z:=t(Z), |Z|=2 \wedge t(Z)^2f(Z)Yf(Z)t(Z)=X) = (\text{a félkövérrel kiemelt rész: } Z) = \\ &= Z \neq \lambda \wedge \text{wp}(Z:=t(Z), |Z|=2 \wedge t(Z)^2f(Z)YZ=X) = (\text{értékadás}) = \\ &= Z \neq \lambda \wedge |t(Z)|=2 \wedge t(t(Z))^2f(t(Z))Yt(Z)=X = (\text{ha } t(Z)=2, \text{ akkor } Z \text{ hossza } 3) = \\ &= |Z|=3 \wedge t(t(Z))^2f(t(Z))Yt(Z)=X \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_4 &= Z \neq \lambda \wedge \text{wp}(Z:=t(Z); Y:=f(Z)Yf(Z), |Z|=3 \wedge t(t(Z))^2f(t(Z))Yt(Z)=X) = \\ &= Z \neq \lambda \wedge \text{wp}(Z:=t(Z), \text{wp}(Y:=f(Z)Yf(Z), |Z|=3 \wedge t(t(Z))^2f(t(Z))Yt(Z)=X)) = \\ &= Z \neq \lambda \wedge \text{wp}(Z:=t(Z), |Z|=3 \wedge t(t(Z))^2f(t(Z))f(Z)Yf(Z)t(Z)=X) = (\text{a félkövérrel kiemelt rész: } Z) = \end{aligned}$$

$$= Z \neq \lambda \wedge wp(Z:=t(Z), |Z|=3 \wedge t(t(Z))^2 f(t(Z)) f(Z) YZ=X) = *^2$$

Ezen a ponton elértük, hogy már nem igazán tudjuk ránézésre egyszerűsíteni a formulát, ezért egy példa bemenetre megvizsgáljuk, hogy milyen kimenetet ad.

abc esetén:

$$t(t(Z))^2 = cc$$

$$f(t(Z)) = b$$

$$f(Z) = c$$

Azaz **abc** -> **ccba**, ami felírható **f(Z⁻¹)Z⁻¹** alakba is, ahol Z⁻¹ az aláhúzott részt fejezi ki.

$$*^2 = (\text{visszahelyettesítve}) =$$

$$= Z \neq \lambda \wedge wp(Z:=t(Z), |Z|=3 \wedge f(\underline{Z^{-1}})Z^{-1}YZ=X) = (\text{értékkadás}) =$$

$$= Z \neq \lambda \wedge |t(Z)|=3 \wedge f(t(Z)^{-1})t(Z)^{-1}Yt(Z)=X = (\text{ha } t(Z)=3, \text{ akkor } Z \text{ hossza } 4) =$$

$$= |Z|=4 \wedge f(t(Z)^{-1})t(Z)^{-1}Yt(Z)=X$$

$$P_i = |Z|=i \wedge f(t(Z)^{-1})t(Z)^{-1}Yt(Z)=X, \text{ ha } i>1$$

$$*^1 = \exists i \geq 0 . P_i = P_0 \vee P_1 \vee (\exists i>1 . P_i) = P_0 \vee P_1 \vee (\exists i>1 . |Z|=i \wedge f(t(Z)^{-1})t(Z)^{-1}Yt(Z)=X) =$$

$$= P_0 \vee P_1 \vee (|Z|>1 \wedge f(t(Z)^{-1})t(Z)^{-1}Yt(Z)=X) \text{ (és ez az eredmény)}$$

Feladatmegoldás:

$$wp(X:=0; \text{while } |Y|<3 \text{ do } Y:=Y+1; X:=X-2 \text{ od, } X=Z) = (\text{kompozíciós szabályt alkalmazva}) =$$

$$= wp(X:=0, wp(\text{while } |Y|<3 \text{ do } Y:=Y+1; X:=X-2 \text{ od, } X=Z)) =$$

$$= wp(X:=0, \exists i \geq 0 . P_i) = *^3$$

$$P_0 = |Y| \geq 3 \wedge X=Z$$

$$P_1 = |Y|<3 \wedge wp(Y:=Y+1; X:=X-2, |Y| \geq 3 \wedge X=Z) =$$

$$= |Y|<3 \wedge wp(Y:=Y+1, wp(X:=X-2, |Y| \geq 3 \wedge X=Z)) = |Y|<3 \wedge wp(Y:=Y+1, |Y| \geq 3 \wedge (X-2)=Z) =$$

$$= |Y|<3 \wedge |Y+1| \geq 3 \wedge (X-2)=Z = (\text{kiszámoltuk, hogy } Y \text{ csak } 2 \text{ lehet az abszolút érték miatt}) =$$

$$= Y=2 \wedge X-2=Z$$

$$P_2 = |Y|<3 \wedge wp(Y:=Y+1; X:=X-2, Y=2 \wedge X-2=Z) =$$

$$= |Y|<3 \wedge wp(Y:=Y+1, wp(X:=X-2, Y=2 \wedge X-2=Z)) = |Y|<3 \wedge wp(Y:=Y+1, Y=2 \wedge (X-2)-2=Z) =$$

$$= |Y|<3 \wedge (Y+1)=2 \wedge (X-2)-2=Z = (Y+1=2\text{-ből jön, hogy } Y=1, \text{ illetve } (X-2)-2=Z\text{-ből: } X-4=Z) =$$

$$= Y=1 \wedge (X-4)=Z$$

$$P_i = (Y=3-i) \wedge (X-2i)=Z, \text{ ha } 5 \geq i > 0 \quad // \text{ Ha } i=6, \text{ akkor } Y=3-6, \text{ azaz } Y=(-3), \text{ így } |Y|<3 \text{ nem teljesül!}$$

Ennek bizonyítása:

$$P_6 = |Y|<3 \wedge wp(Y:=Y+1; X:=X-2, P_5) = |Y|<3 \wedge wp(Y:=Y+1; X:=X-2, Y=(-2) \wedge X-10=Z) =$$

$$= |Y|<3 \wedge wp(Y:=Y+1, wp(X:=X-2, Y=(-2) \wedge X-10=Z)) =$$

$$= |Y|<3 \wedge wp(Y:=Y+1, Y=(-2) \wedge (X-2)-10=Z) = |Y|<3 \wedge (Y+1)=(-2) \wedge (X-2)-10=Z =$$

$$= |Y|<3 \wedge (Y+1)=(-2) \wedge (X-12)=Z = (Y+1=-2 \text{ átrendezve } Y=-3, \text{ ami ellentmond } |Y|<3\text{-nak!}) =$$

$$= \perp \text{ (A csoda kizárásának elve miatt visszafelé lépve is } \perp \text{ lesz a formula eredménye)}$$

$$\text{Befejezés: } P_i = Y=3-i \wedge X-2i=Z, \text{ ha } 5 \geq i > 0 \quad \text{vagy} \quad P_i = \perp, \text{ ha } i>5$$

$$*^3 = \exists i \geq 0 . P_i = P_0 \vee (\exists 5 \geq i > 0 . Y=3-i \wedge X-2i=Z) \vee (\exists i>5 . \perp) = (\text{kifejezve } i\text{-t: } i=3-Y) =$$

$$= P_0 \vee 5 \geq (3-Y) > 0 \wedge X-2(3-Y)=Z = wp(X:=0, \dots) = (\text{értékkadás}) = P_0 \vee 5 \geq (3-Y) > 0 \wedge -2(3-Y)=Z$$

Feladatmegoldás:

$$\begin{aligned} \text{wp}(Y:=1; \text{while}(X \neq 0 \text{ do } X:=X-1; Y:=Y+X \text{ od, } Y=Z) &= (\text{kompozíciós szabályt alkalmazva}) = \\ &= \text{wp}(Y:=1, \text{wp}(\text{while}(X \neq 0 \text{ do } X:=X-1; Y:=Y+X \text{ od, } Y=Z)) = \\ &= \text{wp}(Y:=1, \exists i \geq 0 . P_i) = *^4 \end{aligned}$$

$$P_0 = X=0 \wedge Y=Z$$

$$\begin{aligned} P_1 &= X \neq 0 \wedge \text{wp}(X:=X-1; Y:=Y+X, X=0 \wedge Y=Z) = X \neq 0 \wedge \text{wp}(X:=X-1, \text{wp}(Y:=Y+X, X=0 \wedge Y=Z)) = \\ &= X \neq 0 \wedge \text{wp}(X:=X-1, X=0 \wedge Y+X=Z) = X \neq 0 \wedge (X-1)=0 \wedge Y+(X-1)=Z = (\text{egyszerűsítés}) = \\ &= ~~X \neq 0~~ \wedge X=1 \wedge Y+(X-1)=Z = X=1 \wedge Y+(1-1)=Z = \\ &= X=1 \wedge Y=Z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_2 &= X \neq 0 \wedge \text{wp}(X:=X-1; Y:=Y+X, X=1 \wedge Y=Z) = X \neq 0 \wedge \text{wp}(X:=X-1, \text{wp}(Y:=Y+X, X=1 \wedge Y=Z)) = \\ &= X \neq 0 \wedge \text{wp}(X:=X-1, X=1 \wedge Y+X=Z) = X \neq 0 \wedge (X-1)=1 \wedge Y+(X-1)=Z = (\text{egyszerűsítés}) = \\ &= ~~X \neq 0~~ \wedge X=2 \wedge Y+(X-1)=Z = X=2 \wedge Y+(2-1)=Z = \\ &= X=2 \wedge Y+1=Z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_3 &= X \neq 0 \wedge \text{wp}(X:=X-1; Y:=Y+X, X=2 \wedge Y+1=Z) = X \neq 0 \wedge \text{wp}(X:=X-1, \text{wp}(Y:=Y+X, X=2 \wedge Y+1=Z)) = \\ &= X \neq 0 \wedge \text{wp}(X:=X-1, X=2 \wedge Y+X+1=Z) = X \neq 0 \wedge (X-1)=2 \wedge Y+(X-1)+1=Z = (\text{egyszerűsítés}) = \\ &= ~~X \neq 0~~ \wedge X=3 \wedge Y+(X-1)+1=Z = X=3 \wedge Y+(3-1)+1=Z = \\ &= X=3 \wedge Y+3=Z \end{aligned}$$

Bár nem látszik, de az $Y+_Z$ helyen előforduló számok a másodfokú egyenlethez kapcsolódnak. Azt, hogy milyen elven jöttünk erre rá, nem írtam le, mert olyat úgy sem fogunk kapni ZH-n.

$$P_i = X=i \wedge Y + \frac{X^2-X}{2} = Z, \text{ ahol } i \geq 0$$

Az állítás bizonyítása:

$$\begin{aligned} P_{i+1} &= B \wedge \text{wp}(C, P_i) = (\text{gyors felírás}) = X \neq 0 \wedge \text{wp}(X:=X-1, \text{wp}(Y:=Y+X, X=i \wedge Y + \frac{X^2-X}{2} = Z)) = \\ &= X \neq 0 \wedge \text{wp}(X:=X-1, X=i \wedge (Y+X) + \frac{X^2-X}{2} = Z) = X \neq 0 \wedge (X-1)=i \wedge (Y+(X-1)) + \frac{(X-1)^2-(X-1)}{2} = Z = \\ &= ~~X \neq 0~~ \wedge X=i+1 \wedge (Y+(X-1)) + \frac{(X^2-2X+1)-(X-1)}{2} = Z = X=i+1 \wedge Y + \frac{2X-2}{2} + \frac{(X^2-2X+1)-(X-1)}{2} = Z = \\ &= X=i+1 \wedge Y + \frac{(X^2-2X+1)-(X-1)+2X-2}{2} = Z = X=i+1 \wedge Y + \frac{(X^2-3X+2)+2X-2}{2} = Z = \\ &= X=i+1 \wedge Y + \frac{X^2-X}{2} = Z \end{aligned}$$

$$*^4 = \exists i \geq 0 . P_i = (\exists i \geq 0 . X=i) \wedge Y + \frac{X^2-X}{2} = Z = X \geq 0 \wedge Y + \frac{X^2-X}{2} = Z =$$

$$= (\text{visszatérve az elejére}) = \text{wp}(Y:=1, X \geq 0 \wedge Y + \frac{X^2-X}{2} = Z) = X \geq 0 \wedge 1 + \frac{X^2-X}{2} = Z \text{ (eredmény)}$$