

Algoritmusok tervezése és elemzése

2012. 04. 04.

Rekurzió:

$$\frac{\{P\} \text{ call } \{Q\} \vdash \{P\} C0 \{Q\}}{\{P\} \text{ call } \{Q\}}$$

Rekurziós szabály

$$\frac{\{P'\} \text{ call } \{Q'\}}{\{ \forall \bar{Z} (\forall \bar{Y} (P' \supset Q' \frac{\bar{X}}{\bar{Z}}) \supset Q \frac{\bar{X}}{\bar{Z}}) \} C \{Q\}}$$

Adaptációs szabály

$$\{ \forall \bar{Z} (\forall \bar{Y} (P' \supset Q' \frac{\bar{X}}{\bar{Z}}) \supset Q \frac{\bar{X}}{\bar{Z}}) \} C \{Q\}$$

Ahol $\forall \bar{Y} (P' \supset Q' \frac{\bar{X}}{\bar{Z}}) = C$ becsült hatása

C aktív változói: $\bar{X}$ (input)

C inaktív változói: $\bar{Y}$

$\bar{X} \mid \bar{Z}$ (azonos számú, de eltérő elemekből állnak)

Az aktív változók másolatai: $\bar{Z}$ (output)

Feladatmegoldás:

$$\{1 < n\} X := n; \text{ call }; X := Z; \text{ call } \{Z = n^4\}$$

A **call** a következő algoritmust hívja meg:

$$\{2 \leq m \wedge X = m\}$$

if $2 < X$ then

$$X := X-1; \text{ call }; Y := Y+2; Z := Y+Z+1;$$

else

$$Y := 2; Z := 4$$

fi

$$\{Y+2=2m \wedge Z=m^2\} = \text{átalakítva} = \{Y = 2m-2 \wedge Z = m^2\}$$

Bizonyítsuk be, hogy $\{2 \leq X \wedge X=m\} \text{ call } \{Y=2m-2 \wedge Z=m^2\}$:

$$\{2 \leq X \wedge X=m\}$$

if $2 < X$ then

$$\{2 \leq X \wedge X=m \wedge 2 < X\}$$

$$\{2 \leq X-1 \wedge X-1=m-1\}$$

$$X := X-1;$$

$$\{2 \leq X \wedge X=m-1 \wedge (X+1)^2=m^2\}$$

(ez a sor az 1. adaptáció után határozódott meg)

call;

$$\{(Y+2)=2m-2 \wedge ((Y+2)+Z+1)=m^2\} = \{Y=2m-4 \wedge Y+Z+3=m^2\}$$

$$Y := Y+2;$$

$$\{Y=2m-2 \wedge (Y+Z+1)=m^2\}$$

$$Z := Y+Z+1$$

$$\{Y=2m-2 \wedge Z=m^2\}$$

else

$$\{2 \leq X \wedge X=m \wedge 2 \geq X\}$$

$$\{2=2m-2 \wedge 4=m^2\}$$

```

Y := 2;
{ Y=2m-2 ∧ 4=m2 }
Z := 4
{ Y=2m-2 ∧ z=m2 }
fi
{ Y=2m-2 ∧ Z=m2 }

```

Adaptáció:

Ahány call szerepel a feladatban, annyi adaptációra van szükségünk.

- Aktív változók: $X, Y, Z = \bar{X}$ (mivel ezeknek adunk értéket a dekorációban)
- Intaktív változók: $m = \bar{Y}$ (nem tudjuk az értéküket)
- Másolatok: $a, b, c = \bar{Z}$

- C hatásbecslése:

$\forall [\text{inaktív változók}] (\text{előfeltétel} \supset \text{utófeltétel aktív változói másolatokkal behelyettesítve})$

$$\forall m (2 \leq X \wedge X=m \supset b=2m-2 \wedge c=m^2) \sim A \wedge B \supset C \sim A \supset (B \supset C) \sim$$

$\sim$ (az univerzális kvantor m -et köti, ezért a $2 \leq X$ kifejezés kihozható, hiszen nincs benne m) $\sim$

$$\sim 2 \leq X \supset \forall m (X=m \supset b=2m-2 \wedge c=m^2) = 2 \leq X \supset b=2X-2 \wedge c=X^2$$

1. Adaptáció:

$\forall [\text{másolatok}] (C \text{ hatásbecslése} \supset \text{call utáni formula aktív változói átírva másolatokra})$

$$\forall a, b, c ((2 \leq X \supset b=2X-2 \wedge c=X^2) \supset b=2m-4 \wedge b+c+3=m^2) \sim (A \supset B) \supset C \sim \neg(\neg A \vee B) \vee C \sim$$

$$\sim (A \wedge \neg B) \vee C \sim (A \vee C) \wedge (\neg B \vee C) \sim (A \vee C) \wedge (B \supset C) \sim$$

$\sim$ (az univerzális kvantor csak a, b, c -t köti, ezért a $2 \leq X$ kifejezés kihozható) $\sim$

$$\sim (2 \leq X \vee \forall a, b, c (b=2m-4 \wedge b+c+3=m^2)) \wedge \forall a, b, c (b=2X-2 \wedge c=X^2 \supset b=2m-4 \wedge b+c+3=m^2) =$$

= (az áthúzott formula azonosan hamis, illetve a második kvantált alak eltüntethető, ha a másolatok értékadásait behelyettesítjük az előfordulások helyére) =

$$= 2 \leq X \wedge 2X-2=2m-4 \wedge 2X-2+X^2+3=m^2 = 2 \leq X \wedge \frac{2X-2=2m-4}{2} \wedge 2X+X^2+1=m^2 =$$

$$= 2 \leq X \wedge X-1=m-2 \wedge (X+1)^2=m^2 = 2 \leq X \wedge X=m-1 \wedge (X+1)^2=m^2 \text{ (ez a formula kerül a call elé)}$$

Most dekoráljuk az algoritmust, amely az előbb megoldott algoritmust hívogatja:

```

{ 1 < n }
{ 2 ≤ n ∧ n4 = n4 }
X := n;
{ 2 ≤ X ∧ 2 ≤ X2 ∧ (X2)2 = n4 }           (ez a sor az 3. adaptáció után határozódott meg)
call;
{ 2 ≤ Z ∧ Z2 = n4 }
X := Z;
{ 2 ≤ X ∧ X2 = n4 }                         (ez a sor az 2. adaptáció után határozódott meg)
call
{ Z = n4 }

```

2. Adaptáció:

$\forall[\text{másolatok}](C \text{ hatásbecslése} \supset \text{call utáni formula aktív változói átírva másolatokra})$

$$\forall a,b,c((2 \leq X \supset b=2X-2 \wedge c=X^2) \supset c=n^4) \sim (A \supset B) \supset C \sim (A \vee C) \wedge (B \supset C) \sim$$

$$\sim (2 \leq X \vee \forall a,b,c(\neg (b=2X-2 \wedge c=X^2) \supset c=n^4)) \wedge \forall a,b,c(b=2X-2 \wedge c=X^2 \supset c=n^4) =$$

= (az áthúzott formula azonosan hamis, illetve a második kvantált alak eltüntethető, ha a másolatok értékadásait behelyettesítjük az előfordulások helyére) =

$$= 2 \leq X \wedge X^2 = n^4 \text{ (ez a formula kerül a 2. call elé)}$$

3. Adaptáció:

$\forall[\text{másolatok}](C \text{ hatásbecslése} \supset \text{call utáni formula aktív változói átírva másolatokra})$

$$\forall a,b,c((2 \leq X \supset b=2X-2 \wedge c=X^2) \supset 2 \leq c \wedge c^2 = n^4) \sim (A \supset B) \supset C \sim (A \vee C) \wedge (B \supset C) \sim$$

$$\sim (2 \leq X \vee \forall a,b,c(\neg (b=2X-2 \wedge c=X^2) \supset 2 \leq c \wedge c^2 = n^4)) \wedge \forall a,b,c(b=2X-2 \wedge c=X^2 \supset 2 \leq c \wedge c^2 = n^4) =$$

= (az áthúzott formula azonosan hamis, illetve a második kvantált alak eltüntethető, ha a másolatok értékadásait behelyettesítjük az előfordulások helyére) =

$$= 2 \leq X \wedge 2 \leq X^2 \wedge (X^2)^2 = n^4 \text{ (ez a formula kerül az 1. call elé)}$$

Bizonyítsuk be, hogy $\{ X > 0 \wedge Y > 0 \wedge X = a \wedge Y = b \}$ call $\{ X = (a,b) \}$:

$$\{ X > 0 \wedge Y > 0 \wedge X = a \wedge Y = b \}$$

if $X \neq Y$ then

$$\{ X > 0 \wedge Y > 0 \wedge X = a \wedge Y = b \wedge X \neq Y \}$$

if $X > Y$ then

$$\{ X > 0 \wedge Y > 0 \wedge X = a \wedge Y = b \wedge X \neq Y \wedge X > Y \}$$

$$\{ (X-Y, Y) = (a,b) \}$$

$$X := X - Y$$

$$\{ (X, Y) = (a,b) \}$$

else

$$\{ X > 0 \wedge Y > 0 \wedge X = a \wedge Y = b \wedge X \neq Y \wedge X \leq Y \}$$

$$\{ (X, Y-X) = (a,b) \}$$

$$Y := Y - X$$

$$\{ (X, Y) = (a,b) \}$$

fi;

$$\{ (X, Y) = (a,b) \}$$

(ez a sor az adaptáció után határozódott meg)

call

$$\{ X = (a,b) \}$$

else

$$\{ X > 0 \wedge Y > 0 \wedge X = a \wedge Y = b \wedge X = Y \}$$

$$\{ X = (a,b) \}$$

skip

$$\{ X = (a,b) \}$$

fi

$$\{ X = (a,b) \}$$

Adaptáció:

Ahány call szerepel a feladatban, annyi adaptációra van szükségünk.

- Aktív változók: $X, Y = \overline{X}$ (mivel ezeknek adunk értéket a dekorációban)
- Inaktív változók: $a, b = \overline{Y}$ (nem tudjuk az értéküket)
- Másolatok: $p, q = \overline{Z}$

- C hatásbecslése:

$\forall [\text{inaktív változók}] (\text{előfeltétel} \supset \text{utófeltétel aktív változói másolatokkal behelyettesítve})$

$\forall a, b (X > 0 \wedge Y > 0 \wedge X = a \wedge Y = b \supset p = (a, b)) =$

$= (\text{kvantált alak eltüntethető, ha a másolatok értékadásait behelyettesítjük az előfordulások helyére}) = (X > 0 \wedge Y > 0) \supset p = (X, Y)$

Adaptáció:

$\forall [\text{másolatok}] (C \text{ hatásbecslése} \supset \text{call utáni formula aktív változói átírva másolatokra})$

$\forall p, q ((X > 0 \wedge Y > 0) \supset p = (X, Y)) \supset p = (a, b) \sim (A \supset B) \supset C \sim \neg(\neg A \vee B) \vee C \sim$

$\sim (\text{az univerzális kvantor csak } p, q\text{-t köti, ezért az } (X > 0 \wedge Y > 0) \text{ kifejezés kihozható}) \sim$

$\sim (\cancel{X > 0 \wedge Y > 0}) \vee \forall p, q (\cancel{p = (a, b)}) \wedge \forall p, q (p = (X, Y) \supset p = (a, b)) =$

$= (\text{az áthúzott formula azonosan hamis, illetve a második kvantált alak eltüntethető, ha a másolatok értékadásait behelyettesítjük az előfordulások helyére}) =$

$= (X, Y) = (a, b) \text{ (ez a formula kerül a call elé)}$