

A sorbanállási elmélet alapjai

DR. SZTRIK JÁNOS

Debreceni Egyetem, Informatikai Kar

Lektorálta:
Dr. Bíró József
MTA doktora, egyetemi tanár

Jelen jegyzetet feleségemnek ajánlom, aki nélkül ez a munka sokkal hamarabb elkészült volna.

- Ha valami egyszer elromolhat, akkor el is fog romlani.
- A szakértői rendszerek arról ismerhetők fel, hogy abból az ismeretből, miszerint "egy rózsa illatosabb, mint egy káposztafej", azt a következtetést vonják le, hogy a rózsából jobb levest is lehet főzni.
- Minél kevesebb funkciója van egy programnak, annál tökéletesebben hajtja végre azokat.
- Az a vírus, amelyik megtámadta gépedet csak azokat az állományokat fertőzi meg, amelyekről nincsenek biztonsági másolataid.
- Hibátlan program megírása olyan, mint a kör négyszögesítése. Mindenki azt hiszi, hogy lehetséges, de ilyent még senki sem látott.
- Ha egy rövid sor felé haladsz, az orrod előtt hosszú lesz belőle.
- Ha hosszú sorban várakozol, a mögötted állókat új, rövidebb sorba terelik át.
- Ha kilépsz egy pillanatra a rövid sorból, azonnal meghosszabbodik.
- Ha rövid sorban várakozol, az előtted állók beeresztik barátaikat és rokonaikat, így lesz hosszú sor belőle.
- Az, ami rövid sor az épületen kívül, valójában hosszú sor az épületen belül.
- Ha elég hosszú ideig állsz egy helyben, sorbanállást idézel elő.

(Arthur Block: Murphy törvénykönyve)

Tartalomjegyzék

Előszó	7
I. A sorbanállási elmélet alapjai	9
1. A sorbanállási elmélet alapfogalmai	11
1.1. A sorbanállási rendszerek jellemzői	12
1.2. Kendall-féle jelölés-rendszer	15
1.3. Születési-halálozási folyamatokra vonatkozó összefüggések	15
1.4. Sorbanállási szoftverek	16
2. Végtelen-forrású rendszerek	19
2.1. Az $M/M/1$ típusú sorbanállási rendszer	19
2.2. $M/M/1$ rendszer tétovázó (elriasztott) igények esetében	27
2.3. Prioritásos $M/M/1$ rendszer	32
2.4. Az $M/M/1/K$ típusú, véges befogadóképességű rendszer	34
2.5. Az $M/M/\infty$ típusú rendszer	39
2.6. Az $M/M/n/n$ típusú Erlang-féle veszteséges rendszer	40
2.7. Az $M/M/n$ típusú rendszer	47
2.8. Az $M/M/c/K$ rendszer	57
2.9. Az $M/G/1$ rendszer	60
3. Véges-forrású rendszerek	71
3.1. Az $M/M/r/r/n$ modell, Engset-féle veszteséges rendszer	71
3.2. Az $M/M/1/n/n$ modell	75
3.3. Inhomogén modellek	90
3.3.1. Az $\vec{M}/\vec{M}/1/n/n/PS$ rendszer	91
3.3.2. Az $\vec{M}/\vec{M}/1/n/n/FIFO$ rendszer	92
3.3.3. Az $\vec{M}/\vec{M}/1/n/n/PR$ rendszer	94
3.4. Homogén forrású modellek összehasonlítása	97
3.5. Az $M/M/r/n/n$ modell	98
3.6. Az $M/M/r/K/n$ rendszer	111
3.7. Az $M/G/1/n/n/PS$ rendszer	113
3.8. A $\vec{G}/M/r/n/n/FIFO$ modell	116

II. Feladatgyűjtemény	125
4. Végtelen-forrású rendszerek	127
5. Véges-forrású rendszerek	143
Irodalomjegyzék	151

Előszó

A mindennapi élet egyre több cselekvését átszövő modern infokommunikáció állandó fejlesztésre ösztönzi a szakembereket. Természetesen ez nem korlátozható egyetlen tudományágra, hiszen fontos szerepet játszanak a mérnökök és az elméleti kutatást végző tudósok is. Az informatikai rendszerek sok alkalmazási területet ölelnek fel, többek között a fent említett infokommunikációs hálózatokat. Hogy jobban megértsük a háttérben zajló fejlesztő munka egyes lépéseit, szükségünk van pl. az igények kiszolgálási folyamatot modellező matematikai módszerek és eszközök megismerésére. A kiszolgálási rendszerek hatékonyságának, megbízhatóságának elemzése az alkalmazott matematika egyik legdinamikusabban fejlődő területe. A gyakorlatban felmerülő problémák újabb és újabb módszerek kidolgozását igénylik.

Jelen segédletben a megbízhatóság-elméleti és sorbanállási problémákra koncentrálva a legfontosabbnak ítélt eljárásokat és megközelítéseket tárgyalom. Az összeállított Markovi-szintű modellek felépítése csupán alapvető valószínűségszámítási ismereteket tételez fel. Próbálok betekintést nyújtani a modellalkotásba, a képletek származtatásába kiszámításába és az eredmények kiértékelésébe.

A jegyzete célja, hogy az olvasókat megismertessem a sztochasztikus modellezés alapvető fogalmaival, eszközeivel és eljárásaival. Fontos szerep jut a szemléletmód kialakításának hiszen értelmes választ csak értelmes kérdésre lehet adni. Hiába a szép, zárt-alakú analitikus matematikai képlet, ha nem tudjuk kiszámítani. Ezért mutatom meg, hogyan lehet ugyanazt a problémát különböző oldalról is megközelíteni. Ne elégedjünk meg csak egyfajta megoldással, ha lehetséges más módszerrel is ellenőrizzük az eredményeket!

Arra törekedtem, hogy mind a mérnöki, mind pedig a matematikusi gondolkodásmód is helyet kapjon. Sok esetben megadtam a pontos formulák rekurzív illetve közelítő kiszámítási lehetőségét is. Egyszerű példákon keresztül igyekeztem megmutatni a szokásos megoldási eljárásokat és a matematikai módszereket. Az alapvető cél, hogy meglássuk mi van az analitikus képletek mögött, vagyis hogyan kapjuk őket. Ez azért fontos, hogy az olvasók később maguk is képesek legyenek a saját képleteiket megalkotni.

Hangsúlyozni kell, hogy ezek az egyszerű modellek egy nagyon fontos feltevésen alapulnak, nevezetesen, hogy a fellépő valószínűségi változók exponenciális eloszlásúak. Ezen eloszlás emlékeztetnélkülisége lehetőséget ad arra, hogy a rendszerek működési jellemzőit viszonylag egyszerű matematikai módszerekkel határozzuk meg. Természetesen a gyakorlatban az exponenciális eloszlás mellett számos más eloszlás is szerepet kap, de a velük való modellezés már jóval bonyolultabb matematikai megközelítést igényel. Véleményem szerint az exponenciális eloszláson alapuló modellezés azért jelentős, mert segít a szemléletmód kialakításában, viszonylag egyszerű eszközökkel megadhatjuk a rendszer különböző paramétereinek a rendszerjellemzőkre gyakorolt hatását és ezzel felkészülhe-

tünk a várható trendekre. Az analitikus módszerek jó kiindulási alapot szolgáltatnak a numerikus és szimulációs megközelítésekhez, hiszen segítségükkel a bonyolultabb rendszerek működését leíró modelleket validálhatjuk. A jegyzet a sztochasztikus folyamatok elméletéből csak annyit használ fel amennyire a modellalkotásnál és a hatékonysági mutatók kiszámításánál szükségünk van. Bizonyítás nélkül átvesz alapvető tételeket és az alkalmazásra koncentrálnak.

Be kell vallanom, hogy a jegyzet stílusának kialakításában Kleinrock [39] könyve döntő szerepet játszott. Nem követtem a szigorú definíció-tétel-bizonyítás lépéssorozatot, és így igyekeztem a nem matematikus olvasók részére is hasznos segédletet adni. Azonban vannak olyan fejezetek, ahol ez a szigorú felépítés a történeti hűség miatt megmaradt.

A jegyzet az alapképzésben részvevő mérnök informatikus, programtervező informatikus, gazdaságinformatikus, alkalmazott matematikus hallgatóknak készült, de utolsó fejezeteit mesterszakos hallgatók is jól használhatják. Több szemeszter anyagát öleli fel, kiforrott összeállítás, hiszen korábbi időszakban az osztatlan egyetemi képzés keretében sok éven át oktattam. Újdonság, hogy a különböző sorbanállási rendszerek jellemzőit könnyen ki tudjuk számítani az erre a célra írt Java-appletek segítségével, melyek a **Gyakorlati sorbanállási elmélet** elektronikus oktatási segédlet kisebb, de nagyon fontos részét alkotják, és megtalálhatók a szerző honlapján, így internetes környezetben a jegyzet hatékonyan használható. Természetesen ezen appletek más, bonyolultabb rendszerek jellemzőit is meghatározzák, de ezekre csak hivatkozást adok.

Arra törekedtem, hogy az adott problémát valószínűségi számítási szempontból lehetőleg teljes egészében tárgyaljam, vagyis nem elégedtem meg csak a várható értékekkel, hanem igyekeztem megadni a sűrűségfüggvényt, eloszlásfüggvényt, generátorfüggvényt, és a Laplace-transzformáltat is. Az elméleti problémákat a jobb megértés végett sok esetben példákkal illusztráltam és feladatokat gyűjtöttem össze, melyekhez megadtam a megoldást is. Meggyőződésem és tapasztalatom, hogy a jegyzet hiánypótló, tudtommal Magyarországon nincs olyan segédlet, amely ilyen részletességgel tárgyalja ezen témakört.

Köszönöm Bíró József egyetemi tanár lelkiismeretes lektori munkáját, amely javította a jegyzet tartalmát és formáját. A Latex szerkesztésben sok segítséget kaptam Kósa Márktól, Barnák Alberttől, Máté Balázstól, akiknek ezúton is szeretném kifejezni hálámat.

Az előforduló hibákra vonatkozó észrevételeket és mindenfajta javító szándékú megjegyzést örömmel veszek az alábbi címen:

`sztrik.janos@inf.unideb.hu`

`http://irh.inf.unideb.hu/user/jsztrik/index.html`

Debrecen, 2011.

A Szerző

I. rész

A sorbanállási elmélet alapjai

1. fejezet

A sorbanállási elmélet alapfogalmai

A sorbanállási elmélet a köznapi életben előforduló egyik kellemetlen jelenség, nevezetesen a várakozás vizsgálatával foglalkozik. Nemcsak mi, hanem számos területen előforduló igények is sorba állnak, pl. hívások a telefonközpontban, levelek és iratok a hivatalban, programok a központi egységnél, csak hogy néhányat említsünk. Nem véletlen, hogy szóba hoztuk a telefonforgalmi és számítógépes problémákat. Az elmélet történetében döntő helyet foglalnak el ezek az alkalmazási területek. A sorbanállási rendszerek tanulmányozását a telefonforgalmi problémák megoldására A. K. Erlang dán mérnök kezdte el a XX. század elején.

Munkája nemcsak a mérnökök, hanem a matematikusok figyelmét is felkeltette, és nagyon sok cikk és könyv foglalkozott a valószínűségszámítási háttérrel. A sorbanállási elmélet szinte önálló tudománnyá nőtte ki magát, melynek eredményeit és módszereit sikerrel alkalmazzák többek között a megbízhatóság-elméletben, számítástudományban, operációkutatásban. Sok kiváló matematikus szerzett hírnevet a sorbanállási elmélet területén. Ami rendkívül fontos az az, hogy egy jelenleg is dinamikusan fejlődő területről van szó, melynek művelői ma is számos dolgozatot és könyvet írnak. Erről legkönnyebben úgy győződhetünk meg, ha a Google Scholar keresőjébe a témakörhöz tartozó szót írunk be. Külön érdeklődési csoport is létrejött, amelynek tagjai rendszeresen karbantartott honlapon értesítik egymást a fontos eseményekről. Erről a forrásról számos jegyzetet, szoftvert és más hasznos anyagot lehet letölteni, lásd

<http://web2.uwindsor.ca/math/hlynka/queue.html>

Magyarországon ebben a témakörben nem sok jegyzet, könyv jelent meg. Leginkább Györfi László, Páli István [26], Jereb László, Telek Miklós [35], Kleinrock [39], Lakatos László, Szeidl László, Telek Miklós [46] és Sztrik János [69, 68, 67, 66] munkáit tudnánk felsorolni. Feltétlenül meg kell azonban jegyezni, hogy a magyar matematikusok és mérnökök érdemben részt vettek az elméleti kutatásokban és számos esetben alkalmazták is az elért eredményeket. Mindenképpen meg kell említeni Takács Lajost, Tomkó Józsefet, Arató Mátyást, Györfi Lászlót, Benczúr Andrást, Lakatos Lászlót, Szeidl Lászlót, Jereb Lászlót, Telek Miklóst és Sztrik Jánost akik számos dolgozatot publikáltak neves nemzetközi folyóiratokban. Az angol és orosz nyelvű könyvek száma is tekintélyes, az irodalomjegyzékben csak a legfontosabbakat soroltuk fel és ezek mind megtalálhatók Debreceni Egyetem, Informatikai Kar könyvtárában. Bővebb összeállításért érdemes felkeresni az alábbi linket:

<http://irh.inf.unideb.hu/user/jsztrik/education/05/sorbanallas.html>

1.1. A sorbanállási rendszerek jellemzői

Ahhoz, hogy teljesen jellemezzünk egy sorbanállási rendszert, azonosítanunk kell azt a sztochasztikus folyamatot, amely a beérkező igényeket írja le, és meg kell adnunk a kiszolgálás szabályait és struktúráját. A beérkező folyamatot általában az egymás után beérkező igények közötti időintervallumok, mint valószínűségi változók eloszlásának segítségével jellemezhetjük. Ezt az $A(t)$ szimbólummal jelöljük, ahol

$$A(t) = P(\text{két egymás utáni beérkezési időköz} < t).$$

A sorbanállás elméletében többnyire feltesszük, hogy az egymás utáni beérkezések közötti időközök (röviden *beérkezési időközök*) azonos eloszlású független valószínűségi változók (ezért a beérkezési folyamat ún. *felújítási folyamatot* alkot). A másik sztochasztikus mennyiség, amelyet meg kell adni, a beérkező igények által a csatornával szemben támasztott követelmények (munka) nagysága; ezt *kiszolgálási időnek* nevezzük és valószínűségeloszlását $B(x)$ -szel jelöljük, azaz

$$B(x) = P(\text{kiszolgálási idő} < x).$$

A kiszolgálás ideje annak az időintervallumnak a hosszát jelenti, amelyet az igény a kiszolgáló egységben eltölt.

A kiszolgálás szabályára és struktúrájára vonatkozóan további mennyiségeket kell meghatározni. Ilyen jellemző a rendelkezésre álló *kiszolgáló egységek* (*csatornák, kiszolgálók, szerverek, stb.*) *száma*, valamint a *befogadóképesség*, ami nem más, mint a kiszolgálóegységben és a várakozási sorban tartózkodó igények maximális száma, amit gyakran végtelennek tekintünk. A *kiszolgálási sorrend* írja le azt a szabályt, amely szerint a várakozók közül sorra kerülnek az egyes igények kiszolgálás céljából. A leggyakrabban használt kiszolgálási elvek: FIFO (First In, First Out) érkezési sorrendben; LIFO (Last In, First Out) fordított sorrendben történő kiszolgálások. Ha a beérkező igényeket bizonyos csoportokba tartozás szerint meg lehet különböztetni, akkor a csoportok között *prioritást* lehet megállapítani, és ezen a prioritáson alapul a kiszolgálás sorrendje. Ez az egyik legalkalmasabb ütemezési elv, mivel így az igények közötti fontossági sorrendet felállítva történik a kiszolgálás.

A prioritásos sorbanállási elvnek két fő típusa van: *abszolút* és *relatív*. Az előbbi azt jelenti, hogy ha egy igény kiszolgálása folyamatban van, és érkezik egy magasabb prioritású igény, akkor a kiszolgálás megszakad, és újra beáll a várakozási sorba. Ha legközelebb rákerül a kiszolgálás, akkor az kezdődhet az elejétől vagy a megszakítás helyétől. A relatív prioritásos esetben a fontosabb igény beérkezésekor a kiszolgálás nem szakad meg, hanem folytatódik, majd a befejezéskor a legfontosabb várakozó igény kiszolgálása kezdődik.

A sorbanállási rendszerek hatékonyságának és teljesítményének vizsgálatához a következő rendszerjellemzőket igyekszünk meghatározni: az *igények várakozási ideje*; a rendszerben levő *igények száma*; a *foglaltsági intervallum hossza* (vagyis az a folytonos időintervallum, amelyben a kiszolgáló egység állandóan foglalt); az *üresjárat időszakasz hossza*; a pillanatnyi *munkahátralék eloszlása*. Mindegyik mennyiség valószínűségi változó, és így teljes valószínűségszámítási jellemzésüket (vagyis eloszlásfüggvényüket)

keressük, amit általában nehéz megadni, így sokszor megelégszünk az átlagos mennyiségekkel.

Az elemi sorbanállási elmélet egyrészt történeti okokból fontos, másrészt pedig azért, mert alkalmas arra, hogy szemléltesse a bonyolultabb sorbanállási rendszerek jellemzőit is.

Az egyszerűség kedvéért tekintsünk először egy egykiszolgálós rendszert. A sorbanállási rendszerek teljesítményének mérésére legalkalmasabb eszköz a torlódás vizsgálata. Legyen ϱ egy dimenzió nélküli mennyiség, amelyet a következőképpen lehet definiálni:

$$\varrho = \text{forgalmi intenzitás} = \frac{\text{átlagos kiszolgálási idő}}{\text{átlagos beérkezési időköz}}.$$

Feltételezzünk egy végtelen populációjú modellt, jelöljük a beérkezési intenzitást λ -val, ami nem más, mint az átlagos beérkezési időköz reciproka, valamint az átlagos kiszolgálási időt $1/\mu$ -vel. Ekkor a következőt kapjuk:

$$\varrho = \text{érkezési intenzitás} * \text{átlagos kiszolgálási idő} = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Az 1-nél nagyobb *forgalmi intenzitás* azt mutatja, hogy az igények gyorsabban érkeznek, mint ahogy egy szerver (kiszolgálóegység, csatorna) ki tudná szolgálni őket.

Jelölje $\chi(A)$ az A esemény karakterisztikus függvényét, azaz

$$\chi(A) = \begin{cases} 1 & , \text{ ha } A \text{ teljesül,} \\ 0 & , \text{ ha nem } A \text{ teljesül,} \end{cases}$$

és $N(t) = 0$ azt az eseményt, hogy a kiszolgáló tétlen a t időpillanatban. Ekkor a szerver időegységre eső kihasználtsága

$$\frac{1}{T} \int_0^T \chi(N(t) \neq 0) dt ,$$

ahol T egy elegendően hosszú időintervallum. Ha $T \rightarrow \infty$ esetén a fenti mennyiségnek létezik határértéke, akkor a szerver *kihasználtságán* ezt az U_s -sel jelölt mennyiséget értjük. Továbbá 1 valószínűséggel fennáll

$$U_s = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \chi(N(t) \neq 0) dt = 1 - P_0 = \frac{E\delta}{E\delta + Ei},$$

ahol P_0 annak stacionárius valószínűsége, hogy a szerver tétlen, $E\delta$ a kiszolgáló egység átlagos foglaltsági periódushosszát, Ei pedig az átlagos tétlenségi periódushosszát jelöli.

Ez az összefüggés Markov-folyamatoknál speciális esete a következő, gyakran felhasználható relációnak, amelynek magyar nyelvű bizonyítása megtalálható Tomkó József cikkében [76].

1. Tétel. Legyen $X(t)$ egy ergodikus Markov-folyamat, A pedig állapotterének egy részhalmaza. Látható, hogy $X(t)$ az idő folyamán felváltva tartózkodik A -ban és $\bar{A}$ -ban. Ekkor 1 valószínűséggel

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left(\int_0^T \chi(X(t) \in A) dt \right) = \sum_{i \in A} P_i = \frac{m(A)}{m(A) + m(\bar{A})},$$

ahol $m(A)$ és $m(\bar{A})$ az A ill. az $\bar{A}$ részhalmazban való átlagos tartózkodási időt jelöli egy ciklus alkalmával, P_i pedig az $X(t)$ folyamat ergodikus eloszlása.

Egy m párhuzamos szerverből álló rendszerben T idő alatt átlagosan $\lambda T/m$ igény érkezik szerverenként, feltéve, hogy a forgalom egyenletes eloszlású az m kiszolgáló egység között. Ha minden beérkezett kérés kiszolgálása átlagosan $1/\mu$ ideig tart, akkor egy adott szerver teljes foglaltsági idejének várható értéke $\lambda T/m\mu$. Osszuk el ezt a mennyiséget T -vel, így

$$U_s = \frac{\lambda}{m\mu}.$$

Mivel a kihasználtság maximum 1 lehet, így az m szerveres rendszer kihasználtsági tényezőre vonatkozó korrekt kifejezés:

$$U_s = \min \left\{ \frac{\lambda}{m\mu}, 1 \right\}.$$

A másik gyakran használt teljesítménymérő eszköz a rendszer átbocsátóképességének vizsgálata. Ezt a mennyiséget úgy definiálhatjuk, mint az időegységenként kiszolgált igények átlagos számát: m szerveres rendszerben minden időegység alatt $m\mu$ igény kiszolgálása fejeződik be, így az

$$\text{átbocsátóképesség} = mU_s\mu = \min\{\lambda, m\mu\}.$$

Ez azt jelenti, hogy az átbocsátóképesség ekvivalens a λ érkezési intenzitással ha a λ kisebb, mint a maximális kiszolgálási sebesség ($m\mu$), azon túl az átbocsátóképesség beáll $m\mu$ -re.

Az igények szempontjából a legjelentősebb teljesítménymérő eszköz az az idő, amit a várakozási sorban vagy a rendszerben töltenek. Defináljuk a W_j várakozási időt, mint a j -dik igény várakozási sorban eltöltött idejét, és a T_j válaszidőt, mint az igény által a rendszerben eltöltött teljes időt. Ezen jelöléseket használva a következő egyenlőséget kapjuk:

$$T_j = W_j + S_j,$$

ahol S_j a kiszolgálási időt jelöli. W_j és T_j is valószínűségi változó, várható értékük $\bar{W}_j$ és $\bar{T}_j$ alkalmas a rendszer teljesítményének mérésére.

A rendszer teljesítményének vizsgálata történhet a várakozási sor hosszának mérésével is. A $Q(t)$ valószínűségi változó jelentse a t időpillanatban a sorban található igények számát, és $N(t)$ a t időpillanatban a rendszerben található igények számát. Egy rendszerben levő igény vagy a várakozási sorban van, vagy éppen kiszolgálás alatt áll, tehát m szerveres rendszer esetén:

$$Q(t) = \max\{0, N(t) - m\}.$$

1.2. Kendall-féle jelölés-rendszer

Mielőtt rátérnénk az elemi sorbanállási rendszerek vizsgálatára, vezessük be a **Kendall**-tól származó jelölést, melyek segítségével könnyen osztályozhatjuk őket:

$$A / B / m / K / n / D,$$

ahol

A : a beérkezési időközök eloszlásfüggvénye,

B : a kiszolgálási idő eloszlásfüggvénye,

m : a kiszolgálók száma,

K : a rendszer befogadóképessége, azaz a kiszolgálóegységben és a várakozási sorban tartózkodó igények maximális száma,

n : az igényforrás számossága,

D : a kiszolgálás D elv szerint történik.

Ha az említett eloszlások exponenciálisak, akkor az M jelölést használjuk. Továbbá, ha a befogadóképesség vagy az igényforrás számossága végtelen, és a kiszolgálás elve *FIFO*, akkor ezeket a jelöléseket elhagyjuk.

Így pl. az $M/M/1$ egy egykiszolgálós Poisson beérkezéssel és exponenciális kiszolgálási idővel jellemzett rendszert jelöl. Az $M/G/m$ rendszernél a beérkezések Poisson-folyamat szerint történnek, a kiszolgálási idők általános eloszlásúak, és m szerver áll rendelkezésünkre. Az $M/M/r/K/n$ rendszer esetén az igények egy n elemű forrásból származnak, ahol exponenciális eloszlású ideig tartózkodnak, a kiszolgálást r egység végzi exponenciális eloszlású ideig és a rendszerben egyidejűleg maximum K igény tartózkodhat.

1.3. Születési-halálozási folyamatokra vonatkozó összefüggések

Mivel az egyszerűbb sorbanállási rendszerek működését születési-halálozási folyamatok segítségével fogjuk modellezni, nézzünk meg néhány rájuk vonatkozó fontos összefüggést. Értelemszerűen a születéseket az igények érkezése, a kihalást az igények kiszolgálása jelenti majd.

Jól ismert, hogy a folyamat egyensúlyi eloszlása az alábbi zárt formában adható meg

$$(1.1) \quad P_i = \frac{\lambda_0 \cdots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \cdots \mu_i} P_0, \quad i = 1, 2, \dots, \quad P_0^{-1} = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \cdots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \cdots \mu_i}.$$

Most vizsgáljuk meg egyensúlyi állapotban valamely születési-halálozási folyamat állapotát a születési és halálozási pillanatokban, mert későbbiek során erre többször is szükségünk lesz!

Jelölje N_a, N_d a folyamat állapotát a születés ill. a halálozás pillanatában, továbbá legyen $\Pi_k = P(N_a = k), D_k = P(N_d = k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$

A Bayes-tétel felhasználásával könnyű látni, hogy

$$(1.2) \quad \Pi_k = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\lambda_k h + o(h))P_k}{\sum_{j=0}^{\infty} (\lambda_j h + o(h))P_j} = \frac{\lambda_k P_k}{\sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j P_j}.$$

Hasonlóan

$$(1.3) \quad D_k = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\mu_{k+1} h + o(h))P_{k+1}}{\sum_{j=1}^{\infty} (\mu_j h + o(h))P_j} = \frac{\mu_{k+1} P_{k+1}}{\sum_{j=1}^{\infty} \mu_j P_j}.$$

Mivel $P_{k+1} = \frac{\lambda_k}{\mu_{k+1}} P_k, \quad k = 0, 1, \dots$, ezért

$$(1.4) \quad D_k = \frac{\lambda_k P_k}{\sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i P_i} = \Pi_k, \quad k = 0, 1, \dots$$

További hasznos összefüggés, hogy egyensúlyi állapotban az átlagos születési intenzitás egyenlő az átlagos kihalási intenzitással. Ezt nagyon egyszerűen a következőképpen láthatjuk be

$$(1.5) \quad \bar{\lambda} = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i P_i = \sum_{i=0}^{\infty} \mu_{i+1} P_{i+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k P_k = \bar{\mu}.$$

1.4. Sorbanállási szoftverek

A gyakorlati problémák megoldásánál először a sorbanállási rendszert kell azonosítani, majd utána megadni a rendszer jellemzőit. Természetesen a modellezés szintje erősen függ a probléma jellegétől, de általában célszerű a legegyszerűbb rendszert venni, mert ekkor kevesebb paraméter befolyásolja a minőségi mutatókat. Különböző szoftverek állnak rendelkezésünkre, melyeket használva ki tudjuk számítani a kívánt metrikákat. Ebből a célból érdemes felkeresni az alábbi linket

<http://web2.uwindsor.ca/math/hlynka/qsoft.html>

A hatékonyabb gyakorlat-orientált oktatás céljából magyar és angol nyelven mi is elkészítettünk egy képletgyűjteményt és egy Java-applet programcsomagot, amely megtalálható az alábbi linken

<http://irh.inf.unideb.hu/user/jsztrik/education/09/index.html>

A szimulációs megközelítésekhez kiegészítésképpen javasoljuk még az következő Java-appletet

<http://www.win.tue.nl/cow/Q2/>

Ha a rendszerek egyike sem megfelelő, akkor magunknak kell az adott problémához elkészíteni az új matematikai modellt és igazából itt kezdődik az **alkotás**. A jegyzet ehhez kíván segítséget nyújtani.

Az anyag összeállításában főleg Allen [2], Bose [8], Daigle [13], Gnyedenko, Kovalenko [23], Gnyedenko, Beljajev, Szolovjev [24], Gross, Harris [25], Jain [33], Jereb, Telek [35], Kleinrock [39], Kobayashi [41, 42], Kulkarni [45], Nelson [49], Stewart [62], Sztrik [66], Tijms [75], Trivedi [77] könyvekre támaszkodtunk.

2. fejezet

Végtelen-forrású rendszerek

A sorbanállási rendszerek forrásuk szerint végtelen- és véges-forrású osztályba sorolhatók, majd ezekből a rendszerekből, mint csomópontokból képezhetjük a sorbanállási hálózatokat. Matematikailag a végtelen-forrású rendszerek könnyebben kezelhetők, mert ekkor a beérkezési intenzitások általában függetlenek a rendszer állapotától. Ilyenkor a leggyakoribb feltételezés, hogy az igények beérkezése Poisson-folyamat szerint történik és a kiszolgálási elv FIFO. Ez nagymértékben egyszerűsíti a matematikai tárgyalás módját.

2.1. Az M/M/1 típusú sorbanállási rendszer

Az M/M/1 rendszer a legegyszerűbb nem-triviális rendszer. Emlékeztetünk rá, hogy ebben az esetben a beérkezési folyamat λ paraméterű Poisson-folyamat, vagyis a beérkezési időközök λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók. A kiszolgálási idők μ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók. Feltesszük továbbá, hogy a beérkezési időközök, és a kiszolgálási idők egymástól független valószínűségi változók. Jelölje most $N(t)$ a t időpillanatban a rendszerben tartózkodó igények számát, és azt mondjuk, hogy a rendszer a k állapotban van, ha $N(t) = k$. Mivel a fellépő valószínűségi változók exponenciális eloszlásúak, vagyis emlékezetnélküliek, az $N(t)$ folytonos idejű Markov-lánc lesz.

Vizsgáljuk meg a rendszer állapotváltozásainak valószínűségeit egy adott h időtartam alatt

$$\begin{aligned} P_{k,k+1}(h) &= (\lambda h + o(h)) (1 - (\mu h + o(h))) + \\ &\quad + \sum_{k=2}^{\infty} (\lambda h + o(h))^k (\mu h + o(h))^{k-1}, \\ k &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Az összeg első tagja annak a valószínűsége, hogy a rendszerben egy igény érkezett, és nem szolgált ki egyet sem. Az összeg második tagja pedig annak a valószínűségét adja, hogy a rendszerbe 2 vagy több igény érkezett, és a beérkezettnél eggyel kevesebb került kiszolgálásra. De ez a valószínűség éppen $o(h)$ -val egyenlő, így

$$P_{k,k+1}(h) = \lambda h + o(h).$$

Az előbbiekhöz hasonlóan írható fel annak valószínűsége, hogy a rendszer k állapotban volt és a h időtartam után a $k - 1$ állapotba került

$$\begin{aligned} P_{k,k-1}(h) &= (\mu h + o(h)) (1 - (\lambda h + o(h))) + \\ &+ \sum_{k=2}^{\infty} (\lambda h + o(h))^{k-1} (\mu h + o(h))^k \\ &= \mu h + o(h). \end{aligned}$$

Könnyen látható továbbá, hogy

$$P_{k,j} = o(h), \quad |k - j| \geq 2.$$

Tehát egy olyan születési-halálozási folyamattal van dolgunk, amit a születési és halálozási intenzitások alábbi megválasztásával lehet jellemezni

$$\lambda_k = \lambda, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad \mu_k = \mu, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Vagyis az összes születési intenzitás λ , az összes halálozási intenzitás pedig μ . Feltesszük, hogy végtelen hosszúságú sorok is létrejöhetnek, és az igények kiszolgálása FIFO elv alapján történik.

Helyettesítsük be az intenzitásokat a születési-halálozási folyamatoknál kapott (1.1) képletbe, így a következő adódik

$$P_k = P_0 \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda}{\mu},$$

vagyis

$$P_k = P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k, \quad k \geq 0.$$

Az eredmény kézenfekvő. Az ergodikusság feltétele általánosságban (és így annak is, hogy egy $P_k > 0$ stacionárius megoldást kapjunk) $S_1 < \infty$ és $S_2 = \infty$; esetünkben az első feltétel

$$S_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P_k}{P_0} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k < \infty.$$

Az S_1 sor akkor és csak akkor konvergens, ha

$$\lambda/\mu < 1.$$

Az ergodicitás második feltétele esetünkben

$$S_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda \binom{P_k}{P_0}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\mu}{\lambda} \right)^k = \infty.$$

Ez akkor teljesül, ha $\lambda/\mu \leq 1$. Tehát az ergodikusság szükséges és elégséges feltétele az $M/M/1$ sor esetén egyszerűen $\lambda < \mu$. A P_0 valószínűség kiszámolásához a normalizáló feltételt használjuk és azt kapjuk, hogy

$$P_0^{-1} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k.$$

Mivel $\lambda < \mu$, ezért a sor konvergens, és így

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}.$$

A kihasználtsági tényező $\varrho = \frac{\lambda}{\mu}$ vagy 1. A stabilitás feltétele miatt a $0 \leq \varrho < 1$ egyenlőséget meg kell követelni, ez biztosítja, hogy $P_0 > 0$ legyen. Így

$$P_k = (1 - \varrho)\varrho^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

amely valóban valószínűségi eloszlás, nevezetesen a módosított geometriai eloszlás.

A rendszer *jellemzői*

- A rendszerben tartózkodó *igények átlagos száma*

$$\begin{aligned} \bar{N} &= \sum_{k=0}^{\infty} k P_k = (1 - \varrho)\varrho \sum_{k=1}^{\infty} k \varrho^{k-1} = \\ &= (1 - \varrho)\varrho \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d\varrho^k}{d\varrho} = (1 - \varrho)\varrho \frac{d}{d\varrho} \left(\frac{1}{1 - \varrho} \right) = \frac{\varrho}{1 - \varrho}. \end{aligned}$$

A rendszerben tartózkodó igények számának *szórásnégyzete*

$$\begin{aligned} \mathbb{D}^2 N &= \sum_{k=0}^{\infty} (k - \bar{N})^2 P_k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(k - \frac{\varrho}{1 - \varrho} \right)^2 P_k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 P_k + \left(\frac{\varrho}{1 - \varrho} \right)^2 - \sum_{k=0}^{\infty} 2k \frac{\varrho}{1 - \varrho} P_k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) P_k + \frac{\varrho^2}{(1 - \varrho)^2} + \frac{\varrho}{1 - \varrho} - 2 \left(\frac{\varrho}{1 - \varrho} \right)^2 \\ &= (1 - \varrho)\varrho^2 \frac{d^2}{d\varrho^2} \sum_{k=0}^{\infty} \varrho^k + \frac{\varrho}{1 - \varrho} - \left(\frac{\varrho}{1 - \varrho} \right)^2 \\ &= \frac{2\varrho^2}{(1 - \varrho)^2} + \frac{\varrho}{1 - \varrho} - \left(\frac{\varrho}{1 - \varrho} \right)^2 = \frac{\varrho}{(1 - \varrho)^2}. \end{aligned}$$

- A várakozó igények *átlagos száma* (átlagos sorhossz)

$$\bar{Q} = \sum_{k=1}^{\infty} (k-1) P_k = \sum_{k=1}^{\infty} k P_k - \sum_{k=1}^{\infty} P_k = \bar{N} - (1 - P_0) = \bar{N} - \varrho = \frac{\varrho^2}{1 - \varrho}.$$

A sorhossz *szórásnégyzete*

$$\mathbb{D}^2 Q = \sum_{k=1}^{\infty} (k-1)^2 P_k - \bar{Q}^2 = \frac{\varrho^2(1 + \varrho - \varrho^2)}{(1 - \varrho)^2}.$$

- A szerver kihasználtsága

$$U_s = 1 - P_0 = \frac{\lambda}{\mu} = \varrho.$$

1. Tétel alapján látható, hogy

$$P_0 = \frac{\frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\lambda} + E\delta},$$

ahol $E\delta$ a kiszolgáló átlagos foglaltsági periódushossza, $\frac{1}{\lambda}$ a tétlenségi idő várható értéke. Mivel a szerver addig tétlen, amíg igény nem érkezik, az pedig exponenciális eloszlású λ paraméterrel. Így

$$1 - \varrho = \frac{\frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\lambda} + E\delta},$$

melyből

$$E\delta = \frac{1}{\lambda} \frac{\varrho}{1 - \varrho} = \frac{1}{\lambda} \bar{N} = \frac{1}{\mu - \lambda}.$$

Megmutatjuk, hogyan lehet másképpen meghatározni a kiszolgáló átlagos foglaltsági periódushosszát.

Ehhez szükségünk lesz az alábbi jelölésekre.

Jelölje $\mathbb{E}(\nu_A)$ egy átlagos foglaltsági periódushossz alatt beérkezett igények átlagos számát, $\mathbb{E}(\nu_D)$ egy átlagos foglaltsági periódushossz alatt távozott igények átlagos számát, valamint $\mathbb{E}(\nu_S)$ egy igény kiszolgálása alatt beérkezett igények átlagos számát! Nyilvánvalóan

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\nu_D) &= \mathbb{E}(\delta)\mu, \\ \mathbb{E}(\nu_S) &= \frac{\lambda}{\mu}, \\ \mathbb{E}(\nu_A) &= \mathbb{E}(\delta)\lambda, \\ \mathbb{E}(\nu_A) + 1 &= \mathbb{E}(\nu_D),\end{aligned}$$

melyekből behelyettesítés után

$$\mathbb{E}(\delta) = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

adódik, vagyis a formulát más módon is ellenőriztük. Ezek után

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\nu_D) &= \mathbb{E}(\delta)\mu = \frac{1}{1 - \varrho} \\ \mathbb{E}(\nu_A) &= \mathbb{E}(\nu_S)\mathbb{E}(\nu_D) = \frac{\lambda}{\mu} \frac{1}{1 - \varrho} = \frac{\varrho}{1 - \varrho} \\ \mathbb{E}(\nu_A) &= \mathbb{E}(\delta)\lambda = \frac{\varrho}{1 - \varrho}.\end{aligned}$$

- Egy igény *tartózkodási idejének* eloszlása

Megmutatjuk, hogy olyan sorbanállási rendszernél, amelybe az igények Poisson-folyamat szerint érkeznek,

$$P_k(t) = \Pi_k(t),$$

ahol $P_k(t)$ - mint korábban is - annak valószínűsége, hogy a t pillanatban a rendszer a k állapotban van, $\Pi_k(t)$ pedig annak valószínűsége, hogy egy a t pillanatban érkező igény a rendszert a k állapotban találja. Jelölje

$$A(t, t + \Delta t)$$

azt az eseményt, hogy egy beérkezés történik a $(t, t + \Delta t)$ intervallumban. Ekkor

$$\Pi_k(t) := \lim_{\Delta t \rightarrow 0} P(N(t) = k | A(t, t + \Delta t)),$$

Felhasználva a feltételes valószínűség definícióját,

$$\begin{aligned} \Pi_k(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(N(t) = k, A(t, t + \Delta t))}{P(A(t, t + \Delta t))} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(A(t, t + \Delta t) | N(t) = k) P(N(t) = k)}{P(A(t, t + \Delta t))}. \end{aligned}$$

Poisson-folyamat esetén tudjuk, hogy (az emlékezetnélküliség miatt) az $A(t, t + \Delta t)$ esemény nem függ a t pillanatban a rendszerben tartózkodó igények számától (és magától a t időtől sem), ezért

$$P(A(t, t + \Delta t) | N(t) = k) = P(A(t, t + \Delta t)),$$

így születési és halálozási folyamatok esetére is

$$\Pi_k(t) = P(N(t) = k).$$

Azaz, annak valószínűsége, hogy egy beérkező igény a rendszert a k állapotban találja, éppen azzal a valószínűséggel egyezik meg, hogy a rendszer a k állapotban van.

Egyensúlyi állapotban a (1.2) összefüggést alkalmazva $\lambda_i = \lambda$, $i = 0, 1, \dots$ esetben ugyanezt az eredményt kapjuk.

Ha egy tetszőleges pillanatban egy igény érkezik, P_0 lesz annak a valószínűsége, hogy nem kell várakoznia, hisz ekkor a rendszer üres. Minden más esetben várakoznia kell. Tegyük fel, hogy az érkezés pillanatában n igény tartózkodik a rendszerben. Ekkor az érkező igénynek meg kell várnia, míg a kiszolgálás alatt álló igény kiszolgálása befejeződik és az előtte álló $n - 1$ igény is elhagyja a rendszert, majd őt is kiszolgálták.

Feltettük, hogy a kiszolgálások egymástól függetlenek és μ paraméterű exponenciális eloszlásúak. Köztudott, hogy az exponenciális eloszlás emlékezetnélküli, így a kiszolgálás alatt levő igény eloszlása független attól mióta folyik a kiszolgálás, ezért a várakozási idő Erlang- eloszlású n és μ paraméterrel és a tartózkodási idő is

Erlang- eloszlású, de $n + 1$ és μ paraméterrel. Emlékeztetőül az n és μ paraméterű Erlang-eloszlás sűrűségfüggvénye

$$f_n(x) = \frac{\mu(\mu x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\mu x}, \quad x \geq 0.$$

Ezért a teljes valószínűség tételének felhasználásával a tartózkodási idő sűrűségfüggvénye

$$\begin{aligned} f_T(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (1-\varrho) \varrho^n \frac{(\mu x)^n}{n!} \mu e^{-\mu x} = \mu(1-\varrho) e^{-\mu x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\varrho \mu x)^n}{n!} = \\ &= \mu(1-\varrho) e^{-\mu(1-\varrho)x}. \end{aligned}$$

Az eloszlásfüggvény

$$F_T(x) = 1 - e^{-\mu(1-\varrho)x}.$$

Vagyis azt kaptuk, hogy a tartózkodási idő is exponenciális eloszlású $\mu(1-\varrho) = \mu - \lambda$ paraméterrel.

Ezért a rendszerbeli tartózkodási idő várható értéke és szórásnégyzete

$$\bar{T} = \frac{1}{\mu(1-\varrho)}, \quad \mathbb{D}^2 T = \left(\frac{1}{\mu(1-\varrho)} \right)^2.$$

Továbbá, nyilvánvalóan

$$\bar{T} = \frac{1}{\mu(1-\varrho)} = \frac{1}{\mu - \lambda} = E\delta.$$

- Egy igény *várakozási idejének* eloszlása

A gondolatmenet az előzőhöz hasonló, de most az Erlang eloszlás n tagból áll.

Jelölje $f_W(x)$ egy tetszőleges igény várakozási idejének sűrűségfüggvényét, $x > 0$. A teljes valószínűség tétele értelmében

$$\begin{aligned} f_W(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\mu x)^{n-1}}{(n-1)!} \mu e^{-\mu x} \varrho^n (1-\varrho) = (1-\varrho) \varrho \mu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mu x \varrho)^k}{k!} e^{-\mu x} = \\ &= (1-\varrho) \varrho \mu e^{-\mu(1-\varrho)x}. \end{aligned}$$

Tehát

$$\begin{aligned} f_W(0) &= 1 - \varrho, & \text{ha } x = 0, \\ f_W(x) &= \varrho(1-\varrho) \mu e^{-\mu(1-\varrho)x}, & \text{ha } x > 0. \end{aligned}$$

Így

$$F_W(x) = 1 - \varrho + \varrho (1 - e^{-\mu(1-\varrho)x}) = 1 - \varrho e^{-\mu(1-\varrho)x}.$$

Az átlagos várakozási idő

$$\bar{W} = \int_0^{\infty} x f_W(x) dx = \frac{\varrho}{\mu(1-\varrho)} = \varrho E\delta = \bar{N} \frac{1}{\mu}.$$

Az is látható, hogy $T = W + S$ miatt, ahol W és S függetlenek

$$\mathbb{D}^2 T = \frac{1}{(\mu(1-\rho))^2} = \mathbb{D}^2 W + \frac{1}{\mu^2},$$

ebből

$$\mathbb{D}^2 W = \frac{1}{(\mu(1-\rho))^2} - \frac{1}{\mu^2} = \frac{2\rho - \rho^2}{(\mu(1-\rho))^2} = \rho \frac{2}{(\mu(1-\rho))^2} - \frac{\rho^2}{(\mu(1-\rho))^2},$$

ami éppen $\mathbb{E}(W^2) - (\mathbb{E}W)^2$.

Vegyük észre, hogy

$$(2.1) \quad \lambda \bar{T} = \lambda \frac{1}{\mu(1-\varrho)} = \frac{\varrho}{1-\varrho} = \bar{N}.$$

Továbbá

$$(2.2) \quad \lambda \bar{W} = \lambda \frac{\varrho}{\mu(1-\varrho)} = \frac{\varrho^2}{1-\varrho} = \bar{Q}.$$

Az (2.1), (2.2) összefüggéseket **Little-formuláknak** nevezzük, melyek általánosabb esetben is igazak maradnak.

Most vizsgáljuk meg az $M/M/1$ rendszer állapotát a távozási pillanatokban, mert ki akarjuk számolni az igények távozási időközének az eloszlását. Mint ahogyan az (1.3) összefüggésnél láttuk a távozási pillanatokban az eloszlás

$$D_k = \frac{\lambda_k P_k}{\sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i P_i}.$$

Poisson beérkezés esetén $\lambda_k = \lambda, k = 0, 1, \dots$, ezért $D_k = P_k$.

Ezek után határozzuk meg a d távozási időközök Laplace-transzformáltját, mely a feltéles Laplace-transzformáltak súlyozott összege azon feltétel mellett, hogy a távozási pillanatban a kiszolgáló tétlen vagy foglalt.

Nyilvánvalóan

$$L_d(s) = \varrho \frac{\mu}{\mu + s} + (1 - \varrho) \frac{\lambda}{\lambda + s} \frac{\mu}{\mu + s},$$

hiszen ha tétlen, akkor a következő igénynek először be kell érkezni majd ezt ki kell szolgálni. Ebből

$$\begin{aligned} L_d(s) &= \frac{\mu \varrho (\lambda + s) + (1 - \varrho) \lambda \mu}{(\lambda + s)(\mu + s)} = \frac{\lambda \mu \varrho + \lambda s + \lambda \mu - \lambda \mu \varrho}{(\lambda + s)(\mu + s)} \\ &= \frac{\lambda(s + \mu)}{(\lambda + s)(\mu + s)} = \frac{\lambda}{\lambda + s}, \end{aligned}$$

ami azt mutatja, hogy a távozási időközök ugyancsak λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók. A kiszolgálási és beérkezési időközök függetlenségéből következik a távozási időközök függetlensége is, ezért a távozási folyamat λ paraméterű Poisson-folyamat.

Ez azért fontos, mert ha több $M/M/1$ típusú kiszolgálási csomópont van egymás után sorbakötve (tandem sorbanállási hálózat), akkor mindegyiknél a beérkezési folyamat λ paraméterű Poisson-folyamat és a csomópontok független $M/M/1$ -típusú rendszerként vizsgálhatók. Ekkor λ beérkezési és μ_i kiszolgálási intenzitással az i -edik csomóponthoz $\varrho_i = \frac{\lambda}{\mu_i}$ jelölést bevezetve az összes rendszerjellemezőt meg tudjuk határozni a már ismert módon. A hálózatban lévő igények száma érthető módon az egyes csomópontokban lévő igények összege és a tartózkodási és várakozási idők összege adja a hálózatra vonatkozó időket.

Most mutassuk meg, hogyan adhatjuk meg d sűrűségfüggvényét a Laplace-transzformált nélkül! Ekkor is a teljes valószínűség tételét alkalmazva

$$\begin{aligned} f_d(x) &= \varrho \mu e^{-\mu x} + (1 - \varrho) \left(\frac{\lambda \mu}{\lambda - \mu} e^{-\mu x} + \frac{\lambda \mu}{\mu - \lambda} e^{-\lambda x} \right) \\ &= \lambda e^{-\mu x} + \frac{\mu - \lambda}{\mu} \left(\frac{\lambda \mu}{\mu - \lambda} e^{-\lambda x} - \frac{\lambda \mu}{\mu - \lambda} e^{-\mu x} \right) \\ &= \lambda e^{-\mu x} + \lambda e^{-\lambda x} - \lambda e^{-\mu x} = \lambda e^{-\lambda x}. \end{aligned}$$

Ezek után nézzük meg, hogy $M/G/1$ rendszer esetén milyen kiszolgálási idő mellett teljesül, hogy a távozási folyamat ugyancsak λ paraméterű Poisson-folyamat. Először lássuk be, hogy $U_S = \varrho = \lambda \mathbb{E}(S)$. Mint korábban is megmutattuk stacionárius rendszernél $G/G/1$ esetben is az átlagos foglaltsági periódus alatt távozó igények száma 1-el nagyobb ezen periódus alatt beérkezett igények átlagos számánál, képletekben ez azt jelenti, hogy

$$\frac{\mathbb{E}(\delta)}{\mathbb{E}(S)} = 1 + \frac{\mathbb{E}(\delta)}{\mathbb{E}(\tau)},$$

ahol $\mathbb{E}(\tau)$ az átlagos beérkezési időköz várható értékét jelöli. Ebből

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\tau) + \mathbb{E}(\delta) &= \mathbb{E}(\delta) \frac{\mathbb{E}(\tau)}{\mathbb{E}(S)} \\ \mathbb{E}(\delta) &= \frac{\mathbb{E}(\tau) \mathbb{E}(S)}{\mathbb{E}(\tau) - \mathbb{E}(S)} = \mathbb{E}(S) \frac{1}{1 - \varrho}, \end{aligned}$$

ahol $\varrho = \frac{\mathbb{E}(S)}{\mathbb{E}(\tau)}$. Nyilvánvalóan

$$U_S = \frac{\mathbb{E}(\delta)}{\mathbb{E}(\tau) + \mathbb{E}(\delta)} = \frac{\mathbb{E}(S) \frac{1}{1 - \varrho}}{\mathbb{E}(\tau) + \frac{\mathbb{E}(S)}{1 - \varrho}} = \frac{\frac{\varrho}{1 - \varrho}}{1 + \frac{\varrho}{1 - \varrho}} = \varrho < 1.$$

Így az $M/G/1$ rendszer kihasználtsága ϱ . $M/G/1$ esetén $D_k = P_k$, ezért a kiszolgálási

időre vonatkozó kérdésünk az alábbi jelenti

$$\begin{aligned}\frac{\lambda}{\lambda + s} &= \varrho L_S(s) + (1 - \varrho) \frac{\lambda}{\lambda + s} L_S(s) = L_S(s) \left(\varrho + \frac{\lambda(1 - \varrho)}{\lambda + s} \right) \\ &= L_S(s) \frac{\lambda^2 \mathbb{E}(S) + s\lambda \mathbb{E}(S) + \lambda - \lambda^2 \mathbb{E}(S)}{\lambda + s} = L_S(s) \frac{\lambda(1 + s\mathbb{E}(S))}{\lambda + s},\end{aligned}$$

így

$$L_S(s) = \frac{1}{1 + s\mathbb{E}(S)},$$

ez viszont az $\mathbb{E}(S)$ várható értékű exponenciális eloszlás Laplace-transzformáltja. Vagyis csak exponenciális eloszlású kiszolgálási idők esetén lesz a távozási folyamat a beérkezési folyamattal megegyező.

Java-applet a rendszerjellemzők meghatározására

<http://irh.inf.unideb.hu/user/jsztrik/education/09/applet/HMM1.html>

1. Példa. Egy postahivatalban naponta 70 személy fordul meg (a posta mindennap 10 óra hosszat van nyitva) óránként 10 személyt képesek kiszolgálni. Tételezzük fel, hogy a beérkezések megfelelnek a Poisson-folyamat jellegzetességeinek, és a kiszolgálás exponenciális eloszlású. Mekkora lesz a várakozó sor átlagos hossza, mi annak a valószínűsége, hogy sorban 2-nél több személy várakozzék? Mennyi a várható sorbanállási idő? Mennyi annak a valószínűsége, hogy a várakozás 20 percnél több időt vesz igénybe?

Megoldás:

Legyen az időegység óra, akkor $\lambda = 7$, $\mu = 10$, $\rho = \frac{7}{10}$

$$\bar{N} = \frac{\rho}{1 - \rho} = \frac{7}{3}$$

$$\bar{Q} = \bar{N} - \rho = \frac{7}{3} - \frac{7}{10} = \frac{70 - 21}{30} = \frac{49}{30}$$

$$\begin{aligned}P(n > 3) &= 1 - P(n \leq 3) = 1 - P_0 - P_1 - P_2 - P_3 \\ &= 1 - 1 + \rho - (1 - \rho)(\rho + \rho^2 + \rho^3) = \rho^4 = 0.343 \cdot 0.7 = 0.2401\end{aligned}$$

$$\bar{W} = \frac{\bar{N}}{\mu} = \frac{7}{3 \cdot 10} = \frac{7}{30} \text{ óra} \approx 14 \text{ perc}$$

$$P\left(W > \frac{1}{3}\right) = 1 - F_W\left(\frac{1}{3}\right) = 0.7 \cdot e^{-10 \cdot \frac{1}{3} \cdot 0.3} = 0.7 \cdot e^{-1} = 0.257$$

■

2.2. $M/M/1$ rendszer tétovázó (elriasztott) igények esetében

Tekintsük az $M/M/1$ rendszert azzal a módosítással, hogy az érkező igények a nagyobb sorhossz láttán egyre kisebb valószínűséggel csatlakoznak a rendszerhez, vagyis állnak

sorba. Jelöljük b_k -val a csatlakozás valószínűségét, ha az érkezés pillanatában k igény van a rendszerben.

Az eddigiekhez hasonlóan könnyű belátni, hogy ismét születési-halálozási folyamattal írhatjuk le a rendszerben tartózkodó igények számát, de módosulnak a születési intenzitások, mégpedig

$$\lambda_k = \lambda \cdot b_k, \quad k = 0, 1, \dots$$

Nyilvánvalóan többfajta b_k -t lehet tekinteni, de arra törekedni kell, hogy a rendszert viszonylag egyszerűen tudjuk leírni és a kiszámolt hatékonysági mutatókat is zárt alakban lehessen megadni. Ilyen okok miatt legyen

$$b_k = \frac{1}{k+1}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Ezért

$$P_k = \frac{\rho^k}{k!} P_0, \quad k = 0, 1, \dots,$$

majd a normalizáló feltétel meghatározása után

$$P_k = \frac{\rho^k}{k!} e^{-\rho}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Ebből láthatjuk, hogy a rendszer stabil, ha $\rho < \infty$, vagyis nem követeljük meg a $\rho < 1$ feltételt!

Vegyük észre, hogy a rendszerben tartózkodó igények száma ρ paraméterű Poisson-eloszlást követ, ezért a rendszerjellemzők is várhatóan egyszerű formában adhatók majd meg.

Ezek után a *rendszerjellemzők*

•

$$U_S = 1 - P_0 = 1 - e^{-\rho},$$

$$U_S = \frac{\mathbb{E}(\delta)}{\frac{1}{\lambda} + \mathbb{E}(\delta)},$$

melyből

$$\mathbb{E}(\delta) = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{U_S}{1 - U_S} = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1 - e^{-\rho}}{e^{-\rho}}.$$

•

$$\overline{N} = \rho,$$

$$\mathbb{D}^2(N) = \rho$$

•

$$\begin{aligned}\bar{Q} &= \bar{N} - U_S = \rho - (1 - e^{-\rho}) = \rho + e^{-\rho} - 1. \\ \mathbb{E}(Q^2) &= \sum_{k=1}^{\infty} (k-1)^2 P_k = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 P_k - 2 \sum_{k=1}^{\infty} k P_k + \sum_{k=1}^{\infty} P_k \\ &= \mathbb{E}(N^2) - 2\bar{N} + U_S = \rho + \rho^2 - 2\rho + U_S = \rho^2 - \rho + 1 - e^{-\rho}.\end{aligned}$$

Így

$$\begin{aligned}\mathbb{D}^2(Q) &= \mathbb{E}(Q^2) - (\mathbb{E}(Q))^2 = \rho^2 - \rho + 1 - e^{-\rho} - (\rho + e^{-\rho} - 1)^2 \\ &= \rho^2 - \rho + 1 - e^{-\rho} - \rho^2 - e^{-2\rho} - 1 - 2\rho e^{-\rho} + 2\rho + 2e^{-\rho} \\ &= \rho - e^{-2\rho} + e^{-\rho} - 2\rho e^{-\rho} = \rho - e^{-\rho}(e^{-\rho} + 2\rho - 1).\end{aligned}$$

- A tartózkodási és várakozási idők jellemzőinek meghatározásához ismernünk kell az érkezési pillanatban az eloszlást, pontosabban, hogy a rendszerhez csatlakozó igény k igényt talál a rendszerben.

Az előzőekhez hasonlóan a Bayes-formula felhasználásával könnyű látni, hogy

$$\Pi_k = \frac{\frac{\lambda}{k+1} \cdot P_k}{\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda}{i+1} \cdot P_i} = \frac{\frac{\rho^{k+1}}{(k+1)!} \cdot e^{-\rho}}{\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\rho^{i+1}}{(i+1)!} e^{-\rho}} = \frac{P_{k+1}}{1 - e^{-\rho}}.$$

Vegyük észre, hogy

$$\Pi_k \neq P_k.$$

Először határozzuk meg $\bar{T}$ -t majd utána $\bar{W}$!

A teljes várható érték tétele miatt

$$\begin{aligned}\bar{T} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{\mu} \Pi_k = \frac{1}{\mu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)P_{k+1}}{1 - e^{-\rho}} = \frac{1}{\mu(1 - e^{-\rho})} \cdot \bar{N} = \frac{\rho}{\mu(1 - e^{-\rho})}. \\ \bar{W} &= \bar{T} - \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\rho + e^{-\rho} - 1}{1 - e^{-\rho}} \right).\end{aligned}$$

Mint ahogyan az (1.5) összefüggésnél már bebizonyítottuk

$$\bar{\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k P_k = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k P_k = \sum_{k=1}^{\infty} \mu P_k = \mu(1 - e^{-\rho}),$$

ezért

$$\begin{aligned}\bar{\lambda} \cdot \bar{T} &= \mu(1 - e^{-\rho}) \cdot \frac{\rho}{\mu(1 - e^{-\rho})} = \rho = \bar{N}, \\ \bar{\lambda} \cdot \bar{W} &= \mu(1 - e^{-\rho}) \cdot \frac{\rho + e^{-\rho} - 1}{\mu(1 - e^{-\rho})} = \rho + e^{-\rho} - 1 = \bar{Q}\end{aligned}$$

ami **Little-formula** erre a rendszerre is.

- A T és W eloszlásának a meghatározása már sokkal nehezebb feladat. Az előzőekben használt módszerekhez hasonlóan

$$\begin{aligned} f_T(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} f_T(x|k) \cdot \Pi_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu(\mu x)^k}{k!} \cdot \frac{\rho^{k+1}}{(k+1)!} \frac{e^{-\rho}}{1 - e^{-\rho}} \\ &= \frac{\lambda e^{-\rho}}{1 - e^{-\rho}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mu x \rho)^k}{k!(k+1)!}, \end{aligned}$$

amit nem egyszerű meghatározni. Hasonló problémába ütközünk $f_W(x)$ esetében is.

Azonban $L_T(s)$ és $L_W(s)$ már könnyebben kezelhető formában nyerhető. Nevezetesen

$$\begin{aligned} L_T(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} L_T(s|k) \Pi_k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\mu}{\mu + s} \right)^{k+1} \frac{\frac{\rho^{k+1}}{(k+1)!} e^{-\rho}}{1 - e^{-\rho}} \\ &= \frac{e^{-\rho}}{1 - e^{-\rho}} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\mu \rho}{\mu + s} \right)^{k+1} \frac{1}{(k+1)!} = \frac{e^{-\rho}}{1 - e^{-\rho}} \left(e^{\frac{\mu \rho}{\mu + s}} - 1 \right). \\ L_W(s) &= L_T(s) \cdot \frac{\mu + s}{\mu}. \end{aligned}$$

Ellenőrzésképpen a $L_T(s)$ -ből határozzuk meg $\bar{T}$ -t!

$$\begin{aligned} L'_T(s) &= \frac{e^{-\rho}}{1 - e^{-\rho}} \cdot e^{\frac{\mu \rho}{\mu + s}} (-\mu \rho (\mu + s)^{-2}) \\ L'_T(0) &= -\frac{e^{-\rho}}{1 - e^{-\rho}} e^{\rho} \cdot \frac{\rho}{\mu} = -\frac{\rho}{\mu(1 - e^{-\rho})}. \end{aligned}$$

Így

$$\bar{T} = \frac{\rho}{\mu(1 - e^{-\rho})},$$

amit már előzőekben is megkaptunk. Hasonlóan számolható $\bar{W}$ is.

Formálisan $\mathbb{D}^2(T)$ és $\mathbb{D}^2(W)$ a megfelelő Laplace-transzformáltak deriváltjainak segítségével megadható. Nézzük meg ezt a módot! Mint láttuk

$$L_T(s) = \frac{e^{-\rho}}{1 - e^{-\rho}} \left(e^{\frac{\lambda}{\mu + s}} - 1 \right).$$

Ebből

$$L'_T(s) = \frac{e^{-\rho}}{1 - e^{-\rho}} \cdot e^{\frac{\lambda}{\mu + s}} (-1) \lambda (\mu + s)^{-2},$$

így

$$L''_T(s) = \frac{e^{-\rho}}{1 - e^{-\rho}} \cdot \left(e^{\frac{\lambda}{\mu + s}} ((-1) \lambda (\mu + s)^{-2})^2 + 2 \lambda (\mu + s)^{-3} \cdot e^{\frac{\lambda}{\mu + s}} \right).$$

Ezért

$$L_T''(0) = \frac{e^{-\rho}}{1 - e^{-\rho}} \left(e^{\rho} \left(-\frac{\rho}{\mu} \right)^2 + \frac{2\rho}{\mu^2} e^{\rho} \right) = \frac{1}{\mu^2} \cdot \frac{\rho^2 + 2\rho}{1 - e^{-\rho}}.$$

Továbbá

$$\begin{aligned} \mathbb{D}^2(T) &= \frac{1}{\mu^2} \cdot \frac{\rho^2 + 2\rho}{1 - e^{-\rho}} - \left(\frac{\rho}{\mu(1 - e^{-\rho})} \right)^2 \\ &= \frac{(\rho^2 + 2\rho)(1 - e^{-\rho}) - \rho^2}{\mu^2(1 - e^{-\rho})^2} = \frac{\rho^2 + 2\rho - \rho^2 e^{-\rho} - 2\rho e^{-\rho} - \rho^2}{\mu^2(1 - e^{-\rho})^2} \\ &= \frac{2\rho - \rho^2 e^{-\rho} - 2\rho e^{-\rho}}{\mu^2(1 - e^{-\rho})^2} = \frac{\rho(2 - (\rho + 2)e^{-\rho})}{\mu^2(1 - e^{-\rho})^2}. \end{aligned}$$

W és T véletlen tagszámú összegként áll elő, ezért alkalmazhatjuk az ott megismert képleteket. Nevezetesen

$$\begin{aligned} \mathbb{D}^2(W) &= \mathbb{E}(N_a) \frac{1}{\mu^2} + \mathbb{D}^2(N_a) \left(\frac{1}{\mu} \right)^2 = \frac{1}{\mu^2} (\mathbb{E}(N_a) + \mathbb{D}^2(N_a)). \\ \mathbb{E}(N_a) &= \sum_{k=1}^{\infty} k \Pi_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k P_{k+1}}{1 - e^{-\rho}} \\ &= \frac{1}{1 - e^{-\rho}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) P_{k+1} - \sum_{k=0}^{\infty} P_{k+1} \right) \\ &= \frac{1}{1 - e^{-\rho}} (\rho + e^{-\rho} - 1). \\ \mathbb{D}^2(N_a) &= \mathbb{E}(N_a^2) - (\mathbb{E}(N_a))^2 \end{aligned}$$

miatt először határozzuk meg $\mathbb{E}(N_a^2)$ -t!

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(N_a^2) &= \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \Pi_k = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{P_{k+1}}{1 - e^{-\rho}} \\ &= \frac{1}{1 - e^{-\rho}} \sum_{k=0}^{\infty} ((k+1)^2 - 2k - 1) P_{k+1} \\ &= \frac{1}{1 - e^{-\rho}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^2 P_{k+1} - 2 \sum_{k=0}^{\infty} k P_{k+1} - \sum_{k=0}^{\infty} P_{k+1} \right) \\ &= \frac{1}{1 - e^{-\rho}} (\rho + \rho^2 - 2(\rho + e^{-\rho} - 1) - (1 - e^{-\rho})) \\ &= \frac{1}{1 - e^{-\rho}} (\rho^2 - \rho - e^{-\rho} + 1). \end{aligned}$$

Ezért

$$\begin{aligned}
\mathbb{D}^2(N_a) &= \frac{1}{1 - e^{-\rho}} (\rho^2 - \rho - e^{-\rho} + 1) - \left(\frac{1}{1 - e^{-\rho}} (\rho + e^{-\rho} - 1) \right)^2 \\
&= \left(\frac{1}{1 - e^{-\rho}} \right)^2 \left((1 - e^{-\rho}) (\rho^2 - \rho - e^{-\rho} + 1) - (\rho + e^{-\rho} - 1)^2 \right) \\
&= \left(\frac{1}{1 - e^{-\rho}} \right)^2 (\rho^2 - \rho - e^{-\rho} + 1 - \rho^2 e^{-\rho} + \rho e^{-\rho} + e^{-2\rho} - e^{-\rho} \\
&\quad - \rho^2 - e^{-2\rho} - 1 - 2\rho e^{-\rho} + 2\rho - 2e^{-\rho}) \\
&= \frac{\rho - e^{-\rho}(\rho^2 + \rho)}{(1 - e^{-\rho})^2}.
\end{aligned}$$

Így

$$\begin{aligned}
\mathbb{D}^2(W) &= \left(\frac{1}{\mu} \right)^2 \left(\frac{1}{1 - e^{-\rho}} (\rho + e^{-\rho} - 1) + \frac{\rho - e^{-\rho}(\rho^2 + \rho)}{(1 - e^{-\rho})^2} \right) \\
&= \frac{1}{(\mu(1 - e^{-\rho}))^2} ((\rho + e^{-\rho} - 1)(1 - e^{-\rho}) + \rho - e^{-\rho}(\rho^2 + \rho)).
\end{aligned}$$

Ebből

$$\begin{aligned}
\mathbb{D}^2(T) &= \mathbb{D}^2(W) + \frac{1}{\mu^2} \\
\mathbb{D}^2(T) &= \left(\frac{1}{\mu(1 - e^{-\rho})} \right)^2 (\rho + e^{-\rho} - 1)(1 - e^{-\rho}) + \rho - e^{-\rho}(\rho^2 + \rho) + (1 - e^{-\rho})^2 \\
&= \frac{(1 - e^{-\rho})(\rho + e^{-\rho} - 1 + 1 - e^{-\rho}) + \rho - e^{-\rho}(\rho^2 + \rho)}{(\mu(1 - e^{-\rho}))^2} \\
&= \frac{2\rho - 2\rho e^{-\rho} - \rho^2 e^{-\rho}}{(\mu(1 - e^{-\rho}))^2}
\end{aligned}$$

ami ugyanaz, mint amit előzőleg megkaptunk.

2.3. Prioritásos $M/M/1$ rendszer

A következőkben az $M/M/1$ rendszer egy olyan módosításával fogunk megismerkedni, ahol két különböző típusú igény van. Mindkét típusú igények független Poisson-eloszlás szerint érkeznek, egyes típusú λ_1 , a kettes pedig λ_2 paraméterrel. A kiszolgálási intenzitás típustól függetlenül legyen μ . A rendszer stabilitása miatt feltételezzük, hogy

$$\rho_1 + \rho_2 < 1,$$

ahol $\rho_i = \lambda_i/\mu$, $i = 1, 2$.

Tegyük fel, hogy az egyes típusú igényeknek prioritása van a kettes típusúakkal szemben. Az elkövetkezendőekben abszolút és relatív prioritási szabályok mellett határozzuk meg az egyes csoportokba tartozó igények átlagos tartózkodási idejét és várható számát.

Abszolút prioritás

Ezen szabály esetén az egyes típusú igényeknek abszolút prioritása van a kettessel szemben, ami azt jelenti, hogy ha egy kettes típusú kiszolgálás alatt áll és egy egyes típusú érkezik akkor a kettes típusú megszakításra kerül és az egyes típusú kiszolgálása következik. Ha a rendszerben nincs több egyes típusú akkor a kettes típusúak kiszolgálási kezdődik meg attól a ponttól, ahonnan megszakították.

Jelölje N_i a rendszerben tartózkodó i típusú igények számát, míg T_i az i típusú igények tartózkodási idejét. A következőkben az $\mathbb{E}(N_i)$ és az $\mathbb{E}(T_i)$ mennyiségeket fogjuk meghatározni $i = 1, 2$ esetén.

Az egyes típusú igények számára a kettes típusúak tulajdonképpen nem léteznek, így közvetlenül kapjuk, hogy

$$(2.3) \quad \mathbb{E}(T_1) = \frac{1/\mu}{1 - \rho_1}, \quad \mathbb{E}(N_1) = \frac{\rho_1}{1 - \rho_1}.$$

Mivel típustól függetlenül a kiszolgálási intenzitás megegyezik, így a rendszerben tartózkodó igények száma nem függ a kiszolgálás sorrendjétől. Így ez az érték megegyezik azzal, amikor az érkezési sorrend szerint történik a kiszolgálás. Az $M/M/1$ rendszerénél megismert képletek alapján ezért

$$(2.4) \quad \mathbb{E}(N_1) + \mathbb{E}(N_2) = \frac{\rho_1 + \rho_2}{1 - \rho_1 - \rho_2},$$

majd felhasználva (2.3)-et,

$$\mathbb{E}(N_2) = \frac{\rho_1 + \rho_2}{1 - \rho_1 - \rho_2} - \frac{\rho_1}{1 - \rho_1} = \frac{\rho_2}{(1 - \rho_1)(1 - \rho_1 - \rho_2)},$$

és alkalmazva a Little-törvényt,

$$\mathbb{E}(T_2) = \frac{\mathbb{E}(N_2)}{\lambda_2} = \frac{1/\mu}{(1 - \rho_1)(1 - \rho_1 - \rho_2)}.$$

2. Példa. $\lambda_1 = 0.2$, $\lambda_2 = 0.6$ és $\mu = 1$ esetén ha érkezési sorrendben történik a kiszolgálás, akkor

$$\mathbb{E}(T) = \frac{1}{1 - 0.8} = 5,$$

míg ha az egyes típusnak prioritása vannak a kettes felett

$$\mathbb{E}(T_1) = \frac{1}{1 - 0.2} = 1.25, \quad \mathbb{E}(T_2) = \frac{1}{(1 - 0.2)(1 - 0.8)} = 6.25.$$

Relatív prioritás

Ebben az esetben az egyes típusú igényeknek majdnem abszolút prioritása van, ami azt jelenti, hogy az egyes típusú igény érkezésekor a kettes típusú igény kiszolgálása nem szakad meg, de a kiszolgálás befejezésekor az egyes típusúak kiszolgálása kezdődik. Ebből következően ennek prioritási szabálynak *relatív prioritás* a neve.

Az egyes típusú igények átlagos tartózkodási idejére a következő képlet írható fel

$$\mathbb{E}(T_1) = \mathbb{E}(N_1) \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu} + \rho_2 \frac{1}{\mu}.$$

Az utolsó tag azt jelöli, hogy amikor egy érkező egyes típusú igény kettést típusút talál kiszolgálás közben, akkor mindaddig várnia kell, amíg annak kiszolgálása be nem fejeződik. A Poisson-folyamat szerinti érkezésnek köszönhetően annak a valószínűsége, hogy az egyes típusú beérkező igény kettést típusút talál megegyezik a kettést típusú igényekre vonatkozó kihasználtsággal, amely ρ_2 . A Little-törvényt felhasználva,

$$\mathbb{E}(N_1) = \lambda_1 \mathbb{E}(T_1),$$

kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}(T_1) = \frac{(1 + \rho_2)/\mu}{1 - \rho_1}, \quad \mathbb{E}(N_1) = \frac{(1 + \rho_2)\rho_1}{1 - \rho_1}.$$

A kettést típus esetében (2.4)-t felhasználva, majd behelyettesítve kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}(N_2) = \frac{(1 - \rho_1(1 - \rho_1 - \rho_2))\rho_2}{(1 - \rho_1)(1 - \rho_1 - \rho_2)},$$

és a Little-törvényt alkalmazva

$$\mathbb{E}(T_2) = \frac{(1 - \rho_1(1 - \rho_1 - \rho_2))/\mu}{(1 - \rho_1)(1 - \rho_1 - \rho_2)}.$$

3. Példa. Legyen $\lambda_1 = 0.2$, $\lambda_2 = 0.6$ és $\mu = 1$, ekkor

$$\mathbb{E}(T_1) = \frac{1 + 0.6}{1 - 0.2} = 2, \quad \mathbb{E}(T_2) = \frac{1 - 0.2(1 - 0.8)}{(1 - 0.2)(1 - 0.8)} = 6.$$

Java-applet a rendszerjellemzők meghatározására

<http://irh.inf.unideb.hu/user/jsztrik/education/09/3f18.html>

2.4. Az $M/M/1/K$ típusú, véges befogadóképességű rendszer

Tekintsük az $M/M/1$ rendszert az a módosítással, hogy a rendszerben egyszerre maximum K igény tartózkodhat. Könnyű látni, hogy a rendszerben tartózkodó igények száma ismét születési-halálozási folyamat lesz $\lambda_k = \lambda$, $k = 0, \dots, K-1$ és $\mu_k = \mu$, $k = 1, \dots, K$ intenzitásokkal. Ekkor

$$P_k = \frac{\rho^k}{\sum_{i=0}^K \rho^i}, \quad k = 0, \dots, K,$$

vagyis

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^K \rho^i} = \begin{cases} \frac{1}{K+1} & , \rho = 1 \\ \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}} & , \rho \neq 1. \end{cases}$$

Meg kell jegyezni, hogy a rendszer stabil minden $\rho > 0$ -ra rögzített K mellett, de ha $K \rightarrow \infty$ -hez, akkor a stabilitás feltétele a $\rho < 1$ reláció és értelemszerűen az $M/M/1/K$ rendszer eloszlása az $M/M/1$ rendszer eloszlásához konvergál.

Ez analitikusan is megmutatható, hiszen $\rho^K \rightarrow 0$ -hoz és így $P_0 \rightarrow 1 - \rho$ -hoz.

Ezek után adjuk meg a szokásos *rendszerjellemzőket*

•

$$U_S = 1 - P_0,$$

$$\mathbb{E}(\delta) = \frac{1}{\lambda} \frac{U_S}{1 - U_S}$$

•

$$\begin{aligned} \bar{N} &= \sum_{k=1}^K k \rho^k P_0 = \rho P_0 \sum_{k=1}^K k \rho^{k-1} \\ &= \rho P_0 \left(\sum_{k=1}^K \rho^k \right)' = \rho P_0 \left(\rho \frac{1 - \rho^K}{1 - \rho} \right)' = \rho P_0 \left(\frac{\rho - \rho^{K+1}}{1 - \rho} \right)' \\ &= \left((1 - (K+1)\rho^K)(1 - \rho) + \rho - \rho^{K+1} \right) \cdot \frac{\rho P_0}{(1 - \rho)^2} \\ &= \frac{\rho P_0 (1 - (K+1)\rho^K - \rho + (K+1)\rho^{K+1} + \rho - \rho^{K+1})}{(1 - \rho)^2} \\ &= \frac{\rho P_0 (1 - (K+1)\rho^K + K\rho^{K+1})}{(1 - \rho)^2} \\ &= \frac{\rho (1 - (K+1)\rho^K + K\rho^{K+1})}{(1 - \rho)(1 - \rho^{K+1})}. \end{aligned}$$

•

$$\bar{Q} = \sum_{k=1}^K (k-1)P_k = \sum_{k=1}^K kP_k - \sum_{k=1}^K P_k = \bar{N} - U_S$$

- A tartózkodási és várakozási idő jellemzőinek meghatározásához tudni kell, hogy a rendszerbe érkező igény milyen állapotban találja a rendszert. A Bayes-formula felhasználásával az eddigiekhez hasonlóan könnyű látni, hogy

$$\Pi_k = \frac{\lambda P_k}{\sum_{i=0}^{K-1} \lambda P_i} = \frac{P_k}{1 - P_K}.$$

A következő részben az $M/M/1$ rendszerhez hasonlóan azt kell észrevenni, hogy a feltételes tartózkodási és várakozási idők $(k+1, \mu)$ illetve (k, μ) paraméterű Erlang-eloszlást követnek, ha a rendszerben k igény tartózkodott az új igény rendszerbe érkezésének pillanatában.

Ennek megfelelően írjuk le a várható értéket illetve a sűrűségfüggvényt. Ezért

$$\begin{aligned}\bar{T} &= \sum_{k=0}^{K-1} \frac{k+1}{\mu} \Pi_k = \sum_{k=0}^{K-1} \frac{k+1}{\mu} \frac{\rho^k P_0}{1 - P_k} \\ &= \frac{1}{\lambda(1 - P_K)} \sum_{k=0}^{K-1} (k+1) P_{k+1} = \frac{\bar{N}}{\lambda(1 - P_K)}.\end{aligned}$$

Így

$$\bar{W} = \bar{T} - \frac{1}{\mu} = \frac{\bar{N}}{\lambda(1 - P_K)} - \frac{1}{\mu}.$$

Szeretnénk megmutatni, hogy ebben az esetben is érvényes a Little-formula, ami egyúttal a formulák helyességét is ellenőrzi.

Látható, hogy a rendszerbe való átlagos beérkezési intenzitás $\bar{\lambda} = \lambda(1 - P_K)$ és ezért

$$\bar{\lambda} \cdot \bar{T} = \lambda(1 - P_K) \frac{\bar{N}}{\lambda(1 - P_K)} = \bar{N}.$$

Hasonlóan

$$\begin{aligned}\bar{\lambda} \cdot \bar{W} &= \bar{\lambda} \left(\frac{\bar{N}}{\lambda(1 - P_K)} - \frac{1}{\mu} \right) = \bar{N} - \frac{\lambda}{\mu} \\ &= \bar{N} - \rho(1 - P_K) = \bar{N} - U_S = \bar{Q},\end{aligned}$$

mivel

$$\bar{\lambda} = \bar{\mu} = \mu U_S.$$

Ezek után vizsgáljuk meg a tartózkodási és várakozási idő sűrűség- illetve eloszlás-függvényét!

Mint, ahogyan eddig is tettük, a teljes valószínűség tétele miatt

$$f_T(x) = \sum_{k=0}^{K-1} \mu \frac{(\mu x)^k}{k!} e^{-\mu x} \frac{P_k}{1 - P_K},$$

ebből

$$\begin{aligned}F_T(x) &= \sum_{k=0}^{K-1} \left(\int_0^x \mu \frac{(\mu t)^k}{k!} e^{-\mu t} dt \right) \frac{P_k}{1 - P_K} \\ &= \sum_{k=0}^{K-1} \left(1 - \sum_{i=0}^k \frac{(\mu x)^i}{i!} e^{-\mu x} \right) \frac{P_k}{1 - P_K} \\ &= 1 - \sum_{k=0}^{K-1} \left(\sum_{i=0}^k \frac{(\mu x)^i}{i!} e^{-\mu x} \right) \frac{P_k}{1 - P_K}.\end{aligned}$$

Ezek a formulák a véges összegzés miatt bonyolultabbak, mint az $M/M/1$ esetben, de könnyű látni, hogy $K \rightarrow \infty$ határértéknél

$$f_T(x) = \mu(1 - \rho)e^{-\mu(1-\rho)x}.$$

A várakozási idő sűrűségfüggvényére igaz az alábbi összefüggés

$$\begin{aligned} f_W(0) &= \frac{P_0}{1 - P_K} \\ f_W(x) &= \sum_{k=1}^{K-1} \mu \frac{(\mu x)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\mu x} \frac{P_k}{1 - P_K}, \quad x > 0 \\ F_W(x) &= \frac{P_0}{1 - P_K} + \sum_{k=1}^{K-1} \left(1 - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\mu x)^i}{i!} e^{-\mu x} \right) \frac{P_k}{1 - P_K} \\ &= 1 - \sum_{k=1}^{K-1} \left(\sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\mu x)^i}{i!} e^{-\mu x} \right) \cdot \frac{P_k}{1 - P_K}. \end{aligned}$$

Ezek a formulák rögzített K esetén számítógép segítségével minden további probléma nélkül kiszámíthatók.

Mint látható a P_K valószínűség kiemelt szerepet játszik a képletekben.

Vegyük észre, hogy ez éppen annak a valószínűsége, hogy a rendszerhez érkező igény nem tud csatlakozni a rendszerhez, mert nincs hely. Ezt a valószínűséget **"blokkolási"** vagy **igényvesztési** valószínűségnek nevezzük és P_B -vel jelöljük.

A Bayes-formula alkalmazásával

$$P_B = \frac{\lambda P_K}{\sum_{k=0}^{K-1} \lambda P_k} = P_K.$$

Ha még a K -tól és ρ -tól való függést is jelölni szeretnénk, akkor

$$P_B(K, \rho) = \frac{\rho^K}{\sum_{k=0}^{K-1} \rho^k}.$$

Vegyük észre, hogy

$$P_B(K, \rho) = \frac{\rho \rho^{K-1}}{\sum_{k=0}^{K-1} \rho^k + \rho \rho^{K-1}} = \frac{\rho P_B(K-1, \rho)}{1 + \rho P_B(K-1, \rho)}.$$

A $P_B(1, \rho) = \frac{\rho}{1 + \rho}$ kezdőértékből kiindulva az igényvesztés valószínűsége rekurzíven meghatározható. Az is nyilvánvaló, hogy ez a sorozat $\rho < 1$ esetén a 0-hoz konvergál és ezért rekurzióval biztosan tudunk találni olyan K -t, melyre

$$P_B(K, \rho) < P^*,$$

ahol a P^* egy előre megadott korlát az igényvesztés valószínűségére.

Ha iteráció nélkül szeretnénk meghatározni a K -t, akkor a

$$\frac{\rho^K(1-\rho)}{1-\rho^{K+1}} < P^*$$

egyenlőtlenséget kell megoldani K -ra, ami nehezebb feladat, mint a rekurzív megközelítés.

Választhatunk egy közelítő megoldást is, ami abban rejlik, hogy az $M/M/1$ rendszer esetén nézzük meg, mi lesz annak a valószínűsége, hogy a rendszerben legalább K igény tartózkodik és ezzel közelítjük a $P_B(K, \rho)$ -t. Látható, hogy

$$P_B(K, \rho) = \frac{\rho^K(1-\rho)}{1-\rho^{K+1}} < \sum_{k=K}^{\infty} \rho^k(1-\rho) = \rho^K,$$

így, ha

$$\rho^K < P^*,$$

akkor teljesül a $P_B^*(K, \rho) < P^*$ is. Vagyis

$$\begin{aligned} K \ln \rho &< \ln P^* \\ K &> \frac{\ln P^*}{\ln \rho}. \end{aligned}$$

Most térjünk rá a tartózkodási idő Laplace-transzformáltjának a meghatározására! Az előzőekhez hasonlóan könnyű látni, hogy

$$\begin{aligned} L_T(s) &= \sum_{k=0}^{K-1} \left(\frac{\mu}{\mu+s} \right)^{k+1} \frac{\rho^k P_0}{1-P_K} \\ &= \frac{P_0}{\rho(1-P_K)} \sum_{l=1}^K \left(\frac{\mu\rho}{\mu+s} \right)^l \\ &= \frac{P_0}{\rho(1-P_K)} \frac{\lambda}{\mu+s} \frac{1 - \left(\frac{\lambda}{\mu+s} \right)^K}{1 - \frac{\lambda}{\mu+s}} \\ &= \frac{\mu P_0}{(1-P_K)} \frac{1 - \left(\frac{\lambda}{\mu+s} \right)^K}{\mu - \lambda + s}. \end{aligned}$$

Hasonlóan

$$\begin{aligned}
 L_W(s) &= \sum_{k=0}^{K-1} \left(\frac{\mu}{\mu+s} \right)^k \frac{\rho^k P_0}{1-P_K} \\
 &= \frac{P_0}{1-P_K} \sum_{k=0}^{K-1} \left(\frac{\mu\rho}{\mu+s} \right)^k \\
 &= \frac{P_0}{1-P_K} \frac{1 - \left(\frac{\lambda}{\mu+s} \right)^K}{1 - \frac{\lambda}{\mu+s}} \\
 &= \frac{P_0}{1-P_K} \frac{(\mu+s) \left(1 - \left(\frac{\lambda}{\mu+s} \right)^K \right)}{\mu - \lambda + s},
 \end{aligned}$$

ami nyilvánvalóan a

$$L_T(s) = L_W(s) \cdot \frac{\mu}{\mu+s}$$

relációból is következik.

A Laplace-transzformáltakra azért van szükség, mert segítségükkel az érintett valószínűségi változók magasabb momentumait is meghatározhatjuk.

Java-applet a rendszerjellemzők meghatározására

<http://irh.inf.unideb.hu/user/jsztrik/education/09/applet/HMM1K.html>

2.5. Az $M/M/\infty$ típusú rendszer

Az előzőekhez hasonlóan könnyű látni, hogy $(N(t), t \geq 0)$ ismét születési-halálozási folyamat

$$\begin{aligned}
 \lambda_k &= \lambda, \quad k = 0, 1, \dots \\
 \mu_k &= k\mu, \quad k = 1, 2, \dots
 \end{aligned}$$

intenzitásokkal.

Így a stacionárius eloszlás

$$P_k = \frac{\varrho^k}{k!} P_0, \text{ ahol } P_0^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varrho^k}{k!} = e^{\varrho},$$

vagyis

$$P_k = \frac{\varrho^k}{k!} e^{-\varrho},$$

ami azt mutatja, hogy N ϱ paraméterű Poisson-eloszlást követ.

Könnyű látni, hogy a *rendszerjellemzők*

$$\begin{aligned}\bar{N} = \varrho, \quad \bar{\lambda} = \lambda, \quad \bar{T} = \frac{1}{\mu}, \quad \bar{W} = 0, \quad \bar{r} = \bar{N}, \quad \bar{\mu} = \bar{r}\mu \\ U_r = 1 - e^{-\varrho}, \quad \frac{\mathbb{E}(\delta_r)}{\frac{1}{\mu}} = \frac{1 - e^{-\varrho}}{e^{-\varrho}}, \quad \mathbb{E}(\delta_r) = \frac{1}{\mu} \frac{1 - e^{-\varrho}}{e^{-\varrho}}.\end{aligned}$$

Be lehet bizonyítani, hogy ezek a formulák érvényesek $M/G/\infty$ rendszerre is, ahol $\mathbb{E}(S) = \frac{1}{\mu}$.

Java-applet a rendszerjellemzők meghatározására

<http://irh.inf.unideb.hu/user/jsztrik/education/09/applet/HMMinf.html>

2.6. Az $M/M/n/n$ típusú Erlang-féle veszteséges rendszer

Ezen modellre n csatornás veszteséges rendszerként is szokás hivatkozni az alábbiak miatt. Az n csatornás rendszerbe Poisson-folyamat szerint érkeznek az igények. Ha van üres csatorna vagy szerver az igény kiszolgálása exponenciális időtartamú μ paraméterrel. Ha minden kiszolgáló egység foglalt, akkor az igény elvész, azaz sorbanállás nem megengedett. Ezen probléma a tömegkiszolgálás egyik legrégebbi problémája, mellyel a század elején a telefonközpontok kihasználtságával kapcsolatban foglalkozott A. K. Erlang és C. Palm. Hasonló jelenséggel találkozunk például a parkoló helyek esetében is.

A feltételek alapján ez a rendszer is egy születési-kihalási folyamattal modellezhető, melynek intenzitásai a következők

$$\lambda_k = \begin{cases} \lambda, & \text{ha } k < n, \\ 0, & \text{ha } k \geq n, \end{cases}$$

$$\mu_k = k\mu, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Azt mondjuk, hogy a $(N(t), t \geq 0)$ folyamat az k állapotban van, ha k kiszolgáló foglalt, azaz ha k igény tartózkodik a rendszerben. Nyilvánvalóan az ergodikus eloszlás létezik, mivel a folyamat véges állapotterű. A stacionárius eloszlás

$$P_k = \begin{cases} P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{1}{k!}, & \text{ha } k \leq n, \\ 0, & \text{ha } k > n. \end{cases}$$

A normalizáló feltétel miatt

$$P_0 = \left(\sum_{k=0}^n \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{1}{k!} \right)^{-1},$$

így

$$P_k = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{1}{k!}}{\sum_{i=0}^n \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \frac{1}{i!}} = \frac{\frac{\varrho^k}{k!}}{\sum_{i=0}^n \frac{\varrho^i}{i!}}, \quad k \leq n.$$

A rendszer egyik jellemzője a

$$P_n = \frac{\frac{\varrho^n}{n!}}{\sum_{k=0}^n \frac{\varrho^k}{k!}} = B(n, \rho)$$

valószínűség, melyet először Erlang vezetett be (1917-ben) és **Erlang-féle veszteségformula** vagy **Erlang-féle B-formula** néven ismert, általában $B(n, \lambda/\mu)$ szimbólummal jelöljük.

A Bayes-formula felhasználásával könnyű látni, hogy P_n annak a valószínűsége stacionárius esetben, hogy egy újonnan érkező igényt nem fogad a rendszer, mert telített, azaz az igény elvész. Kis n -re a P_0 valószínűség könnyen kiszámolható. Nagy n -re és kis ϱ -ra $P_0 \approx e^{-\varrho}$, így

$$P_k \approx \frac{\varrho^k}{k!} e^{-\varrho},$$

azaz a Poisson-eloszlás. Nagy n -re és nagy ϱ -ra általában

$$\sum_{j=0}^n \frac{\varrho^j}{j!} \neq e^{\varrho}.$$

Ebben az esetben a nevező a ϱ közepű Poisson-eloszlás első $(n+1)$ tagjának összege. Elegendő nagy ϱ -ra ($\varrho > 15$) a centrális határeloszlás-tétel miatt a Poisson-eloszlást közelítjük ϱ közepű és $\sqrt{\varrho}$ szórású normális eloszlással, így

$$P_n \approx \frac{\Phi(s) - \Phi(s-1)}{\Phi(s)} = 1 - \frac{\Phi(s-1)}{\Phi(s)},$$

ahol

$$\Phi(s) = \int_{-\infty}^s \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

és

$$s = \frac{n + \frac{1}{2} - \varrho}{\sqrt{\varrho}}.$$

A $B(n, \rho)$ -ra azonban fel tudunk írni egy nagyon fontos rekurziós összefüggést is, hiszen

$$\begin{aligned} B(n, \rho) &= \frac{\frac{\rho^n}{n!}}{\sum_{i=0}^n \frac{\rho^i}{i!}} = \frac{\frac{\rho}{n} \frac{\rho^{n-1}}{(n-1)!}}{\sum_{i=0}^n \frac{\rho^i}{i!} + \frac{\rho}{n} \frac{\rho^{n-1}}{(n-1)!}} \\ &= \frac{\frac{\rho}{n} B(n-1, \rho)}{1 + \frac{\rho}{n} B(n-1, \rho)} = \frac{\rho B(n-1, \rho)}{n + \rho B(n-1, \rho)}. \end{aligned}$$

A $B(1, \rho) = \frac{\rho}{1 + \rho}$ kezdeti feltételből kiindulva bármely n -re meg tudjuk határozni a $B(n, \rho)$ -t. Ez azért fontos, mert nagyobb kiszolgáló számnál a faktoriális nem számolható, de a rekurzió még mindig működik.

Például $n = 1000, \rho = 1000$ esetben a pontos képletet nem tudjuk kiszámolni, de a közelítés és a rekurziós képlet 0.024 értéket ad.

$B(n, \rho)$ nagyon fontos szerepet játszik a gyakorlati problémák megoldásában ezért külön úgynevezett kalkulátorokat írtak, melyek megtalálhatók a

<http://www.erlang.com/calculator/>

internet címen. A pontos és közelítő érték összehasonlítására mi is írtunk egy Java Script-et, amely megtalálható az alábbi linken

<http://jani.uw.hu/erlang/erlang.html>

Az $M/M/n/n$ rendszer jellemzői:

- A rendszerben tartózkodó *igények átlagos száma*, a foglalt *szerverek átlagos száma*

$$\bar{N} = \bar{n} = \sum_{j=0}^n j P_j = \sum_{j=0}^n j \frac{\varrho^j}{j!} P_0 = \varrho \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\varrho^j}{j!} P_0 = \varrho(1 - P_n),$$

így 1 szerverre jutó átlagos igényszám

$$\frac{\varrho}{n}(1 - P_n).$$

- A *szerverek kihasználtsága*

Mint már láttuk

$$U_s = \sum_{i=1}^n \frac{i}{n} P_i = \frac{\bar{n}}{n}.$$

Jelen esetben

$$U_s = \frac{\varrho}{n}(1 - P_n).$$

- Az átlagos *tétlenségi idő* (egy konkrét kiszolgáló esetén)

A jól ismert összefüggést alkalmazva

$$P(\text{az adott kiszolgáló egység foglalt}) = \frac{1/\mu}{\bar{e} + 1/\mu},$$

ahol $\bar{e}$ az átlagos tétlenségi idő. Így

$$\frac{\varrho}{n}(1 - P_n) = \frac{1/\mu}{\bar{e} + 1/\mu},$$

tehát

$$\bar{e} = \frac{n}{\lambda(1 - P_n)} - \frac{1}{\mu}.$$

Ha az üres szerverek olyan sorrendben kezdik kiszolgálni az érkező igényeket, mint amilyen sorrendben megüresedtek, akkor egy szerver működését a következőképpen írhatjuk le. Ha egy üressé vált szerver $(j - 1)$ másik üres szervert talál megüresedése pillanatában, akkor csak a j -edik igény kiszolgálásával kezdődik ismét a foglaltsági periódusa.

Jelölje $\bar{e}$ a szerver átlagos üresjáratási periódusa hosszát, $\bar{e}_j$ pedig a fenti állapotban az átlagos tétlenségi időt. Nyilvánvalóan $\bar{e}_j = \frac{j}{\lambda}$, $\bar{e}$ pedig a teljes várható érték tétele alapján:

$$\begin{aligned}\bar{e} &= \sum_{j=1}^n \frac{P_{n-j}}{1 - P_n} \frac{j}{\lambda} = \frac{1}{\lambda(1 - P_n)} \bar{S} = \frac{n - \bar{n}}{\lambda(1 - P_n)} \\ &= \frac{n}{\lambda(1 - P_n)} - \frac{\rho}{\lambda} = \frac{n}{\lambda(1 - P_n)} - \frac{1}{\mu}\end{aligned}$$

azaz más úton is ugyanarra az eredményre jutunk.

- A rendszer átlagos *foglaltsági periódushossza*

Nyilvánvalóan

$$U_r = 1 - P_0 = \frac{E\delta_r}{\frac{1}{\lambda} + E\delta_r},$$

melyből

$$E\delta_r = \frac{1 - P_0}{\lambda P_0} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{\rho^i}{i!}}{\lambda \left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{\rho^i}{i!} \right)}.$$

Java-applet a rendszerjellemzők meghatározására

<http://irh.inf.unideb.hu/user/jsztrik/education/09/applet/HMGcc.html>

4. Példa. Egy parkolóhoz az autók 20 másodpercenként érkeznek, és átlagosan 10 percig maradnak. A beérkezés Poisson, a kiszolgálás exponenciális.

Milyen nagynak kell lennie a parkolónak, hogy egy autó 1% eséllyel forduljon vissza, mert a parkoló telített?

Megoldás:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{10}{\frac{1}{3}} = 30, P_n = 0.01.$$

A normális eloszlással való approximációt követve

$$P_n = 0.01 = \frac{\frac{\rho^n}{n!} e^{-\rho}}{\Phi\left(\frac{n+\frac{1}{2}-\rho}{\sqrt{\rho}}\right)} = \frac{\Phi\left(\frac{n+\frac{1}{2}-\rho}{\sqrt{\rho}}\right) - \Phi\left(\frac{n-\frac{1}{2}-\rho}{\sqrt{\rho}}\right)}{\Phi\left(\frac{n+\frac{1}{2}-\rho}{\sqrt{\rho}}\right)}.$$

Ebból

$$0.99\Phi\left(\frac{n + \frac{1}{2} - \rho}{\sqrt{\rho}}\right) = \Phi\left(\frac{n - \frac{1}{2} - \rho}{\sqrt{\rho}}\right).$$

A normális eloszlás táblázatából nem nehéz ellenőrizni, hogy $n = 41$.

Ekkor P_{41} közelítése: 0.009917321712214377,

a pontos értéke pedig: 0.01043318100246811.

■

5. Példa. Egy 50 csatornás telefonközpontba átlagosan 10 percenként érkeznek hívások Poisson-eloszlás szerint. A kiszolgálási idő exponenciális, 5 perc átlaggal. Határozzuk meg a rendszer jellemzőit!

Megoldás:

Esetünkben Poisson-közelítés vehető, így $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{2}{4} = 0.5$

$P_{50} = 0.00000$ a Poisson-eloszlás szerint, sőt még $n = 6$ -nál is

$P_6 = 0,00001$. Ez azt jelenti, hogy igény szinte sohasem lesz elutasítva.

A foglalt csatornák átlagos száma

$$\bar{n} = \rho(1 - P_n) = \rho = 0.5,$$

így az egy csatornára jutó átlagos igényszám

$$\frac{0.5}{50} = \frac{5 \times 10^{-1}}{5 \times 10} = 10^{-2},$$

és ez egyben a csatornák kihasználtsága $U_{50} = 10^{-2}$.

$U_r = 1 - 0.606 = 0.394$ ami a rendszer kihasználtsága.

A rendszer átlagos foglaltsági periódushossza

$$E\delta_r = \frac{(1 - P_0)}{(\lambda P_0)} = \frac{0.394}{2 \times 0.606} = \frac{0.394}{1.212} = 0.32 \text{ perc}$$

A csatornák átlagos tétlenségi ideje

$$\bar{e} = \frac{n}{\lambda(1 - P_n)} - \frac{\rho}{\lambda} = \frac{50}{2(1 - 0)} - \frac{0,5}{2} = 25 - \frac{1}{4} = 24.75 \text{ perc}$$

A csatornák átlagos foglaltsági ideje

$$E\delta = \frac{\rho}{\lambda} = \frac{1}{4} \text{ perc}$$

■

Heterogén kiszolgálók esete

Az $M/\vec{M}/n/n$ rendszer esetében feltesszük, hogy az i -edik kiszolgáló μ_i intenzitással szolgálja ki az igényeket, melyek érkezésükkor egyenlő valószínűséggel választanak a tétlen kiszolgálók közül. Ekkor nem elég tudni, hogy hány igény van a rendszerben, hanem ismernünk kell a foglalt kiszolgálók indexét is. Ezért nem születési-halálozási folyamattal, hanem általánosabb állapotterű Markov-lánccal van dolgunk.

Ha $(i_1, \dots, i_k)$ jelöli a foglalt kiszolgálók indexeit, amelyek nyilvánvalóan az n k -ad osztályú kombinációi, akkor a Markov-lánc állapotterét a $(0, (i_1, \dots, i_k) \in C_k^n, k = 1, \dots, n)$ indexhalmazok alkotják.

Jelölje

$$P_0 = P(0),$$

$$P(i_1, \dots, i_k) = P((i_1, \dots, i_k)), (i_1, \dots, i_k) \in C_k^n, \quad k = 1, \dots, n$$

a folyamat stacionárius eloszlását, amely létezik, mivel az állapotter véges és irreducibilis. A szokásos módon felírhatjuk a stacionárius állapotegyenleteket, amelyek a következő alakot öltik

$$\begin{aligned} \lambda P_0 &= \sum_{j=1}^n \mu_j P(j) \\ (\lambda + \sum_{j=1}^k \mu_{i_j}) P(i_1, \dots, i_k) &= \frac{\lambda}{n-k+1} \sum_{j=1}^k P(i_1, \dots, i_{j-1}, i_{j+1}, \dots, i_k) \\ &+ \sum_{j \neq i_1, \dots, i_k} \mu_j P(i'_1, \dots, i'_k, j') \\ \left(\sum_{j=1}^n \mu_j \right) P(1, \dots, n) &= \lambda \sum_{j=1}^n P(1, \dots, j-1, j+1, \dots, n), \end{aligned}$$

ahol $(i'_1, \dots, i'_k, j')$ az $i_1, \dots, i_k, j$ indexek növekvő sorrendbe rendezett halmazát jelöli, i_{-1} és i_{n+1} pedig nincs értelmezve, ott az összegzést értelem szerint kell venni! Bár látványlag bonyolult egyenletrendszerrel van dolgunk, amelyben az ismeretlenek száma 2^n , megmutatjuk, hogy a megoldás viszonylag egyszerű, nevezetesen

$$(2.5) \quad P(i_1, \dots, i_k) = (n-k)! \prod_{j=1}^k \varrho_{i_j} C,$$

ahol $\varrho_j = \frac{\lambda}{\mu_i}$, $j = 1, \dots, n$, $P_0 = n!C$, amely a

$$P_0 + \sum_{k=1}^n \sum_{(i_1, \dots, i_k) \in C_k^n} P(i_1, \dots, i_k) = 1$$

normalizáló feltételből kapható meg.

Először nézzük meg az első állapotegyenletet! Behelyettesítve

$$\lambda n!C = \sum_{j=1}^n \mu_j \frac{\lambda}{\mu_j} (n-1)!C = n!\lambda C.$$

Majd a harmadik egyenletnél végezzük el a behelyettesítést

$$\left(\sum_{j=1}^n \mu_j \right) \frac{\lambda^n}{\mu_1 \cdots \mu_n} C = \lambda \sum_{j=1}^n \frac{\lambda^{n-1} C}{\mu_1 \cdots \mu_{j-1} \mu_{j+1} \cdots \mu_n} = \frac{\lambda^n}{\mu_1 \cdots \mu_n} \left(\sum_{j=1}^n \mu_j \right) C.$$

Végül a legbonyolultabb, második esetet nézzük meg!

$$\begin{aligned} & (\lambda + \sum_{j=1}^k \mu_{i_j})(n-k)! \prod_{j=1}^k \varrho_{i_j} C \\ &= \frac{\lambda}{n-k+1} (n-k+1)! \sum_{j=1}^k \frac{\lambda^{k-1} C}{\mu_{i_1} \cdots \mu_{i_{j-1}} \mu_{i_{j+1}} \cdots \mu_{i_k}} \\ &+ \sum_{j \neq i_1, \dots, i_k} (n-k-1)! \frac{\lambda^{k+1} \mu_j C}{\mu_{i_1} \cdots \mu_{i_k} \mu_j} \\ &= (n-k)! \sum_{j=1}^k \frac{\mu_{i_j} \lambda^k C}{\mu_{i_1} \cdots \mu_{i_k}} + \lambda \sum_{j \neq i_1, \dots, i_k} (n-k-1)! \frac{\lambda^k C}{\mu_{i_1} \cdots \mu_{i_k}} \\ &= (n-k)! \left(\sum_{j=1}^k \mu_{i_j} \right) \frac{\lambda^k C}{\mu_{i_1} \cdots \mu_{i_k}} + \lambda (n-k)! \frac{\lambda^k C}{\mu_{i_1} \cdots \mu_{i_k}}, \end{aligned}$$

ami az egyenlőséget mutatja.

Ezek után a szokásos *rendszerjellemzők* a következők

- U_j a j -edik kiszolgáló kihasználtsága

$$U_j = \sum_{k=1}^n \sum_{j \in (i_1, \dots, i_k)} P(i_1, \dots, i_k),$$

majd ebből

$$U_j = \frac{\frac{1}{\mu_j}}{\frac{1}{\mu_j} + \mathbb{E}(e_j)},$$

ahol $\mathbb{E}(e_j)$ az j -edik kiszolgáló átlagos tétlenségi periódushossza

$$\mathbb{E}(e_j) = \frac{1}{\mu_j} \frac{1 - U_j}{U_j}.$$

- $\bar{N} = \sum_{j=1}^n U_j$
- Az igényvesztés, vagy blokkolás valószínűsége pedig $P_B = P(1, \dots, n)$.

Ebben az esetben is igaz, hogy $\lambda(1 - P_B) = \sum_{j=1}^n U_j \mu_j$.

Homogén esetben, vagyis amikor $\mu_j = \mu, j = 1, \dots, n$,

$$P_k = \sum_{(i_1, \dots, i_k) \in C_k^n} P(i_1, \dots, i_k) = \binom{n}{k} (n-k)! \varrho^k C = \frac{\varrho^k}{k!} n! C = \frac{\varrho^k}{k!} P_0 = \frac{\frac{\varrho^k}{k!}}{\sum_{j=1}^n \frac{\varrho^j}{j!}},$$

vagyis a jól ismert képleteket kapjuk.

Meg kell jegyezni, hogy ezek a képletek tetszőleges, véges várható értékű kiszolgálási idők mellett is érvényesek.

2.7. Az $M/M/n$ típusú rendszer

Ismét olyan λ állandó beérkezési intenzitású rendszert vizsgálunk, melyben korlátlan hosszúságú sor kialakulása megengedett. A rendszer n db kiszolgálóval (szerverrel) van ellátva. Ez az eset is leírható születési-halálozási folyamattal a következők miatt. Először is tekintsünk független, μ_i paraméterű exponenciális eloszlású ξ_i valószínűségi változókat. Jelöljük η -val ezen ξ_i ($i = 1, 2, \dots, N$) változók minimumát. Nem nehéz belátni, hogy η is exponenciális eloszlású lesz $\sum_{i=1}^N \mu_i$ paraméterrel. Ugyanis

$$\begin{aligned} P(\eta < x) &= 1 - P(\eta \geq x) = 1 - P(\xi_i \geq x, i = 1, \dots, N) = \\ &= 1 - \prod_{i=1}^N P(\xi_i \geq x) = 1 - e^{-(\sum_{i=1}^N \mu_i)x}. \end{aligned}$$

Ezt felhasználva kapjuk meg annak valószínűségét, hogy a rendszer a h idő alatt a k állapotból a $k-1$ állapotba, ill. a k állapotból a $k+1$ állapotba kerül. Így

$$\begin{aligned} P_{k,k-1}(h) &= (1 - (\lambda h + o(h))) (\mu_k h + o(h)) + o(h) = \mu_k h + o(h), \\ P_{k,k+1}(h) &= (\lambda h + o(h)) (1 - (\mu_k h + o(h))) + o(h) = \lambda h + o(h), \end{aligned}$$

ahol

$$\mu_k = \min(k\mu, n\mu) = \begin{cases} k\mu & , \text{ ha } 0 \leq k \leq n, \\ n\mu & , \text{ ha } n < k. \end{cases}$$

Könnyen látható, hogy az ergodikusság feltétele $\lambda/n\mu < 1$.

Amikor hozzákezdünk a P_k mennyiségek kiszámolásához, azt találjuk, hogy a megoldást két részre kell szétbontanunk, mivel a μ_k mennyiség kétféle módon függ k -tól. Eszerint, ha $k < n$, akkor

$$P_k = P_0 \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda}{(i+1)\mu} = P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k \frac{1}{k!}.$$

Ha viszont $k \geq n$, akkor

$$P_k = P_0 \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda}{(i+1)\mu} \prod_{j=n}^{k-1} \frac{\lambda}{n\mu} = P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{1}{n!n^{k-n}}.$$

Összefoglalva a kapott eredményeket

$$P_k = \begin{cases} P_0 \frac{\rho^k}{k!} & , \text{ ha } k \leq n, \\ P_0 \frac{a^k n^n}{n!} & , \text{ ha } k > n, \end{cases}$$

ahol

$$a = \frac{\lambda}{n\mu} = \frac{\rho}{n} < 1.$$

Ez az a éppen egy kiszolgáló egység kihasználtsága. Továbbá

$$P_0 = \left(1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\rho^k}{k!} + \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\rho^k}{n!} \frac{1}{n^{k-n}}\right)^{-1},$$

és így

$$P_0 = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^n}{n!} \frac{1}{1-a}\right)^{-1}.$$

Annak a valószínűsége, hogy egy újonnan érkező igénynek sorba kell állnia,

$$P(\text{sorbanállás}) = \sum_{k=n}^{\infty} P_k = \sum_{k=n}^{\infty} P_0 \frac{\rho^k}{n!} \frac{1}{n^{k-n}}.$$

Ebből

$$P(\text{sorbanállás}) = \frac{\frac{\rho^n}{n!} \frac{1}{1-a}}{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^n}{n!} \frac{1}{1-a}} = \frac{\frac{\rho^n}{n!} \frac{n}{n-\rho}}{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^n n}{n!(n-\rho)}} = C(n, \rho).$$

Ezt a valószínűséget széles körben használják például a telefonrendszerek, call-centerek vizsgálatával kapcsolatban. Itt annak a valószínűségét adja meg, hogy egy újonnan beérkezett hívás (igény) számára nincs szabad vonal (kiszolgáló egység) egy n szerveres rendszerben. Ez az ú.n. **Erlang-féle C-formula**, vagy **Erlang-féle várakozásos formula** amit többnyire $C(n, \lambda/\mu)$ szimbólummal jelölünk.

Az $M/M/n$ rendszer jellemzői

- Az átlagos sorhossz

$$\begin{aligned}\bar{Q} &= \sum_{k=n}^{\infty} (k-n)P_k = \sum_{j=0}^{\infty} jP_{n+j} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{j \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n+j}}{n!n^j} P_0 = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} j \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} a^j P_0 = P_0 \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} a \sum_{j=0}^{\infty} \frac{da^j}{da} = P_0 \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} a \frac{d}{da} \sum_{j=0}^{\infty} a^j = \\ &= P_0 \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} \frac{a}{(1-a)^2} = \frac{\rho}{n-\rho} C(n, \rho).\end{aligned}$$

- A foglalt szerverek átlagos száma

$$\begin{aligned}\bar{n} &= \sum_{k=0}^{n-1} kP_k + \sum_{k=n}^{\infty} nP_k = P_0 \left(\rho \sum_{k=0}^{n-2} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^n}{(n-1)!} \frac{1}{1-a} \right) = \\ &= \rho \left(\sum_{k=0}^{n-2} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{\rho^{n-1}}{(n-1)!} \left(\frac{1}{1-a} - 1 \right) \right) P_0 = \\ &= \rho \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^n}{n!} \frac{1}{1-a} \right) P_0 = \rho \frac{1}{p_0} P_0 = \rho.\end{aligned}$$

- A rendszerben tartózkodó igények átlagos száma

$$\begin{aligned}\bar{N} &= \sum_{k=0}^{\infty} kP_k = \sum_{k=0}^{n-1} kP_k + \sum_{k=n}^{\infty} (k-n)P_k + \sum_{k=n}^{\infty} nP_k = \bar{n} + \bar{Q} \\ &= \rho + \frac{\rho}{n-\rho} C(n, \rho),\end{aligned}$$

ami egyszerű megfontolásokból is adódik, hiszen egy igény vagy várakozik, vagy kiszolgálás alatt van. A kiszolgálás alatt levők száma viszont megegyezik a foglalt kiszolgáló egységek számával. Ha $\bar{S}$ -gal jelöljük a szabad szerverek vagy kiszolgáló egységek átlagos számát, akkor

$$\begin{aligned}\bar{n} &= n - \bar{S}, \\ \bar{S} &= n - \frac{\lambda}{\mu},\end{aligned}$$

így

$$\bar{N} = n - \bar{S} + \bar{Q},$$

vagyis

$$\bar{N} - n = \bar{Q} - \bar{S}.$$

- A várakozási idő eloszlása

Egy érkező igénynek akkor kell várakoznia, ha a rendszerben legalább n igény tartózkodik. Mivel ebben az esetben a kiszolgálás $n\mu$ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó, az igény várakozási ideje, ha $n + j$ igény tartózkodik a rendszerben Erlang-eloszlású $j + 1$ és $n\mu$ paraméterekkel. Így a teljes valószínűség tétele alapján a várakozási idő sűrűségfüggvénye

$$f_W(x) = \sum_{j=0}^{\infty} P_{n+j}(n\mu)^{j+1} \frac{x^j}{j!} e^{-n\mu x}.$$

Behelyettesítve a stacionárius eloszlást

$$\begin{aligned} f_W(x) &= \sum_{j=0}^{\infty} P_0 \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} a^j (n\mu)^{j+1} \frac{x^j}{j!} e^{-n\mu x} \\ &= \frac{P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} n\mu e^{-n\mu x} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(an\mu x)^j}{j!} \\ &= \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} P_0 n\mu e^{-(n\mu - \lambda)x} \\ &= \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} P_0 n\mu e^{-n\mu(1-a)x} \\ &= \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} P_0 \frac{1}{1-a} n\mu(1-a) e^{-n\mu(1-a)x} \\ &= P(\text{sorbanállás}) n\mu(1-a) e^{-n\mu(1-a)x}. \end{aligned}$$

Vagyis

$$\begin{aligned} P(W > x) &= \int_x^{\infty} f_W(u) du = P(\text{sorbanállás}) e^{-n\mu(1-a)x} \\ &= C(n, \rho) \cdot e^{-\mu(n-\rho)x}. \end{aligned}$$

A várakozási idő eloszlásfüggvénye

$$\begin{aligned} F_W(x) &= 1 - P(\text{sorbanállás}) + P(\text{sorbanállás}) (1 - e^{-n\mu(1-a)x}) \\ &= 1 - P(\text{sorbanállás}) e^{-n\mu(1-a)x} = 1 - C(n, \rho) \cdot e^{-\mu(n-\rho)x}. \end{aligned}$$

Innen az átlagos várakozási idő

$$\bar{W} = \int_0^{\infty} x f_W(x) dx = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} P_0 \frac{1}{(1-a)^2 n\mu} = \frac{1}{\mu(n-\rho)} C(n, \rho).$$

- A tartózkodási idő eloszlása

A kiszolgálás azonnal elkezdődik, ha a rendszerben n -nél kevesebb igény tartózkodik, így stacionárius esetben egy érkező igény rendszerben eltöltött ideje megegyezik a kiszolgálási idővel. Azonban, ha várakoznia kell, akkor a várakozási idő és a kiszolgálási idő összege, vagyis az eloszlás két független eloszlás összege, mely közül az egyik μ paraméterű exponenciális, a másik pedig a rendszertől függő paraméterű Erlang-eloszlás. A tartózkodási idő sűrűségfüggvényét a következő módon határozzuk meg.

$$f_T(x) = P(\text{nincs sorbanállás})\mu e^{-\mu x} + f_{W+S}(x)$$

Tudjuk, hogy

$$f_W(x) = P(\text{sorbanállás})e^{-n\mu(1-a)x}n\mu(1-a).$$

Ekkor

$$\begin{aligned} f_{W+S}(z) &= \int_0^z f_W(x)\mu e^{-\mu(z-x)}dx = \\ &= P(\text{sorbanállás})n\mu(1-a)\mu \int_0^z e^{-n\mu(1-a)x}e^{-\mu(z-x)}dx = \\ &= \frac{\rho^n}{n!}P_0\frac{1}{(1-a)}n\mu(1-a)\mu e^{-z\mu} \int_0^z e^{-\mu(n-1-\lambda/\mu)x}dx = \\ &= \frac{\rho^n}{n!}P_0n\mu\frac{1}{n-1-\lambda/\mu}e^{-\mu z} (1 - e^{-\mu(n-1-\lambda/\mu)z}). \end{aligned}$$

Ezért

$$\begin{aligned} f_T(x) &= \left(1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{P_0}{n!(1-a)}\right)\mu e^{-\mu x} + \\ &+ \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!}n\mu P_0\frac{1}{n-1-\lambda/\mu}e^{-\mu x} (1 - e^{-\mu(n-1-\lambda/\mu)x}) = \\ &= \mu e^{-\mu x} \left(1 - \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0}{n!(1-a)} + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!}n P_0\frac{1}{n-1-\lambda/\mu} (1 - e^{-\mu(n-1-\lambda/\mu)x})\right) = \\ &= \mu e^{-\mu x} \left(1 + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0}{n!(1-a)} \frac{1 - (n - \lambda/\mu)e^{-\mu(n-1-\lambda/\mu)x}}{n-1-\lambda/\mu}\right). \end{aligned}$$

Így

$$P(T > x) = \int_x^\infty f_T(y)dy =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_x^\infty \mu e^{-\mu y} + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0}{n!(1-a)} \frac{1}{n-1-\lambda/\mu} \left(\mu e^{-\mu y} - \mu(n-\lambda/\mu) e^{-\mu(n-\lambda/\mu)y} \right) dy = \\
&= e^{-\mu x} + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 \frac{1}{n!(1-a)(n-1-\lambda/\mu)} (e^{-\mu x} - e^{-\mu(n-\lambda/\mu)x}) = \\
&= e^{-\mu x} \left(1 + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0}{n!(1-a)} \frac{1 - e^{-\mu(n-1-\lambda/\mu)x}}{n-1-\lambda/\mu} \right).
\end{aligned}$$

Innen

$$F_T(x) = 1 - P(T > x).$$

Továbbá

$$\bar{T} = \int_0^\infty x f_T(x) dx = \frac{1}{\mu} + \frac{1}{n\mu} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} P_0 \frac{1}{(1-a)^2} = \frac{1}{\mu} + \bar{W},$$

mint az várható volt.

Stacionárius esetben a távozó igények átlagos számának meg kell egyeznie az érkező igények átlagos számával, így a rendszerben tartózkodók átlagos száma állandó. Tehát annyi igény tartózkodik átlagosan a rendszerben, amennyi érkezik egy igény tartózkodási ideje alatt, vagyis

$$\lambda \bar{T} = \bar{N} = \bar{Q} + \bar{n},$$

továbbá

$$\lambda \bar{W} = \bar{Q}.$$

Ezek az ú.n. **Little-formulák**, melyeket számolás útján is könnyen bizonyíthatunk. Ugyanis, mint beláttuk

$$\bar{N} = \rho + P_0 \frac{\rho^n}{n!(1-a)^2} a.$$

Mivel

$$\bar{T} = \frac{1}{\mu} + \frac{1}{n\mu} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} P_0 \frac{1}{(1-a)^2},$$

így

$$\lambda \bar{T} = \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\rho^n}{n!} P_0 \frac{a}{(1-a)^2},$$

vagyis

$$\bar{N} = \lambda \bar{T},$$

mivel $\frac{\lambda}{\mu} = \rho$. Továbbá

$$\bar{Q} = \lambda \bar{W},$$

hiszen

$$\bar{n} = \rho.$$

- A szerverek *összkihasználtsága*

Egy szerver kihasználtsága nyilvánvalóan

$$U_s = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{n} P_k + \sum_{k=n}^{\infty} P_k = \frac{\bar{n}}{n} = a.$$

Így az összkihasználtság

$$U_n = nU_s = \bar{n}.$$

- A *foglaltsági periódushosszak*

A rendszert akkor nevezzük tétlennek, ha a rendszerben nem tartózkodik igény, minden más esetben foglaltnak nevezzük. Jelölje a $E\delta_r$ a rendszer átlagos foglaltsági periódushosszát. Ekkor (4) miatt a rendszer kihasználtsága

$$U_r = 1 - P_0 = \frac{E\delta_r}{\frac{1}{\lambda} + E\delta_r},$$

melyből

$$E\delta_r = \frac{1 - P_0}{\lambda P_0}.$$

Ha az egyes kiszolgáló egységeket tekintjük és feltesszük, hogy üres egységnél, szervernél ahhoz érkezik hamarabb igény, amely korábban vált üressé, akkor ha $j < n$ igény tartózkodik a rendszerben, a szabad szerverek száma $n - j$.

Tekintsünk egy konkrét szervert és tegyük fel, hogy a rendszerben j igény tartózkodik a szerver szabaddá válása pillanatában. Ekkor ezen szerver átlagos üresjárat ideje ilyen feltételek mellett

$$\bar{e}_j = \frac{n - j}{\lambda}.$$

Annak a valószínűsége, hogy ebben az állapotban van

$$a_j = \frac{P_j}{\sum_{i=0}^{n-1} P_i},$$

így egy szerver átlagos szabad periódushossza

$$\bar{e} = \sum_{j=0}^{n-1} a_j \bar{e}_j = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n - j) P_j}{\lambda \sum_{i=0}^{n-1} P_i} = \frac{\bar{S}}{\lambda P(e)},$$

ahol $P(e)$ annak a stacionárius valószínűsége, hogy egy érkező igénynek nem kell várakoznia. Ekkor ismét

$$U_s = a = \frac{E\delta}{\bar{e} + E\delta},$$

melyből

$$a\bar{e} = (1 - a)E\delta,$$

ahol a annak stacionárius valószínűsége, hogy a szerver nem üres, $E\delta$ pedig az átlagos foglaltsági periódushossza. Így

$$E\delta = \frac{a}{1-a} \frac{\bar{S}}{\lambda P(e)}.$$

$n = 1$ esetben

$$\bar{S} = 1 - a, \quad P(e) = P_0 = 1 - a, \quad a = \frac{\lambda}{\mu},$$

így

$$E\delta = \frac{1}{\mu - \lambda},$$

amely a jól ismert képlet.

A következő sorokban megmutatjuk, hogy milyen kapcsolat van az Erlang-féle veszteséges rendszer és a jelenlegi rendszer között, melyet szokás Erlang-féle várakozásos rendszernek is nevezni.

Először tárjuk fel a két formula közötti kapcsolatot! Nevezetesen

$$\begin{aligned} C\left(m, \frac{\lambda}{\mu}\right) &= \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m}{m!} \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{m\mu}} \frac{1}{\sum_{k=0}^{m-1} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{k!} + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m}{m!} \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{m\mu}}} = \frac{\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m}{m!}}{\sum_{k=0}^{m-1} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{k!} \left(1 - \frac{\lambda}{m\mu}\right) + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m}{m!}} \\ &= \frac{B(m, \frac{\lambda}{\mu})}{(1 - B(m, \frac{\lambda}{\mu})) \left(1 - \frac{\lambda}{m\mu}\right) + B(m, \frac{\lambda}{\mu})} = \frac{B(m, \frac{\lambda}{\mu})}{1 - \frac{\lambda}{m\mu} (1 - B(m, \frac{\lambda}{\mu}))}. \end{aligned}$$

Mint láttuk a $C(n, \rho)$, amely a várakozás valószínűségét jelenti nagyon fontos szerepet játszik a jellemzők meghatározásában. Az előző formula átírható az alábbi alakba

$$C(n, \rho) = \frac{nB(n, \rho)}{n - \rho + \rho B(n, \rho)},$$

sőt azt is be lehet bizonyítani, hogy

$$C(n, \rho) = \frac{\rho(n-1-\rho) \cdot C(n-1, \rho)}{(n-1)(n-\rho) - \rho C(n-1, \rho)},$$

amely a $C(1, \rho) = \rho$ kezdőértékből rekurzívan számolható.

Ha minőségi mutatónak $C(n, \rho)$ -t adjuk meg, akkor mindig létezik olyan n_α^* , melyre $C(n_\alpha^*, \rho) < \alpha$. Ha rendelkezésünkre áll számítógép a feladatot pillanatok alatt meg lehet oldani.

Mi azonban egy olyan eljárást mutatunk be, amit a döntéshozók könnyen használhatnak. Mint korábban is láttuk

$$B(n, \rho) \approx \frac{\varphi\left(\frac{n-\rho}{\sqrt{\rho}}\right)}{\sqrt{\rho}\phi\left(\frac{n-\rho}{\sqrt{\rho}}\right)}.$$

Legyen $k = \frac{n-\rho}{\sqrt{\rho}}$, így $n = \rho + \sqrt{\rho}k$. Ezért

$$\begin{aligned} C(n, \rho) &= \frac{nB(n, \rho)}{n - \rho + \rho B(n, \rho)} \approx \frac{(\rho + k\sqrt{\rho}) \frac{\varphi(k)}{\sqrt{\rho}\phi(k)}}{\rho + k\sqrt{\rho} - \rho + \rho \frac{\varphi(k)}{\sqrt{\rho}\phi(k)}} \\ &\approx \frac{\sqrt{\rho} \frac{\varphi(k)}{\phi(k)}}{\sqrt{\rho} \left(k + \frac{\varphi(k)}{\phi(k)}\right)} = \left(1 + k \frac{\phi(k)}{\varphi(k)}\right)^{-1}. \end{aligned}$$

Azaz, ha keresni akarunk olyan n_α^* -ot, amelyre $C(n_\alpha^*, \rho) < \alpha$, akkor az

$$\left(1 + k_\alpha \frac{\phi(k_\alpha)}{\varphi(k_\alpha)}\right)^{-1} \approx \alpha$$

egyenletet kell megoldani, amely ekvivalens a

$$k_\alpha \frac{\phi(k_\alpha)}{\varphi(k_\alpha)} = \frac{1 - \alpha}{\alpha}$$

egyenlettel. Ha adott k_α , akkor $n_\alpha^* = \rho + k_\alpha \sqrt{\rho}$.

Fontos megjegyezni, hogy k_α keresése független a ρ -tól és n -től, így különböző α -ra előre megadhatók.

Például ha $\alpha = 0.8, 0.5, 0.2, 0.1$, akkor a hozzájuk tartozó k_α -k rendre 0.1728, 0.5061, 1.062, 1.420.

Az $n_\alpha^* = \rho + k_\alpha \sqrt{\rho}$ képletet **négyzetgyök-szabálynak** is hívják, és nagyon jó közelítést ad, mint ahogyan a következő táblázat is mutatja.

2.1. táblázat. Az n^* pontos és közelítő értékei

	$\alpha = 0.5$		$\alpha = 0.2$		$\alpha = 0.1$	
	pontos	közelítő	pontos	közelítő	pontos	közelítő
$\rho = 1$	2	2	3	3	3	3
$\rho = 5$	7	7	8	8	9	9
$\rho = 10$	12	12	14	14	16	15
$\rho = 50$	54	54	58	58	61	61
$\rho = 100$	106	106	111	111	115	115
$\rho = 250$	259	259	268	267	274	273
$\rho = 500$	512	512	525	524	533	532
$\rho = 1000$	1017	1017	1034	1034	1046	1045

Nézzünk gyorsan egy példát, ahol jelentős többletkiadástól szabadulhatunk meg, ha alkalmazzuk a négyzetgyök-szabályt!

Vegyünk két call-centert, ahová először külön-külön érkeznek az ügyfelek. Ekkor összesen $2(\rho + k_\alpha \sqrt{\rho})$ ügyfélfogadót kellene alkalmazni. Ha azonban az ügyfeleket egyesítjük, akkor ugyanolyan szintű szolgáltatáshoz $2\rho + k_\alpha \sqrt{2\rho}$ kiszolgálót kell alkalmazni. A megtakarítás

$$(2 - \sqrt{2})k_\alpha \sqrt{\rho}$$

.

$C(n, \rho)$ nagyon fontos szerepet játszik a gyakorlati problémák megoldásában ezért külön úgynevezett kalkulátorokat írtak, melyek megtalálhatók a

<http://www.erlang.com/calculator/>

internet címen.

Java-applet a rendszerjellemzők meghatározására

<http://irh.inf.unideb.hu/user/jsztrik/education/09/applet/HMMc.html>

6. Példa. Adott egy 4 csatornás telefonközpont, $\lambda = 6$, $\mu = 2$.
Határozzuk meg a rendszer jellemzőit!

Megoldás:

$$P_0 = 0.0377, \quad \bar{Q} = 1.528, \quad \bar{N} = 4.528, \quad \bar{S} = 1, \quad \bar{n} = 3,$$

$$P(W > 0) = P(n \geq 4) = C(4, 3) = 0.509, \quad \bar{W} = 0.255 \text{ időegység}, \quad \bar{T} = 0.755 \text{ időegység},$$

$$U_n = \frac{3}{4}, \quad \bar{e} = 0.35 \text{ időegység}, \quad E\delta = 1.05 \text{ időegység},$$

$$E\delta_r = 4.2 \text{ időegység}, \quad U_r = 0.9623.$$

■

7. Példa. Egy repülőtér kifutópályáinak számát úgy kell meghatároznunk, hogy a leszállni kívánó repülőgép várakozásának valószínűsége 0.1-nél kisebb legyen. A befutások statisztikai vizsgálata megmutatta, hogy megengedhető a repülőgépek érkezését Poisson-eloszlással közelíteni. Óránként átlagosan $\lambda = 27$ érkezést mértek. A kifutópálya elfoglaltságának időtartamát exponenciális eloszlásúnak tételezzük felel 2 perc várható értékkel.

Megoldás:

Mivel az idő mértékegysége különböző először is mindkét helyen órára nézzük az intenzitásokat. Így az ismert képleteket $\mu = 30$ értékkel kell alkalmazni. $\frac{\lambda}{n\mu} < 1$ feltétel biztosítására $n > 1$ kell, hogy legyen.

Jelölje $P_i(W > 0)$ a várakozási valószínűségét i kifutópálya esetén. Számolással a megfelelő képletbe való helyettesítéssel a következő valószínűségeket kapjuk

$$P_2(W > 0) = 0.278, \quad P_3(W > 0) = 0.070, \quad P_4(W > 0) = 0.014.$$

Így a kívánt valószínűség eléréséhez $n = 3$ értéket kell tekinteni. $P_0 = 0.403$ lesz és ekkor $\bar{W} = 0.0665 \text{ perc}$, $\bar{Q} = 0.03$.

■

8. Példa. Egy üzlet pénztárához a vevők átlagban 6 másodpercenként érkeznek Poisson-eloszlás szerint. A kiszolgálási idejük exponenciális eloszlású, 20 másodperc átlaggal. Ha egy pénztár fenntartása óránként 100 Ft-ba kerül, és ugyanennyi a várakozási költség is, mennyi pénztárt kell üzemeltetni, hogy a teljes költség várható értéke minimális legyen? (Ez óránkénti költség lesz.)

Megoldás:

$$\overline{Q} = \lambda \overline{W} = 100 \times \frac{3600}{6} \overline{W}$$

$$E(TC) = 100 \times n = 100 \times 600 \times \overline{W}$$

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{20}} = \frac{20}{6} \text{ így } n \geq 4 .$$

Sorba véve az $n = 4, 5, 6, 7, 8$ értékeket, az óránkénti minimális várható költség $n = 5$ esetben adódik. Ekkor a rendszer jellemzői

$$\overline{W} = 3.9mp, \quad P(e) = 0.66, \quad P(W) = 0.34 ,$$

$$E\delta = 29.7mp, \quad \bar{e} = 14.9mp, \quad \overline{Q} = 0.65 ,$$

$$\bar{n} = 2.5, \quad \bar{N} = 3.15, \quad \bar{S} = 2.5, \quad E(TC) = 565 \text{ Ft/óra.}$$

■

2.8. Az $M/M/c/K$ rendszer

A következőkben az $M/M/c/K$ sorbanállási rendszerrel fogunk foglalkozni, amelynek specialitását az adja, hogy c darab kiszolgáló van, és legfeljebb K darab igény lehet a rendszerben egyszerre. A modellezés hasonló a végtelen kapacitású $M/M/c$ rendszeréhez azzal a különbséggel, hogy λ_n -nek nullának kell lennie ha $n \geq K$. Az előző rendszerekhez hasonlóan könnyű látni, hogy egyensúlyi állapot esetén a rendszerben tartózkodó igények számának az eloszlása a következő

$$P_n = \begin{cases} \frac{\lambda^n}{n! \mu^n} P_0, & \text{ha } 0 \leq n \leq c \\ \frac{\lambda^n}{c^{n-c} c! \mu^n} P_0, & \text{ha } c \leq n \leq K. \end{cases}$$

Amint azt láthatjuk a stacionáris valószínűségeknek $0 \leq n < c$ esetén Poisson-, míg $c \leq n \leq K$ esetén geometria eloszlás alakúak. Felhasználva azt, hogy a valószínűségek összegének 1-nek kell lennie kaphatjuk meg P_0 -t, vagyis

$$P_0 = \left(\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\lambda^n}{n! \mu^n} + \sum_{n=c}^K \frac{\lambda^n}{c^{n-c} c! \mu^n} \right)^{-1} .$$

Mivel P_0 számolásánál mindkét sor véges, így nincs szükség annak feltételezésére, hogy $\rho < 1$.

Hogy egyszerűsítsük a kapott formulát legyen $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$, $a = \frac{\rho}{c}$.

Ekkor

$$\sum_{n=c}^K \frac{\rho^n}{c^{n-c} c!} = \frac{\rho^c}{c!} \sum_{n=c}^K a^{n-c} = \begin{cases} \frac{\rho^c}{c!} \frac{1-a^{K-c+1}}{1-a}, & \text{ha } a \neq 1 \\ \frac{\rho^c}{c!} (K-c+1), & \text{ha } a = 1. \end{cases}$$

Így

$$P_0 = \begin{cases} \left[\frac{\rho^c}{c!} \frac{1-a^{K-c+1}}{1-a} + \sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} \right]^{-1}, & \text{ha } a \neq 1 \\ \left[\frac{\rho^c}{c!} (K-c+1) + \sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} \right]^{-1}, & \text{ha } a = 1. \end{cases}$$

Ezek után határozzuk meg a szokásos *rendszerjellemzőket* !

- Átlagos sorhossz

$$\begin{aligned} \bar{Q} &= \sum_{n=c+1}^K (n-c) P_n = \sum_{n=c+1}^K (n-c) \frac{\lambda^n}{c^{n-c} c! \mu^n} P_0 = \frac{P_0 \rho^c}{c!} \sum_{n=c+1}^K (n-c) \frac{\rho^{n-c}}{c^{n-c}} \\ &= \frac{P_0 \rho^c a}{c!} \sum_{n=c+1}^K (n-c) a^{n-c-1} = \frac{P_0 \rho^c a}{c!} \sum_{i=1}^{K-c} i a^{i-1} = \frac{P_0 \rho^c a}{c!} \frac{d}{da} \left(\sum_{i=0}^{K-c} a^i \right) \\ &= \frac{P_0 \rho^c a}{c!} \frac{d}{da} \left(\frac{1-a^{K-c+1}}{1-a} \right) \end{aligned}$$

vagy

$$\bar{Q} = \frac{P_0 \rho^c a}{c! (1-a)^2} [1 - a^{K-c+1} - (1-a)(K-c+1)a^{K-c}]$$

$a = 1$ esetén a L'Hopital szabályt kell alkalmazni kétszer.

- A rendszerben tartózkodó igények átlagos száma
Az $\bar{N}$ kiszámításához vegyük figyelembe, hogy az $M/M/c$ rendszer esetén $\bar{N} = \bar{Q} + \rho$. Azonban $M/M/c/K$ esetén ezt az eredményt módosítani kell, figyelembe véve azt, hogy az igények egy P_K hányada nem kerül be a rendszerbe, mivel azok akkor érkeznek, amikor már nincs hely a rendszerben. Látható, hogy az átlagos beérkezési intenzitás $\bar{\lambda} = \lambda(1 - P_K) = \mu \bar{c}$, ahol $\bar{c}$ a foglalt kiszolgálók átlagos száma. Jól ismert, hogy $\bar{N} = \bar{Q} + \bar{c}$, így $\bar{N} = \bar{Q} + \rho(1 - P_K)$.

- Átlagos tartózkodási és várakozási idők

Az átlagos idők meghatározáshoz használjuk fel a **Little-formulákat**, vagyis

$$\begin{aligned} \bar{T} &= \frac{\bar{N}}{\lambda(1 - P_K)} \\ \bar{W} &= \frac{\bar{Q}}{\lambda(1 - P_K)} \end{aligned}$$

$M/M/1/K$ esetén az előző eredmények lényegesen leegyszerűsödnek a következőkre

$$P_0 = \begin{cases} \frac{1-a}{1-a^{K+1}}, & (a \neq 1) \\ \frac{1}{K+1}, & (a = 1) \end{cases}$$

$$P_n = \begin{cases} \frac{(1-a)a^n}{1-a^{K+1}}, & (a \neq 1) \\ \frac{1}{K+1}, & (a = 1) \end{cases}$$

$$\bar{Q} = \begin{cases} \frac{a}{1-a} - \frac{a(Ka^K+1)}{1-a^{K+1}}, & (a \neq 1) \\ \frac{K(K-1)}{2(K+1)}, & (a = 1) \end{cases}$$

$$\bar{N} = \bar{Q} + (1 - P_0).$$

Az utolsó egyenlet abból következik, hogy $1 - P_0 = \lambda(1 - P_K)/\mu$ azaz $\mu(1 - P_0) = \lambda(1 - P_K)$, amely azt mutatja, hogy a rendszer átlagos kiszolgálási intenzitása megegyezik a tényleges átlagos beérkezési intenzitással, ami egyébként minden stabil születési-halálozási folyamatra igaz.

- Érkezési pillanatban vett valószínűségek
Az érkezési pillanatban lévő Π_n valószínűségek meghatározásánál figyelembe kell venni, hogy K -nál lévő vágás miatt a beérkezés nem Poisson már, így $\Pi_n \neq P_n$. A számolásnál a Bayes-tételt fogjuk felhasználni.

$$\begin{aligned} \Pi_n &\equiv P(\text{n darab igény van a rendszerben} | \text{igény fog érkezni a rendszerbe}) \\ &= \frac{P(\text{igény fog érkezni} | \text{n darab igény a rendszerben})P_n}{\sum_{n=0}^{K-1} P(\text{igény fog érkezni} | \text{n darab igény a rendszerben})P_n} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\{ \frac{[\lambda \Delta t + o(\Delta t)]P_n}{\sum_{n=0}^{K-1} [\lambda \Delta t + o(\Delta t)]P_n} \right\} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\{ \frac{[\lambda + o(\Delta t)/\Delta t]P_n}{\sum_{n=0}^{K-1} [\lambda + o(\Delta t)/\Delta t]P_n} \right\} \\ &= \frac{\lambda P_n}{\lambda \sum_{n=0}^{K-1} P_n} \\ &= \frac{P_n}{1 - P_K} \quad (n \leq K - 1) \end{aligned}$$

$M/M/c/\infty$ esetén $\Pi_n = P_n$ összefüggést kapnánk mivel ebben az esetben $P_K = 0$ -hoz tart.

- A várakozási idő eloszlásfüggvénye
 $F_W(t)$ meghatározáshoz használjuk fel, hogy a rendszer már nem fogad igényt ha K darab igény van a rendszerben. A szokásos módon, a teljes valószínűség tételét alkalmazva nyerjük

$$F_W(t) = P(W \leq t) = F_W(0) + \sum_{n=c}^{K-1} P(n - c + 1 \text{ befejezett kiszolgálás} \leq t \text{ idő alatt} | \text{az új igény } n \text{ darab igényt talál a rendszerben}) \Pi_n$$

$$\begin{aligned}
F_W(t) &= F_W(0) + \sum_{n=c}^{K-1} \Pi_n \int_0^t \frac{c\mu(c\mu x)^{n-c}}{(n-c)!} e^{-c\mu x} dx \\
&= F_W(0) + \sum_{n=c}^{K-1} \Pi_n \left(1 - \int_t^\infty \frac{c\mu(c\mu x)^{n-c}}{(n-c)!} e^{-c\mu x} dx \right).
\end{aligned}$$

Felhasználva, hogy

$$\int_t^\infty \frac{\lambda(\lambda x)^m}{m!} e^{-\lambda x} dx = \sum_{i=0}^m \frac{(\lambda t)^i e^{-\lambda t}}{i!}$$

és az $m = n - c$, $\lambda = c\mu$ helyettesítéseket alkalmazva kapjuk, hogy

$$\int_t^\infty \frac{c\mu(c\mu x)^{n-c}}{(n-c)!} e^{-c\mu x} dx = \sum_{i=0}^{n-c} \frac{(c\mu t)^i e^{-c\mu t}}{i!},$$

így

$$\begin{aligned}
F_W(t) &= F_W(0) + \sum_{n=c}^{K-1} \Pi_n - \sum_{n=c}^{K-1} \Pi_n \sum_{i=0}^{n-c} \frac{(c\mu t)^i e^{-c\mu t}}{i!} \\
&= 1 - \sum_{n=c}^{K-1} \Pi_n \sum_{i=0}^{n-c} \frac{(c\mu t)^i e^{-c\mu t}}{i!}.
\end{aligned}$$

Hasonlóan határozható meg a tartózkodási idő eloszlásfüggvénye, valamint az érintett idők Laplace-transzformáltjai azzal a módosítással, hogy az Erlang-eloszlások sűrűségfüggvénye helyett azok Laplace-transzformáltjait kell beírunk.

Java-applet a rendszerjellemzők meghatározására

<http://irh.inf.unideb.hu/user/jsztrik/education/09/applet/HMMcK.html>

2.9. Az $M/G/1$ rendszer

Eddig olyan rendszereket vettünk, ahol mind a beérkezési mind a kiszolgálási idők exponenciális eloszlásúak voltak, azonban a gyakorlatban az exponenciális eloszlású kiszolgálási idők csak ritkán fordulnak elő, mivel legtöbbször a szóródási együttható értéke kisebb mint 1, így fontos az elméletet kiterjeszteni olyan esetekre is, ahol a kiszolgálás tetszőleges eloszlású. Ebben a fejezetben Poisson érkezéseket alkalmazunk valamint független általános eloszlású kiszolgálási időket.

Hatékonysági mérőszámok mint az átlagos várakozási idő vagy átlagos sorhossz, hasonlóan az $M/M/1$ rendszerhez a közép értékes módszer segítségével kiszámolhatóak. Egy beérkező igénynek először ki kell várnia az éppen kiszolgálás alatt álló igény kiszolgálásának végét, valamint az összes sorban elhelyezkedő igény kiszolgálását. A PASTA (Poisson Arrivals See Time Average), vagyis, hogy az érkezési pillanatban vett eloszlás megegyezik a tetszőleges pillanatban vett eloszlással, tulajdonságból tudjuk, hogy ρ valószínűséggel talál az érkező igény legalább egy másik igényt kiszolgálás alatt.

Little-formula

Bebizonyítunk egy általános eredményt, az első **Little-formulát**, ami a beérkezési intenzitás, a rendszerben tartózkodó igények számának várható értéke és az igények rendszerbeli idejének várható értéke között ad meg egy egyszerű összefüggést.

Legyen $\alpha(t)$ a $(0, t)$ intervallum alatt beérkezett igények száma, $\delta(t)$ a $(0, t)$ intervallum alatt a rendszerből kilépett igények száma. $N(0) = 0$ -t feltéve nyilvánvalóan $N(t) = \alpha(t) - \delta(t)$.

Jelölje a $(0, t)$ intervallumban az átlagos beérkezési intenzitást

$$\bar{\lambda}_t := \frac{\alpha(t)}{t}.$$

$\gamma(t)$ legyen a t pillanatig felgyűlt összes igényidő, pontosabban az az idő, amit a $(0, t)$ időtartam során az igények összesen eltöltöttek a rendszerben. A $\bar{T}_t$ mennyiség legyen az egy igényre eső rendszerbeli idő átlaga, a $(0, t)$ intervallum összes igényét figyelembe véve. Ezekből nyilván

$$\bar{T}_t = \frac{\gamma(t)}{\alpha(t)}.$$

Végül legyen $\bar{N}_t$ a rendszerben tartózkodó igények átlagos száma a $(0, t)$ intervallumban:

$$\bar{N}_t = \frac{\gamma(t)}{t}.$$

Az utolsó három egyenletből

$$\bar{N}_t = \bar{\lambda}_t \bar{T}_t.$$

Sorbanállási rendszerünkben (ergodikusság esetén) léteznek az alábbi határértékek

$$\bar{\lambda} = \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\lambda}_t, \quad \bar{T} = \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{T}_t.$$

Így

$$\bar{N} = \bar{\lambda} \bar{T},$$

amelyet **Little-formulának** nevezünk.

A beágyazott Markov-láncok

A rendszer állapotát a rendszerben tartózkodó igények számaként - $N(t)$ - értelmezve megfigyelhetjük a rendszer állapotváltozásait az idő függvényében. Ezek a változások közvetlen szomszéd típusúak, azaz ha k igény van éppen a rendszerben, akkor a következő állapotában $k + 1$ vagy $k - 1$ lesz. A $k \rightarrow k + 1$ típusú átlépések száma legfeljebb eggyel különbözhet a $k + 1 \rightarrow k$ típusú átlépések számától, ezért ha a rendszer elég sokáig működik, akkor a felfelé irányuló átlépések relatív gyakoriságának meg kell egyeznie a lefelé irányuló átmenetek relatív gyakoriságával. Így arra következtethetünk, hogy a beérkezések időpontjában észlelt rendszerállapot eloszlása (Π_k) meg kell, hogy egyezzen a távozások időpontjában észlelt rendszerállapot határeloszlásával (D_k) .

Igazak a következő megállapítások

1. Poisson-folyamatú beérkezések esetén

$$P(N(t) = k) = P(\text{egy } t \text{ pillanatbeli beérkezés } k \text{ igényt talál a rendszerben}).$$

2. Ha egy általános rendszerben $N(t)$ az értékeit mindig csak eggyel változtatja és létezik a következő határeloszlások egyike, akkor a másik is létezik, és ezen határeloszlások egyenlők:

$$\Pi_k := \lim_{t \rightarrow \infty} P(t \text{ pillanatbeli beérkezés } k \text{ igényt talál a rendszerben}),$$

$$D_k := \lim_{t \rightarrow \infty} P(t \text{ pillanatbeli távozás } k \text{ igényt hagy maga mögött}),$$

$$\Pi_k = D_k.$$

Így az $M/G/1$ rendszerre

$$\Pi_k = P_k = D_k,$$

azaz a beérkezések, a távozások és a véletlenszerű megfigyelések egyensúlyi állapotban a rendszerbeli igények számának ugyanazt az eloszlását figyelik meg.

Fontosságuk miatt mind a két állítást bebizonyítjuk. Nézzük először az 1-et.

Vezessük be a következő jelöléseket

$$P_k(t) := P(N(t) = k),$$

$$\Pi_k(t) := P(\text{egy } t \text{ pillanatbeli beérkezés } k \text{ igényt talál a rendszerben}).$$

Legyen $A(t, t + \Delta t)$ az az esemény, hogy egy beérkezés történik a $(t, t + \Delta t)$ intervallumban. Ekkor

$$\Pi_k(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} P(N(t) = k \mid A(t, t + \Delta t)).$$

Felhasználva a feltételes valószínűség definícióját

$$\begin{aligned} \Pi_k(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(N(t) = k, A(t, t + \Delta t))}{P(A(t, t + \Delta t))} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(A(t, t + \Delta t) \mid N(t) = k) P(N(t) = k)}{P(A(t, t + \Delta t))}. \end{aligned}$$

Az emlékeztetnélküliség miatt az $A(t, t + \Delta t)$ esemény nem függ a t pillanatban a rendszerben tartózkodó igények számától, ezért

$$P(A(t, t + \Delta t) \mid N(t) = k) = P(A(t, t + \Delta t)),$$

így

$$\Pi_k(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} P(N(t) = k),$$

azaz

$$\Pi_k(t) = P_k(t).$$

Ez természetesen a stacionárius valószínűségekre is igaz, azaz

$$\Pi_k = \lim_{t \rightarrow \infty} \Pi_k(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} P_k(t) = P_k.$$

2-t is bebizonyítjuk, az 1. felhasználásával. Jelölje $\hat{R}_k(t)$ a k állapotban lévő rendszerbe történő beérkezések számát a $(0, t)$ intervallumban, és $\hat{D}_k(t)$ a $(0, t)$ intervallumban azon távozások számát, melyek után a rendszer az k állapotba kerül. Feltételünkéből következik, hogy

$$(2.6) \quad |\hat{R}_k(t) - \hat{D}_k(t)| \leq 1.$$

Továbbá, ha az összes távozások számát $D(t)$, az összes beérkezéseket pedig $R(t)$ jelöli, akkor

$$D(t) = R(t) + N(0) - N(t).$$

A távozási pontokban észlelt határeloszlás felírható a következőképpen

$$D_k = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\hat{D}_k(t)}{D(t)}.$$

Ha a számlálóhoz hozzáadunk és le is vonunk belőle $\hat{R}_k(t)$ -t, és a nevezőt felírjuk a fenti alakban, akkor

$$\frac{\hat{D}_k(t)}{D(t)} = \frac{\hat{R}_k(t) + \hat{D}_k(t) - \hat{R}_k(t)}{R(t) + N(0) - N(t)}.$$

Mivel $N(0)$ véges és $N(t)$ -nek is annak kell lennie a stacionaritás feltétele miatt, (2.6)-ból és abból, hogy $\hat{R}(t) \rightarrow \infty$, egy valószínűséggel következik

$$D_k = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\hat{D}_k(t)}{D(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\hat{R}_k(t)}{R(t)} = \Pi_k.$$

Innen, az 1. pontot is felhasználva kapjuk az állításunkat.

Várható értékes megközelítés

Jelölje az S valószínűségi változó a kiszolgálási időt, R a fennmaradó (hátralevő) kiszolgálási időt. Az eddigiekhez hasonlóan könnyű látni, hogy

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(W) &= \sum_{k=1}^{\infty} (\mathbb{E}(R) + (k-1)\mathbb{E}(S)) \Pi_k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}(R) P_k + \left(\sum_{k=1}^{\infty} (k-1) P_k \right) \mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(R) \rho + \mathbb{E}(Q) \mathbb{E}(S), \end{aligned}$$

ahol $\mathbb{E}(R)$ a hátramaradt kiszolgálási idő várható értéke.

A Little-törvényt felhasználva,

$$\mathbb{E}(Q) = \lambda \mathbb{E}(W).$$

Ezekből pedig az következik, hogy

$$(2.7) \quad \mathbb{E}(W) = \frac{\rho \mathbb{E}(R)}{1 - \rho}.$$

A(2.7) formulát **Pollaczek-Hincsin várható érték formulának** nevezzük. A következő részben megmutatjuk, hogy

$$(2.8) \quad \mathbb{E}(R) = \frac{\mathbb{E}(S^2)}{2\mathbb{E}(S)},$$

amely a következő formában is írható

$$(2.9) \quad \mathbb{E}(R) = \frac{\mathbb{E}(S^2)}{2\mathbb{E}(S)} = \frac{\mathbb{D}^2(S) + \mathbb{E}^2(S)}{2\mathbb{E}(S)} = \frac{1}{2}(C_S^2 + 1)\mathbb{E}(S),$$

ahol C_S^2 a kiszolgálási idő relatív szórásnégyzetét jelöli. Fontos észrevétel, hogy az átlagos várakozási idő a kiszolgálási idő első két momentumától függ. Tehát nem elég tudni csak a kiszolgálási idő átlagát, de még a szórását is ismerni kell az átlagos várakozási idő kiszámításához.

Ezek után

$$\mathbb{E}(W) = \frac{\rho \mathbb{E}(R)}{1 - \rho} = \frac{\rho}{2(1 - \rho)}(C_S^2 + 1)\mathbb{E}(S).$$

Ebből a Little-formulát alkalmazva nyerjük az összefüggést az átlagos sorhosszra, vagyis

$$\mathbb{E}(Q) = \frac{\rho^2}{1 - \rho} \frac{C_S^2 + 1}{2}.$$

Az átlagos tartózkodási idő és a rendszerben tartózkodó igények várható száma nyilvánvalóan

$$\mathbb{E}(T) = \frac{\rho}{1 - \rho} \frac{C_S^2 + 1}{2} \mathbb{E}(S) + \mathbb{E}(S),$$

$$\mathbb{E}(N) = \rho + \frac{\rho^2}{1 - \rho} \frac{C_S^2 + 1}{2}.$$

9. Példa. *Exponenciális kiszolgálási idők esetén $C_S^2 = 1$, így $\mathbb{E}(R) = \mathbb{E}(S)$ az örökifjú tulajdonság miatt. Ebben az esetben a következőket kapjuk*

$$\mathbb{E}(W) = \frac{\rho}{1 - \rho} \mathbb{E}(S), \quad \mathbb{E}(Q) = \frac{\rho^2}{1 - \rho}, \quad \mathbb{E}(T) = \frac{1}{1 - \rho} \mathbb{E}(S), \quad \mathbb{E}(N) = \frac{\rho}{1 - \rho}.$$

10. Példa. *Állandó kiszolgálási idők esetén $C_S^2 = 0$, így $\mathbb{E}(R) = \mathbb{E}(S)/2$. Ebben az esetben a következőket kapjuk*

$$\mathbb{E}(W) = \frac{\rho}{1 - \rho} \frac{\mathbb{E}(S)}{2}, \quad \mathbb{E}(Q) = \frac{\rho^2}{2(1 - \rho)}$$

$$\mathbb{E}(T) = \frac{1}{1 - \rho} \frac{\mathbb{E}(S)}{2} + \mathbb{E}(S), \quad \mathbb{E}(N) = \rho + \frac{\rho^2}{2(1 - \rho)}.$$

Az $M/G/1$ rendszer esetében láttuk, hogy

$$\Pi_k = D_k = P_k, \quad k = 0, 1, \dots$$

ezért a rendszerben tartózkodó igények számának generátorfüggvénye egyenlő a távozási pillanatban vett eloszlás generátorfüggvényével. Az is világos, hogy a rendszerben a távozás pillanatában annyi igény tartózkodik, amennyi bejött az éppen távozó igény tartózkodási ideje alatt. Ezért

$$D_k = P_k = \int_0^{\infty} \frac{(\lambda x)^k}{k!} e^{-\lambda x} f_T(x) dx.$$

Az ehhez tartozó generátorfüggvény

$$\begin{aligned} G_N(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} z^k \int_0^{\infty} \frac{(\lambda x)^k}{k!} e^{-\lambda x} f_T(x) dx \\ &= \int_0^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda x z)^k}{k!} e^{-\lambda x} f_T(x) dx \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\lambda(1-z)x} f_T(x) dx = L_T(\lambda(1-z)), \end{aligned}$$

vagyis kifejezhető a tartózkodási idő Laplace-transzformáltjának a segítségével. A generátorfüggvény és a Laplace-transzformált tulajdonságai miatt

$$G_N^{(k)}(1) = \mathbb{E}(N(N-1)\dots(N-k+1)) = (-1)^k L_T^{(k)}(0) \lambda^k = \lambda^k \mathbb{E}(T^k).$$

Ebből az első deriváltra éppen a Little-formulát kapjuk, vagyis

$$\overline{N} = \lambda \overline{T}.$$

A képlet segítségével N magasabb momentumait, így a szórásnégyzetét is ki tudjuk számítani, ha ismerjük T magasabb momentumait.

Hátralévő kiszolgálási idő

Tegyük fel, hogy egy igény akkor érkezik, amikor egy másik épp kiszolgálás alatt áll és jelölje ennek a teljes kiszolgálási idejét X , vagyis ez egy megkülönböztetett kiszolgálási idő, olyan amelyikben igény érkezik. Jelölje $f_X(x)$ az X sűrűségfüggvényét, mely kiszámításhoz a kulcs az, hogy nagyobb a valószínűsége annak, hogy az igény akkor érkezik, amikor egy hosszú kiszolgálás van, mint annak, hogy rövid kiszolgálás történik. Tehát annak, hogy X x ideig tart arányosnak kell lennie x -el valamint az x hosszúságú kiszolgálási idők gyakoriságával, amelyet $f_S(x) dx$ jelöl. Így a következőket írhatjuk fel

$$P(x \leq X \leq x + dx) = f_X(x) dx = C x f_S(x) dx,$$

ahol C a normalizáló konstans. Vagyis

$$C^{-1} = \int_{x=0}^{\infty} x f_S(x) dx = E(S),$$

ezért

$$f_X(x) = \frac{x f_S(x)}{E(S)}.$$

Ebből az következik, hogy

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{\infty} x f_X(x) dx = \frac{1}{\mathbb{E}(S)} \int_0^{\infty} x^2 f_S(x) dx = \frac{\mathbb{E}(S^2)}{\mathbb{E}(S)}.$$

Mivel az új igény beérkezése véletlenszerűen helyezkedik el az S kiszolgálási időn belül így a hátralevő kiszolgálási idő várható értéke

$$\mathbb{E}(R) = \frac{\mathbb{E}(X)}{2} = \frac{\mathbb{E}(S^2)}{2\mathbb{E}(S)}$$

11. Példa. r, μ paraméterű Erlang-eloszlású kiszolgálási idők esetén

$$\mathbb{E}(S) = \frac{r}{\mu}, \quad \mathbb{D}^2(S) = \frac{r}{\mu^2},$$

így

$$\mathbb{E}(S^2) = \mathbb{D}^2(S) + \mathbb{E}^2(S) = \frac{r(1+r)}{\mu^2}$$

vagyis

$$\mathbb{E}(R) = \frac{1+r}{2\mu}.$$

Látható, hogy a fenti módszerrel meg tudjuk határozni a hátralevő kiszolgálási idő sűrűségfüggvényét is, hiszen mivel a beérkezést egyenletesnek tételeztük fel

$$P(x \leq X \leq x+dx, y \leq R \leq y+dy) = \frac{dy}{x} f_X(x) dx,$$

amelyből behelyettesítés után és x szerint integrálva kapjuk, hogy

$$f_R(y) = \frac{1 - F_S(y)}{\mathbb{E}(S)}.$$

Így

$$\mathbb{E}(R) = \int_0^{\infty} x f_R(x) dx = \int_0^{\infty} x \frac{1 - F_S(x)}{\mathbb{E}(S)} dx,$$

ebből

$$\mathbb{E}(R) = \frac{\mathbb{E}(S^2)}{2\mathbb{E}(S)}.$$

Mutassuk meg, hogyan számolhatók az ilyen típusú integrálok !

Legyen X egy tetszőleges, nemnegatív valószínűségi változó, amelynek létezik az n -dik momentuma, ekkor

$$\int_0^{\infty} x^n f(x) dx = \int_0^y x^n f(x) dx + \int_y^{\infty} x^n f(x) dx,$$

így

$$\int_y^{\infty} x^n f(x) dx = \int_0^{\infty} x^n f(x) dx - \int_0^y x^n f(x) dx.$$

Mivel

$$\int_y^{\infty} x^n f(x) dx \geq y^n \int_y^{\infty} f(x) dx = y^n (1 - F(y)),$$

ezért

$$0 \leq y^n (1 - F(y)) \leq \int_0^{\infty} x^n f(x) dx - \int_0^y x^n f(x) dx,$$

melyből

$$0 \leq \lim_{y \rightarrow \infty} y^n (1 - F(y)) \leq \int_0^{\infty} x^n f(x) dx - \lim_{y \rightarrow \infty} \int_0^y x^n f(x) dx,$$

azaz

$$\lim_{y \rightarrow \infty} y^n (1 - F(y)) = 0.$$

Ezek után parciális integrálást alkalmazva és figyelembe véve az iménti határértéket, kapjuk

$$\int_0^{\infty} x^{n-1} (1 - F(x)) dx = \int_0^{\infty} \frac{x^n}{n} f(x) dx = \frac{\mathbb{E}(X^n)}{n}.$$

Ebből $n = 2$ helyettesítést véve nyerjük, hogy

$$\mathbb{E}(R) = \frac{\mathbb{E}(S^2)}{2\mathbb{E}(S)}$$

Pollaczek-Hincsin és Takács formulák

A következő összefüggéseket szokás **Pollaczek-Hincsin transzformált egyenleteknek** is nevezni.

$$G_N(z) = L_S(\lambda - \lambda z) \frac{(1 - \rho)(1 - z)}{L_S(\lambda - \lambda z) - z},$$

$$L_T(t) = L_S(t) \frac{t(1 - \rho)}{t - \lambda + \lambda L_S(t)},$$

$$L_W(t) = \frac{t(1 - \rho)}{t - \lambda + \lambda L_S(t)},$$

melyekből deriválással a momentumok meghatározhatók és szerencsésebb esetekben a sűrűség- illetve az eloszlásfüggvények is.

Takács Lajos megmutatta, hogy

$$\mathbb{E}(W^k) = \frac{\lambda}{1-\rho} \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} \frac{\mathbb{E}(S^{i+1})}{i+1} \mathbb{E}(W^{k-i})$$

vagyis, hogy a várakozási idő momentumai a már meghatározott alacsonyabb rendű momentumok és a kiszolgálási idő megfelelő momentumai segítségével áll elő. Azt is láthatjuk, hogy a kiszolgálási időtől 1-el magasabb momentum létezését tételezzük fel. Mivel $T = W + S$ és W, S függetlenek, ezért

$$\mathbb{E}(T^k) = \sum_{l=0}^k \binom{n}{l} \mathbb{E}(W^l) \cdot \mathbb{E}(S^{k-l}),$$

így a tartózkodási idő magasabb momentumai is kiszámíthatók.

Ezen formulák alapján nem nehéz belátni, hogy

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(W) &= \frac{\lambda \mathbb{E}(S^2)}{2(1-\rho)} = \frac{\rho \mathbb{E}(S)}{1-\rho} \left(\frac{1 + C_S^2}{2} \right), \\ \mathbb{E}(T) &= \mathbb{E}(W) + \mathbb{E}(S), \\ \mathbb{E}(W^2) &= 2(\overline{W})^2 + \frac{\lambda \mathbb{E}(S^3)}{3(1-\rho)}, \\ \mathbb{E}(T^2) &= \mathbb{E}(W^2) + \frac{\mathbb{E}(S^2)}{1-\rho}, \\ \mathbb{D}^2(W) &= \mathbb{E}(W^2) - (\mathbb{E}(W))^2, \\ \mathbb{D}^2(T) &= \mathbb{D}^2(W + S) = \mathbb{D}^2(W) + \mathbb{D}^2(S). \end{aligned}$$

Az

$$\mathbb{E}(N(N-1)) = \lambda^2 \mathbb{E}(T^2)$$

alapján hosszadalmas számolással nyerjük, hogy

$$\mathbb{D}^2(N) = \frac{\lambda \mathbb{E}(S^3)}{3(1-\rho)} + \left(\frac{\lambda \mathbb{E}(S^2)}{2(1-\rho)} \right)^2 + \frac{\lambda(3-2\rho)\mathbb{E}(S^2)}{2(1-\rho)} + \rho(1-\rho).$$

Mivel

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Q^2) &= \sum_{k=1}^{\infty} (k-1)^2 P_k = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 P_k - 2 \sum_{k=1}^{\infty} k P_k + \sum_{k=1}^{\infty} P_k \\ &= \mathbb{E}(N^2) - 2\overline{N} + \rho \end{aligned}$$

ezért ismét hosszadalmas számolás révén

$$\mathbb{D}^2(Q) = \frac{\lambda \mathbb{E}(S^3)}{3(1-\rho)} + \left(\frac{\lambda \mathbb{E}(S^2)}{2(1-\rho)} \right)^2 + \frac{\lambda \mathbb{E}(S^2)}{2(1-\rho)}$$

adódik.

Most vizsgáljuk meg a foglaltsági idő Laplace-transzformáltját!

Takács Lajos bebizonyította, hogy

$$L_\delta(t) = L_S(t + \lambda - \lambda L_\delta(t)),$$

vagyis $L_\delta(t)$ explicite nem adható meg, hanem egy függvényegyenletet kell megoldanunk. Azonban ennek segítségével δ magasabb momentumai meghatározhatók.

Nézzük meg $\mathbb{E}(\delta)$ -t! A jól ismert okok miatt

$$\begin{aligned} L'_\delta(0) &= (1 - \lambda L'_\delta(0)) L'_S(0) \\ \mathbb{E}(\delta) &= (1 + \lambda \mathbb{E}(\delta)) \mathbb{E}(S) \\ \mathbb{E}(\delta) &= \frac{\mathbb{E}(S)}{1 - \rho} = \frac{1}{\lambda} \frac{\rho}{1 - \rho} \end{aligned}$$

amit már korábban is megkaptunk az

$$\frac{\mathbb{E}(\delta)}{\frac{1}{\lambda} + \mathbb{E}(\delta)} = \rho$$

relációból.

Hosszabb számolás után megmutatható, hogy

$$\mathbb{D}^2(\delta) = \frac{\mathbb{D}^2(S) + \rho(\mathbb{E}(S))^2}{(1 - \rho)^3}.$$

Ezek után nézzük meg a foglaltsági idő alatt kiszolgált igények számának a generátorfüggvényét!

Bebizonyítható, hogy

$$G_{N_d(\delta)}(z) = z L_S(\lambda - \lambda G_{N_d(\delta)}(z))$$

függvényegyenletet nyerjük, amit nehéz megoldani, de ebből deriválással a magasabb momentumok meghatározhatók.

Így

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(N_d(\delta)) &= 1 + \lambda \mathbb{E}(S) \mathbb{E}(N_d(\delta)) \\ \mathbb{E}(N_d(\delta)) &= \frac{1}{1 - \rho}, \end{aligned}$$

amit az

$$\mathbb{E}(\delta) = \mathbb{E}(S) \mathbb{E}(N_d(\delta))$$

relációból is nyerhetünk, mint láttuk előzőleg, hiszen

$$\frac{1}{\lambda} \frac{\rho}{1-\rho} = \mathbb{E}(S) \cdot \mathbb{E}(N_d(\delta))$$
$$\mathbb{E}(N_d(\delta)) = \frac{\rho}{\rho(1-\rho)} = \frac{\rho}{1-\rho}.$$

Kissé hosszú számolás után megmutatható, hogy

$$\mathbb{D}^2(N_d(\delta)) = \frac{\rho(1-\rho) + \lambda^2 \mathbb{E}(S^2)}{(1-\rho)^3}.$$

Érdekességképpen megjegyezzük, hogy a $\mathbb{D}^2(\delta)$, $\mathbb{D}^2(N_d(\delta))$ kiszámolásához nem kellett feltételezni $\mathbb{E}(S^3)$ -t, míg $\mathbb{D}^2(N)$, $\mathbb{D}^2(Q)$, $\mathbb{D}^2(T)$, $\mathbb{D}^2(W)$ -hez szükségünk volt rá.

Java-applet a rendszerjellemzők meghatározására

<http://irh.inf.unideb.hu/user/jsztrik/education/09/3f14.html>

3. fejezet

Véges-forrású rendszerek

Eddig olyan rendszerekkel foglalkoztunk, ahol a beérkezések Poisson-folyamat szerint történnek. Ez más szóval azt is jelenti, hogy a forrásunk végtelen. Azonban a gyakorlatban is találhatók olyan problémák, amelyeknél a *forrás véges*. Tekintsük az ún. *gépkiszolgálási problémát*. Tegyük fel, hogy n darab gép működik egymástól függetlenül. A gépek működési ideje valószínűségi változó. Miután a gép meghibásodik egy vagy több szerelő kijavítja, ahol a javítási idők is valószínűségi változók. Javítás után a gépek ismét dolgozni kezdenek, és az egész folyamat kezdődik előről. Látható, hogy teljesen hasonló problémával találkozunk a terminál-rendszereknél, ahol a gépek szerepét a terminálok, a szerelő szerepét a CPU veszi át. Mivel az utóbbi időben a számítógépek sztochasztikus modellezésében egyre nagyobb szerepet játszanak a sorbanállási rendszerek, jelen fejezetben gyakran használunk számítástechnikai kifejezéseket is.

Jelen problémakör a sorbanállási elmélet egyik legrégebb alkalmazási területe. Nagyon sok könyv és cikk foglalkozik vele különböző feltételek esetén. Összefoglaló áttekintést nyújt Sztrik János összegyűjtött irodalomjegyzéke, amely megtalálható az alábbi helyen

<http://irh.inf.unideb.hu/user/jsztrik/research/fsqreview.pdf>

3.1. Az $M/M/r/r/n$ modell, Engset-féle veszteséges rendszer

Az $M/M/r/r/n$ rendszer esetén előfordulhat, hogy ha nincs szabad kiszolgáló az igényt nem tudjuk kiszolgálni ezért visszatér a forrásba, ahonnan ismét kiszolgálásra jelentkezik majd. A végtelen forrású rendszerekhez képest itt az igény nem vész el, hanem visszatér a forrásba. Könnyű látni, hogy a rendszerben tartózkodó igények száma szintén születési-halálózási folyamat lesz a következő intenzitásokkal

$$\begin{aligned}\lambda_k &= (n - k)\lambda & , & & 0 \leq k < r, \\ \mu_k &= k\mu & , & & 1 \leq k \leq r,\end{aligned}$$

ezért

$$P_k = \binom{n}{k} \rho^k P_0, \quad 0 \leq k \leq r,$$

$$P_k = \frac{\binom{n}{k} \rho^k}{\sum_{i=0}^r \binom{n}{i} \rho^i},$$

amit csonkított binomiális eloszlásnak vagy **Engset-eloszlásnak** is neveznek.

Ez a véges forrású veszteséges rendszer, vagy más néven az **Engset-féle rendszer** eloszlása.

Az $r = n$ esetben, vagyis amikor minden igénynek saját kiszolgálója van, más szóval az igény nem vész el, az alábbi egyszerűbb képletet kapjuk

$$P_k = \frac{\binom{n}{k} \rho^k}{\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \rho^i} = \frac{\binom{n}{k} \rho^k}{(1 + \rho)^n}$$

$$= \binom{n}{k} \left(\frac{\rho}{1 + \rho} \right)^k \left(1 - \frac{\rho}{1 + \rho} \right)^{n-k},$$

vagyis $p = \frac{\rho}{1 + \rho}$ paraméterű binomiális eloszlásról van szó.

Ez annak valószínűsége, hogy egy konkrét igény a rendszerben van. Könnyű látni, hogy ez a formula $G/G/n/n/n$ esetben is igaz, hiszen ekkor

$$p = \frac{\mathbb{E}(S)}{\mathbb{E}(S) + \mathbb{E}(\tau)} = \frac{\rho}{1 + \rho},$$

ha $\rho = \frac{\mathbb{E}(S)}{\mathbb{E}(\tau)}$, ahol $\mathbb{E}(\tau)$ a forrásban eltöltött átlagos időt jelenti.

Az eddigiek alapján könnyű látni, hogy a *rendszerjellemzők* a következők lesznek

•

$$\bar{N} = \sum_{k=0}^r k P_k, \quad \bar{r} = \bar{N}, \quad U_S = \frac{\bar{r}}{r} = \frac{\bar{N}}{r},$$

• a forrásban tartózkodó igények átlagos száma $\bar{m}$

$$\bar{m} = n - \bar{N}$$

• a forrás kihasználtsága

$$U_t = \frac{\bar{m}}{n} = \frac{\mathbb{E}(\tau)}{\mathbb{E}(\tau) + \frac{1}{\mu}},$$

melyből

$$\mathbb{E}(\tau) = \frac{1}{\mu} \frac{U_t}{1 - U_t}.$$

Ebből megmutatjuk, hogy átlagosan hányszor kell próbálkoznia egy igénynek, hogy kiszolgálásra kerüljön, vagyis

$$\mathbb{E}(N_R) = \lambda \mathbb{E}(\tau),$$

így az elutasítások átlagos száma $E(N_R) - 1$.

Az igény blokkolásának valószínűsége a Bayes-tétel alapján könnyen kiszámítható, nevezetesen

$$P_B(n, r) = \frac{(n-r)P_r(n, r)}{\sum_{i=0}^r (n-i)P_i(n, r)} = P_r(n-1, r).$$

Ezt az következő módon láthatjuk be

$$\begin{aligned} P_B(n, r) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{((n-r)\lambda h + o(h))P_r(n, r)}{\sum_{i=0}^r ((n-i)\lambda h + o(h))P_i(n, r)} = \frac{(n-r)P_r(n, r)}{\sum_{i=0}^r (n-i)P_i(n, r)} \\ &= \frac{(n-r) \binom{n}{r} \rho^r}{\sum_{i=0}^r (n-i) \binom{n}{i} \rho^i} = \frac{(n-r) \frac{n!}{r!(n-r)!} \rho^r}{\sum_{i=0}^r (n-i) \frac{n!}{i!(n-i)!} \rho^i} \\ &= \frac{\frac{(n-1)!}{r!(n-1-r)!} \rho^r}{\sum_{i=0}^r \frac{(n-1)!}{i!(n-1-i)!} \rho^i} = \frac{\binom{n-1}{r} \rho^r}{\sum_{i=0}^r \binom{n-1}{i} \rho^i} = P_r(n-1, r). \end{aligned}$$

Jelölje $E(n, r, \rho)$ véges-forrás esetén az igényvesztés valószínűségét, vagyis $E(n, r, \rho) = P_r(n-1, r)$, melyet szokás **Engset-féle veszteség-formulának** is nevezni. Mutassuk meg, hogy milyen rekurzió írható fel rá!

$$\begin{aligned} E(n, r, \rho) &= \frac{\binom{n-1}{r} \rho^r}{\sum_{i=0}^r \binom{n-1}{i} \rho^i} = \frac{\binom{n-1}{r-1} \frac{n-r}{r} \rho^r}{\sum_{i=0}^{r-1} \binom{n-1}{i} \rho^i + \binom{n-1}{r-1} \frac{n-r}{r} \rho^r} \\ &= \frac{\frac{n-r}{r} \rho E(n, r-1, \rho)}{1 + \frac{n-r}{r} \rho E(n, r-1, \rho)} = \frac{(n-r) \rho E(n, r-1, \rho)}{r + (n-r) \rho E(n, r-1, \rho)}. \end{aligned}$$

A kezdő érték

$$E(n, 1, \rho) = P_1(n-1, 1) = \frac{(n-1)\rho}{1 + (n-1)\rho}.$$

Nyilvánvaló, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty, \lambda \rightarrow 0, n\lambda \rightarrow \lambda'} E(n, r, \rho) = B(n, \rho'),$$

ahol

$$\rho' = \frac{\lambda'}{\mu}$$

amit formálisan is láthatunk, továbbá az említett határértéknél $(n-r)\rho \rightarrow \rho'$ -höz és a $B(n, \rho')$ -ra kapott rekurzív összefüggést kapjuk.

Speciálisan $r = n$ esetben könnyű látni, hogy $\bar{N} = n \frac{\rho}{1+\rho}$ és így

$$U_S = \frac{\rho}{1+\rho}, \quad \bar{m} = \frac{n}{1+\rho}, \quad U_t = \frac{1}{1+\rho}, \quad \mathbb{E}(\tau) = \frac{1}{\lambda}, \quad \mathbb{E}(N_R) = 1, \quad P_B = 0,$$

amint ez várható volt.

Általános esetben

$$\bar{\mu} = \bar{r}\mu = \bar{\lambda} = \sum_{k=0}^{r-1} \lambda(n-k)P_k \neq \lambda(n-\bar{N}), \quad \bar{T} = \frac{1}{\mu}.$$

Vizsgáljuk meg, hogy a rendszerbe érkező igény milyen állapotot láthat!
Nyilván

$$\begin{aligned} \Pi_k &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\lambda_k h + o(h))P_k}{\sum_{i=0}^{r-1} (\lambda_i h + o(h))P_i} = \frac{\lambda_k P_k}{\sum_{i=0}^{r-1} \lambda_i P_i} \\ \bar{T} &= \frac{1}{\mu} \sum_{k=0}^{r-1} \frac{\lambda_k P_k}{\sum_{i=0}^{r-1} \lambda_i P_i} = \frac{1}{\mu} \\ \bar{\lambda} \cdot \bar{T} &= \mu \bar{r} \cdot \frac{1}{\mu} = \bar{r} = \bar{N} \end{aligned}$$

ami Little-formula a veszteséges rendszerre.

3.2. Az $M/M/1/n/n$ modell

Feltesszük, hogy az igények egy n elemű véges forrásból érkeznek, ahol a forrásban eltöltött idő minden igény esetén egymástól független λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó. A kiszolgálási idők szintén exponenciális eloszlásúak μ paraméterrel és függetlenek az előbbi valószínűségi változóktól.

Jelölje $N(t)$ a t időpillanatban a kiszolgáló egységnél tartózkodó igények számát. Az előbbiekhöz hasonlóan nem nehéz belátni, hogy $N(t)$ is egy születési-kihalási folyamat

$$\lambda_k = \begin{cases} (n-k)\lambda & , \text{ ha } 0 \leq k \leq n, \\ 0 & , \text{ ha } k > n, \end{cases}$$

születési intenzitásokkal, és

$$\mu_k = \mu, \quad k \geq 1,$$

kihalási intenzitással. Így

$$P_k = \frac{n!}{(n-k)!} \varrho^k P_0 = (n-k+1) \varrho P_{k-1},$$

ahol

$$\varrho = \frac{\lambda}{\mu},$$

és

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^n \frac{n!}{(n-k)!} \varrho^k} = \frac{1}{\sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!} \varrho^k}.$$

Az ergodikus eloszlás mindig létezik, de ha $\varrho > 1$ akkor az igények torlódnak és több kiszolgáló egységre lenne szükség.

Az előbbi valószínűségekre egy másik kifejezést is megadunk, amely numerikus számításoknál könnyebben alkalmazható.

Legyen $P(k; \lambda)$ a λ paraméterű Poisson-eloszlás és $Q(k; \lambda)$ ennek kummulatív eloszlása, azaz

$$P(k; \lambda) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad 0 \leq k < \infty;$$

$$Q(k; \lambda) = \sum_{i=0}^k P(i; \lambda), \quad 0 \leq k < \infty.$$

Megmutatjuk, hogy

$$P_k = \frac{P(n-k; R)}{Q(n; R)}, \quad 0 \leq k \leq n,$$

ahol

$$R = \frac{\mu}{\lambda} = \varrho^{-1}.$$

Ugyanis

$$\frac{P(n-k; R)}{Q(n; R)} = \frac{\frac{n!}{(n-k)!} \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{n-k} e^{-\frac{\mu}{\lambda}}}{\sum_{i=0}^n \frac{n!}{i!} \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^i e^{-\frac{\mu}{\lambda}}} = \frac{\frac{n!}{(n-k)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{\sum_{i=0}^n \frac{n!}{i!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n-i}} = \frac{\frac{n!}{(n-k)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{\sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-i)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i}.$$

Ebból

$$P_0 = B(n, R).$$

A rendszer *jellemzői*

- A *szerver kihasználtsága* és a *rendszer áteresztőképessége*
A szerver kihasználtsága

$$U_s = 1 - P_0 = 1 - B(n, R).$$

A korábbi rekurzív összefüggést felhasználva

$$U_s = \frac{Q(n-1; R)}{Q(n; R)}.$$

A rendszer áteresztőképessége

$$\lambda_t = \mu U_s.$$

- A rendszerben tartózkodó *igények átlagos száma*

$$\begin{aligned} \bar{N} &= \sum_{k=0}^n k P_k = n - \sum_{k=0}^n (n-k) P_k = \\ &= n - \frac{1}{\varrho} \sum_{k=0}^n (n-k) \varrho P_k = n - \frac{1}{\varrho} \sum_{k=0}^{n-1} P_{k+1} = \\ &= n - \frac{1}{\varrho} (1 - P_0) = n - \frac{U_s}{\varrho}. \end{aligned}$$

Másképpen

$$\bar{N} = n - \frac{RQ(n-1; R)}{Q(n; R)} = n - \frac{U_s}{\varrho}.$$

- Az *átlagos sorhossz*

$$\begin{aligned} \bar{Q} &= \sum_{k=1}^n (k-1) P_k = \sum_{k=1}^n k P_k - \sum_{k=1}^n P_k = n - \frac{\mu}{\lambda} (1 - P_0) - (1 - P_0) = \\ &= n - (1 - P_0) \left(1 + \frac{\mu}{\lambda}\right) = n - \left(1 + \frac{1}{\varrho}\right) U_s. \end{aligned}$$

- Az igény generálásra alkalmas *terminálok átlagos száma*

$$\bar{m} = \sum_{k=0}^n (n-k)P_k = n - \bar{N} = \frac{\mu}{\lambda}(1 - P_0) = \frac{U_s}{\varrho}.$$

- A szerver átlagos *foglaltsági periódushossza*

Mivel

$$U_s = 1 - P_0 = \frac{E\delta}{\frac{1}{n\lambda} + E\delta},$$

ezért

$$E\delta = \frac{1 - P_0}{n\lambda P_0} = \frac{U_s}{n\lambda(1 - U_s)}.$$

Számítógépes alkalmazásoknál gyakran szükségünk van az alábbi jellemzőkre is.

- A terminálok *kihasználtsága*

Véges forrás esetén szükségünk van arra az újabb mérőszámra is, amely a gépki-szolgálati probléma esetén is nagyon fontos. Az i indexű terminál *kihasználtságán* az

$$U^{(i)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \chi(a \text{ } t \text{ időpillanatban az } i\text{-edik terminál működik}) dt$$

határértéket értjük, ha létezik. Ekkor

$$U^{(i)} = P(\text{ az } i\text{-edik terminál működik}),$$

ahol P a stacionárius valószínűséget jelöli.

Nyilvánvaló, hogy a terminálok (az igénygenerálás forrásai) akkor vannak kihasználva, ha működnek, így az összes terminál kihasználtsága

$$U_n = \sum_{k=0}^n (n-k)P_k = \bar{m} = \frac{\mu}{\lambda}(1 - P_0).$$

Egy tetszőleges terminál kihasználtsága

$$U_t = \frac{\mu}{n\lambda}(1 - P_0) = \frac{\bar{m}}{n}.$$

Ezt az összefüggést a következőképpen is megkaphatjuk. Látható, hogy

$$U^{(i)} = \sum_{k=1}^n \frac{n-k}{n} P_k = \frac{\bar{m}}{n},$$

mivel a terminálok azonos kihasználtságúak, így

$$U_t = U^{(i)}.$$

- A terminálok *átlagos várakozási ideje*

A tartózkodási időre ismertett tétel alapján

$$U_t = \frac{1/\lambda}{1/\lambda + \bar{W} + 1/\mu} = \frac{\bar{m}}{n}.$$

Ebből

$$\lambda \bar{m} = \frac{n}{1/\lambda + \bar{W} + 1/\mu},$$

és

$$\lambda \bar{m} \bar{W} = n - \bar{m} \left(1 + \frac{\lambda}{\mu} \right) = n - \frac{U_s}{\varrho} (1 + \varrho) = \bar{Q},$$

ami az átlagos sorhosszra vonatkozó Little-formula. így

$$\bar{W} = \frac{\bar{Q}}{\lambda \bar{m}}.$$

Az *átlagos válaszolási idő*

$$\bar{T} = \bar{W} + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{n}{1 - P_0} - \frac{1}{\varrho} \right) = \frac{1}{\mu} \left(\frac{n}{U_s} - \frac{1}{\varrho} \right).$$

Egyszerű számolással könnyű bebizonyítani, hogy

$$\bar{m} \lambda \bar{T} = \bar{N},$$

ami ismét egy Little-formula. Ugyanis

$$\begin{aligned} \bar{m} \lambda \left(\bar{W} + \frac{1}{\mu} \right) &= \bar{Q} + \bar{m} \varrho = \\ &= n - \frac{U_s}{\varrho} (1 + \varrho) + U_s = n - \frac{U_s}{\varrho} = \bar{N}. \end{aligned}$$

- További összefüggések

$$U_s = 1 - P_0 = n \varrho U_t = \bar{m} \varrho,$$

melyből

$$\bar{m} \lambda = \mu U_s = \lambda_t.$$

Érkezési pillanatban vett eloszlás

Az alábbiakban megmutatjuk, hogy egy véges forrású rendszernél egyensúlyi állapotban az érkezési pillanatokban mi lesz az eloszlás. Az eddigiekhez hasonlóan a Bayes-formula felhasználásával kapjuk

$$\begin{aligned} \Pi_k(n) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\lambda_k h + o(h)) P_k}{\sum_{j=0}^{n-1} (\lambda_j h + o(h)) P_j} = \frac{\lambda_k P_k}{\sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j P_j} = \frac{\frac{n(n-1) \dots (n-k) \lambda^k}{\mu_1 \dots \mu_k} P_0}{\sum_{j=0}^{n-1} \frac{n(n-1) \dots (n-j) \lambda^j}{\mu_1 \dots \mu_j} P_0} \\ &= \frac{\frac{(n-1) \dots (n-k) \lambda^k}{\mu_1 \dots \mu_k}}{1 + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(n-1) \dots (n-j) \lambda^j}{\mu_1 \dots \mu_j}} = \frac{\frac{(n-1) \dots (n-1-k+1) \lambda^k}{\mu_1 \dots \mu_k}}{1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(n-1) \dots (n-1-i+1) \lambda^i}{\mu_1 \dots \mu_i}} = P_k(n-1) \end{aligned}$$

függetlenül attól, hogy egy vagy több kiszolgálónk van, hiszen láthatóan a kiszolgálási intenzitásoknál nem használtuk ki, hogy hány kiszolgálónk van.

Távozási pillanatban vett eloszlás

Az alábbiakban megmutatjuk, hogy egy véges forrású rendszernél egyensúlyi állapotban a távozási pillanatokban mi lesz az eloszlás. Az eddigiekhez hasonlóan a Bayes-formula felhasználásával kapjuk

$$\begin{aligned} D_k(n) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\mu_{k+1}h + o(h))P_{k+1}}{\sum_{j=1}^n (\mu_j h + o(h))P_j} = \frac{\mu_{k+1}P_{k+1}}{\sum_{j=1}^n \mu_j P_j} = \frac{\frac{\mu_{k+1}n(n-1)\dots(n-k)\lambda^{k+1}}{\mu_1 \dots \mu_{k+1}} P_0}{\sum_{j=1}^n \frac{\mu_j n(n-1)\dots(n-j+1)\lambda^j}{\mu_1 \dots \mu_j} P_0} \\ &= \frac{\frac{(n-1)\dots(n-k)\lambda^k}{\mu_1 \dots \mu_k}}{1 + \sum_{j=2}^n \frac{(n-1)\dots(n-j+1)\lambda^{j-1}}{\mu_1 \dots \mu_{j-1}}} = \frac{\frac{(n-1)\dots(n-1-k+1)\lambda^k}{\mu_1 \dots \mu_k}}{1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(n-1)\dots(n-1-i+1)\lambda^i}{\mu_1 \dots \mu_i}} = P_k(n-1) \end{aligned}$$

abban az esetben, ha marad igény a rendszerben, és

$$D_0(n) = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(n-1)\dots(n-1-i+1)\lambda^i}{\mu_1 \dots \mu_i}} = P_0(n-1)$$

ha a kiszolgáló(k) tétlen(nek) marad(nak) hiszen láthatóan a kiszolgálási intenzitásoknál nem használtuk ki, hogy hány kiszolgálónk van.

Rekurzív összefüggések

Látható, hogy a tartózkodási idő sűrűségfüggvénye az alábbi módon írható fel

$$f_T(x) = \sum_{k=0}^{n-1} f_T(x|k) \Pi_k(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\mu(\mu x)^k}{k!} e^{-\mu x} P_k(n-1).$$

Így a várható érték

$$\bar{T}(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{\mu} P_k(n-1) = \frac{1}{\mu} (\bar{N}(n-1) + 1).$$

Hasonlóan, a várakozási idő sűrűségfüggvénye csak abban különbözik, hogy 1 fázissal kevesebbet veszünk az Erlang-eloszlásnál, vagyis

$$f_W(x) = \sum_{k=0}^{n-1} f_W(x|k) \Pi_k(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\mu(\mu x)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\mu x} P_k(n-1),$$

így ennek várható értéke

$$\bar{W}(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{\mu} P_k(n-1) = \frac{1}{\mu} (\bar{N}(n-1)),$$

ami magától érthető.

Az alábbiakban a

$$\bar{T}(n) = \frac{1}{\mu} (\bar{N}(n-1) + 1)$$

képlet helyességét szeretnénk ellenőrizni. Ehhez szükségünk van a következő összefüggésekre. Mint már korábban is láttuk

$$\overline{N}(n) = n - \frac{1 - B(n, \frac{1}{\varrho})}{\varrho}.$$

Azonban használjuk ki az ismert rekurziót

$$B(n, \frac{1}{\varrho}) = \frac{\frac{1}{\varrho}B(n-1, \frac{1}{\varrho})}{n + \frac{1}{\varrho}B(n-1, \frac{1}{\varrho})} = \frac{B(n-1, \frac{1}{\varrho})}{n\varrho + B(n-1, \frac{1}{\varrho})}.$$

Mivel

$$\overline{N}(n-1) = n-1 - \frac{1 - B(n-1, \frac{1}{\varrho})}{\varrho}$$

így

$$\begin{aligned}\varrho\overline{N}(n-1) &= (n-1)\varrho - 1 - B\left(n-1, \frac{1}{\varrho}\right) \\ B\left(n-1, \frac{1}{\varrho}\right) &= 1 + \varrho\overline{N}(n-1) - (n-1)\varrho.\end{aligned}$$

Behelyettesítés után kapjuk,

$$\begin{aligned}B\left(n, \frac{1}{\varrho}\right) &= \frac{\frac{1}{\varrho}(1 + \varrho\overline{N}(n-1) - (n-1)\varrho)}{n + \frac{1}{\varrho}(1 + \varrho\overline{N}(n-1) - (n-1)\varrho)} \\ &= \frac{1 + \varrho\overline{N}(n-1) - (n-1)\varrho}{n\varrho + 1 + \varrho\overline{N}(n-1) - (n-1)\varrho} = \frac{1 + \varrho\overline{N}(n-1) - (n-1)\varrho}{1 + \varrho\overline{N}(n-1) + \varrho}.\end{aligned}$$

Ezt felhasználva

$$\begin{aligned}\overline{N}(n) &= \frac{n\varrho - 1 + B(n, \frac{1}{\varrho})}{\varrho} = \frac{n\varrho - 1 + \frac{1 + \varrho\overline{N}(n-1) - (n-1)\varrho}{1 + \varrho\overline{N}(n-1) + \varrho}}{\varrho} \\ &= \frac{n\varrho - \frac{n\varrho}{1 + \varrho\overline{N}(n-1) + \varrho}}{\varrho} = n - \frac{n}{1 + \varrho\overline{N}(n-1) + \varrho}.\end{aligned}$$

Ebből

$$\begin{aligned}n - \overline{N}(n) &= \frac{n}{1 + \varrho\overline{N}(n-1) + \varrho} \\ 1 + \varrho(\overline{N}(n-1) + 1) &= \frac{n}{n - \overline{N}(n)} \\ \varrho(\overline{N}(n-1) + 1) &= \frac{\overline{N}(n)}{n - \overline{N}(n)},\end{aligned}$$

mely lényegében a rendszerben tartózkodó igények számára vonatkozó iteráció.

Tekintsük most már az ellenőrizendő rekurziót és végezzük el a behelyettesítést, vagyis

$$\begin{aligned}\bar{T}(n) &= \frac{1}{\mu}(\bar{N}(n-1) + 1) \\ \lambda \bar{T}(n) &= \varrho(\bar{N}(n-1) + 1) = \frac{\bar{N}(n)}{n - \bar{N}(n)} \\ \lambda(n - \bar{N}(n))\bar{T}(n) &= \bar{N}(n),\end{aligned}$$

ami a jól ismert Little-formula, melyet korábban már bebizonyítottunk.

Most mutassuk meg, hogyan lehet más módon, kevesebb lépésben, közvetlenül $\bar{T}(n)$ -t ellenőrizni! Könnyű látni, hogy

$$\begin{aligned}U_S(n) &= 1 - B(n, \frac{1}{\varrho}) = 1 - \frac{\frac{1}{\varrho}B(n-1,)}{n + \frac{1}{\varrho}B(n-1, \frac{1}{\varrho})} \\ &= \frac{n}{n + \frac{1}{\varrho}B(n-1, \frac{1}{\varrho})} = \frac{n\varrho}{n\varrho + B(n-1, \frac{1}{\varrho})} = \frac{n\varrho}{n\varrho + 1 - U_S(n-1)},\end{aligned}$$

vagyis egy rekurziót adtunk meg a kiszolgáló kihasználtságára, ha növeljük az igények számát. Ez a későbbiek során fontos szerepet játszik majd ha az egyes rendszerjellemzőkre rekurziót szeretnénk felírni, hiszen ezek a kihasználtságtól függnak.

Ebből

$$U_S(n-1) = n\varrho + 1 - \frac{n\varrho}{U_S(n)} = 1 + n\varrho \left(1 - \frac{1}{U_S(n)}\right).$$

Az előzőek alapján

$$\bar{N}(n-1) = n-1 - \frac{U_S(n-1)}{\varrho},$$

melybe be fogjuk helyettesíteni az $U_S(n-1)$ -re kapott kifejezést. Ezek után mutassuk meg, hogy az iterációs formula a már korábban kapott összefüggést eredményezi! Ezért

$$\begin{aligned}\bar{T}(n) &= \frac{1}{\mu}(\bar{N}(n-1) + 1) = \frac{1}{\mu} \left(n-1 - \frac{U_S(n-1)}{\varrho} + 1 \right) \\ &= \frac{1}{\mu} \left(n - \frac{U_S(n-1)}{\varrho} \right) = \frac{1}{\mu} \left(n - \frac{1 + n\varrho(1 - \frac{1}{U_S(n)})}{\varrho} \right) = \frac{1}{\mu} \left(\frac{n}{U_S(n)} - \frac{1}{\varrho} \right),\end{aligned}$$

vagyis a formula helyes.

Ezt követően lássuk, hogyan lehet rekurzív módon kiszámolni a $\bar{T}(n)$, $\bar{W}(n)$, $\bar{N}(n)$ mennyiségeket.

$$\begin{aligned}\bar{T}(n) &= \frac{1}{\mu}(\bar{N}(n-1) + 1) \\ \bar{W}(n) &= \bar{T}(n) - \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu}\bar{N}(n-1).\end{aligned}$$

Most szükségünk van arra, hogyan tudjuk meghatározni $\bar{N}(n)$ -et $\bar{T}(n)$ segítségével. Igazak az alábbi összefüggések

$$\begin{aligned}\bar{N}(n) &= \lambda(n - \bar{N}(n))\bar{T}(n) = \lambda n \bar{T}(n) - \lambda \bar{N}(n)\bar{T}(n) \\ \bar{N}(n)(1 + \lambda \bar{T}(n)) &= \lambda n \bar{T}(n) \\ \bar{N}(n) &= \frac{\lambda n \bar{T}(n)}{1 + \lambda \bar{T}(n)}.\end{aligned}$$

A kezdeti feltételek érthető módon

$$\begin{aligned}\bar{T}(1) &= \frac{1}{\mu} \\ \bar{N}(1) &= \frac{\varrho}{1 + \varrho}.\end{aligned}$$

Ezek után az iteráció lépései

$$\begin{aligned}\bar{W}(n) &= \frac{1}{\mu} \bar{N}(n-1) \\ \bar{T}(n) &= \frac{1}{\mu} + \bar{W}(n) \\ \bar{N}(n) &= \frac{\lambda n \bar{T}(n)}{(1 + \lambda \bar{T})(n)}\end{aligned}$$

vagyis kettős iterációval haladunk előre a kívánt igény számig. Az iteráció előnye abban rejlik, hogy az említett várható értékek meghatározásához nem kell tudni a rendszerben tartózkodó igények számának stacionárius eloszlását, ami a fellépő faktoriálisok miatt nagyobb igény számnál numerikus problémákhoz vezethet. Hátránya, hogy ezzel a módszerrel csak a várható értékeket tudjuk kiszámolni.

A fentiekben már megmutattuk milyen közvetlen iteráció van $U_S(n)$ -re és így várhatóan minden rendszerjellemzőre is.

A következő fontos rendszerjellemző az *a forrásban tartózkodó igények átlagos száma*, amely szintén előállítható rekurzió segítségével, nevezetesen

$$\begin{aligned}\bar{m}(n) &= \frac{U_s(n)}{\rho} = \frac{n}{n\rho + 1 - U_s(n-1)} = \\ &= \frac{\frac{n}{\rho}}{n + \frac{1}{\rho} - \bar{m}(n-1)} = \frac{n}{n\rho + 1 - \rho \bar{m}(n-1)}.\end{aligned}$$

Ezzel az eredménnyel könnyen igazolható a *terminálok kihasználtságának* rekurzív formulája, mely a következő

$$U_t(n) = \frac{\bar{m}(n)}{n} = \frac{n}{n\rho + 1 - \rho \bar{m}(n-1)} \frac{1}{n} =$$

$$= \frac{\frac{1}{n-1}}{\frac{n\rho+1}{n-1} - \rho U_t(n-1)} = \frac{1}{n\rho+1 - (n-1)\rho U_t(n-1)}.$$

A következő jellemző, amit hasonló módon írhatunk fel, az a *rendszerben tartózkodó igények átlagos száma*. Ezért

$$\begin{aligned}\bar{N}(n) &= n - \frac{U_s(n)}{\rho} = \frac{n\rho - U_s(n)}{\rho} = \frac{n\rho - \frac{n\rho}{n\rho+1 - U_s(n-1)}}{\rho} = \\ &= \frac{n^2\rho + n - nU_s(n-1) - 1}{n\rho+1 - U_s(n-1)} = \frac{n(n\rho - U_s(n-1))}{n\rho+1 - U_s(n-1)},\end{aligned}$$

mivel érthető módon

$$\bar{N}(n-1) = n-1 - \frac{U_s(n-1)}{\rho} = \frac{n\rho - U_s(n-1)}{\rho} - 1$$

$$\rho(\bar{N}(n-1) + 1) = n\rho - U_s(n-1)$$

$$U_s(n-1) = n\rho - \rho(\bar{N}(n-1) + 1),$$

ezért behelyettesítés után

$$\bar{N}(n) = \frac{n\rho(\bar{N}(n-1) + 1)}{1 + \rho(\bar{N}(n-1) + 1)}.$$

Végül vizsgáljuk meg, hogy milyen formula adható az *átlagos válaszolási időre*! Kiindulva a

$$\bar{T}(n) = \frac{1}{\mu} \left(\frac{n}{U_s(n)} - \frac{1}{\rho} \right)$$

összefüggésből és felhasználva, hogy

$$\bar{T}(n-1) = \frac{1}{\mu} \left(\frac{n-1}{U_s(n-1)} - \frac{1}{\rho} \right)$$

$$\mu\bar{T}(n-1) = \frac{n-1}{U_s(n-1)} - \frac{1}{\rho}$$

$$\mu\bar{T}(n-1) + \frac{1}{\rho} = \frac{n-1}{U_s(n-1)}$$

$$U_s(n-1) = \frac{(n-1)\rho}{\lambda\bar{T}(n-1) + 1},$$

behelyettesítés és rövidebb számolás után

$$\bar{T}(n) = \frac{1}{\mu} \frac{n\rho - U_s(n-1)}{\rho} = \frac{1}{\mu} \frac{n\lambda\bar{T}(n-1) + 1}{\lambda\bar{T}(n-1) + 1}.$$

Könnyű látni, hogy a hiányzó kiinduló értékek

$$\bar{m}(1) = U_t(1) = \frac{1}{1 + \varrho}.$$

Tartózkodási idő eloszlásfüggvénye

Az alábbi fejezetben a tartózkodási és várakozási idő eloszlásfüggvényét fogjuk meghatározni először a sűrűségfüggvény, majd a feltételes eloszlásfüggvények segítségével.

Nézzük először az egyszerűbb megoldást! Első lépésben a sűrűségfüggvényt határozzuk meg, majd ebből az eloszlásfüggvényt.

$$\begin{aligned} f_T(n, x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \mu \frac{(\mu x)^k}{k!} e^{-\mu x} \frac{\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{n-1-k} e^{-\frac{\mu}{\lambda}}}{(n-1-k)!} = \mu \frac{(\mu x + \frac{\mu}{\lambda})^{n-1}}{(n-1)!} \frac{e^{-(\mu x + \frac{\mu}{\lambda})}}{Q(n-1, \frac{\mu}{\lambda})} \\ &= \frac{\mu P(n-1, \mu x + \frac{\mu}{\lambda})}{Q(n-1, \frac{\mu}{\lambda})}. \end{aligned}$$

Analóg módon

$$\begin{aligned} f_W(n, x) &= \sum_{k=1}^{n-1} \mu \frac{(\mu x)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\mu x} P_k(n-1) = \frac{\sum_{i=0}^{n-2} \mu \frac{(\mu x)^i}{i!} e^{-\mu x} \frac{(\frac{\mu}{\lambda})^{n-2-i}}{(n-2-i)!} e^{-\frac{\mu}{\lambda}}}{Q(n-1, \frac{\mu}{\lambda})} \\ &= \frac{\mu P(n-2, \mu x + \frac{\mu}{\lambda})}{Q(n-1, \frac{\mu}{\lambda})}. \end{aligned}$$

Ebből az eloszlásfüggvény

$$F_T(n, x) = \int_0^x f_T(n, t) dt.$$

Legyen $y = \mu t + \frac{\mu}{\lambda}$, $t = (y - \frac{\mu}{\lambda}) \frac{1}{\mu}$, $\frac{dt}{dy} = \frac{1}{\mu}$.

$$F_T(n, x) = \frac{\int_{\frac{\mu}{\lambda}}^{\mu x + \frac{\mu}{\lambda}} \frac{y^{n-1}}{(n-1)!} e^{-y} dy}{Q(n-1, \frac{\mu}{\lambda})} = \frac{\left[1 - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{y^i}{i!} e^{-y}\right]_{\frac{\mu}{\lambda}}^{\mu x + \frac{\mu}{\lambda}}}{Q(n-1, \frac{\mu}{\lambda})} = 1 - \frac{Q(n-1, \mu x + \frac{\mu}{\lambda})}{Q(n-1, \frac{\mu}{\lambda})}.$$

Teljesen hasonlóan

$$F_W(n, x) = 1 - \frac{Q(n-2, \mu x + \frac{\mu}{\lambda})}{Q(n-1, \frac{\mu}{\lambda})}.$$

Most határozzuk meg a tartózkodási idő eloszlásfüggvényét a feltételes eloszlásfüggvények segítségével!

Ez eddigiekhez hasonlóan, felhasználva az Erlang-eloszlás eloszlásfüggvényét felírhatjuk az alábbiakat

$$\begin{aligned} F_T(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \sum_{j=0}^k \frac{(\mu x)^j}{j!} e^{-\mu x}\right) P_k(n-1) \\ &= 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^k \frac{(\mu x)^j}{j!} e^{-\mu x}\right) P_k(n-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 - \sum_{k=0}^{n-1} Q(k, \mu x) P_k(n-1) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} Q(k, \mu x) \frac{\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{n-1-k} e^{-\frac{\mu}{\lambda}}}{Q(n-1, \frac{\mu}{\lambda})} \\
&= 1 - \frac{Q(n-1, \mu x + \frac{\mu}{\lambda})}{Q(n-1, \frac{\mu}{\lambda})}
\end{aligned}$$

Eközben felhasználtuk, hogy

$$\int_0^\lambda \frac{t^j}{j!} e^{-t} dt = 1 - \sum_{i=0}^j \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}$$

és így

$$\sum_{j=0}^l \frac{\mu^{l-j}}{(l-j)!} e^{-\mu} \sum_{i=0}^j \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}$$

az alábbi módon írható fel

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^l \left(1 - \int_0^\lambda \frac{t^j}{j!} e^{-t} dt\right) \frac{\mu^{l-j}}{(l-j)!} e^{-\mu} \\
&= \underbrace{\sum_{j=0}^l \frac{\mu^{l-j}}{(l-j)!} e^{-\mu}}_{Q(l, \mu)} - \int_0^\lambda \frac{(t+\mu)^l}{l!} e^{-(t+\mu)} dt = Q(l, \mu) - \int_\mu^{\lambda+\mu} \frac{y^l}{l!} e^{-y} dy \\
&= Q(l, \mu) - \left[1 - \sum_{i=0}^l \frac{y^i}{i!} e^{-y}\right]_\mu^{\lambda+\mu} = Q(l, \lambda + \mu).
\end{aligned}$$

Eközben az is látható, hogy $Q(k, t)$ deriváltja $-P(k, t)$, melyet jól lehet használni a sűrűségfüggvény meghatározásához, vagyis

$$f_T(x) = \frac{\mu P(n-1, \mu x + \frac{\mu}{\lambda})}{Q(n-1, \frac{\mu}{\lambda})}.$$

A rendszerben tartózkodó igények generátorfüggvénye

Megmutatjuk hogyan határozzuk meg az $M/M/1/n/n$ rendszer esetén a $G_N(s)$ -t. Közvetlen számolás esetén

$$\begin{aligned}
G_N(s) &= \sum_{k=0}^n s^k \frac{\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{n-k}}{(n-k)!} P_0 \\
&= s^n \sum_{k=0}^n \frac{\left(\frac{1}{s\rho}\right)^{n-k}}{(n-k)!} P_0 \\
&= s^n e^{-\frac{1}{\rho}\left(1-\frac{1}{s}\right)} \frac{Q\left(n, \frac{1}{\rho s}\right)}{Q\left(n, \frac{1}{\rho}\right)}.
\end{aligned}$$

Ezt megkaphatjuk az alábbi módon is. Ha F -el jelöljük a forrásban tartózkodó igények számát, akkor tudjuk, hogy az $\frac{1}{\rho}$ forgalmi intenzitású Erlang-féle veszteséges rendszerrel ekvivalens, aminek a generátorfüggvényét már meghatároztuk. Így

$$\begin{aligned} G_N(s) &= E(s^N) = E(s^{n-F}) = s^n E(s^{-F}) = s^n G_F\left(\frac{1}{s}\right) \\ &= s^n e^{-\frac{1}{\rho}(1-\frac{1}{s})} \frac{Q\left(n, \frac{1}{\rho s}\right)}{Q\left(n, \frac{1}{\rho}\right)}. \end{aligned}$$

Ennek segítségével

$$\begin{aligned} \bar{N}(n) &= G'_{N(n)}(1) = \left(s^n G_{F(n)}\left(\frac{1}{s}\right) \right)'_{s=1} \\ G'_{N(n)}(s) &= n \cdot s^{n-1} G_{F(n)}\left(\frac{1}{s}\right) + s^n G'_{F(n)}\left(\frac{1}{s}\right) \left(-\frac{1}{s^2}\right), \end{aligned}$$

ezért

$$\bar{N}(n) = n G_{F(n)}(1) - G'_{F(n)}(1) = n - \frac{1}{\rho} \left(1 - B\left(n, \frac{1}{\rho}\right) \right) = n - \frac{U_S(n)}{\rho}.$$

A tartózkodási idő Laplace-transzformáltja

Megmutatjuk hogyan határozhatjuk meg $M/M/1/n/n$ T Laplace-transzformáltját!

1. Megoldás.

A Laplace-transzformáltakra az ismert képlet alapján

$$L_T(s) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{\mu}{\mu + s} \right)^{k+1} P_k(n-1)$$

mivel ekkor a feltételes várakozási idő $(k+1, \mu)$ paraméterű Erlang-eloszlás és ennek kell

venni a Laplace-transzformáltját. Behelyettesítve $P_k(n-1)$ helyébe kapjuk

$$\begin{aligned}
L_T(s) &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{\mu}{\mu+s} \right)^{k+1} \frac{\left(\frac{\mu}{\lambda} \right)^{n-1-k}}{(n-1-k)!} \frac{e^{-\frac{\mu}{\lambda}}}{Q\left(n-1, \frac{\mu}{\lambda}\right)} \\
&= \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{\mu+s}{\mu} \right)^{-k-1} \cdot \left(\frac{\mu+s}{\mu} \right)^n \cdot \frac{\left(\frac{\mu}{\lambda} \right)^{n-1-k}}{(n-1-k)!} e^{-\frac{\mu}{\lambda}}}{\left(\frac{\mu+s}{\mu} \right)^n Q\left(n-1, \frac{\mu}{\lambda}\right)} \\
&= \left(\frac{\mu}{\mu+s} \right)^n \frac{e^{-\frac{\mu}{\lambda}} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{\mu+s}{\mu} \cdot \frac{\mu}{\lambda} \right)^{n-1-k} \cdot \frac{1}{(n-1-k)!}}{Q\left(n-1, \frac{\mu}{\lambda}\right)} \\
&= \left(\frac{\mu}{\mu+s} \right)^n e^{-\frac{\mu}{\lambda}} \frac{Q\left(n-1, \frac{\mu+s}{\lambda}\right) \cdot e^{\frac{\mu+s}{\lambda}}}{Q\left(n-1, \frac{\mu}{\lambda}\right)} \\
&= \left(\frac{\mu}{\mu+s} \right)^n e^{\frac{s}{\lambda}} \frac{Q\left(n-1, \frac{\mu+s}{\lambda}\right)}{Q\left(n-1, \frac{\mu}{\lambda}\right)}.
\end{aligned}$$

2. Megoldás.

Most a sűrűségfüggvényből határozzuk meg a $L_T(s)$ -t. Mivel a nevező konstans, csak a számláló Laplace-transzformáltját vezetjük le.

$$\begin{aligned}
L_{sz}(s) &= \int_0^{\infty} \mu \frac{\left(\mu x + \frac{\mu}{\lambda} \right)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-(\mu x + \frac{\mu}{\lambda})} \cdot e^{-sx} dx \\
&= e^{-\frac{\mu}{\lambda}} \int_0^{\infty} \mu \frac{\left(\mu x + \frac{\mu}{\lambda} \right)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-(\mu+s)x} dx.
\end{aligned}$$

A binomiális tételt alkalmazva valamint észrevéve, hogy egy Erlang-eloszlás Laplace-

transzformáltja szerepel az összefüggésben kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
L_{sz}(s) &= \frac{e^{-\frac{\mu}{\lambda}}}{(n-1)!} \int_0^\infty \mu \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (\mu x)^k \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{n-1-k} \cdot e^{-(\mu+s)x} dx \\
&= e^{-\frac{\mu}{\lambda}} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{n-1-k}}{(n-1-k)!} \int_0^\infty \mu \frac{(\mu x)^k}{k!} e^{-(\mu+s)x} dx \\
&= e^{-\frac{\mu}{\lambda}} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{n-1-k}}{(n-1-k)!} \left(\frac{\mu}{\mu+s}\right)^{k+1} \\
&= e^{-\frac{\mu}{\lambda}} \left(\frac{\mu}{\mu+s}\right)^n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\left(\frac{\mu}{\lambda} \cdot \frac{\mu+s}{\mu}\right)^{n-1-k}}{(n-1-k)!} \\
&= e^{-\frac{\mu}{\lambda}} \left(\frac{\mu}{\mu+s}\right)^n Q\left(n-1, \frac{\mu+s}{\lambda}\right) \cdot e^{\frac{\mu+s}{\lambda}} \\
&= \left(\frac{\mu}{\mu+s}\right)^n Q\left(n-1, \frac{\mu+s}{\lambda}\right) \cdot e^{\frac{s}{\lambda}}.
\end{aligned}$$

Mivel

$$L_T(s) = \frac{L_{sz}(s)}{Q\left(n-1, \frac{\mu}{\lambda}\right)},$$

ezért

$$L_T(s) = \left(\frac{\mu}{\mu+s}\right)^n e^{\frac{s}{\lambda}} \frac{Q\left(n-1, \frac{\mu+s}{\lambda}\right)}{Q\left(n-1, \frac{\mu}{\lambda}\right)}.$$

3. Megoldás.

Szintén csak a számláló Laplace-transzformáltját határozzuk meg először

$$L_{sz}(s) = \int_0^\infty \mu \frac{\left(\mu x + \frac{\mu}{\lambda}\right)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-(\mu x + \frac{\mu}{\lambda})} \cdot e^{-sx} dx$$

A $t = \mu x + \frac{\mu}{\lambda}$ helyettesítést véve

$$x = \frac{1}{\mu} \left(t - \frac{\mu}{\lambda}\right), \quad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{\mu},$$

majd helyettesítve

$$\begin{aligned}
 L_{sz}(s) &= \int_{\frac{\mu}{\lambda}}^{\infty} \mu \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-t} e^{-\frac{s}{\mu}(t-\frac{\mu}{\lambda})} \frac{1}{\mu} dt \\
 &= e^{\frac{s}{\mu}} \int_{\frac{\mu}{\lambda}}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-(1+\frac{s}{\mu})t} dt \\
 &= e^{\frac{s}{\mu}} \left(\frac{\mu}{\mu+s} \right)^{n-1} \int_{\frac{\mu}{\lambda}}^{\infty} \frac{\left(\left(1+\frac{s}{\mu}\right)t \right)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-(1+\frac{s}{\mu})t} dt.
 \end{aligned}$$

Az $y = \frac{\mu+s}{\mu}t$ helyettesítést véve $\frac{dt}{dy} = \frac{\mu}{\mu+s}$, ezért

$$\begin{aligned}
 L_{sz}(s) &= e^{\frac{s}{\lambda}} \left(\frac{\mu}{\mu+s} \right)^n \int_{\frac{\mu+s}{\lambda}}^{\infty} \frac{y^{n-1}}{(n-1)!} e^{-y} dy \\
 &= e^{\frac{s}{\lambda}} \left(\frac{\mu}{\mu+s} \right)^n \cdot Q\left(n-1, \frac{\mu+s}{\lambda}\right),
 \end{aligned}$$

így

$$L_T(s) = \frac{L_{sz}(s)}{Q\left(n-1, \frac{\mu}{\lambda}\right)} = e^{\frac{s}{\lambda}} \left(\frac{\mu}{\mu+s} \right)^n \cdot \frac{Q\left(n-1, \frac{\mu+s}{\lambda}\right)}{Q\left(n-1, \frac{\mu}{\lambda}\right)}.$$

Vagyis mind a három módon ugyanazt az eredményt kaptuk. Ebből elvben T momentumi kiszámolhatók. Mivel $L_T(s) = L_W(s) \cdot \frac{\mu}{\mu+s}$, ezért

$$L_W(s) = \left(\frac{\mu}{\mu+s} \right)^{n-1} e^{\frac{s}{\lambda}} \frac{Q\left(n-1, \frac{\mu+s}{\lambda}\right)}{Q\left(n-1, \frac{\mu}{\lambda}\right)}.$$

Java-appletek a rendszerjellemzők meghatározására

<http://irh.inf.unideb.hu/user/jsztrik/education/09/applet/HMM1KK.html>

<http://irh.inf.unideb.hu/user/jsztrik/education/09/3f11.html>

12. Példa. Tekintsünk 6 db gépet 40 óra átlagos élettartammal, javítási idejük átlagosan 4 óra. Határozzuk meg a rendszer jellemzőit!

Megoldás: $\lambda = \frac{1}{40}$ óránként, $\mu = \frac{1}{4}$ óránként, $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{4}{40} = 0.1$, $n = 6$, $P_0 = 0.484$

Hibás gépek	0	1	2	3	4	5	6
várakozó g.	0	0	1	2	3	4	5
P_n	0,484	0.290	0.145	0.058	0.017	0.003	0.000

$$\bar{Q} = 0.324, \quad U_{sz} = 0.516, \quad \bar{W} = 2.51 \text{ óra}, \quad \bar{T} = 2.51 + 0.25 = 6.51 \text{ óra}$$

$$\bar{e} = 40 \text{ óra}, \quad U_g = 0.86$$

$$\bar{m} = n \times U_g = 5.16, \quad \bar{N} = 6 - 5.16 = 0.84$$

$$E\delta = \frac{0.516}{6 \times \frac{1}{40} \times 0.484} = \frac{4 \times 5.16}{6 \times 0.484} \approx \frac{7}{10} \text{ óra}$$

■

13. Példa. Az előző példaadatban az átlagos élettartamot változtassuk meg 2 órára! Határozzuk meg a rendszer jellemzőit!

Megoldás: $\frac{1}{\lambda} = 2$, $\frac{1}{\mu} = 4$, $\frac{\lambda}{\mu} = 2$, $n = 6$, $P_0 = \frac{1}{75973}$, és ebből látható, hogy egy szerelő nem elégséges.

Hibás gépek	0	1	2	3	4	5	6
várakozó g.	0	0	1	2	3	4	5
P_k	$\frac{1}{75973}$	$\frac{1}{75973}$	0.001	0.012	0.075	0.303	0.606

$$U_s \approx 0.999, \quad \bar{Q} \approx 4.5, \quad \bar{W} \approx 22.5 \text{ óra}, \quad \bar{T} = 26.5 \text{ óra}$$

$$\bar{e} = 2 \text{ óra}, \quad U_g \approx 0.08, \quad \bar{m} \approx 0.5, \quad \bar{N} \approx 5.5, \quad E\delta \approx \infty.$$

Minden adat azt mutatja, amit vártunk, mivel a karbantartási tényező 1-nél nagyobb. Arra, hogy ezek után mennyi szerelőt kell beállítani, többféle kritérium lehet. Ezzel a következő fejezetben foglalkozunk. Mindenesetre, hogy ne legyen torlódás, a $\frac{\lambda}{r\mu} < 1$ feltételnek kell teljesülnie, ahol r a szerelők számát jelöli.

■

3.3. Inhomogén modellek

A most ismertetett három inhomogén modell leírása megtalálható Csige László és Tomkó József [11] cikkében. A közölt numerikus eljárásokat egyszerű példákon keresztül szemlél-tetjük és összehasonlítjuk a különböző kiszolgálási elvekből adódó rendszerjellemzőket. Adott, n számú, gép meghibásodásainak javítását végezze egyetlen szerelő. Feltesszük,

hogy a gépek működési időtartama exponenciális eloszlású, a k -adik gépre $\lambda_k > 0$ paraméterrel, és a javítási idő is exponenciális eloszlású a $\mu_k > 0$ paraméterrel. Mind a működési, mind a javítási idők teljesen függetlenek egymástól.

Tetszőleges $t \geq 0$ pillanatban az n gép közül néhány működhet, és a többi vagy javítás alatt van, vagy javításra várakozik. Jelölje $v(t)$, ($t \geq 0$) a t pillanatban nem működő gépek számát. Ez még nem jellemzi kimerítően a rendszert. Meg kell mondanunk azt is, hogy melyek a nem működő gépek, és ezek közül melyiket javítja a szerelő. Tetszőleges $t \geq 0$ -ra egy $v(t)$ -dimenziójú $(x_1(t), \dots, x_{v(t)}(t))$ vektort vezetünk be, melynek a komponensei a nem működő gépek indexeit jelölik. Ha a javítás a meghibásodás sorrendjében történik, azaz FIFO elv követése esetén a nem működő gépek felsorolása a meghibásodásuk sorrendjének felel meg. Így $v(t) > 0$ -ra $x_1(t)$ a javítás alatt lévő gép indexét adja. A Processor Sharing (PS) elv követésekor, amikor az összes hibás gép javítás alatt van, és $v(t) = k$ esetén a javítások mindegyike $1/k$ intenzitással folyik, az $(x_1(t), \dots, x_n(t))$ vektor elrendezése tetszőleges lehet. Ilyenkor a nagyság szerinti $(x_1(t) < x_2(t) < \dots < x_{v(t)}(t))$ rendezésben állapodunk meg. Prioritásos kiszolgálás (PR) esetén a hibás gépeket indexük nagyságrendje szerint soroljuk fel, mivel az alacsonyabb indexű gép elsőbbséggel rendelkezik a magasabb indexű gépekkel szemben.

A gépkiszolgálás Markov-lánca alatt a

$$\xi(t) = (v(t); x_1(t), \dots, x_{v(t)}(t)), \quad (t \geq 0),$$

vektorfolyamatot értjük, ahol $x_1(t), \dots, x_{v(t)}(t)$ rendezését a különböző kiszolgálási elvek esetén az előbb elmondottak szerint kell érteni.

A $\xi(t)$ folyamat folytonos idejű, véges állapotterű Markov-lánc. Ha a λ_k, μ_k , ($1 \leq k \leq n$) paraméterek mind pozitívak, akkor a lánc ergodikus.

3.3.1. Az $\vec{M}/\vec{M}/1/n/n/PS$ rendszer

A gépkiszolgálási probléma esetén ez a diszciplína azt jelenti, hogy a gépek javítása meghibásodásuk után rögtön megkezdődik, melynek intenzitása függ a mindenkori hibás gépek számától, és azzal fordítottan arányos. Ha egy gép javítás alatt van egy olyan δt idő alatt, amikor rajta kívül még $k-1$ más gép is hibás, akkor ezen δt idő alatt egy gép javítási ideje csak $\delta t/k$ mennyiséggel halad előre.

Ekkor a $\xi(t)$ folyamat állapotterét az $1, 2, \dots, n$ számok $(i_1, \dots, i_k)$ ($1 \leq k \leq n$) kombinációi alkotják, és ezekhez még hozzá kell venni a 0 pontot (minden gép működik). Legyenek $P_{i_1, \dots, i_k}(t)$ ($1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$) a $\xi(t)$ lánc t pillanatbeli eloszlását leíró függvények. Ekkor a Kolgomorov-egyenletek a következők

$$\begin{aligned} P'_0(t) &= - \left[\sum_{i=1}^n \lambda_i \right] P_0(t) + \sum_{i=1}^n \mu_i P_i(t), \\ P'_{i_1 \dots i_k}(t) &= \sum_{r=1}^k \lambda_{i_r} P_{i_1 \dots i_{r-1} i_{r+1} \dots i_k}(t) - \\ &\quad - \left[\nu_{i_1 \dots i_k} + \frac{1}{k} \sum_{r=1}^k \mu_{i_r} \right] P_{i_1, \dots, i_k}(t) + \sum_{r \neq i_1 \dots i_k} \frac{\mu_r}{k+1} P_{i'_1 i'_2 \dots i'_{k+1}}(t) \end{aligned}$$

ahol $i'_1, \dots, i'_{k+1}$ az $i_1, \dots, i_k, r$ egészeknek a nagyság szerinti rendezése, és $\nu_{i_1 \dots i_k} = \sum_{r \neq i_1 \dots i_k} \lambda_r$, $k = 1, \dots, n-1$.

$$P'_{1, \dots, n}(t) = \sum_{r=1}^n \lambda_r P_{1, \dots, r-1, r+1, \dots, n}(t) - \left[\frac{1}{n} \sum_{r=1}^n \mu_r \right] P_{1, \dots, n}(t),$$

ahol a megfelelő indexek értelemszerű értékeket vesznek fel.
A stacionárius eloszlás, amely azonos a

$$P_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} P_o(t),$$

$$P_{i_1 \dots i_k} = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{i_1 \dots i_k}(t)$$

($1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$, $1 \leq k \leq n$), ergodikus eloszlással, a

$$\begin{aligned} \left[\sum_{i=1}^n \lambda_i \right] P_0 &= \sum_{i=1}^n \mu_i P_i, \\ \left[\nu_{i_1 \dots i_k} + \frac{1}{k} \sum_{r=1}^k \mu_{i_r} \right] P_{i_1 \dots i_k} &= \sum_{r=1}^k \lambda_{i_r} P_{i_1 \dots i_{r-1} i_{r+1} \dots i_k} + \\ &+ \sum_{r \neq i_1 \dots i_k} \frac{\mu_r}{k+1} P_{i'_1 i'_2 \dots i'_{k+1}}, \\ \left[\frac{1}{n} \sum_{r=1}^n \mu_r \right] P_{1, \dots, n} &= \sum_{r=1}^n \lambda_r P_{1, \dots, r-1, r+1, \dots, n} \end{aligned}$$

homogén lineáris egyenletrendszernek a $P_0 + \sum P_{i_1 \dots i_k} = 1$ feltételt kielégítő egyértelmű megoldása, ahol az összegzés n elem összes kombinációira terjed ki. Egyszerű helyettesítéssel belátható, hogy ennek az egyenletrendszernek a megoldása a

$$P_{i_1 \dots i_k} = C k! \prod_{r=1}^k \frac{\lambda_{i_r}}{\mu_{i_r}},$$

ahol C a normalizáló feltételből határozható meg.

3.3.2. Az $\vec{M}/\vec{M}/1/n/n/FIFO$ rendszer

A gépek javításai történjenek a meghibásodás sorrendjében. Ekkor a $\xi(t)$ folyamat állapotterét n elem összes $1 \leq k \leq n$ rendű ismétlés nélküli variációi alkotják, amelyekhez még a 0 pontot is csatolni kell (a 0 pont annak az esetnek a megfelelője, amikor mindegyik gép működik).

A $\xi(t)$ lánc t ($t \geq 0$) pillanatbeli eloszlására vezessük be az alábbi függvényeket. Ha $v(t)$ jelöli a t időpontban nem működő gépek számát, $x_i(t)$ a nem működő gépek indexét

$(i = 1, \dots, v(t))$ meghibásodásuk sorrendjében, akkor a lánc t pillanatbeli eloszlását leíró függvények:

$$P_0(t) = P(v(t) = 0),$$

$$P_{i_1 \dots i_k}(t) = P(v(t) = k, x_1(t) = i_1, \dots, x_k(t) = i_k),$$

ahol $(1 \leq k \leq n)$, $(1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n)$. Ezek a függvények kielégítik a következő differenciálegyenlet-rendszert

$$\begin{aligned} P'_0(t) &= - \left[\sum_{i=1}^n \lambda_i \right] P_0(t) + \sum_{i=1}^n \mu_i P_i(t), \\ P'_{i_1 \dots i_k}(t) &= \lambda_{i_k} P_{i_1 \dots i_{k-1}}(t) - \\ &\quad - [\nu_{i_1 \dots i_k} + \mu_{i_1}] P_{i_1 \dots i_k}(t) + \sum_{r \neq i_1 \dots i_k} \mu_r P_{ri_1 \dots i_k}(t), \\ P'_{i_1, \dots, i_n}(t) &= \lambda_{i_n} P_{i_1, \dots, i_{n-1}}(t) - \mu_{i_1} P_{i_1, \dots, i_n}(t). \end{aligned}$$

A stacionárius eloszlás, mely azonos a

$$P_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} P_0(t),$$

$$P_{i_1 \dots i_k} = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{i_1 \dots i_k}(t)$$

$(1 \leq i_1, i_2, \dots, i_k \leq n, 1 \leq k \leq n)$ ergodikus eloszlással, a

$$\begin{aligned} \left[\sum_{i=1}^n \lambda_i \right] P_0 &= \sum_{i=1}^n \mu_i P_i, \\ [\nu_{i_1 \dots i_k} + \mu_{i_1}] P_{i_1 \dots i_k} &= \lambda_{i_k} P_{i_1 \dots i_{k-1}} + \sum_{r \neq i_1 \dots i_k} \mu_r P_{ri_1 i_2 \dots i_k}, \\ \mu_{i_1} P_{i_1, \dots, i_n} &= \lambda_{i_n} P_{i_1, \dots, i_{n-1}} \end{aligned}$$

homogén lineáris egyenletrendszernek a $P_0 + \sum P_{i_1 \dots i_k} = 1$ feltételt kielégítő egyértelmű megoldása, ahol az összegzés n elem összes variációjára terjed ki.

Az egyenletrendszer könnyebben kezelhetővé válik, ha bevezetjük a következő vektorváltozókat. Legyen $Z^{(k)}$ $(1 \leq k \leq n)$ $V_k^n = \binom{n}{k} k!$ dimenziós vektor, amelynek a komponensei az $1, 2, \dots, n$ számok k -ad osztályú, lexikografikusan rendezett $i_1, \dots, i_k$ variációihoz tartozó $P_{i_1 \dots i_k}$ valószínűségek. Ekkor az egyenletrendszer az alábbi differenciaegyenlet-rendszerbe megy át

$$\begin{aligned} P_0 &= B_0 Z^{(1)}, \\ Z^{(1)} &= A_1 P_0 + B_1 Z^{(2)}, \\ &\vdots \\ Z^{(k)} &= A_k Z^{(k-1)} + B_k Z^{(k+1)}, \\ &\vdots \\ Z^{(n)} &= A_n Z^{(n-1)}. \end{aligned}$$

Itt most $1 \leq k \leq n$ -re $A_k V_k^n \times V_{k-1}^n$ -es mátrix, $0 \leq k < n$ -re $B_k V_k^n \times V_{k+1}^n$ -es mátrix, és elemeik az egyenletrendszerből könnyen meghatározhatók.

Legyen $F_n = A_n$ és tetszőleges $1 \leq k < n$ esetén $F_k = (I - B_k F_{k+1})^{-1} A_k$. Ekkor $Z^{(k)} = F_k Z^{(k-1)}$ ($1 \leq k \leq n$), ahol $Z^{(0)} = P_0$.

Egy tetszőleges P_0 értékből a $Z^{(k)}$ ($1 \leq k \leq n$) vektorok rendre meghatározhatók. A $P_{i_1 \dots i_k}$ valószínűségeket a normalizáló feltétel figyelembe vétele után e vektorok komponensei szolgáltatják.

3.3.3. Az $\vec{M}/\vec{M}/1/n/n/PR$ rendszer

Abszolút prioritásos kiszolgálási elv esetén a $\xi(t)$ folyamat állapotterét az $1, 2, \dots, n$ számok $(i_1, \dots, i_k)$ ($1 \leq k \leq n$) kombinációi alkotják, és ezekhez még hozzá kell venni a 0 pontot (minden gép működik).

Legyenek $P_{i_1, \dots, i_k}(t)$ ($1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$) a $\xi(t)$ lánc t pillanatbeli eloszlását leíró függvények. Ekkor a Kolgomorov-egyenletek a következők

$$\begin{aligned} P'_0(t) &= - \left[\sum_{i=1}^n \lambda_i \right] P_0(t) + \sum_{i=1}^n \mu_i P_i(t), \\ P'_{i_1 \dots i_k}(t) &= \sum_{r=1}^k \lambda_{i_r} P_{i_1 \dots i_{r-1} i_{r+1} \dots i_k}(t) - \\ &\quad - [\nu_{i_1 \dots i_k} + \mu_{i_1}] P_{i_1 \dots i_k}(t) + \sum_{r=1}^{i_1-1} \mu_r P_{r i_1 \dots i_k}(t), \\ P'_{1, \dots, n}(t) &= \sum_{r=1}^n \lambda_r P_{1, \dots, r-1, r+1, \dots, n}(t) - \mu_1 P_{1, \dots, n}(t). \end{aligned}$$

A stacionárius eloszlás, amely azonos a

$$P_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} P_0(t),$$

$$P_{i_1 \dots i_k} = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{i_1 \dots i_k}(t),$$

($1 \leq i_1, i_2, \dots, i_k \leq n$, $1 \leq k \leq n$), ergodikus eloszlással, a

$$\begin{aligned} \left[\sum_{i=1}^n \lambda_i \right] P_0 &= \sum_{i=1}^n \mu_i P_i, \\ [\nu_{i_1 \dots i_k} + \mu_{i_1}] P_{i_1 \dots i_k} &= \sum_{r=1}^k \lambda_{i_r} P_{i_1 \dots i_{r-1} i_{r+1} \dots i_k} + \\ &\quad + \sum_{r=1}^{i_1-1} \mu_r P_{r i_1 \dots i_k}, \\ \mu_1 P_{1, \dots, n} &= \sum_{r=1}^n \lambda_r P_{1, \dots, r-1, r+1, \dots, n} \end{aligned}$$

homogén lineáris egyenletrendszernek a $P_0 + \sum P_{i_1 \dots i_k} = 1$ feltételt kielégítő egyértelmű megoldása, ahol az összegzés n elem összes kombinációra terjed ki.

Az egyenletrendszer megoldásához, hasonlóan a meghibásodás sorrendjében történő kiszolgálás esetéhez, vezessük be a következő vektorváltozókat.

Legyen $Y^{(k)}$ ($1 \leq k \leq n$) $C_k^n = \binom{n}{k}$ dimenziós vektor, amelynek a komponensei az $1, 2, \dots, n$ számok k -ad osztályú, lexikografikusan rendezett $i_1, \dots, i_k$ kombinációhoz tartozó $P_{i_1 \dots i_k}$ valószínűségek. Ekkor az egyenletrendszer az alábbi differencia egyenletrendszerbe megy át.

$$\begin{aligned} P_0 &= B_0 Y^{(1)}, \\ Y^{(1)} &= A_1 P_0 + B_1 Y^{(2)}, \\ &\vdots \\ Y^{(k)} &= A_k Y^{(k-1)} + B_k Y^{(k+1)}, \\ &\vdots \\ Y^{(n)} &= A_n Y^{(n-1)}. \end{aligned}$$

Itt most $1 \leq k \leq n$ -re A_k $C_k^n \times C_{k-1}^n$ -es mátrix, $0 \leq k < n$ -re B_k $C_k^n \times C_{k+1}^n$ -es mátrix, és elemeik egyenletrendszerből kiolvashatók. Ezt a differencia egyenletrendszert ugyanúgy oldhatjuk meg, mint a FIFO kiszolgálás esetén.

Rendszerjellemzők

Könnyű látni, hogy stacionárius esetben

- *A szerelő kihasználtsága*

$$U_s = \frac{\mathbb{E}(\delta)}{\mathbb{E}(\delta) + \left[\sum_{i=1}^n \lambda_i \right]^{-1}} = 1 - P_0.$$

- *A gépek kihasználtsága*

Jelölje $U^{(i)}$ az i -edik gép kihasználtságát. Ekkor

$$U^{(i)} = \frac{\frac{1}{\lambda_i}}{\frac{1}{\lambda_i} + \bar{T}_i} = 1 - P^{(i)},$$

ahol $\bar{T}_i$ az i -edik gép hibás állapotban való tartózkodásának várható értékét jelöli,

$$P^{(i)} = \sum_{k=1}^n \sum_{i \in (i_1, \dots, i_k)} P_{i_1, \dots, i_k},$$

azaz annak stacionárius valószínűsége, hogy a gép rossz. Így

$$\bar{T}_i = \frac{P^{(i)}}{\lambda_i (1 - P^{(i)})},$$

valamint FIFO esetben az átlagos várakozási idő

$$\overline{W}_i = \overline{T}_i - \frac{1}{\mu_i}.$$

Könnyű látni, hogy a hibás gépek várható száma

$$\sum_{i=1}^n P^{(i)}.$$

Fennáll továbbá a

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i (1 - P^{(i)}) \overline{T}_i = \sum_{i=1}^n P^{(i)}$$

reláció, amely a Little-tétel egy speciális alakja. Homogén esetben ez nyilvánvalóan az

$$\bar{n} \lambda \bar{T} = n - \bar{n}$$

alakot ölti, ahol $\bar{n}$ a működő gépek átlagos számát jelöli.

Az inhomogén modellek további általánosításával foglalkoznak pl. a Pósfalvi – Sztrik [52, 53] cikkek.

Most nézzünk meg néhány futási eredményt, amelyekkel a különböző kiszolgálási elvek hatását tudjuk demonstrálni.

Bemenő paraméterek	a gépek kihasználtsága					
	FIFO		PROC-SHARING		PRIORITÁSOS	
$n = 3$						
$\lambda_1 = 0.3 \quad \mu_1 = 0.7$	0.57		0.57		0.70	
$\lambda_2 = 0.3 \quad \mu_2 = 0.7$	0.75	0.57	0.74	0.57	0.74	0.58
$\lambda_3 = 0.3 \quad \mu_3 = 0.7$	0.57		0.57		0.44	
összgép kihasználtság:	1.72		1.72		1.72	
$n = 3$						
$\lambda_1 = 0.5 \quad \mu_1 = 0.9$	0.48		0.51		0.64	
$\lambda_2 = 0.3 \quad \mu_2 = 0.7$	0.75	0.56	0.76	0.56	0.77	0.56
$\lambda_3 = 0.2 \quad \mu_3 = 0.5$	0.62		0.58		0.44	
összgép kihasználtság:	1.669		1.666		1.656	
$n = 4$						
$\lambda_1 = 0.5 \quad \mu_1 = 0.9$	0.38		0.429		0.64	
$\lambda_2 = 0.4 \quad \mu_2 = 0.7$	0.41		0.423		0.49	
	0.903		0.906		0.922	
$\lambda_3 = 0.3 \quad \mu_3 = 0.6$	0.46		0.451		0.36	
$\lambda_4 = 0.2 \quad \mu_4 = 0.5$	0.54		0.500		0.24	
összgép kihasználtság:	1.814		1.804		1.751	

3.1. táblázat. Futási eredmények

3.4. Homogén forrású modellek összehasonlítása

Az alábbiakban ismertetett eredmények Asztalos Domonkos [5] cikkében találhatók meg, és olyan véges forrású tömegkiszolgálási rendszerekre vonatkoznak, ahol egy kiszolgáló egység n fogyasztót szolgál ki. A forrásnál eltöltött idő minden fogyasztóra nézve azonos λ paraméterű exponenciális eloszlású változó, és az i -edik fogyasztó kiszolgálási ideje μ_i paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Ennél a modellenél vizsgáljuk a kiszolgáló egység foglaltsági periódusait.

Meg lehet mutatni, hogy PS kiszolgálási elv mellett a kiszolgáló egység foglaltsági periódusának várható értéke

$$\mathbb{E}\delta_{PS}^{(n)} = \frac{1}{n\lambda} \sum_{j=1}^n j! C_j,$$

$$\text{ahol } C_j = \sum_{i_1, \dots, i_j} \prod_{k=1}^j \frac{\lambda}{\mu_{i_k}}.$$

2. Tétel. *Exponenciális struktúrájú, véges, homogén forrású rendszerben abszolút prioritásos kiszolgálási diszciplína esetén tetszőleges n -re $(1, 2, \dots)$ a kiszolgáló egység foglaltsági periódusainak várható értéke $\mathbb{E}\delta_{PR}^{(n)}$, stacionárius esetben független a prioritások kiosztásától.*

1. Következmény.

$$\mathbb{E}\delta_{PR}^{(n)} = \mathbb{E}\delta_{FIFO}^{(n)} = \mathbb{E}\delta_{LIFO}^{(n)}$$

A FIFO kiszolgálási diszciplína megfelel a érkezési sorrendben való kiszolgálásnak, a LIFO esetén egy érkezés kiszolgálása rögtön megkezdődik, és az esetleg megszakított fogyasztó kiszolgálása a megszakítás helyétől folytatódik a megszakítást okozó fogyasztó kiszolgálása után.

A Következmény *Bizonyítása*. Prioritásos kiszolgálás esetén $\mathbb{E}\delta_{PR}^{(n)}$ független a prioritások kiosztásától. A FIFO diszciplínával azonos kiszolgálást kapunk, ha egy érkezéskor az éppen beérkező fogyasztóhoz rendelt prioritás értéke megegyezik azzal a számmal, hogy hányadiknak érkezett a kiszolgáló egységhez, és a korábban már a kiszolgáló egységben lévő fogyasztók prioritását nem változtatjuk meg. Ha egy fogyasztó távozik a kiszolgáló egységből, akkor a kiszolgáló egységnél maradt fogyasztók mindegyikének a prioritását eggyel csökkentjük. A forrásnál tartózkodó fogyasztók között a fennmaradt prioritásértékek tetszőlegesen kioszthatók. A LIFO diszciplínával azonos kiszolgálást kapunk, ha egy érkezéskor az éppen beérkező fogyasztó prioritása egy lesz, és a korábban már a kiszolgáló egységnél tartózkodó fogyasztók prioritását eggyel növeljük, egyébként a prioritások kiosztása megegyezik a FIFO-nál leírtakkal.

3. Tétel. *Exponenciális struktúrájú, véges, homogén forrású tömegkiszolgálási rendszerekben $\mathbb{E}\delta_{PR}^{(n)} = \mathbb{E}\delta_{PS}^{(n)}$.*

A kiszolgálási diszciplínákat két csoportra oszthatjuk. Az első csoportba azok tartoznak, amelyeknél bármely véges τ intervallum felosztható véges számú diszjunkt intervallumok olyan sorozatára, hogy mindegyik intervallumban csak egy adott fogyasztó részesül kiszolgálásban. Ezeket a kiszolgálási diszciplínákat *osztatlan kiszolgálású* diszciplínáknak nevezzük. Ilyenek a FIFO, a LIFO, az RR és PR diszciplínák. A másik csoportba tartozik az összes többi. Ilyen például a PS elv. Egy kiszolgálási diszciplína *konzervatív*, ha a kiszolgáló egységnél nem vész el, és nem keletkezik kiszolgálási igény.

4. Tétel. *Exponenciális struktúrájú, véges, homogén forrású tömegkiszolgálási rendszerben, amely n gépet tartalmaz λ és μ_i paraméterekkel, a foglaltsági periódus várható értéke stacionárius esetben azonos minden konzervatív osztatlan kiszolgálású diszciplínára és*

$$\mathbb{E}\delta^{(n)} = \mathbb{E}\delta_{PS}^{(n)}.$$

Bizonyítás: Könnyen belátható, hogy a prioritásos kiszolgálási diszciplína konzervatív és osztatlan kiszolgálójú, és a tételünk szerint $\mathbb{E}\delta_{PR}$ értéke független a prioritások szétosztásától, és attól is, ha a prioritások szétosztása tetszőleges időpontban megváltozik. Az osztatlan kiszolgálású diszciplínák definíciója szerint bármely véges τ intervallumban véges azoknak az eseteknek a száma, amikor a kiszolgálás átvált egyik fogyasztóról a másikra. Így az a konzervatív osztatlan kiszolgálású rendszer, amelyben az eredeti diszciplína döntésének megfelelően megváltoztatjuk a prioritások eloszlását, ugyanúgy viselkedik, mint az eredeti rendszer. ■

3.5. Az $M/M/r/n/n$ modell

Az előző modellben adott feltevéseinket most csupán annyiban változtatjuk, hogy az n számú terminált r szerver szolgálja ki ($r < n$). így $k \leq r$ esetén a k állapot azt jelenti,

hogy éppen k db terminál igénye van kiszolgálás alatt, egyetlen várakozó igény sincs és $r - k$ szerver tétlen. A szerverek tevékenységüket egymástól függetlenül végzik. Ekkor is egy születési-halálozási folyamatot kapunk:

$$\lambda_k = (n - k)\lambda, \quad 0 \leq k \leq n - 1,$$

$$\mu_k = \begin{cases} k\mu & , 1 \leq k \leq r, \\ r\mu & , r < k \leq n, \end{cases}$$

intenzitásokkal.

Az egyensúlyi eloszlás

$$P_k = \binom{n}{k} \rho^k P_0, \quad 0 \leq k \leq r,$$

$$P_k = \frac{k!}{r!r^{k-r}} \binom{n}{k} \rho^k P_0$$

Természetesen teljesülnie kell a

$$\sum_{k=0}^n P_k = 1$$

összefüggésnek. P_0 meghatározására ez a képlet túlságosan bonyolult, így egy egyszerűbb rekurzív formulát használunk.

Jelöljük a_k -val a következő hányadost

$$a_k = \frac{P_k}{P_0}.$$

Ekkor a következő összefüggés alapján számolhatunk

$$a_0 = 1,$$

$$a_k = \frac{n - k + 1}{k} \rho a_{k-1}, \quad 0 \leq k \leq r - 1,$$

$$a_k = \frac{n - k + 1}{r} \rho a_{k-1}, \quad r \leq k \leq n.$$

Mivel a

$$\sum_{k=0}^n P_k = 1$$

összefüggésnek teljesülnie kell, ezért

$$P_0 = 1 - \sum_{k=1}^n P_k.$$

Mindkét oldalt P_0 -al elosztva

$$1 = \frac{1}{P_0} - \sum_{k=1}^n \frac{P_k}{P_0} = \frac{1}{P_0} - \sum_{k=1}^n a_k,$$

így

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^n a_k}.$$

Majd

$$P_k = a_k P_0.$$

Ezek után a szokásos módon megadhatjuk a *rendszerjellelmezőket*

- A rendszerben tartózkodó *igények átlagos száma*

$$\bar{N} = \sum_{k=0}^n k P_k.$$

- A várakozási sor *átlagos hossza*

$$\bar{Q} = \sum_{k=r+1}^n (k-r) P_k = \frac{r^r P_0}{r!} \sum_{k=r+1}^n \frac{(k-r)k!}{r^k} \binom{n}{k} \varrho^k.$$

- Az igény generálásra alkalmas *terminálok átlagos száma*

$$\bar{m} = n - \bar{N}.$$

- A rendszer *kihasználtsága*

$$U_r = 1 - P_0.$$

- A rendszer *átlagos foglaltsági periódushossza*

$$E\delta^{(n)} = \frac{1 - P_0}{n\lambda P_0} = \frac{U_r}{n\lambda P_0}.$$

- A *foglalt kiszolgálóegységek átlagos száma*

$$\bar{r} = \sum_{k=1}^r k P_k + \sum_{k=r+1}^n r P_k = \sum_{k=1}^{r-1} k P_k + r \sum_{k=r}^n P_k = \sum_{k=1}^{r-1} k P_k + r P(W > 0).$$

Továbbá

$$U_s = \frac{\sum_{k=1}^r k P_k + r \sum_{k=r+1}^n P_k}{r} = \frac{\bar{r}}{r}.$$

- A *tétlen kiszolgálóegységek átlagos száma*

$$\bar{S} = r - \bar{r}.$$

További összefüggés

$$\bar{N} = \sum_{k=1}^r k P_k + \sum_{k=r+1}^n (k-r) P_k + r \sum_{k=r+1}^n P_k = \bar{Q} + \bar{r} = \bar{Q} + r - \bar{S} = n - \bar{m}.$$

- A terminálok kihasználtsága

$$U_t = \sum_{k=1}^n \frac{n-k}{n} P_k = \frac{\bar{m}}{n}.$$

- A terminálok átlagos várakozási ideje

$$U_t = \frac{\frac{1}{\bar{\lambda}}}{\frac{1}{\bar{\lambda}} + \bar{W} + \frac{1}{\mu}} = \frac{\bar{m}}{n},$$

amiből

$$\bar{W} = \frac{\bar{N}}{\bar{m}} \frac{1}{\bar{\lambda}} - \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\bar{N}}{\bar{m}\varrho} - 1 \right).$$

Az átlagos válaszolási idő

$$\bar{T} = \bar{W} + \frac{1}{\mu} = \frac{\bar{N}}{\bar{m}\lambda},$$

innen

$$\bar{m}\lambda\bar{T} = \bar{N},$$

ami a jól ismert **Little-formula**, azaz az átlagos beérkezési intenzitás és a rendszerben töltött átlagos idő szorzata a rendszerben tartózkodó igények átlagos számával egyenlő. Ebből

$$\bar{m}\lambda \left(\bar{W} + \frac{1}{\mu} \right) = \bar{Q} + \bar{r},$$

vagyis

$$\bar{m}\lambda\bar{W} + \bar{m}\varrho = \bar{Q} + \bar{r}.$$

Mutassuk meg, hogy

$$\bar{r} = \bar{m}\varrho,$$

mert ebből

$$\bar{m}\lambda\bar{W} = \bar{Q}$$

következik, ami szintén egy **Little-formula**.

Tudjuk, hogy

$$P_{k+1} = \frac{(n-k)\lambda}{\mu_{k+1}} P_k,$$

ahol

$$\mu_j = \begin{cases} j\mu & , j \leq r, \\ r\mu & , j > r. \end{cases}$$

Jól ismert továbbá, hogy

$$\bar{r} = \sum_{k=1}^{r-1} kP_k + r \sum_{k=r}^n P_k.$$

Ekkor

$$\begin{aligned}
\varrho \bar{m} &= \sum_{k=0}^n \varrho(n-k)P_k = \sum_{k=0}^{r-1} \varrho(n-k)P_k + \sum_{k=r}^{n-1} \varrho(n-k)P_k = \\
&= \sum_{k=0}^{r-1} \frac{\lambda(n-k)(k+1)}{(k+1)\mu} P_k + r \sum_{k=r}^{n-1} \frac{\lambda(n-k)}{r\mu} P_k = \\
&= \sum_{k=0}^{r-1} (k+1)P_{k+1} + r \sum_{k=r}^{n-1} P_{k+1} = \sum_{j=1}^r jP_j + r \sum_{j=r+1}^n P_j = \sum_{j=1}^{r-1} jP_j + r \sum_{j=r}^n P_j = \bar{r}.
\end{aligned}$$

Vagyis

$$\varrho \bar{m} = \bar{r},$$

más alakban

$$\lambda \bar{m} = \mu \bar{r},$$

azaz

az átlagos beérkezési intenzitás = az átlagos kiáramlási intenzitással,

ami várható volt, mivel a rendszer egyensúlyi állapotban van. Ezért

$$\bar{W} = \frac{\bar{Q}}{\bar{m}\lambda} = \frac{\bar{Q}}{\bar{r}\lambda\varrho} = \frac{\bar{Q}}{\mu\bar{r}}.$$

- A kiszolgálók átlagos *tétlenségi periódushossza*

Ha a tétlen kiszolgálók olyan sorrendben kezdik kiszolgálni az igényeket, mint amilyen sorrendben előzőleg befejezték a foglaltsági periódusokat, akkor egy szerver tevékenységét a következőképpen írhatjuk le. Ha egy tétlenné vált szerver $j-1$ másik tétlen szervert talál a munka befejeződés pillanatában, akkor csak a j -edik igény kiszolgálásával kezdődik ismét a foglaltsági periódusa.

Jelölje $\bar{e}$ a szerver átlagos üresjáratú periódusa hosszát, $\bar{e}_j$ pedig a fenti állapotban az átlagos tétlenségi időt. Nyilvánvalóan

$$\bar{e}_j = \frac{j}{\lambda},$$

$\bar{e}$ pedig a teljes várható érték tétele alapján

$$\bar{e} = \sum_{j=1}^r \frac{P_{r-j}}{P(e)} \frac{j}{\lambda} = \frac{\bar{S}}{P(e)\lambda},$$

ahol

$$P(e) = \sum_{j=0}^{r-1} P_j = 1 - P(W > 0),$$

azaz annak valószínűsége, hogy van tétlen szerver.

- A szerverek *átlagos foglaltsági periódushossza*

Mivel

$$U_s = \frac{E\delta}{\bar{e} + E\delta},$$

így

$$E\delta = \frac{U_s}{1 - U_s} \bar{e} = \frac{\frac{\bar{r}}{r}}{1 - \frac{\bar{r}}{r}} \bar{e} = \frac{\frac{\bar{r}}{r}}{\frac{r - \bar{r}}{r}} \frac{\bar{S}}{P(e)\lambda} = \frac{\bar{r}}{\bar{S}} \frac{\bar{S}}{P(e)\lambda} = \frac{\bar{r}}{P(e)\lambda} = \frac{\bar{m}}{\mu P(e)}.$$

Vagyis

$$E\delta = \frac{\bar{m}}{\mu P(e)}.$$

A várakozási idő eloszlásfüggvénye

Megmutatjuk hogyan lehet meghatározni $M/M/r/n/n$ rendszer esetén a várakozási és tartózkodási idő sűrűségfüggvényét, majd ebből az eloszlásfüggvényeket.

$$P_k = \begin{cases} \binom{n}{k} \rho^k P_0 \\ \frac{\binom{n}{k} k! \rho^k}{r! r^{k-r}} P_0 \end{cases}$$

ha $z = \frac{1}{\rho}$, akkor

$$P_k = \begin{cases} \binom{n}{k} z^{-k} P_0 \\ \frac{\binom{n}{k} k! z^{-k}}{r! r^{k-r}} P_0 \end{cases}$$

melyből

$$\begin{aligned} P_k &= \frac{\binom{n}{k} k! r^r (rz)^{-k}}{r!} P_0 \\ &= \frac{n! r^r (rz)^{n-k} \cdot e^{-rz}}{(n-k)! r! (rz)^n \cdot e^{-rz}} P_0 \\ &= \frac{r^r}{r!} \frac{P(n-k, rz)}{P(n, rz)} P_0, \quad k \geq r. \end{aligned}$$

$\Pi_k(n) = P_k(n-1)$, vagyis

$$\Pi_k(n) = \frac{r^r}{r!} \frac{P(n-1-k, rz)}{P(n-1, rz)} P_0(n-1), \quad \text{ha } k = r, \dots, n-1.$$

Könnyű látni, hogy

$$\sum_{k=r}^{n-1} \Pi_k(n) = \sum_{k=r}^{n-1} P_k(n-1) = P_W$$

éppen a várakozás valószínűsége. Fejezzük ki P_W -t más alakban is, mert erre később szükségünk lesz! A helyettesítés után

$$\begin{aligned} P_W &= \sum_{k=r}^{n-1} \frac{r^r}{r!} \frac{P(n-1-k, rz)}{P(n-1, rz)} P_0(n-1) \\ &= \frac{r^r}{r!} P_0(n-1) \frac{\sum_{i=0}^{n-1-r} P(i, rz)}{P(n-1, rz)} \\ &= \frac{r^r}{r!} \frac{Q(n-1-r, rz)}{P(n-1, rz)} P_0(n-1). \end{aligned}$$

Megmutatjuk, hogy

$$F_W(x) = 1 - \frac{r^r Q(n-1-r, r(z+\mu x))}{r! P(n-1, rz)} P_0(n-1),$$

amiből

$$F_W(0) = 1 - \frac{r^r Q(n-1-r, rz)}{r! P(n-1, rz)} P_0(n-1)$$

ami éppen azt jelenti, hogy nincs várakozás. Ebből deriválással megkapjuk a sűrűségfüggvényt, ami

$$\begin{aligned} f_W(0) &= 1 - P_W, \\ f_W(x) &= \mu r \frac{r^r P(n-1-r, r(z+\mu x))}{r! P(n-1, rz)} P_0(n-1), \quad x > 0. \end{aligned}$$

Ha $\int_{0+}^{\infty} f_W(x) dx$ -t vesszük, vagyis a 0 pontot kihagyjuk belőle, akkor

$$\int_{0+}^{\infty} f_W(x) dx = \frac{r^r P_0(n-1)}{r! P(n-1, rz)} \cdot \int_{0+}^{\infty} \mu r \frac{(r(z+\mu t))^{n-1-r}}{(n-1-r)!} e^{-r(z+\mu t)} dt.$$

Ha bevezetjük az $y = r(z+\mu t)$ helyettesítést, akkor $\frac{dt}{dy} = \frac{1}{\mu}$ és csak az integrál a következő alakot ölti

$$\int_{rz}^{\infty} \frac{y^{n-1-r}}{(n-1-r)!} e^{-y} dy = Q(n-1-r, rz)$$

vagyis

$$\int_{0+}^{\infty} f_W(x) dx = \frac{r^r Q(n-1-r, rz)}{r! P(n-1, rz)} P_0(n-1) = P_W,$$

amint ez várható volt. Ezért

$$\int_0^{\infty} f_W(x) dx = f_W(0) + \int_{0+}^{\infty} f_W(x) dx = 1.$$

Most határozzuk meg a sűrűségfüggvényt $x > 0$ -ra! Vagyis

$$\begin{aligned} f_W(x) &= \sum_{k=r}^{n-1} r\mu \frac{(r\mu x)^{k-r}}{(k-r)!} e^{-r\mu x} P_k(n-1) \\ &= \sum_{k=r}^{n-1} r\mu \frac{(r\mu x)^{k-r}}{(k-r)!} e^{-r\mu x} \frac{r^r}{r!} \frac{P(n-1-k, rz)}{P(n-1, rz)} P_0(n-1) \\ &= \frac{r\mu r^r P_0(n-1)}{r! P(n-1, rz)} \sum_{k=r}^{n-1} \frac{(r\mu x)^{k-r}}{(k-r)!} \frac{(rz)^{n-1-k}}{(n-1-k)!} e^{-r(z+\mu x)} \\ &= \frac{r\mu r^r P_0(n-1) e^{-r(z+\mu x)}}{r! P(n-1, rz)} \sum_{i=0}^{n-1-r} \frac{(r\mu x)^i}{i!} \frac{(rz)^{n-1-r-i}}{(n-1-r-i)!} \\ &= \frac{r\mu r^r P_0(n-1)}{r! P(n-1, rz)} \frac{(r(z+\mu x))^{n-1-r}}{(n-1-r)!} \cdot e^{-r(z+\mu x)} \\ &= \frac{r\mu r^r P_0(n-1) P(n-1-r, r(z+\mu x))}{r! P(n-1, rz)}, \end{aligned}$$

ugyanazt kapjuk, de tudni kell, hogy

$$f_W(0) = 1 - P_W.$$

Ebből

$$\begin{aligned} P(W > x) &= \int_x^{\infty} f_W(t) dt \\ &= \frac{r^r P_0(n-1)}{r! P(n-1, rz)} \int_x^{\infty} r\mu \frac{(r(z+\mu t))^{n-1-r}}{(n-1-r)!} e^{-r(z+\mu t)} dt \\ &= \frac{r^r P_0(n-1)}{r! P(n-1, rz)} \int_{r(z+\mu x)}^{\infty} \frac{y^{n-1-r}}{(n-1-r)!} e^{-y} dy \\ &= \frac{r^r P_0(n-1) Q(n-1-r, r(z+\mu x))}{r! P(n-1, rz)}. \end{aligned}$$

Ezért

$$F_W(x) = 1 - P(W > x)$$

amit már korábban is megkaptunk. Ellenőrzésképpen vizsgáljuk meg a képletet $r = 1$ esetre! Ekkor

$$P(W > x) = \frac{P_0(n-1)Q(n-2, z + \mu x)}{P(n-1, z)},$$

de

$$P_0(n-1) = \frac{P(n-1, z)}{Q(n-1, z)},$$

így

$$P(W > x) = \frac{Q(n-z, z + \mu x)}{Q(n-1, z)}.$$

A tartózkodási idő eloszlásfüggvényének a meghatározása hasonló elven történik, mint a várakozási idő esetében tettük, de eléggé hosszadalmas.

Bizonyítható, lásd Allen [2], Kobayashi [41], hogy $r \geq 2$ esetben

$$F_T(x) = 1 - C_1 e^{-\mu x} + C_2 Q(n-r-1, r(z + \mu x)),$$

ahol

$$C_1 = 1 + C_2 Q(n-r-1, rz),$$

$$C_2 = \frac{r^r P_0(n-1)}{r!(r-1)(n-r-1)!P(n-1, rz)}.$$

Ebből deriválással

$$f_T(x) = \mu C_1 e^{-\mu x} - C_2 r \mu P(n-r-1, r(z + \mu x)).$$

A normalizáló konstansra itt is felírható egy rekurzió, nevezetesen

$$P_0^{-1}(n) = 1 + \frac{n}{rz} P_0^{-1}(n-1) + \frac{n}{z} \sum_{i=0}^{r-1} \frac{\binom{n-1}{i}}{z^i} \left(\frac{1}{i+1} - \frac{1}{r} \right), \quad n > r,$$

a

$$P_0^{-1}(r) = \left(1 + \frac{1}{z} \right)^r. \quad r \geq 1$$

kezdei értékből kiindulva.

A tartózkodási idő Laplace-transzformáltja

Először határozzuk meg a várakozási idő Laplace-transzformáltját!

Az eddigiekhez hasonlóan könnyű látni, hogy

$$L_W(s) = 1 - P_W + \sum_{k=r}^{n-1} \left(\frac{r\mu}{r\mu + s} \right)^{k-r+1} P_k(n-1).$$

Lépésről-lépésre számítjuk ki a kívánt mennyiségeket

$$\begin{aligned} & \sum_{k=r}^{n-1} \left(\frac{r\mu}{r\mu + s} \right)^{k-r+1} \frac{r^r P_0(n-1) P(n-1-k, rz)}{r! P(n-1, rz)} \\ &= \frac{r^r P_0(n-1) e^{-rz}}{r! P(n-1, rz)} \sum_{k=r}^{n-1} \left(\frac{r\mu}{r\mu + s} \right)^{k-r+1} \frac{(rz)^{n-1-k}}{(n-1-k)!}. \end{aligned}$$

Továbbá

$$\begin{aligned} & \sum_{k=r}^{n-1} \left(\frac{r\mu}{r\mu + s} \right)^{k-r+1} \frac{(rz)^{n-1-k}}{(n-1-k)!} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1-r} \left(\frac{r\mu}{r\mu + s} \right)^{i+1} \frac{(rz)^{n-1-r-i}}{(n-1-r-i)!}, \end{aligned}$$

ahol $i = k - r$. Ezt tovább folytatva az utolsó egyenlőség így írható

$$\left(\frac{r\mu}{r\mu + s} \right)^{n-r} \cdot \sum_{i=0}^{n-1-r} \frac{\left(\frac{r\mu+z}{\lambda} \right)^{n-1-r-i}}{(n-1-r-i)!} = \left(\frac{r\mu}{r\mu + s} \right)^{n-r} e^{\frac{r\mu+z}{\lambda}} Q \left(n-1-r, \frac{r\mu+z}{\lambda} \right).$$

Ezek után

$$\begin{aligned} L_W(s) &= 1 - P_W + \left(\frac{r\mu}{r\mu + s} \right)^{n-r} \frac{r^r P_0(n-1) e^{-rz}}{r! P(n-1, rz)} e^{\frac{r\mu+z}{\lambda}} Q \left(n-1-r, \frac{r\mu+z}{\lambda} \right) \\ &= 1 - P_W + \frac{r^r e^{\frac{s}{\lambda}} P_0(n-1) Q \left(n-1-r, \frac{r\mu+s}{\lambda} \right)}{r! P(n-1, rz)} \left(\frac{r\mu}{r\mu + s} \right)^{n-r}. \end{aligned}$$

Ellenőrzésképpen vizsgáljuk meg az $r = 1$ esetet!

Ekkor

$$\begin{aligned}
L_W(s) &= P_0(n-1) + \left(\frac{\mu}{\mu+s}\right)^{n-1} \frac{e^{\frac{s}{\lambda}} P_0(n-1) Q\left(n-2, \frac{\mu+s}{\lambda}\right)}{P(n-1, z)} \\
&= \frac{P(n-1, z)}{Q(n-1, z)} + \left(\frac{\mu}{\mu+s}\right)^{n-1} \frac{e^{\frac{s}{\lambda}} Q\left(n-2, \frac{\mu+s}{\lambda}\right)}{Q(n-1, z)} \\
&= \frac{\left(\frac{\mu}{\mu+s}\right)^{n-1}}{Q(n-1, z)} \left[\frac{\left(z \left(\frac{\mu+s}{\mu}\right)\right)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-z} + e^{\frac{s}{\lambda}} Q\left(n-2, \frac{\mu+s}{\lambda}\right) \right] \\
&= \frac{\left(\frac{\mu}{\mu+s}\right)^{n-1}}{Q(n-1, z)} \left[\frac{\left(\frac{\mu+s}{\lambda}\right)^{n-1} e^{-\frac{\mu+s}{\lambda}} e^{\frac{s}{\lambda}}}{(n-1)!} + e^{\frac{s}{\lambda}} Q\left(n-2, \frac{\mu+s}{\lambda}\right) \right] \\
&= \frac{\left(\frac{\mu}{\mu+s}\right)^{n-1} e^{\frac{s}{\lambda}} Q\left(n-1, \frac{\mu+s}{\lambda}\right)}{Q(n-1, z)},
\end{aligned}$$

amit korábban is kaptunk.
Ezek után nyilvánvaló, hogy

$$L_T(s) = \left(\frac{\mu}{\mu+s}\right) L_W(s),$$

ami $r=1$ esetben a

$$L_T(s) = \left(\frac{\mu}{\mu+s}\right)^n \frac{e^{\frac{s}{\lambda}} Q\left(n-1, \frac{\mu+s}{\lambda}\right)}{Q(n-1, z)}$$

formulát adja.

Java-applet a rendszerjellemzők meghatározására

<http://irh.inf.unideb.hu/user/jsztrik/education/09/applet/HMMcKK.html>

14. Példa. Egy üzemben 20 db gép üzemel, egyenként 50 óra átlagos élettartammal. A gép javításának várható értéke 5 óra, a szereléseket 3 fő szerelőgárda végzi. Adjuk meg a rendszer jellemzőit, és hasonlítsuk össze őket az előző példában szereplő jellemzőkkel!

Megoldás:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\frac{1}{\mu}}{\frac{1}{\lambda}} = \frac{5}{50} = \frac{1}{10} = 0.1$$

A rekurzív összefüggéseket használva, $a_0 = 1$ -ről indítva a rekurziót, könnyen meghatározhatjuk az a_k értékeket, pl

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = \frac{20-0}{0+1} \times 0.1 \times 1 = 2$$

$$\begin{aligned}
a_2 &= \frac{20-1}{1+1} \times 0.1 \times 2 = 1.9 \\
a_3 &= \frac{20-2}{2+1} \times 0.1 \times 1.9 = 1.14 \\
a_4 &= \frac{20-3}{3} \times 0.1 \times 1.14 = 0.646 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

és így tovább.
Tudjuk, hogy

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^n a_k} = \frac{1}{1 + 6.3394} = 0.13625.$$

Innen

$$P_1 = a_1 \times P_0 = 2 \times 0.13625 = 0.2775$$

$$P_2 = a_2 \times P_0 = 1.9 \times 0.13625 = 0.2588 \text{ stb.}$$

A következő táblázat megadja a különböző állapotok valószínűségét.
 $n = 20, r = 3, \rho = 0.1$

K	Javítás alatt álló gépek száma	Javításra várakozó gépek száma (Q)	Tétlen karbantartók száma (S)	Stac. eloszlás (P_k)
0	0	0	3	0.13625
1	1	0	2	0.27250
2	2	0	1	0.25888
3	3	0	0	0.15533
4	3	1	0	0.08802
5	3	2	0	0.04694
6	3	3	0	0.02347
7	3	4	0	0.01095
8	3	5	0	0.00475
9	3	6	0	0.00190
10	3	7	0	0.00070
11	3	8	0	0.00023
12	3	9	0	0.00007

$$\bar{Q} = 0.339, \quad \bar{S} = 1.213, \quad \bar{N} = \bar{Q} + r - \bar{S} = 2.126$$

$$P(W > 0) = 0.3323, \quad P(e) = 0.6677, \quad \bar{W} = \frac{\bar{Q}}{\lambda(n - \bar{N})} = 0.918 \text{ óra, kb. 59 perc}$$

$$\bar{m} = 20 - 2.126 = 17.874, \quad U^{(n)} = 0.844$$

$$E\delta^{(n)} = \frac{U^{(n)}}{n\lambda P_0} = \frac{5}{2} \times \frac{0.844}{0.136} \approx 15.5 \text{ óra}, \quad \bar{r} = 1.787, \quad \bar{s} = 1.213$$

$$U_S = \frac{\bar{r}}{r} = \frac{1.787}{3} = 0.595, \quad \bar{e} = \frac{\bar{s}}{P(e)\lambda} = \frac{1.213}{0.667 \times \frac{1}{50}} = \frac{50 \times 1.213}{0.667} \approx 90.8 \text{ óra}$$

$$E\delta = \frac{\bar{r}}{P(e)\lambda} = \frac{1.787}{0.667 \times \frac{1}{50}} = \frac{50 \times 1.787}{0.667} \approx 132.1 \text{ óra}$$

$$U_g = \frac{\bar{m}}{n} = \frac{17.874}{20} \approx 0.893$$

$$\bar{T} = \bar{W} + \frac{1}{\mu} = 0.981 + 5 = 5.981 \text{ óra}$$

$$K_1 = \frac{\text{várakozó gépek átlagos száma}}{\text{összes gépek száma}} = \frac{\bar{Q}}{n} = \frac{0.339}{20} = 0.0169$$

$$K_2 = \frac{\text{tétlen kezelők száma}}{\text{összes kezelők száma}} = \frac{\bar{S}}{r} = \frac{1.213}{3} = 0.404$$

Összehasonlítva a megfelelő példában szereplő jellemzőkkel, láthatjuk, hogy az egy javítóra jutó gépek majdnem egyforma száma mellett (6, ill. $6\frac{2}{3}$) a helyzet sokkal jobb 20 gép és 3 szerelő esetében, ugyanis a hatékonysági vizsgálatok az alábbi adatokat szolgáltatták

Gépek száma	6	20
Szerelők száma	1	3
Az egy szerelőre jutó gépek száma	6	$6\frac{2}{3}$
A szerelőkre vonatkozó várakozási együttható K_2	0.4845	0.4042
A gépekre vonatkozó várakozási együttható K_1	0.0549	0.01694

■

15. Példa. Az előző problémában $\rho = 0.1$, $n = 20$ volt. Tételezzük fel, hogy az időegység az óra, hogy a gépállás óránkénti költsége 18 000 Ft, míg a szerelők óránkénti költsége 600 Ft. Mi lesz ebben az esetben a szerelők optimális száma?

Megoldás: Látható, hogy az óránkénti átlagos költség r függvénye.

A következő táblázat megadja a stacionárius eloszlást $r = 3, 4, 5, 6, 7$ esetén (tapasztalatból tudjuk, hogy az r számra $3 \leq r \leq 7$).

r	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8
3	0.136	0.272	0.258	0.155	0.088	0.047	0.023	0.011	0.005
4	0.146	0.292	0.278	0.166	0.071	0.028	0.010	0.003	0.001
5	0.148	0.296	0.281	0.168	0.071	0.022	0.006	0.001	0.000
6	0.148	0.297	0.282	0.169	0.072	0.023	0.006	0.001	...
7	0.148	0.297	0.282	0.169	0.072	0.023	0.006	...	...

A következő táblázat az időegységre jutó költségeket adja meg

r	$\overline{Q}$	$\overline{S}$	$M(K)$ Ft
3	0.32	1.20	6480
4	0.06	2.18	2388
5	0.01	3.17	2082
6	elhanya-	4.17	2502
7	golható	5.16	3096

Látható, hogy az optimális szerelőszám ilyen költségtényezők mellett $r = 5$. Ez a példa is mutatja, hogy rendszerek összehasonlítása többféleképpen értelmezhető. Az említett példák jól szemléltetik ezt a problémakört.

■

3.6. Az $M/M/r/K/n$ rendszer

Ennél a rendszereknél a véges forrásból érkező igények még várakozhatnak, ha a rendszerben tartózkodó igények száma érkezésük pillanatában kevesebb, mint K vagy egyből visszakerülnek a forrásba, ha a rendszer betelt. Az eddigiek alapján könnyű látni, hogy a rendszer viselkedése

$$\lambda_k = (n - k) \quad , \quad 0 \leq k < K,$$

$$\mu_k = \begin{cases} k\mu & , \quad 1 \leq k \leq r, \\ r\mu & , \quad r < k \leq K \end{cases}$$

intenzitású születési-halálozási folyamattal írható le.

Ez magában foglalja az eddig vizsgált rendszereket, hiszen $1 \leq r \leq n$, $r \leq K \leq n$. Az irodalomban kevésbé vizsgált, de értelemszerűen módosításokkal felhasználhatjuk az eddigi módszereket, a lényegi változás a normalizáló konstansban van, vagyis $P_0(n, r, K)$ -t úgy kell megválasztani, hogy

$$\sum_{i=0}^K P_k(n, r, K) = 1$$

teljesüljön. Szintén könnyen látható, hogy

$$P_k(n, r, K) = \begin{cases} \binom{n}{k} \rho^k P_0(n, r, K) & , \quad 0 \leq k < r, \\ \frac{\binom{n}{k} k! \rho^k}{r! r^{k-r}} P_0(n, r, K) & , \quad r \leq k \leq K \end{cases}$$

Bár nincsenek zárt alakú formulák, mint az $M/M/1/n/n$ esetben, de számítógép segítségével a rendszerjellemzők könnyen meghatározhatók.

Nem mutatva az r, K, n paramétereket

$$\bar{N} = \sum_{k=0}^K kP_k, \quad \bar{Q} = \sum_{k=r}^K (k-r)P_k, \quad \bar{r} = \sum_{k=1}^{r-1} kP_k + r \sum_{k=r}^K P_k, \quad \bar{m} = n - \bar{N},$$

$$U_S = \frac{\bar{r}}{r}, \quad U_t = \frac{n - \bar{N}}{n}, \quad \bar{\lambda} = \bar{\mu} = \mu\bar{r},$$

$$\bar{T} = \frac{\bar{N}}{\bar{\lambda}}, \quad \bar{W} = \frac{\bar{Q}}{\bar{\lambda}}, \quad \bar{W} = \bar{T} - \frac{1}{\mu},$$

$$\frac{n - \bar{N}}{n} = \frac{\mathbb{E}(\tau)}{\mathbb{E}(\tau) + \bar{T}}, \quad \mathbb{E}(\tau) = \frac{(n - \bar{N})\bar{T}}{\bar{N}}, \quad \bar{N}_R = \mathbb{E}(\tau)\lambda.$$

Az eddigiekhez hasonlóan könnyű belátni, hogy az igény blokkolási valószínűsége

$$\begin{aligned} P_B(n, r, K) &= \frac{(n - K)P_K(n, r, K)}{\sum_{i=0}^K (n - i)P_i(n, r, K)} \\ &= P_K(n - 1, r, K) \end{aligned}$$

Speciálisan, ha $K = n$, akkor

$$\bar{\lambda} = \lambda(n - \bar{N}) = \mu\bar{r},$$

melyből

$$\bar{T} = \frac{\bar{N}}{\lambda(n - \bar{N})}, \quad \mathbb{E}(\tau) = \frac{1}{\lambda}, \quad P_B = 0,$$

amint az várható volt.

Egyszerű számolással látható, hogy

$$(P_0(n, r, K))^{-1} = (P_0(n, r, K - 1))^{-1} + \frac{\binom{n}{K} K! \rho^K}{r! r^{K-r}},$$

vagyis a normalizáló konstansra rekurzió írható fel a K kapacitást illetően rögzített n, r mellett

$$(P_0(n, r, r))^{-1} = \sum_{i=0}^r \binom{n}{i} \rho^i$$

induló értékkel.

A rendszerhez érkező igény érkezési pillanatában az eloszlás

$$\Pi_k^*(n, r, K) = P_k(n - 1, r, K),$$

de ahhoz is szükség van, hogy az érkező igény bejusson a rendszerbe. Így

$$\Pi_k(n, r, K) = \frac{(n-k)P_k(n, r, K)}{\sum_{i=0}^{K-1} (n-i)P_i(n, r, K)}, \quad k = 0, \dots, K-1$$

Ezért a várakozás valószínűsége

$$\begin{aligned} P_W(n, r, K) &= \sum_{k=r}^{K-1} \Pi_k(n, r, K) \\ f_W(0) &= 1 - P_W(n, r, K) \\ f_W(x) &= \sum_{k=r}^{K-1} \frac{(r\mu)(r\mu x)^{k-r+1}}{(k-r+1)!} e^{-r\mu x} \cdot \Pi_k(n, r, K) \end{aligned}$$

Nem nehéz belátni, hogy

$$\Pi_k(n, r, K) = \frac{P_k(n-1, r, K)}{1 - P_K(n-1, r, K)},$$

így az eddigi lépéseket értelemszerűen ismételve

$$f_W(x) = \frac{\mu r r^x P(K-1-r, rz)}{r! P(K-1, rz)} \frac{P_0(n-1)}{1 - P_K(n-1, r, K)}$$

speciálisan, ha $K = n$, vagyis minden igény bejöhethet a rendszerbe, akkor $P_K(n-1, r, K) = 0$ és a jól ismert képletet nyerjük vissza.

Értelemszerű módosítások után az eloszlásfüggvény

$$F_W(x) = 1 - \frac{r^x Q(K-1-r, r(z+\mu x))}{r! P(K-1, rz)} \frac{P_0(n-1, r, K)}{1 - P_K(n-1, r, K)}.$$

A Laplace-transzformált

$$L_W(s) = 1 - P_W(n, r, K) + \left(\frac{r\mu}{r\mu + s} \right)^K \frac{r^r e^{\frac{s}{\lambda}} Q(K-1-r, \frac{r\mu+s}{\lambda}) P_0(n-1, r, K)}{r! P(K-1, rz)(1 - P_K(n-1, r, K))}.$$

3.7. Az $M/G/1/n/n/PS$ rendszer

Ebben a részben egy újfajta technikát mutatunk meg, mert a kiszolgálási idők már nem lesznek exponenciális eloszlásúak így ennek következtében a működést leíró sztochasztikus folyamat nem lesz folytonos idejű, diszkrét állapotterű Markov-lánc. Az ismertetett modell Yashkov [82] cikkében található meg.

Tekintsünk egy olyan számítógépes rendszert, amely egy központi egységből és n periféria-egységből áll. Mindegyik program egy igénynek felel meg, a központi egység a kiszolgáló egységeknek. Tegyük fel, hogy egy adott perifériát csak egy program használhat, és a

periféria-egységben eltöltött időtartamok minden programra nézve független, azonos λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók. Miután a program bizonyos időt eltöltött a periférián, átkerül a központi egységbe, és itt azonnal megkezdődik a kiszolgálása, amelynek igényelt időtartama $\mathbb{E}S < \infty$ várható értékű, $G(x)$ eloszlásfüggvényű és $g(x)$ sűrűségfüggvényű S valószínűségi változó ($G(0^+) = 0$). A központi egységben a programok kiszolgálása Processor Sharing (PS)-elv szerint történik, azaz hogyha a $(t, t + \delta t)$ időintervallumban egyidűleg k programot szolgálnak ki, akkor az egyes jobok kiszolgálási ideje csak $\delta t/k$ -val halad előre. A programok kiszolgálásuk után abba a perifériába kerülnek vissza, ahonnan érkeztek.

Ebben a modellben a *segédváltozók módszerét* fogjuk alkalmazni a rendszert leíró sztochasztikus folyamat megadásánál. Vezessük be a következő valószínűségi változókat $\nu(t)$: a t -edik időpillanatban a CPU-nál tartózkodó igények száma, $\xi_1(t), \dots, \xi_{\nu(t)}(t)$: a t -edik időpillanatban a CPU-nál tartózkodó igények eltelt kiszolgálási ideje $\nu(t) > 0$ esetben.

Látható, hogy az

$$X(t) = (\nu(t); \xi_1(t), \dots, \xi_{\nu(t)}(t))$$

sztochasztikus folyamat olyan Markov-folyamat, melynek állapotterét egy diszkrét komponensből és több folytonos komponensből álló vektorok alkotják. Az ilyen típusú folyamatokat *szakaszonként lineáris* Markov-folyamatoknak nevezzük.

Meg kell jegyeznünk, hogy nagyon sok problémát ilyen folyamattal tudunk hűen leírni. Részletes tanulmányozásra ajánljuk Gnedenko–Kovalenko [23] könyvét.

Legyen

$$P_k(t, x_1, \dots, x_k) dx_1 \dots dx_k = P(\nu(t) = k; x_i \leq \xi_i < x_i + dx_i, i = 1, \dots, k),$$

azaz $P_k(t, x_1, \dots, x_k)$, $k = 1, \dots, n$ annak a valószínűsége (sűrűségfüggvénye), hogy a központi egységnél a t időpontban k job tartózkodik, és az egyes jobok kiszolgálásából $x_1, \dots, x_k$ hosszúságú idő telt el. Legyen δ megfelelően kicsi pozitív szám.

Ekkor $P_k(t, x_1, \dots, x_k)$ -ra ($k = 1, \dots, n-1$) a következő összefüggés írható fel

$$\begin{aligned} P_k(t; x_1, \dots, x_k) = & \\ = P_k\left(t - \delta; x_1 - \frac{\delta}{k}, \dots, x_k - \frac{\delta}{k}\right) & \prod_{i=1}^k \frac{1 - G(x_i)}{1 - G(x_i - \frac{\delta}{k})} [1 - \lambda(n - k)\delta] + \\ & + (k + 1) \int_0^\delta P_{k+1}\left(t - \delta; x_1 - \frac{\delta}{k}, \dots, x_{k+1} - \frac{\delta}{k+1}\right) \times \\ & \times \prod_{i=1}^k \frac{1 - G(x_i)}{1 - G(x_i - \frac{\delta}{k+1})} \cdot \frac{G(x_{k+1}) - G[x_{k+1} - \frac{\delta}{k+1}]}{1 - G[x_{k+1} - \frac{\delta}{k+1}]} dx_{k+1}. \end{aligned}$$

A jobb oldal első tagja azt írja le, hogy a $(t - \delta, t)$ időintervallumban nem fejeződik be egyetlen kiszolgálás sem. A második tag pedig azt, hogy ebben az időintervallumban a $(k + 1)$ egy program közül egy kiszolgálása fejeződik be. Mindkét oldalt $\prod_{i=1}^k [1 - G(x_i)]$ -vel

osztva, és $\delta \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$ határértéket véve kapjuk, hogy

$$\left[\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \frac{\partial}{\partial x_i} + \lambda(n-k) \right] q_k(x_1, \dots, x_k) =$$

$$\int_0^\infty q_{k+1}(x_1, \dots, x_{k+1}) g(x_{k+1}) dx_{k+1}, \quad k = 1, \dots, n-1,$$

ahol $q_k(x_1, \dots, x_k) = \lim_{t \rightarrow \infty} P_k(t; x_1, \dots, x_k) / \prod_{i=1}^k [1 - G(x_i)]$.

P_0 -ra és $q_n(x_1, \dots, x_n)$ -re hasonlóan nyerjük

$$\lambda n P_0 = \int_0^\infty q_1(x_1) g(x_1) dx_1,$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} q_n(x_1, \dots, x_n) = 0.$$

Ezek az egyenletek nem írják le teljesen a rendszer működését, mivel nem veszik figyelembe az esetleges ugrásszerű átmeneteket azokban a pillanatokban, amikor a programok a perifériákból a központi egységbe kerülnek. A hiányzó egyenleteket hasonlóan kapjuk meg

$$q_1(0) = \lambda n P_0,$$

$$q_k(0, x_1, \dots, x_{k-1}) = \lambda(n-k+1) q_{k-1}(x_1, \dots, x_{k-1}),$$

$$k = 1, \dots, n.$$

A kapott integro-differenciál egyenletek megoldása közvetlen helyettesítéssel adódik, nevezetesen

$$q_k(x_1, \dots, x_k) = P_0 \lambda^k n! / [(n-k)!],$$

és

$$P_k(x_1, \dots, x_k) = P_0 \lambda^k \frac{n!}{(n-k)!} \prod_{i=1}^k [1 - G(x_i)],$$

$$i = 1, \dots, n.$$

Legyen P_k annak a stacionárius valószínűsége, hogy tetszőleges időpontban a központi egységben k program tartózkodik. Nyilvánvalóan

$$P_k = \int_0^\infty \dots \int_0^\infty P_k(x_1, \dots, x_k) dx_1 \dots dx_k = P_0 \frac{n!}{(n-k)!} (\lambda \mathbb{E}S)^k.$$

A P_0 valószínűséget a $\sum_{i=1}^n P_i = 1$ normalizáló feltételből kapjuk meg.

Az $M/G/1/n/n/PS$ rendszerben a rendszerjellemzőket értelemszerű módosításokkal kapjuk

$$(i) \quad \bar{N} = \sum_{k=1}^n k P_k$$

$$(ii) \quad U^{(i)} = \frac{\frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\lambda} + \bar{T}} = \frac{n - \bar{N}}{n},$$

amelyből

$$\bar{T} = \frac{1}{\lambda} \frac{\bar{N}}{n - \bar{N}},$$

vagyis

$$\lambda(n - \bar{N})\bar{T} = \bar{N}$$

ami a **Little-formula**.

Nyilvánvalóan, bár nincsen várakozás a teljes kiszolgálási idő, ami megegyezik a rendszerben eltöltött idővel, hosszabb mint az igényelt kiszolgálási idő. A $\bar{T} = \mathbb{E}(S)$ a PS elvből adódik.

Bár homogén esetben a tartózkodási idő átlagára különböző kiszolgálási elvek mellett is ugyanazokat az értékeket kapjuk, a szórásnégyzetük már lényegesen különbözik egymástól, ha más elvet alkalmazunk.

Meg lehet mutatni, hogy $\vec{G}/\vec{G}/1/n/n/PS$ rendszer esetében

$$P(i_1, \dots, i_k) = C \cdot k! \prod_{j=1}^k \rho^{i_j}, \quad \rho_i = \frac{\mathbb{E}(S_i)}{\mathbb{E}(\tau_i)}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Homogén esetben

$$P_k = C \cdot k! \binom{n}{k} \rho^k.$$

3.8. A $\vec{G}/M/r/n/n/FIFO$ modell

Ennek a modellnek a leírása Sztrik [63] cikkében található meg.

Tekintsünk egy olyan számítógépes rendszert, amely központi egységekből, terminálokból, és jobokból áll. Minden job egy terminállal van kapcsolatban, ahol nincs várakozás. Sorok csak a központi egységeknél fordulhatnak elő. Az ilyen rendszerek elemzéséhez szintén véges forrású sorbanállási modellt használunk. Legyen a rendszerben lévő jobok száma n , és a központi egységek száma r ($r \leq n$). A job bizonyos időt tölt el a terminálnál, ezután a központi egységbe kerül, ahol a job kiszolgálása azonnal megkezdődik, ha az r központi egység között van szabad, egyébként sor alakul ki. A jobokat érkezésük sorrendjében szolgálják ki, és kiszolgálási idejük azonos μ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó. A job kiszolgálásának befejeződése után visszatér a termináljához, ahol véletlen hosszúságú ideig tartózkodik. A i -edik job terminálnál eltöltött ideje $F_i(x)$ eloszlásfüggvénnyel és $f_i(x)$ sűrűségfüggvénnyel rendelkező τ_i valószínűségi változó. Továbbá feltesszük, hogy a konstrukcióban fellépő valószínűségi változók teljesen függetlenek.

A stacionárius eloszlás meghatározása

Jelölje a $\nu(t)$ valószínűségi változó a t időpontban a terminálnál lévő jobok számát, $(\alpha_1(t), \dots, \alpha_{\nu(t)})$ ezeknek a joboknak az indexeit lexikografikus sorrendben, és $(\beta_1(t), \dots, \beta_{n-\nu(t)})$ a központi egységnél lévő (kiszolgálás alatt lévő vagy sorbanálló) jobok indexeit érkezésük sorrendjében. Az

$$Y(t) = (\nu(t); \alpha_1(t), \dots, \alpha_{\nu(t)}; \beta_1(t), \dots, \beta_{n-\nu(t)}), \quad (t \geq 0)$$

folyamat csak akkor Markov-folyamat, ha az $F_i(x)$ ($i = 1, \dots, n$) eloszlásfüggvények exponenciálisak.

Vezessük be a $\xi\alpha_i(t)$ változót, amely azt az időt jelöli, amelyet az α_i job a terminálnál eltöltött a legutolsó központi egységbeli kiszolgálása óta. Az így kapott

$$X(t) = (\nu(t); \alpha_1(t), \dots, \alpha_{\nu(t)}; \xi\alpha_1(t), \dots, \xi\alpha_{\nu(t)}; \beta_1(t), \dots, \beta_{n-\nu(t)})$$

folyamat rendelkezik a Markov tulajdonsággal.

Jelölje V_k^n és C_k^n az $1, 2, \dots, n$ egészek k -ad osztályú variációinak illetve a kombinációinak lexikografikusan rendezett halmazát. Ekkor az $(X(t), t \geq 0)$ folyamat állapottere az olyan

$$(i_1, \dots, i_k; x_1, \dots, x_k; j_1, \dots, j_{n-k})$$

pontokból áll, ahol

$$(i_1, \dots, i_k) \in C_k^n, (j_1, \dots, j_{n-k}) \in V_k^n, x_i \in R_+, i = 0, 1, \dots, k, k = 0, 1, \dots, n.$$

Az $X(t)$ folyamat akkor van az $(i_1, \dots, i_k; x_1, \dots, x_k; j_1, \dots, j_{n-k})$ állapotban, ha az $(i_1, \dots, i_k)$ indexű jobok már $(x_1, \dots, x_k)$ ideje vannak a termináloknál, és $(j_1, \dots, j_{n-k})$ a központi egységnél lévő jobok indexe érkezési sorrendben.

A Kolmogorov-egyenletek levezetéséhez szükségünk van tetszőleges $(t, t+h)$ intervallumban lejátszódó átmenetek vizsgálatára. Az átmeneti valószínűségeket a következő módon adhatjuk meg $0 \leq n-k < r$ esetére.

$$P[X(t+h) = (i_1, \dots, i_k; x_1+h, \dots, x_k+h; j_1, \dots, j_{n-k}) \mid$$

$$X(t) = (i_1, \dots, i_k; x_1, \dots, x_k; j_1, \dots, j_{n-k})]$$

$$= (1 - (n-k)\mu h) \prod_{l=1}^k \frac{1 - F_{i_l}(x_l+h)}{1 - F_{i_l}(x_l)} + o(h),$$

$$P[X(t+h) = (i_1, \dots, i_k; x_1+h, \dots, x_k+h; j_1, \dots, j_{n-k}) \mid$$

$$X(t) = (i_1', \dots, j_{n-k}', \dots, i_k'; x_1', \dots, y', \dots, x_k'; j_1, \dots, j_{n-k-1})]$$

$$= \frac{f_{j_{n-k}}(y)h}{1 - F_{j_{n-k}}(y)} \prod_{l=1}^k \frac{1 - F_{i_l}(x_l+h)}{1 - F_{i_l}(x_l)} + o(h),$$

ahol $(i'_1, \dots, j'_{n-k}, \dots, i'_k)$ az $(i_1, \dots, i_k, j_{n-k})$ indexeket jelöli lexikografikus sorrendben, és $(x_1, \dots, y', \dots, x_k)$ a megfelelő időket.

Ha $r \leq n - k \leq n$ akkor az átmeneti valószínűségek a következők

$$\begin{aligned} P[X(t+h) = (i_1, \dots, i_k; x_1+h, \dots, x_k+h; j_1, \dots, j_{n-k}) \mid \\ X(t) = (i_1, \dots, i_k; x_1, \dots, x_k; j_1, \dots, j_{n-k})] \\ = (1 - r\mu h) \prod_{l=1}^k \frac{1 - F_{i_l}(x_l+h)}{1 - F_{i_l}(x_l)} + o(h), \\ P[X(t+h) = (i_1, \dots, i_k; x_1+h, \dots, x_k+h; j_1, \dots, j_{n-k}) \mid \\ X(t) = (i'_1, \dots, j'_{n-k}, \dots, i'_k; x_1, \dots, y', \dots, x'_k; j_1, \dots, j_{n-k-1})] = \\ = \frac{f_{j_{n-k}}(y)h}{1 - F_{j_{n-k}}(y)} \prod_{l=1}^k \frac{1 - F_{i_l}(x_l+h)}{1 - F_{i_l}(x_l)} + o(h), \end{aligned}$$

Vezessük be a következő függvényeket

$$\begin{aligned} Q_{0;j_1, \dots, j_n}(t) &= P(\nu(t) = 0; \beta_1(t) = j_1, \dots, \beta_n(t) = j_n), \\ Q_{i_1, \dots, i_k; j_1, \dots, j_{n-k}}(x_1, \dots, x_k; t) &= \\ P(\nu(t) = k; \alpha_1(t) = i_1, \dots, \alpha_k(t) = i_k; \xi_{i_1} \leq x_1, \dots, \xi_{i_k} \leq x_k; \\ \beta_1(t) = j_1, \dots, \beta_{n-k}(t) = j_{n-k}). \end{aligned}$$

Legyen λ_i a következőképpen definiálva: $1/\lambda_i = \mathbb{E}(\tau_i)$.

5. Tétel. *Ha $1/\lambda_i < \infty$, $i = 1, \dots, n$, akkor az $(X(t), t \geq 0)$ folyamatnak van egyértelmű ergodikus (stacionárius) eloszlása, amely független a kezdeti feltételektől, azaz*

$$\begin{aligned} Q_{0;j_1, \dots, j_n} &= \lim_{t \rightarrow \infty} Q_{0;j_1, \dots, j_n}(t), \\ Q_{i_1, \dots, i_k; j_1, \dots, j_{n-k}}(x_1, \dots, x_k) &= \lim_{t \rightarrow \infty} Q_{i_1, \dots, i_k; j_1, \dots, j_{n-k}}(x_1, \dots, x_k; t). \end{aligned}$$

A tétel bizonyítása Gnedenko–Kovalenko [23] könyvének 211. oldalán található tételből következik.

A tétel biztosítja a következő határértékek létezését, és egyértelműségét

$$\begin{aligned} q_{i_1, \dots, i_k; j_1, \dots, j_{n-k}}(x_1, \dots, x_k) dx_1 \dots dx_l &= \\ = P(\nu(t) = k; \alpha_1(t) = i_1, \dots, \alpha_k(t) = i_k; x_l \leq \xi_{i_l} < x_l + dx_l, l = 1, \dots, k; \\ \beta_1(t) = j_1, \dots, \beta_{n-k}(t) = j_{n-k}), \quad k = 1, \dots, n \end{aligned}$$

ahol $q_{i_1, \dots, i_k; j_1, \dots, j_{n-k}}(x_1, \dots, x_k)$ jelöli az $(i_1, \dots, i_k; x_1, \dots, x_k; j_1, \dots, j_{n-k})$ állapotok sűrűségfüggvényét, ha $t \rightarrow \infty$. Feltesszük, hogy rögzített k -ra az ergodikus eloszlásoknak

létezik a sűrűségfüggvénye. Ehhez elegendő feltenni, hogy az $F_i(x)$ -nek van sűrűségfüggvénye.

Vezessük be a

$$\tilde{q}_{i_1, \dots, i_k; j_1, \dots, j_{n-k}}(x_1, \dots, x_k) = \frac{q_{i_1, \dots, i_k; j_1, \dots, j_{n-k}}(x_1, \dots, x_k)}{(1 - F_{i_1}(x_1)) \dots (1 - F_{i_k}(x_k))}$$

ún. normált sűrűségfüggvényeket !

6. Tétel. *A fenti normált sűrűségfüggvények kielégítik a (3.1), (3.3) integro-differenciál-egyenleteket a (3.2), (3.4) határfeltételek mellett.*

$$(3.1) \quad \left[\frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial}{\partial x_k} \right]^* \tilde{q}_{i_1, \dots, i_k; j_1, \dots, j_{n-k}}(x_1, \dots, x_k) \\ = -(n-k) \mu \tilde{q}_{i_1, \dots, i_k; j_1, \dots, j_{n-k}}(x_1, \dots, x_k) + \\ + \int_0^\infty \tilde{q}_{i'_1, \dots, i'_{n-k}; i'_k; j_1, \dots, j_{n-k-1}}(x'_1, \dots, y', \dots, x'_k) f_{j_n}(y) dy,$$

$$(3.2) \quad \tilde{q}_{i_1, \dots, i_k; j_1, \dots, j_{n-k}}(x_1, \dots, x_{l-1}, 0, x_{l+1}, \dots, x_k) = \\ = \mu \sum_{V_{j_1, \dots, j_{n-k}}^{i_l}} \tilde{q}_{i_1, \dots, i_{l-1}; i_{l+1}, \dots, i_k; j_1, \dots, j_{n-k}}(x_1, \dots, x_{l-1}, x_{l+1}, \dots, x_k) \\ l = 1, \dots, k, \quad 0 \leq n-k < r$$

esetén,

$$(3.3) \quad \left[\frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial}{\partial x_k} \right]^* \tilde{q}_{i_1, \dots, i_k; j_1, \dots, j_{n-k}}(x_1, \dots, x_k) = \\ = -r \mu \tilde{q}_{i_1, \dots, i_k; j_1, \dots, j_{n-k}}(x_1, \dots, x_k) + \\ + \int_0^\infty \tilde{q}_{i'_1, \dots, i'_{n-k}; i'_k; j_1, \dots, j_{n-k-1}}(x'_1, \dots, y', \dots, x'_k) f_{j_n}(y) dy$$

$$(3.4) \quad \tilde{q}_{i_1, \dots, i_k; j_1, \dots, j_{n-k}}(x_1, \dots, x_{l-1}, 0, x_{l+1}, \dots, x_k) = \\ = \mu \sum_{V_{j_1, \dots, j_{r-1}}^{i_l}} \tilde{q}_{i_1, \dots, i_{l-1}; i_{l+1}, \dots, i_k; j_1, \dots, j_{n-k}}(x_1, \dots, x_{l-1}, x_{l+1}, \dots, x_k), \\ l = 1, \dots, k, \quad r \leq n-k < n-1$$

esetén,

valamint

$$r \mu Q_{0; j_1, \dots, j_n} = \int_0^\infty \tilde{q}_{j_n; j_1, \dots, j_{n-1}}(y) f_{j_n}(y) dy.$$

$A [\]^*$ jelentése a bizonyításban szerepel, és

$$V_{j_1, \dots, j_s}^{i_l} = [(i_l, j_1, \dots, j_s), (j_1, i_l, j_2, \dots, j_s), \dots, (j_1, \dots, j_s, i_l)] \in V_{s+1}^n.$$

Bizonyítás: Mivel $(X(t), t \geq 0)$ Markov-folyamat, ezért sűrűségfüggvényei kielégítik a Kolgomorov-Chapman egyenleteket. Tekintsük a folyamatot rövid h ideig. Ekkor a következő összefüggések igazak:

$$\begin{aligned}
& q_{i_1, \dots, i_k; j_1, \dots, j_{n-k}}(x_1 + h, \dots, x_k + h) = \\
& = q_{i_1, \dots, i_k; j_1, \dots, j_{n-k}}(x_1, \dots, x_k) (1 - (n - k) \mu h) \prod_{l=1}^k \frac{1 - F_{i_l}(x_l + h)}{1 - F_{i_l}(x_l)} + \\
& + \prod_{l=1}^k \frac{1 - F_{i_l}(x_l + h)}{1 - F_{i_l}(x_l)} + \int_0^\infty \tilde{q}_{i'_1, \dots, i'_{n-k}; j_1, \dots, j_{n-k-1}}(x'_1, \dots, y', \dots, x'_k) \times \\
& \quad \times \frac{f'_{j_{n-k}}(y) h}{1 - F_{j_{n-k}}(x_l)} dy + o(h), \\
& q_{i_1, \dots, i_k; j_1, \dots, j_{n-k}}(x_1 + h, \dots, x_{l-1} + h, 0, x_{l+1} + h, \dots, x_k + h) h = \\
& = o(h) + \prod_{\substack{s=1 \\ s \neq l}}^k \frac{1 - F_{i_s}(x_s + h)}{1 - F_{i_s}(x_s)} \times \\
& \times \mu h \sum_{V_{j_1, \dots, j_{n-k}}^{i_l}} \tilde{q}_{i_1, \dots, i_{l-1}; i_{l+1}, \dots, i_k; j_1, \dots, j_{n-k}}(x_1, \dots, x_{l-1}, x_{l+1}, \dots, x_k) \\
& 0 \leq n - k < r, \quad l = 1, \dots, k \text{ esetén.}
\end{aligned}$$

Hasonlóan

$$\begin{aligned}
& q_{i_1, \dots, i_k; j_1, \dots, j_{n-k}}(x_1 + h, \dots, x_k + h) = \\
& = q_{i_1, \dots, i_k; j_1, \dots, j_{n-k}}(x_1, \dots, x_k) (1 - r \mu h) \prod_{l=1}^k \frac{1 - F_{i_l}(x_l + h)}{1 - F_{i_l}(x_l)} + \\
& + \prod_{l=1}^k \frac{1 - F_{i_l}(x_l + h)}{1 - F_{i_l}(x_l)} \int_0^\infty \tilde{q}_{i'_1, \dots, i'_{n-k}; i'_k; j_1, \dots, j_{n-k-1}}(x'_1, \dots, y', \dots, x'_k) \times \\
& \quad \times \frac{f'_{j_{n-k}}(y) h}{1 - F_{j_{n-k}}(x_l)} dy + o(h), \\
& q_{i_1, \dots, i_k; j_1, \dots, j_{n-k}}(x_1 + h, \dots, x_{l-1} + h, 0, x_{l+1} + h, \dots, x_k + h) h = \\
& = o(h) + \prod_{\substack{s=1 \\ s \neq l}}^k \frac{1 - F_{i_s}(x_s + h)}{1 - F_{i_s}(x_s)} \times \\
& \times \mu h \sum_{V_{j_1, \dots, j_{n-k}}^{i_l}} \tilde{q}_{i_1, \dots, i_{l-1}; i_{l+1}, \dots, i_k; j_1, \dots, j_{n-k}}(x_1, \dots, x_{l-1}, x_{l+1}, \dots, x_k) \\
& 0 \leq n - k < r, \quad l = 1, \dots, k \text{ esetén.}
\end{aligned}$$

Végül

$$Q_{0; j_1, \dots, j_n} = Q_{0; j_1, \dots, j_n} (1 - r \mu h) +$$

$$+ \int_0^\infty \tilde{q}_{j_n; j_1, \dots, j_{n-1}}(y) \frac{f_{j_n}(y) h}{1 - F_{j_n}(y)} dy + o(h).$$

Ezekből az összefüggésekből a tétel állítását könnyen megkaphatjuk. A felírt összefüggések bal oldalát $\prod_{l=1}^k (1 - F_{i_l}(x_l + h))$ -val osztva, és figyelembe véve a normált sűrűségfüggvény definícióját, és $h \rightarrow 0$ határértéket véve kapjuk a tétel állítását.

A tétel (3.1)(3.3) egyenlőségeinek bal oldalán a parciális differenciálhányados szokásos jelölését használtuk fel. Ezt általában nem tehetjük meg, mivel a parciális differenciálhányados létezését nem tettük fel. Ezért használtuk a $[\]^*$ jelölést. Valójában $[\]^*$ az $(1, 1, \dots, 1) \in R^k$ iránymenti deriváltat jelenti. A

$$[Q_{0; j_1, \dots, j_n}, Q_{i_1, \dots, i_k; j_1, \dots, j_{n-k}}],$$

$$(i_1, \dots, i_k) \in C_k^n, \quad (j_1, \dots, j_{n-k}) \in V_{n-k}^N, \quad k = 1, \dots, n.$$

ergodikus eloszlás meghatározásához meg kell oldani a (3.1)(3.3) egyenleteket a (3.2)(3.4) határfeltételek mellett. Legyen

$$Q_{0; j_1, \dots, j_n} = c_0,$$

$$\tilde{q}_{i_1, \dots, i_k; j_1, \dots, j_{n-k}}(x_1, \dots, x_k) = c_k, \quad k = 1, \dots, n.$$

Ekkor behelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy kielégítik az (1), (3) egyenleteket a (2), (4) határfeltételek mellett, és ezek a c_k értékek rekurzióval kifejezhetők c_n függvényében. Nevezetesen

$$c_k = (r! r^{n-r-k} \mu^{n-k})^{-1} c_n, \quad 0 \leq k \leq n-r,$$

$$c_k = ((n-k)! \mu^{n-k})^{-1} c_n, \quad n-r \leq k \leq n.$$

Ezek az egyenletek teljesen leírják a rendszer működését.

Jelölje $Q_{i_1, \dots, i_k; j_1, \dots, j_{n-k}}$ annak a stacionárius valószínűségét, hogy a termináloknál az $(i_1, \dots, i_k)$ indexű jobok vannak, és a központi egységnél lévő jobok indexei érkezési sorrendben $(j_1, \dots, j_{n-k})$. Továbbá $Q_{i_1, \dots, i_k}$ jelölje annak a stacionárius valószínűségét, hogy az $(i_1, \dots, i_k)$ indexű jobok tartózkodnak a termináloknál.

Ezek után könnyen igazolható, hogy

$$Q_{i_1, \dots, i_k; j_1, \dots, j_{n-k}} = (\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_k})^{-1} c_k, \quad k = 1, \dots, n.$$

A c_k -ra kapott összefüggést felhasználva kapjuk, hogy

$$Q_{i_1, \dots, i_k} = (n-k)! (r! r^{n-r-k} \mu^{n-k} \lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_k})^{-1} c_n,$$

$$(i_1, \dots, i_k) \in C_k^n, \quad k = 0, 1, \dots, n-r.$$

Hasonlóan

$$Q_{i_1, \dots, i_k} = (\mu^{n-k} \lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_k})^{-1} c_n,$$

$$(i_1, \dots, i_k) \in C_k^n, \quad k = n-r, \dots, n.$$

Jelölje $\hat{Q}_k$ és $\hat{P}_l$ annak a stacionárius valószínűségét, hogy a termináloknál k , illetve a központi egységeknél l job tartózkodik. Ekkor világos, hogy

$$Q_{i_1, \dots, i_n} = Q_{1, \dots, n} = \hat{Q}_n,$$

$$\hat{Q}_k = \hat{P}_{n-k}, \quad k = 0, \dots, n.$$

Könnyen belátható, hogy

$$c_n = \hat{Q}_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n),$$

$$\hat{Q}_k = \sum_{(i_1, \dots, i_k) \in C_k^n} Q_{i_1, \dots, i_k},$$

ahol $\hat{Q}_n$ a $\sum_{k=0}^n \hat{Q}_k = 1$ normalizáló feltételéből határozható meg.

Homogén esetben a következő eredményekhez jutunk

$$\hat{Q}_k = \frac{n!}{r!k!r^{n-k-r}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n-k} \hat{Q}_n, \quad \text{ha } 0 \leq k \leq n-r,$$

$$\hat{Q}_k = \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n-k} \hat{Q}_n, \quad \text{ha } n-r \leq k \leq n.$$

Ezért

$$\hat{P}_k = \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \hat{P}_0, \quad \text{ha } 0 \leq k \leq r,$$

$$\hat{P}_k = \frac{n!}{r!(n-k)!r^{k-r}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \hat{P}_0, \quad \text{ha } r \leq k \leq n.$$

Ezek az eredmények megegyeznek az $\langle M/M/r/n/n \rangle$ modell stacionárius valószínűségeire kapott képletekkel. Látható, hogy ezek az $F_i(x)$ eloszlásfüggvény alakjától nem függnek, csak az $1/\lambda_i$ várható értékektől.

■

Rendszerjellemzők

- *A terminálok kihasználtsága*

Jelölje $Q^{(i)}$ annak a stacionárius valószínűségét, hogy az i -edik job a terminálnál tartózkodik, vagyis

$$Q^{(i)} = \sum_{k=1}^n \sum_{i \in (i_1, \dots, i_k) \in C_k^n} Q_{i_1, \dots, i_k}.$$

Nyilvánvalóan az i -edik terminál kihasználtsága

$$U^{(i)} = Q^{(i)}.$$

- *A CPU-k kihasználtsága*

Az eddigiekhez hasonlóan egy konkrét CPU kihasználtsága

$$U_{CPU} = \frac{1}{r} \left(\sum_{k=1}^r k \hat{P}_k + r \sum_{k=r+1}^n \hat{P}_k \right) = \frac{\bar{r}}{r},$$

ahol r a foglalt CPU-k átlagos számát jelöli. Így a CPU-k összkhasználtsága $\bar{r}$.

- *átlagos várakozási és tartózkodási ideők*

$$Q^{(i)} = (1/\lambda_i) (1/\lambda_i + \bar{W}_i + 1/\mu)^{-1}.$$

Így az i -edik job átlagos várakozási ideje:

$$\bar{W}_i = \frac{1}{\lambda_i} \cdot \frac{1 - Q^{(i)}}{Q^{(i)}} - \frac{1}{\mu}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Az i -edik job központi egységnél eltöltött átlagos $\bar{T}_i$ ideje (várakozással és kiszolgálással eltöltött idő)

$$\bar{T}_i = \bar{W}_i + 1/\mu = (1 - Q^{(i)}) (\lambda_i Q^{(i)})^{-1}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Mivel

$$\sum_{i=1}^n (1 - Q^{(i)}) = \bar{N},$$

ahol $\bar{N}$ jelöli a központi egységnél levő jobok átlagos számát, megkapjuk a $\vec{G}/M/r/n/n/FIFO >$ modellre vonatkozó **Little-formulát**

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \bar{T}_i Q^{(i)} = \bar{N}.$$

Meg kell jegyeznünk, hogy a gépkiszolgálási probléma terminológiáját használva $U^{(i)}$ az i -edik gép kihasználtságát, $\bar{W}_i, \bar{T}_i$ az i -edik gép várakozási ill. rossz állapotban való átlagos tartózkodási idejét adja.

A modell tovább általánosítható oly módon, hogy pl. a kiszolgálási intenzitások függnek a rendszer állapotától, lásd Sztrik [64, 65].

II. rész

Feladatgyűjtemény

4. fejezet

Végtelen-forrású rendszerek

1. Feladat. *Oldjuk meg a*

$$\begin{aligned}\lambda P_0 &= \mu P_1 \\ (\lambda + \mu)P_n &= \lambda P_{n-1} + \mu P_{n+1}, n \geq 1\end{aligned}$$

egyenletrendszer differencia-egyenletek segítségével!

Megoldás:

Látható, hogy az iménti egyenlet átírható a

$$\lambda P_{n-1} - (\lambda + \mu)P_n + \mu P_{n+1} = 0, n = 1, 2, \dots$$

formába, amely tekinthető egy konstans együtthatós másodrendű differencia-egyenletnek. Ennek általános megoldása

$$P_n = c_1 x_1^n + c_2 x_2^n, n = 1, 2, \dots$$

ahol x_1, x_2 megoldása a

$$\mu x^2 - (\lambda + \mu)x + \lambda = 0$$

egyenletnek. Könnyen kiszámítható, hogy $x_1 = 1, x_2 = \varrho$ és így

$$P_n = c_1 + c_2 \varrho^n, n = 1, 2, \dots$$

Azonban $P_1 = \varrho P_0$, így mivel $\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$, $c_1 = 0$ és $c_2 = P_0 = 1 - \varrho$.

■

2. Feladat. *$M/M/1$ rendszer esetén a stacionárius állapotegyenletek segítségével határozzuk meg a rendszerben tartózkodó igények generátorfüggvényét, majd ebből az eloszlást!*

Megoldás:

Kiindulva a

$$\begin{aligned}\lambda P_0 &= \mu P_1 \\ (\lambda + \mu)P_n &= \lambda P_{n-1} + \mu P_{n+1}, n \geq 1\end{aligned}$$

egyenletekből s^i tényezővel megszorozva majd az egyenleteket összeadva kapjuk, hogy

$$\lambda G_N(s) + \mu G_N(s) - \mu P_0 = \lambda s G_N(s) + \frac{\mu}{s} G_N(s) - \frac{\mu}{s} P_0.$$

Ebből

$$\begin{aligned} G_N(s) \left(\lambda(1-s) + \mu \left(1 - \frac{1}{s} \right) \right) &= \mu \left(1 - \frac{1}{s} \right) P_0, \\ G_N(s) \left(\mu \left(1 - \frac{1}{s} \right) - \lambda s \left(1 - \frac{1}{s} \right) \right) &= \mu \left(1 - \frac{1}{s} \right) P_0, \\ G_N(s) &= \frac{\mu}{\mu - \lambda s} P_0. \end{aligned}$$

Mivel $G_N(1) = 1$, ezért

$$P_0 = \frac{\mu - \lambda}{\mu} = 1 - \varrho.$$

Vagyis

$$G_N(s) = \frac{1 - \varrho}{1 - s\varrho},$$

ami éppen az $(1 - \varrho)$ paraméterű módosított geometriai eloszlás generátorfüggvénye, amit könnyű ellenőrizni, hiszen

$$P(N = k) = (1 - \varrho)\varrho^k, k = 0, \dots$$

esetén

$$G_N(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k (1 - \varrho)\varrho^k = \frac{1 - \varrho}{1 - s\varrho}.$$

■

3. Feladat. Határozzuk meg most $G_Q(s)$ -t is!

Megoldás:

Nyilván

$$\begin{aligned} G_Q(s) &= (P_0 + P_1)s^0 + \sum_{k=2}^{\infty} s^{k-1} P_k = P_0 + \sum_{k=1}^{\infty} s^{k-1} P_k = 1 - \varrho + \sum_{k=1}^{\infty} s^{k-1} \varrho^k (1 - \varrho) \\ &= 1 - \varrho + \varrho \sum_{i=0}^{\infty} s^i (1 - \varrho)\varrho^i = 1 - \varrho + \varrho G_N(s) = 1 - \varrho(1 - G_N(s)). \end{aligned}$$

Ellenőrzésképpen

$$G'_Q(1) = \varrho G'_N(1) = \frac{\varrho^2}{1 - \varrho}.$$

■

4. Feladat. $M/M/1$ esetben határozzuk meg a T és W Laplace-transzformáltját!

Megoldás:

Könnyű látni, hogy

$$\begin{aligned} L_T(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\mu}{\mu+s} \right)^{k+1} \varrho^k (1-\varrho) = (1-\varrho) \frac{\mu}{\mu+s} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\mu\varrho}{\mu+s} \right)^k \\ &= (1-\varrho) \frac{\mu}{\mu+s} \frac{1}{1 - \frac{\mu\varrho}{\mu+s}} = (1-\varrho) \frac{\mu}{\mu+s} \frac{\mu+s}{\mu(1-\varrho)+s} = \frac{\mu(1-\varrho)}{\mu(1-\varrho)+s}, \end{aligned}$$

amit vártunk, hiszen T $\mu(1-\varrho)$ paraméterű exponenciális eloszlást követ.

$$\begin{aligned} L_W(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\mu}{\mu+s} \right)^k \varrho^k (1-\varrho) = 1-\varrho + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\mu}{\mu+s} \right)^k \varrho^k (1-\varrho) \\ &= 1-\varrho + \frac{\varrho\mu(1-\varrho)}{\mu(1-\varrho)+s}, \end{aligned}$$

ami láthatóan nem más, mint

$$\frac{L_T(s)}{\frac{\mu}{\mu+s}}$$

hiszen

$$L_T(s) = L_W(s) \frac{\mu}{\mu+s}.$$

Számolás útján is megmutatható, hogy

$$L_W(s) = L_T(s) \frac{\mu+s}{\mu} = \frac{\mu(1-\varrho)}{\mu(1-\varrho)+s} \frac{\mu+s}{\mu} = 1-\varrho + \varrho \frac{\mu(1-\varrho)}{\mu(1-\varrho)+s}.$$

Ebből $\bar{T}$ és $\bar{W}$ ellenőrzésképpen kiszámítható.

$$\begin{aligned} L'_T(0) &= -\frac{1}{\mu(1-\varrho)}, \\ L'_W(0) &= \varrho L'_T(0) = -\frac{\varrho}{\mu(1-\varrho)}, \end{aligned}$$

így

$$\bar{T} = \frac{1}{\mu(1-\varrho)}, \bar{W} = \frac{\varrho}{\mu(1-\varrho)},$$

amit korábban is kaptunk.

■

5. Feladat. Mutassuk meg, hogy egy $M/M/1/K$ -rendszer esetén

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \bar{N}(K) = \frac{\rho}{1-\rho}, \quad \rho < 1$$

.

Megoldás:

Közismert, hogy $\rho < 1$ esetén

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \rho^K = 0.$$

Mivel $\bar{N} = \frac{\rho(1-(K+1)\rho^K + K\rho^{K+1})}{(1-\rho)(1-\rho^{K+1})}$, ezért elegendő megmutatni, hogy

$$\lim_{K \rightarrow \infty} K\rho^K = 0.$$

Ezt a L'Hospital-szabály alkalmazásával bizonyítjuk be.

$$\begin{aligned} \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{K}{\rho^{-K}} &= \frac{\infty}{\infty} \\ \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{K}{\rho^{-K}} &= \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{-\ln \rho \rho^{-K}} = \frac{\rho^K}{-\ln \rho} = 0. \end{aligned}$$

■

6. Feladat. Mutassuk meg, hogy egy $M/M/1/K$ -rendszer esetén az

$$L_T(s) = \frac{\mu P_0}{1 - P_K} \frac{1 - \left(\frac{\lambda}{\mu+s}\right)^K}{\mu - \lambda + s}$$

Laplace-transzformáltra igaz, hogy $L_T(0) = 1$!

Megoldás:

$$\begin{aligned} L_T(0) &= \frac{\mu P_0}{1 - P_K} \frac{1 - \rho^K}{\mu - \lambda} = \frac{P_0}{1 - P_K} \frac{1 - \rho^K}{1 - \rho} \\ &= \frac{\frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}}{1 - \frac{\rho^K(1-\rho)}{1-\rho^{K+1}}} \cdot \frac{1 - \rho^K}{1 - \rho} \\ &= \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{K+1}} \cdot \frac{1 - \rho^{K+1}}{1 - \rho^{K+1} - \rho^K + \rho^{K+1}} \cdot \frac{1 - \rho^K}{1 - \rho} \\ &= 1. \end{aligned}$$

■

7. Feladat. $M/M/1/K$ rendszer esetén a Laplace-transzformált segítségével határozzuk meg a $\bar{T}$ -t!

Megoldás:

$$L_T(s) = \frac{\mu P_0}{1 - P_K} \frac{1 - \left(\frac{\lambda}{\mu+s}\right)^K}{\mu - \lambda + s}$$

képletből kiindulva

$$\begin{aligned}
L'_T(s) &= \frac{\mu P_0}{1 - P_K} \left(\frac{K \left(\frac{\mu+s}{\lambda} \right)^{-(K+1)} \cdot \frac{1}{\lambda} (\mu - \lambda + s) - \left(1 - \left(\frac{\lambda}{\mu+s} \right)^K \right)}{(\mu - \lambda + s)^2} \right) \\
L'_T(0) &= \frac{\mu P_0}{1 - P_K} \left(\frac{K \rho^{K+1} \left(\frac{1}{\rho} - 1 \right) + \rho^K - 1}{(\mu - \lambda)^2} \right) \\
&= \frac{P_0 \rho}{\lambda(1 - P_K)(1 - \rho)^2} \left(K \rho^{K+1} \left(\frac{1}{\rho} - 1 \right) + \rho^K - 1 \right) \\
&= \frac{1}{\lambda(1 - P_K)} \cdot \frac{\rho P_0 (K \rho^K - K \rho^{K+1} + \rho^K - 1)}{(1 - \rho)^2} \\
&= \frac{1}{\lambda(1 - P_K)} \frac{\rho P_0 ((K+1)\rho^K - K \rho^{K+1} - 1)}{(1 - \rho)^2} \\
&= -\frac{\bar{N}}{\lambda(1 - P_K)},
\end{aligned}$$

vagyis

$$\bar{T} = \frac{\bar{N}}{\lambda(1 - P_K)},$$

amit korábban kaptunk.

Hosszadalmasabb számolással a magasabb momentumok is megadhatók.

■

8. Feladat. Tekintsünk egy 2 csomópontból álló zárt sorbanállási hálózatot, amelyben K igény tartózkodik! Tegyük fel, hogy mindkét helyben a kiszolgálási idők μ_1 illetve μ_2 paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók. Határozzuk meg mindkét helyben a rendszer jellemzőit!

Megoldás:

Könnyű észrevenni, hogy a két csomópont teljesen hasonlóan működik és tekinthető $M/M/1/K$ típusú sorbanállási rendszernek. Ennek megfelelően számíthatók ki a rendszerjellemzők $\rho_2 = \frac{\mu_1}{\mu_2}$ illetve $\rho_1 = \frac{\mu_2}{\mu_1}$ paraméterekkel.

Az is látható, hogy

$$U_S(1)\mu_1 = U_S(2)\mu_2,$$

ahol $U_S(i)$, $i = 1, 2$ a csomópont kiszolgáló egységének a kihasználtsága.

■

9. Feladat. $M/M/n/n$ esetén határozzuk meg a generátorfüggvényt!

Megoldás:

$$G_N(s) = \sum_{k=0}^n s^k \frac{\varrho^k}{k!} P_0 = \sum_{k=0}^n \frac{(s\varrho)^k}{k!} e^{-s\varrho} P_0 e^{s\varrho} = e^{-\varrho(1-s)} \frac{Q(n, s\varrho)}{Q(n, \varrho)}.$$

Ellenőrzésképpen számítsuk ki $\overline{T} - t!$
 $\overline{N} = G'_N(1)$, ezért

$$G'_N(s) = \varrho e^{-\varrho(1-s)} \frac{Q(n, \varrho s)}{Q(n, \varrho)} - e^{-\varrho(1-s)} \frac{\varrho P(n, \varrho s)}{Q(n, \varrho)}.$$

Így

$$G'_N(1) = \varrho - \varrho B(n, \varrho) = \varrho(1 - B(n, \varrho)),$$

amit már megmutattunk.

■

10. Feladat. Határozzuk meg az $M/M/n/n$ rendszernél $\mathbb{D}^2(N)$ -t!

Megoldás:

$\mathbb{D}^2(N) = \mathbb{E}(N^2) - (\mathbb{E}(N))^2$ miatt először az $\mathbb{E}(N^2)$ -t számítjuk ki.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(N^2) &= \sum_{k=1}^n k^2 P_k = \sum_{k=1}^n (k(k-1) + k) P_k = \sum_{k=1}^n k(k-1) P_k + \sum_{k=1}^n k P_k \\ &= \sum_{k=2}^n k(k-1) \frac{\varrho^k}{k!} P_0 + \mathbb{E}(N) = \sum_{i=0}^{n-2} \varrho^2 \frac{\varrho^i}{i!} P_0 + \mathbb{E}(N) \\ &= \varrho^2(1 - P_n - P_{n-1}) + \mathbb{E}(N) = \varrho^2 \left(1 - P_n \left(1 + \frac{n}{\varrho} \right) \right) + \mathbb{E}(N). \end{aligned}$$

Mivel $\mathbb{E}(N) = \varrho(1 - B(n, \varrho))$, ezért

$$\begin{aligned} \mathbb{D}^2(N) &= \varrho^2(1 - B(n, \varrho)(1 + \frac{n}{\varrho})) - (\varrho(1 - B(n, \varrho)))^2 + \mathbb{E}(N) \\ &= \varrho^2(1 - B(n, \varrho)(\frac{\varrho + n}{\varrho})) - (\varrho(1 - B(n, \varrho)))^2 + \mathbb{E}(N) \\ &= \varrho^2 - \varrho^2 B(n, \varrho) - n\varrho B(n, \varrho) - \varrho^2 - \varrho^2 B^2(n, \varrho) + 2\varrho^2 B(n, \varrho) + \mathbb{E}(N) \\ &= \mathbb{E}(N) + \varrho^2 B(n, \varrho) - n\varrho B(n, \varrho) - \varrho^2 B^2(n, \varrho) \\ &= \mathbb{E}(N) - \varrho B(n, \varrho)(n - \varrho(1 - B(n, \varrho))) \\ &= \mathbb{E}(N) - \varrho B(n, \varrho)(n - \mathbb{E}(N)). \end{aligned}$$

■

11. Feladat. Mutassuk meg, hogy $B(m, a)$ mindig monoton csökkenő sorozat és határértéke 0!

Megoldás:

$$B(m, a) = \frac{aB(m-1, a)}{m + aB(m-1, a)} < \frac{a}{m},$$

ezért m növekedésével 0-hoz tart. A monoton csökkenés azzal ekvivalens, hogy

$$B(m, a) - B(m-1, a) < 0, \forall m\text{-re}$$

vagyis

$$\begin{aligned}\frac{aB(m-1, a)}{m + aB(m-1, a)} - B(m-1, a) &< 0 \\ \frac{B(m-1, a)(a - m - aB(m-1, a))}{m + aB(m-1, a)} &< 0 \\ a - m - aB(m-1, a) &< 0 \\ B(m-1, a) &> \frac{a - m}{a},\end{aligned}$$

ami automatikusan teljesül, ha $a \leq m$. Ugyanakkor $1 \geq B(m-1, a) \geq 0$ miatt $1 \geq \frac{a-m}{a} \geq 0$, melyből $a \geq m, m \geq 0$, vagyis $0 \leq m \leq a$ adódik. Ez együtt az jelenti, hogy $\forall m$ -re $B(m, a)$ monoton csökkenő sorozat, ami várható volt, hiszen ha a kiszolgálók számát növeljük, akkor az igényvesztés valószínűségének csökkeni kell.

■

12. Feladat. Keressünk a $C(m, a)$ -formulára rekurziót!

Megoldás:

Legyen $a = \frac{\lambda}{\mu}$, ekkor a

$$C(m, a) = \frac{B(m, a)}{1 - \frac{a}{m}(1 - B(m, a))}$$

segítségével $C(m, a)$ -ra rekurziót tudunk felírni, hiszen $B(m, a)$ -ra is van. Ezért az eljárás az lesz, hogy megmutatjuk, hogy $B(m-1, a)$ hogyan fejezhető ki $C(m-1, a)$ segítségével, majd a

$$B(m, a) = \frac{aB(m-1, a)}{m + aB(m-1, a)}$$

rekurzióba behelyettesítve kapjuk meg a kívánt formulát. Fejezzük ki először $B(m, a)$ -t $C(m, a)$ segítségével, vagyis

$$C(m, a) = \frac{mB(m, a)}{m - a(1 - B(m, a))}$$

$$C(m, a)(m - a) + C(m, a)aB(m, a) = mB(m, a) \text{ azaz } B(m, a) = \frac{(m - a)C(m, a)}{m - aC(m, a)},$$

ami pozitív mert $m > a$ az $M/M/m$ rendszer stabilitása miatt, és azt mutatja, hogy

$$B(m, a) < C(m, a),$$

ami várható volt a probléma jellegéből adódóan. Ezért

$$B(m-1, a) = \frac{(m-1-a)C(m-1, a)}{m-1-aC(m-1, a)},$$

és $m-1 > a$ kell, hogy legyen! Először $C(m, a)$ -t kifejezzük $B(m-1, a)$ segítségével, majd elvégezzük a behelyettesítést. Ezért

$$\begin{aligned}C(m, a) &= \frac{\frac{aB(m-1, a)}{m + aB(m-1, a)}m}{m - a\left(1 - \frac{aB(m-1, a)}{m + aB(m-1, a)}\right)} = \frac{\frac{amB(m-1, a)}{m + aB(m-1, a)}}{m - a\left(\frac{m + aB(m-1, a) - aB(m-1, a)}{m + aB(m-1, a)}\right)} \\ &= \frac{aB(m-1, a)}{m + aB(m-1, a) - a} = \frac{aB(m-1, a)}{m - a(1 - B(m-1, a))}.\end{aligned}$$

Ide behelyettesítjük a $C(m-1, a)$ -t. Írjuk fel egyszerűbben a számlálót és a nevezőt.

$$\begin{aligned}
SZ &= a \frac{(m-1-a)C(m-1, a)}{m-1-aC(m-1, a)} \\
N &= m - a \left(1 - \frac{(m-1-a)C(m-1, a)}{m-1-aC(m-1, a)} \right) \\
&= m - a \frac{m-1-aC(m-1, a) - (m-1)C(m-1, a) + aC(m-1, a)}{m-1-aC(m-1, a)} \\
&= m - a \frac{(m-1)(1-C(m-1, a))}{m-1-aC(m-1, a)} \\
&= \frac{m(m-1) - maC(m-1, a) - a(m-1)(1-C(m-1, a))}{m-1-aC(m-1, a)} \\
&= \frac{m(m-1) - a(m-1) - aC(m-1, a)}{m-1-aC(m-1, a)} \\
&= \frac{(m-1)(m-a) - aC(m-1, a)}{m-1-aC(m-1, a)}.
\end{aligned}$$

Ezért

$$C(m, a) = \frac{a(m-1-a)C(m-1, a)}{(m-1)(m-a) - aC(m-1, a)},$$

és $C(1) = a$ kezdőértékből kiindulva a várakozás valószínűségét rekurzive meghatározhatjuk. Ez azért fontos, mert a rendszerjellemzők ettől a mennyiségtől függnnek. Látható, hogy

$$C(m, a) < \frac{a(m-1-a)C(m-1, a)}{(m-1)(m-a) - a}$$

ezért megmutatjuk, hogy

$$\frac{a(m-1-a)}{(m-1)(m-a)a} < 1,$$

melyből

$$C(m, a) < C(m-1, a),$$

ami várható volt.

$$\begin{aligned}
a(m-1-a) &< (m-1)(m-a) - a \\
m^2 - m - ma + a - a - am + a + a^2 &> 0 \\
m^2 - (1+2a)m + a + a^2 &> 0 \\
m_{1,2} &= \frac{1+2a \pm \sqrt{(1+2a)^2 - 4(a^2+a)}}{2} \\
m_{1,2} &= \frac{1+2a \pm \sqrt{1+4a^2+4a-4a^2-4a}}{2} \\
m_{1,2} &= \frac{1+2a \pm 1}{2}
\end{aligned}$$

vagyis ha $m > a+1$ akkor a parabola értékei pozitívak, ami teljesül hiszen $m-1 > a$ a stabilitás feltétele volt. Könnyű látni, hogy a

$$C(m, a) = \frac{B(m, a)}{1 - \frac{a}{m}(1 - B(m, a))}$$

összefüggésből $\lim_{m \rightarrow \infty} C(m, a) = 0$, ami várható volt. Ezt közvetlenül a

$$C(m, \varrho) = \frac{\varrho^m}{m!} \frac{m}{m - \varrho} P_0(m)$$

képletből is láthatjuk, hiszen

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P_0(m) = e^{-\varrho}, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\varrho^m}{m!} \frac{m}{m - \varrho} = 0,$$

ami szintén várható volt, hiszen a végtelen kiszolgálós rendszerekben nincs igényvesztés.

■

13. Feladat. *Ellenőrizzük, hogy az $M/M/r$ -rendszerre kapott eloszlásfüggvény az $r = 1$ esetben az $M/M/1$ esetben megismert összefüggést adja!*

Megoldás:

$$\begin{aligned} P(T > x) &= e^{-\mu x} \left(1 + C(n, \varrho) \frac{1 - e^{-\mu(r-1-\varrho)x}}{r-1-\varrho} \right) = e^{-\mu x} \left(1 + \varrho \frac{1 - e^{\mu \varrho x}}{-\varrho} \right) \\ &= e^{-\mu x} (1 - 1 + e^{\mu \varrho x}) = e^{-\mu(1-\varrho)x}. \end{aligned}$$

Így

$$F_T(x) = 1 - e^{-\mu(1-\varrho)x}.$$

■

14. Feladat. *Mutassuk meg, hogy az $M/G/1$ rendszer esetén $\lim_{z \rightarrow 1} G_N(z) = 1!$*

Megoldás:

$$\lim_{z \rightarrow 1} G_N(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - \rho) L_S(\lambda - \lambda z) \cdot \frac{z - 1}{z - L_S(\lambda - \lambda z)} = \frac{0}{0},$$

ezért alkalmazzuk a L'Hospital szabályt. Könnyű látni, hogy

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{z - 1}{z - L_S(\lambda - \lambda z)} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{1 + \lambda L'_S(\lambda - \lambda z)} = \frac{1}{1 - \rho},$$

és ebből

$$\lim_{z \rightarrow 1} G_N(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - \rho) L_S(\lambda - \lambda z) \cdot \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z - 1}{z - L_S(\lambda - \lambda z)} = \frac{1 - \rho}{1 - \rho} = 1.$$

■

15. Feladat. *Mutassuk meg, hogyha egy $M/G/1$ -rendszer esetében R a hátramaradt kiszolgálási időt jelöli, akkor $L_R(t) = \frac{1 - L_S(t)}{t \cdot \mathbb{E}(S)}!$*

Megoldás:

$$L_R(t) = \int_0^{\infty} e^{-tx} \frac{1 - F_S(x)}{\mathbb{E}(S)} dx.$$

Parciális integrálással

$$L_R(t) = \left[-\frac{e^{-tx}}{t} \frac{1 - F_S(x)}{\mathbb{E}(S)} \right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{e^{-tx}}{t} \frac{(-f(x))}{\mathbb{E}(S)} dx = \frac{1 - L_S(t)}{t\mathbb{E}(S)}.$$

Ellenőrizzük a $\lim_{t \rightarrow 0} L_R(t) = 1$ határértéket! Látható, hogy

$$\lim_{t \rightarrow 0} L_R(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 - L_S(t)}{t\mathbb{E}(S)} = \frac{0}{0},$$

ezért L'Hospital-szabályt alkalmazunk. Így

$$\lim_{t \rightarrow 0} L_R(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-L'_S(t)}{\mathbb{E}(S)} = \frac{\mathbb{E}(S)}{\mathbb{E}(S)} = 1.$$

■

16. Feladat. Az $L_R(t)$ segítségével mutassuk meg, hogy ha $S \in \text{Exp}(\mu)$, akkor $R \in \text{Exp}(\mu)$!

Megoldás:

$$L_R(t) = \frac{1 - L_S(t)}{t\mathbb{E}(S)} = \frac{1 - \frac{\mu}{\mu+t}}{\frac{t}{\mu}} = \frac{\mu}{\mu+t},$$

így $R \in \text{Exp}(\mu)$.

■

17. Feladat. Az $M/G/1$ -re vonatkozó formulákból $M/M/1$ rendszerre származtassuk a megfelelő formulákat!

Megoldás:

Ebben az esetben

$$L_S(t) = \frac{\mu}{\mu+t},$$

ezért a tartózkodási idő Laplace-transzformáltja

$$\begin{aligned}
L_T(t) &= L_S(t) \frac{t(1-\rho)}{t - \lambda + \lambda L_S(t)} \\
&= \frac{\mu}{\mu + t} \frac{t(1-\rho)}{t - \lambda + \frac{\lambda\mu}{\mu+t}} \\
&= \frac{\mu}{\mu + t} \frac{t(1-\rho)(\mu + t)}{\mu t + t^2 - \lambda\mu - \lambda t + \lambda\mu} \\
&= \frac{t(\mu - \lambda)}{t(t + \mu - \lambda)} = \frac{\mu - \lambda}{t + \mu - \lambda} = \frac{\mu(1-\rho)}{\mu(1-\rho) + t},
\end{aligned}$$

vagyis $T \in \text{Exp}(\mu(1-\rho))$, mint láttuk.

A rendszerben tartózkodó igények generátorfüggvénye

$$\begin{aligned}
G_N(z) &= L_S(\lambda - \lambda z) \frac{(1-\rho)(1-z)}{L_S(\lambda - \lambda z) - z} \\
&= \frac{\mu}{\lambda - \lambda z + \mu} \cdot \frac{(1-\rho)(1-z)}{\frac{\mu}{\lambda - \lambda z + \mu} - z} \\
&= \frac{\mu}{\lambda - \lambda z + \mu} \cdot \frac{(1-\rho)(1-z)(\lambda - \lambda z + \mu)}{\mu - \lambda z + \lambda z^2 - \mu z} \\
&= \frac{\mu(1-\rho)(1-z)}{\mu(1-z) - \lambda z(1-z)} = \frac{\mu(1-\rho)}{\mu - \lambda z} = \frac{1-\rho}{1-\rho z},
\end{aligned}$$

mint láttuk az $M/M/1$ esetben.

Az átlagos várakozási és tartózkodási idők

$$\begin{aligned}
\overline{W} &= \frac{\rho \mathbb{E}(S)}{1-\rho} \cdot \frac{1 + C_S^2}{2} = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)} \cdot \frac{1+1}{2} = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}, \\
\overline{T} &= \overline{W} + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\rho}{1-\rho} + 1 \right) = \frac{1}{\mu(1-\rho)}.
\end{aligned}$$

Most vizsgáljuk meg a szórásnégyzeteket!

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(W^2) &= 2(\overline{W})^2 + \frac{\lambda \mathbb{E}(S^3)}{3(1-\rho)} = 2 \left(\frac{\rho}{\mu(1-\rho)} \right)^2 + \frac{\lambda \frac{3!}{\mu^3}}{3(1-\rho)} \\
&= 2 \frac{\rho^2}{\mu^2(1-\rho)^2} + \frac{2\lambda}{\mu^3(1-\rho)} = \frac{2\mu\rho^2 + 2\lambda(1-\rho)}{\mu^3(1-\rho)^2} \\
&= \frac{2\lambda\rho + 2\lambda - 2\lambda\rho}{\mu^3(1-\rho)^2} = \frac{2\lambda}{\mu^3(1-\rho)^2},
\end{aligned}$$

így

$$\begin{aligned}
\mathbb{D}^2(W) &= \frac{2\lambda}{\mu^3(1-\rho)^2} - \left(\frac{\rho}{\mu(1-\rho)} \right)^2 \\
&= \frac{2\lambda - \mu\rho^2}{\mu^3(1-\rho)^2} = \frac{2\lambda - \lambda\rho}{\mu^3(1-\rho)^2} = \frac{(2-\rho)\rho}{\mu^2(1-\rho)^2},
\end{aligned}$$

mint láttuk. Továbbá

$$\begin{aligned}\mathbb{D}^2(T) &= \mathbb{D}^2(W) + \mathbb{D}^2(S) = \frac{(2-\rho)\rho}{\mu^2(1-\rho)^2} + \left(\frac{1}{\mu}\right)^2 \\ &= \frac{2\rho - \rho^2 + 1 - 2\rho + \rho^2}{\mu^2(1-\rho)^2} = \frac{1}{\mu^2(1-\rho)^2} = \left(\frac{1}{\mu(1-\rho)}\right)^2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{D}^2(N) &= \frac{\lambda^3 \mathbb{E}(S^3)}{3(1-\rho)} + \left(\frac{\lambda^2 \mathbb{E}(S^2)}{2(1-\rho)}\right)^2 + \frac{\lambda^2(3-2\rho)\mathbb{E}(S^2)}{2(1-\rho)} + \rho(1-\rho) \\ &= \frac{\lambda^3 \frac{3!}{\mu^3}}{3(1-\rho)} + \left(\frac{\lambda^2 \frac{2}{\mu^2}}{2(1-\rho)}\right)^2 + \frac{\lambda^2(3-2\rho)\frac{2}{\mu^2}}{2(1-\rho)} + \rho(1-\rho) \\ &= \frac{2\lambda^3}{\mu^3(1-\rho)} + \left(\frac{\rho^2}{1-\rho}\right)^2 + \frac{\rho^2(3-2\rho)}{1-\rho} + \rho(1-\rho) \\ &= \frac{2\rho^3}{1-\rho} + \frac{\rho^4}{(1-\rho)^2} + \frac{\rho^2(3-2\rho)}{1-\rho} + \rho(1-\rho) \\ &= \frac{2\rho^3(1-\rho) + \rho^4 + \rho^2(1-\rho)(3-2\rho)}{(1-\rho)^2} + \frac{\rho(1-\rho)^3}{(1-\rho)^2} \\ &= \frac{2\rho^3 - 2\rho^4 + \rho^4 + 3\rho^2 - 2\rho^3 - 3\rho^3 + 2\rho^4 + \rho + 3\rho^3 - 3\rho^2 - \rho^4}{(1-\rho)^2} \\ &= \frac{\rho}{(1-\rho)^2},\end{aligned}$$

mint láttuk korábban.

Végül

$$\begin{aligned}\mathbb{D}^2(Q) &= \frac{\lambda^3 \mathbb{E}(S^3)}{3(1-\rho)} + \left(\frac{\lambda^2 \mathbb{E}(S^2)}{2(1-\rho)}\right)^2 + \frac{\lambda^2 \mathbb{E}(S^2)}{2(1-\rho)} \\ &= \frac{\lambda^3 \frac{3!}{\mu^3}}{3(1-\rho)} + \left(\frac{\lambda^2 \frac{2}{\mu^2}}{2(1-\rho)}\right)^2 + \frac{\lambda^2 \frac{2}{\mu^2}}{2(1-\rho)} \\ &= \frac{2\rho^3}{1-\rho} + \frac{\rho^4}{(1-\rho)^2} + \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{2(1-\rho)\rho^3 + \rho^4 + \rho^2(1-\rho)}{(1-\rho)^2} \\ &= \frac{2\rho^3 - 2\rho^4 + \rho^4 + \rho^2 - \rho^3}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho^3 - \rho^4 + \rho^2}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho^2(1+\rho-\rho^2)}{(1-\rho)^2}.\end{aligned}$$

Ezekre az ellenőrzésekre azért van szükség, hogy kiderüljön egyszerű esetekben a bonyolult formulák egyszerű eredményt adnak-e.

■

18. Feladat. A

$$G_N(z) = L_S(\lambda - \lambda z)(1 - \rho) \frac{1 - z}{L_S(\lambda - \lambda z) - z}$$

transzformált egyenlet alapján határozzuk meg $\bar{N}$ -t!

Megoldás:

Jól ismert, hogy $\bar{N} = G'_N(1)$, ezért ki kell számolnunk a jobb oldal deriváltját, amiben az $\frac{1-z}{L_S(\lambda-\lambda z)-z}$ tényező $z = 1$ helyen határozatlan értéket ad, ezért alkalmazni fogjuk a L'Hospital-szabályt. Vezessük be az

$$f(z) = \frac{L_S(\lambda - \lambda z) - z}{1 - z}$$

függvényt!

Így látható, hogy

$$L_N(z) = (1 - \rho) \frac{L_S(\lambda - \lambda z)}{f(z)}.$$

Az

$$L_S(\lambda - \lambda z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \mathbb{E}(S^k)}{k!} (\lambda - \lambda z)^k$$

sorfejtést felhasználva, vegyük észre, hogy

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \mathbb{E}(S^k)}{k!} (\lambda - \lambda z)^k - z}{1 - z} \\ &= 1 - \lambda \mathbb{E}(S) + \lambda^2 \frac{\mathbb{E}(S^2)(1 - z)}{2} + \dots \end{aligned}$$

Így $f(1) = 1 - \rho$ és $f'(1) = -\frac{\lambda^2 \mathbb{E}(S^2)}{2}$.

Ezek után

$$L'_N(z) = \frac{(1 - \rho)f(z)L'_S(\lambda - \lambda z)(-\lambda) - L_S(\lambda - \lambda z) \cdot f'(z)}{(f(z))^2}$$

és ebből

$$\begin{aligned} \bar{N} = G'_N(1) &= \frac{(1 - \rho)f(1)\lambda \mathbb{E}(S) + \frac{\lambda^2 \mathbb{E}(S^2)}{2}}{(1 - \rho)^2} \\ &= \frac{(1 - \rho) \left((1 - \rho)\rho + \frac{\lambda^2 \mathbb{E}(S^2)}{2} \right)}{(1 - \rho)^2} \\ &= \rho + \frac{\lambda^2 \mathbb{E}(S^2)}{2(1 - \rho)} = \rho + \frac{\rho^2}{1 - \rho} \cdot \frac{1 + C_S^2}{2}, \end{aligned}$$

amit más úton már megkaptunk.

■

19. Feladat. Az $L_W(s) = \frac{s(1-\rho)}{s-\lambda+\lambda L_S(s)}$ segítségével határozzuk meg $\mathbb{D}^2(W)$ -t!

Megoldás:

Legyen

$$f(s) = \frac{s - \lambda + \lambda L_S(s)}{s},$$

ami sorba fejtvé tovább egyenlő

$$\begin{aligned} 1 - \frac{\lambda}{s} + \frac{\lambda}{s} L_S(s) &= 1 - \frac{\lambda}{s} + \frac{\lambda}{s} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{\mathbb{E}(S^i)}{i!} s^i \\ &= 1 - \lambda \mathbb{E}(S) + \frac{\lambda \mathbb{E}(S^2)}{2} s - \frac{\lambda \mathbb{E}(S^3)}{3!} s^2 + \dots \end{aligned}$$

Ezért

$$\begin{aligned} f'(s) &= \frac{\lambda \mathbb{E}(S^2)}{2} - \frac{2\lambda \mathbb{E}(S^3)}{3!} s + \frac{3\lambda \mathbb{E}(S^4)}{4!} s^2 + \dots, \\ f^{(2)}(s) &= -\frac{2\lambda \mathbb{E}(S^3)}{3!} + \frac{3 \cdot 2\lambda \mathbb{E}(S^4)}{4!} s + \dots \end{aligned}$$

Ebből

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 - \rho, \\ f'(0) &= \frac{\lambda \mathbb{E}(S^2)}{2}, \\ f''(0) &= -\frac{\lambda \mathbb{E}(S^3)}{3}. \end{aligned}$$

Ezek után látható, hogy

$$L_W(s) = \frac{1 - \rho}{f(s)}$$

miatt

$$\begin{aligned} L'_W(s) &= -(1 - \rho) \frac{f'(s)}{(f(s))^2}, \\ L''_W(s) &= -(1 - \rho) \frac{f''(s)(f(s))^2 - 2f(s)(f'(s))^2}{(f(s))^4}. \end{aligned}$$

Ebből

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(W) &= -L'_W(0) = (1 - \rho) \frac{f'(0)}{(f(0))^2} = \frac{(1 - \rho) \frac{\lambda \mathbb{E}(S^2)}{2}}{(1 - \rho)^2} \\ &= \frac{\lambda \mathbb{E}(S^2)}{2(1 - \rho)} = \frac{\rho \mathbb{E}(S)}{1 - \rho} \cdot \frac{1 + C_S^2}{2}, \end{aligned}$$

hasonlóan

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(W^2) &= L_W''(0) = -(1-\rho) \frac{f''(0)(f(0))^2 - 2f(0)(f'(0))^2}{(f(0))^4} \\ &= -\frac{(1-\rho)(1-\rho)^2 \left(-\frac{\lambda \mathbb{E}(S^3)}{3}\right) - 2(1-\rho) \left(\frac{\lambda \mathbb{E}(S^2)}{2}\right)^2}{(1-\rho)^4} \\ &= 2(\mathbb{E}(W))^2 + \frac{\lambda \mathbb{E}(S^3)}{3(1-\rho)}.\end{aligned}$$

Ebből

$$\begin{aligned}\mathbb{D}^2(W) &= \mathbb{E}(W^2) - (\mathbb{E}(W))^2 \\ &= 2(\mathbb{E}(W))^2 + \frac{\lambda \mathbb{E}(S^3)}{3(1-\rho)} - (\mathbb{E}(W))^2 \\ &= (\mathbb{E}(W))^2 + \frac{\lambda \mathbb{E}(S^3)}{3(1-\rho)}.\end{aligned}$$

Ezek után

$$\mathbb{D}^2(T) = \mathbb{D}^2(W + S) = \mathbb{D}^2(W) + \mathbb{D}^2(S).$$

■

20. Feladat. *A Laplace-transzformált segítségével mutassuk meg, hogy*

$$\mathbb{E}(R^k) = \frac{\mathbb{E}(S^{k+1})}{(k+1)\mathbb{E}(S)} \quad !$$

Megoldás:

Mint már láttuk

$$L_R(s) = \frac{1 - L_S(s)}{s\mathbb{E}(S)},$$

és az is közismert, hogy

$$\begin{aligned}L_S(s) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{L_S^{(i)}(0)}{i!} s^i \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i \mathbb{E}(S^i)}{i!} s^i.\end{aligned}$$

Hasonlóan $L_R(s)$ -re, kapjuk

$$L_R(s) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \mathbb{E}(R^k) s^k.$$

Ezért

$$\begin{aligned}
 L_R(s) &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \mathbb{E}(R^k) s^k = \frac{1 - L_S(s)}{s \mathbb{E}(S)} \\
 &= \frac{1 - \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \mathbb{E}(S^k) s^k \right)}{s \mathbb{E}(S)} \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \mathbb{E}(S^{k+1})}{(k+1)! \mathbb{E}(S)} \cdot s^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\mathbb{E}(S^{k+1})}{(k+1) \mathbb{E}(S)} s^k.
 \end{aligned}$$

Ebből

$$\mathbb{E}(R^k) = \frac{\mathbb{E}(S^{k+1})}{(k+1) \mathbb{E}(S)}, \quad k = 1, 2, \dots$$

■

21. Feladat. *Határozzuk meg egy kiszolgálási idő alatt érkező igények számának az eloszlását $M/G/1$ esetén!*

Megoldás:

A teljes valószínűség tétele alapján

$$P(\nu_A(S) = k) = \int_0^{\infty} \frac{(\lambda x)^k}{k!} e^{-\lambda x} f_S(x) dx.$$

Generátorfüggvénye

$$\begin{aligned}
 G_{\nu_A(S)}(z) &= z^k \int_0^{\infty} \frac{(\lambda x)^k}{k!} e^{-\lambda x} f_S(x) dx = \int_0^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z\lambda x)^k}{k!} e^{-\lambda x} f_S(x) dx \\
 &= \int_0^{\infty} e^{z\lambda x} e^{-\lambda x} f_S(x) dx = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x(1-z)} f_S(x) dx = L_S(\lambda(1-z)).
 \end{aligned}$$

■

5. fejezet

Véges-forrású rendszerek

22. Feladat. Ha $P(k, \lambda) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ és $Q(k, \lambda) = \sum_{i=0}^k \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}$, akkor bizonyítsuk be a következő fontos összefüggést!

$$\sum_{j=0}^k P(k-j, a_1) Q(j, a_2) = Q(k, a_1 + a_2).$$

Megoldás: Jól ismert, hogy

$$Q(n, a) = \int_a^\infty P(n, y) dy,$$

ezért

$$\sum_{j=0}^k P(k-j, a_1) Q(j, a_2) = \sum_{j=0}^k \frac{a_1^{k-j}}{(k-j)!} e^{-a_1} \sum_{i=0}^j \frac{a_2^i}{i!} e^{-a_2}$$

$$\sum_{j=0}^k \frac{a_1^{k-j}}{(k-j)!} e^{-a_1} \int_{a_2}^\infty \frac{y^j}{j!} e^{-y} dy = \int_{a_2}^\infty \frac{(y+a_1)^k}{k!} e^{-(a_1+y)} dy = \int_{a_1+a_2}^\infty \frac{t^k}{k!} e^{-t} dt = Q(k, a_1+a_2),$$

ahol az integrálásnál a $t = y + a_1$ helyettesítést vettük.

■

23. Feladat. A Laplace-transzformált segítségével az $M/M/1/n/n$ rendszernél határozzuk meg a tartózkodási idő várható értékét!

Megoldás: Jól ismert, hogy $\bar{T} = -L'_T(0)$, ezért kiszámíthatjuk $L'_T(0)$ -t.

$$\begin{aligned} L'_T(s) &= \left[\left(\frac{\mu}{\mu+s} \right)^n e^{\frac{s}{\lambda}} \frac{Q\left(n-1, \frac{\mu+s}{\lambda}\right)}{Q\left(n-1, \frac{\mu}{\lambda}\right)} \right]' \\ &= \left(\left(\frac{\mu}{\mu+s} \right)^n e^{\frac{s}{\lambda}} \right)' \cdot \frac{Q\left(n-1, \frac{\mu+s}{\lambda}\right)}{Q\left(n-1, \frac{\mu}{\lambda}\right)} + \left(\frac{\mu}{\mu+s} \right)^n e^{\frac{s}{\lambda}} \cdot \frac{\left(Q\left(n-1, \frac{\mu+s}{\lambda}\right) \right)'}{Q\left(n-1, \frac{\mu}{\lambda}\right)}. \end{aligned}$$

Így

$$L'_T(o) = -\frac{n}{\mu} + \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} B\left(n-1, \frac{\mu}{\lambda}\right) = -\frac{n}{\mu} + \frac{1}{\lambda} U_S(n-1),$$

ebből

$$\bar{T}(n) = \frac{n}{\mu} - \frac{U_S(n-1)}{\lambda}.$$

Mivel

$$\begin{aligned} \bar{T}(n) &= \frac{1}{\mu} (\bar{N}(n-1) + 1) \\ &= \frac{1}{\mu} \left(n-1 - \frac{U_S(n-1)}{\rho} + 1 \right) \\ &= \frac{n}{\mu} - \frac{U_S(n-1)}{\lambda}, \end{aligned}$$

így ugyanazt az eredményt kaptuk. A $T(n)$ magasabb momentumait is ki tudjuk számítani és további jellemzők adhatók meg.

Analóg módon $W(n)$ momentumai is meghatározhatók.

■

24. Feladat. A sűrűségfüggvény segítségével az $M/M/1/n/n$ rendszernél határozzuk meg a tartózkodási idő várható értékét, vagyis $\bar{T}$ -t!

Megoldás:

$$\begin{aligned} z &\doteq \frac{\mu}{\lambda} \\ \bar{T} &= \frac{1}{Q(n-1, z)} \int_0^\infty x \mu \frac{(\mu x + z)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-(\mu x + z)} dx \\ &= \frac{e^{-z}}{Q(n-1, z)} \int_0^\infty x \mu \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\mu x)^k}{k!} \frac{z^{n-1-k}}{(n-1-k)!} e^{-\mu x} dx \\ &= \frac{e^{-z}}{Q(n-1, z)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{z^{n-1-k}}{(n-1-k)!} \int_0^\infty x \mu \frac{(\mu x)^k}{k!} e^{-\mu x} dx \\ &= \frac{e^{-z}}{Q(n-1, z)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{z^{n-1-k}}{(n-1-k)!} \cdot \frac{k+1}{\mu} \\ &= \frac{1}{\mu} \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \frac{\frac{z^{n-1-k}}{(n-1-k)!} \cdot e^{-z}}{Q(n-1, z)} \\ &= \frac{1}{\mu} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{\mu} P_k(n-1) = \frac{1}{\mu} (\bar{N}(n-1) + 1). \end{aligned}$$

Teljesen hasonló módon határozható meg a várakozási idő átlaga, csak az a különbség, hogy a fellépő Erlang eloszlásnál 1-el kisebb fázist veszünk és az összegzés 1-től indul.

■

25. Feladat. Határozzuk meg az $M/M/1/n/n$ rendszernél a $\mathbb{D}^2(N)$ -t!

Megoldás: Jelöljük F -el a forrásban tartózkodó igények számát. Így $F + N = n$, ezért $\mathbb{D}^2(N) = \mathbb{D}^2(F)$.

Tudjuk azonban, hogy F eloszlása a $z = \frac{1}{\rho}$ forgalmi intenzitású $M/M/n/n$ rendszer eloszlásával egyezik meg. Ezért az ott kapott képlet alapján

$$\begin{aligned}\mathbb{D}^2(N) &= \frac{1}{\rho} \left(1 - B \left(n, \frac{1}{\rho} \right) \right) - \frac{1}{\rho} B \left(n, \frac{1}{\rho} \right) \left(n - \frac{1}{\rho} \left(1 - B \left(n, \frac{1}{\rho} \right) \right) \right) \\ &= \frac{U_S}{\rho} - \frac{1 - U_S}{\rho} \left(n - \frac{U_S}{\rho} \right).\end{aligned}$$

Ha a forrásszámot is jelölni szeretnénk, akkor

$$\mathbb{D}^2(N(n)) = \frac{U_s(n)}{\rho} - \frac{1 - U_s(n)}{\rho} \left(n - \frac{U_s(n)}{\rho} \right).$$

Ez lehetőséget ad arra, hogy meghatározzuk $\mathbb{D}^2(T(n))$ -t és $\mathbb{D}^2(W(n))$ -t. Mivel $W(n)$ tekinthető egy véletlen tagszámú összegnek, ahol az összeadandók a μ paraméterű exponenciális eloszlású kiszolgálási idők, a számláló folyamat pedig az érkezési pillanatban a rendszerben tartózkodó igények száma, melyet $N_A^{(n)}$ -nel jelölünk, ezért

$$\begin{aligned}\mathbb{D}^2(W(n)) &= \mathbb{E}(N_A^{(n)}) \cdot \frac{1}{\mu^2} + \frac{1}{\mu^2} \mathbb{D}^2(N_A^{(n)}) \\ &= \bar{N}(n-1) \cdot \frac{1}{\mu^2} + \frac{1}{\mu^2} \mathbb{D}^2(N(n-1)) \\ &= \frac{1}{\mu^2} (\bar{N}(n-1) + \mathbb{D}^2(N(n-1))),\end{aligned}$$

ahol

$$\begin{aligned}\bar{N}(n-1) &= n-1 - \frac{U_s(n-1)}{\rho} \\ \mathbb{D}^2(N(n-1)) &= \frac{U_s(n-1)}{\rho} - \frac{1 - U_s(n-1)}{\rho} \left(n-1 - \frac{U_s(n-1)}{\rho} \right).\end{aligned}$$

Hasonló módon, mivel $T(n) = W(n) + S$, így

$$\mathbb{D}^2(T(n)) = \mathbb{D}^2(W(n)) + \frac{1}{\mu^2}.$$

■

Irodalomjegyzék

- [1] ADAN, I., AND RESING, J. *Queueing Theory*.
<http://web2.uwindsor.ca/math/hlynka/qonline.html>.
- [2] ALLEN, A. O. *Probability, statistics, and queueing theory with computer science applications, 2nd ed.* Academic Press, Inc., Boston, MA, 1990.
- [3] ANISIMOV, V., ZAKUSILO, O., AND DONCHENKO, V. *Elements of queueing theory and asymptotic analysis of systems*. Visha Skola, Kiev, 1987.
- [4] ARTALEJO, J., AND GÓMEZ-CORRAL, A. *Retrial queueing systems*. Springer, Berlin, 2008.
- [5] ASZTALOS, D. Véges forrású tömegkiszolgálási modellek alkalmazása számítógépes rendszerekre. *Alkalmazott Matematika Lapok* (1979), 89–101.
- [6] BEGAIN, K., BOLCH, G., AND HEROLD, H. *Practical performance modeling, Application of the MOSEL language*. Wiley & Sons, New York, 2001.
- [7] BOLCH, G., GREINER, S., DE MEER, H., AND TRIVEDI, K. *Queueing networks and Markov chains, 2nd ed.* Wiley & Sons, New York, 2006.
- [8] BOSE, S. *An introduction to queueing systems*. Kluwer Academic/Plenum Publishers, New York, 2002.
- [9] CHEE-HOCK, N., AND BOON-HE, S. *Queueing modelling fundamentals, 2nd ed.* Wiley & Son, Chichester, 2002.
- [10] COOPER, R. *Introduction to Queueing Theory, 3-rd Edition*. CEE Press, Washington, 1990.
<http://web2.uwindsor.ca/math/hlynka/qonline.html>.
- [11] CSIGE, L., AND TOMKÓ, J. A gépkiszolgálási probléma exponenciális eloszlások esetén. *Alkalmazott Matematikai Lapok* (1982), 107–124.
- [12] DAIGLE, J. *Queueing theory with applications to packet telecommunication*. Springer, New York, 2005.
- [13] DAIGLE, J. N. *Queueing theory for telecommunications*. Addison-Wesley, Reading, MA, 1992.

- [14] DATTATREYA, G. *Performance analysis of queuing and computer networks*. CRC Press, Boca Raton, 2008.
- [15] DSHALALOW, J. H. *Frontiers in queueing : Models and applications in science and engineering*. CRC Press., Boca Raton, 1997.
- [16] FALIN, G., AND TEMPLETON, J. *Retrial queues*. Chapman and Hall, London, 1997.
- [17] FAZEKAS, I. *Valószínűesszámitás*. Kossuth Egyetemi Kiadó, Debrecen, 2000.
- [18] FRANKEN, P., KONIG, D., AND ARNDT, U. SCHMIDT, V. *Queues and point processes*. Academic Verlag, Berlin, 1981.
- [19] GEBALI, F. *Analysis of computer and communication networks*. Springer, New York, 2008.
- [20] GELENBE, E., AND MITRANI, I. *Analysis and synthesis of computer systems*. Academic Press, London, 1980.
- [21] GELENBE, E., AND PUJOLLE, G. *Introduction to queueing networks*. Wiley & Sons, Chichester, 1987.
- [22] GNEDENKO, B., BELYAYEV, Y., AND SOLOVYEV, A. *Mathematical methods of reliability theory*. Academic Press, New York, London, 1969.
- [23] GNEDENKO, B., AND KOVALENKO, I. *Introduction to queueing theory*. Birkhaeuser, Boston, MA, 1991.
- [24] GNYEGYENKO, B., AND BELJAJEV, J.K.AND SZOLOVJEV, A. *A megbízhatóságelmélet matematikai módszerei*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1970.
- [25] GROSS, D., SHORTLE, J., THOMPSON, J., AND HARRIS, C. *Fundamentals of queueing theory, 4th edition*. John Wiley & Sons, New York, 2008.
- [26] GYÖRFI, L., AND PÁLI, I. *Tömegkiszolgálás informatikai rendszerekben*. Műegyetemi Kiadó, Budapest, 1996.
- [27] HAGHIGHI, A., AND MISHEV, D. *Queueing models in industry and business*. Nova Science Publishers, Inc., New York, 2008.
- [28] HALL, R. W. *Queueing methods for services and manufacturing*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1991.
- [29] HARIBASKARAN, G. *Probability, queueing theory and reliability engineering*. Laxmi Publications, Bangalore, 2006.
- [30] HAVERKORT, B. *Performance of computer communication systems: A model-based approach*. Wiley & Sons, New York, 1998.
- [31] HLYNKA, M. *Queueing Theory Page*.
<http://web2.uwindsor.ca/math/hlynka/queue.html>.

- [32] IVCSSENKO, G., KASTANOV, V., AND KOVALENKO, I. *Theory of queueing systems*. Nauka, Moscow, 1982.
- [33] JAIN, R. *The art of computer systems performance analysis*. Wiley & Sons, New York, 1991.
- [34] JAISWAL, N. *Priority queues*. Academic Press, New York, 1969.
- [35] JEREB, L., AND TELEK, M. Sorbanállásos rendszerek. Oktatási segédlet, BME Híradástechnikai Tanszék.
<http://webspn.hit.bme.hu/~telek/notes/sokfelh.pdf>.
- [36] KARLIN, S., AND TAYLOR, H. *Sztochasztikus folyamatok*. Gondolat Kiadó, Budapest, 1985.
- [37] KHINTCHINE, A. *Mathematical methods in the theory of queueing*. Hafner, New York, 1969.
- [38] KLEINROCK, L. *Queueing systems. Vol. I. Theory*. John Wiley & Sons, New York, 1975.
- [39] KLEINROCK, L. *Sorbanállás, kiszolgálás : Bevezetés a tömegkiszolgálási rendszerek elméletébe*. Műszaki Kiadó, Budapest, 1975.
- [40] KLEINROCK, L. *Queueing systems. Vol. II: Computer applications*. John Wiley & Sons, New York, 1976.
- [41] KOBAYASHI, H. *Modeling and Analysis: An Introduction to System Performance Evaluation Methodology*. Addison-Wesley, Reading, MA, 1978.
- [42] KOBAYASHI, H., AND MARK, B. *System modeling and analysis: Foundations of system performance evaluation*. Pearson Education Inc., Upper Saddle River, 2008.
- [43] KOROLYUK, V., AND KOROLYUK, V. *Stochastic models of systems*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, London, 1999.
- [44] KOVALENKO, I., PEGG, P., AND KUZNETZOV, N. *Mathematical theory of reliability of time dependent systems with practical applications*. Wiley & Sons, New York, 1997.
- [45] KULKARNI, V. *Modeling, analysis, design, and control of stochastic systems*. Springer, New York, 1999.
- [46] LAKATOS, L., SZEIDL, L., AND TELEK, M. *Informatikai algoritmusok II*. ELTE Eötvös Kiadó, 2005, ch. Tömegkiszolgálás, pp. 1298–1347.
- [47] LAVENBERG, S., E. *Computer performance modeling handbook*. Academic Press, New York, 1983.
- [48] MIEGHEM, P. *Performance analysis of communications networks and systems*. Cambridge University Press, Cambridge, 2006.

- [49] NELSON, R. *Probability, stochastic processes, and queueing theory, The mathematics of computer performance modeling*. Springer-Verlag, New York, 1995.
- [50] OVCHAROV, L., AND WENTZEL, E. *Applied Problems in Probability Theory*. Mir Publishers, Moscow, 1986.
- [51] PRÉKOPA, A. *Valószínűségelmélet*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1962.
- [52] PÓSAFALVI, A., AND SZTRIK, J. On the heterogeneous machine interference with limited server's availability. *European Journal of Operational Research* 28 (1987), 321–328.
- [53] PÓSAFALVI, A., AND SZTRIK, J. A numerical approach to the repairman problem with two different types of machines. *Journal of Operational Research Society* 40 (1989), 797–803.
- [54] RAVICHANDRAN, N. *Stochastic Methods in Reliability Theory*. John Wiley and Sons, 1990.
- [55] REIMANN, J. *Valószínűségelmélet és matematikai statisztika mérnököknek*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1992.
- [56] RÉNYI, A. *Valószínűségszámítás*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1973.
- [57] ROSS, S. M. *Introduction to Probability Models*. Academic Press, Boston, 1989.
- [58] SAATY, T. *Elements of queueing theory with applications*. Dover Publications, Inc., New York, 1961.
- [59] SAHNER, R., TRIVEDI, K., AND PULIAFITO, A. *Performance and reliability analysis of computer systems – An example-based approach using the SHARPE software package*. Kluwer Academic Publisher, Boston, M.A., 1996.
- [60] SAUER, C., AND CHANDY, K. *Computer systems performance modelling*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1981.
- [61] STEWART, W. *Introduction to the numerical solution of Markov chains*. Princeton University Press, Princeton, 1995.
- [62] STEWART, W. *Probability, Markov chains, queues, and simulation*. Princeton University Press, Princeton, 2009.
- [63] SZTRIK, J. On the finite-source $\vec{G}/m/r$ queues. *European Journal of Operational Research* 20 (1985), 261–268.
- [64] SZTRIK, J. On the $\vec{G}/M/r/FIFO$ machine interference model with state-dependent speeds. *Journal of Operational Research Society* 39 (1988), 201–201.
- [65] SZTRIK, J. Some contribution to the machine interference problem with heterogeneous machines. *Journal of Information Processing and Cybernetics* 24 (1988), 137–143.

- [66] SZTRIK, J. *Bevezetés a sorbanállási elméletbe és alkalmazásaiba*. Kossuth Egyetemi Kiadó, Debrecen, 2000.
<http://irh.inf.unideb.hu/user/jsztrik/education/eNotes.htm>.
- [67] SZTRIK, J. *Kulcs a sorbanállási elmülethez és alkalmazásaihoz*. Kossuth Egyetemi Kiadó, Debrecen, 2004.
<http://irh.inf.unideb.hu/user/jsztrik/education/eNotes.htm>.
- [68] SZTRIK, J. Gyakorlati sorbanállási elmélet. Oktatási segédlet, Debreceni Egyetem, Informatikai Kar, 2005.
<http://irh.inf.unideb.hu/user/jsztrik/education/09/index.html>.
- [69] SZTRIK, J. *Informatikai rendszerek hatékonyságának elemzése*. EKF Líceum Kiadó, Eger, 2007.
- [70] TAKAGI, H. *Queueing analysis. A foundation of performance evaluation. Volume 1: Vacation and priority systems, part 1*. North-Holland, Amsterdam, 1991.
- [71] TAKAGI, H. *Queueing analysis. A foundation of performance evaluation. Volume 2: Finite Systems*. North-Holland, Amsterdam, 1993.
- [72] TAKAGI, H. *Queueing analysis. A foundation of performance evaluation. Volume 3: Discrete-Time Systems*. North-Holland, Amsterdam, 1993.
- [73] TAKÁCS, L. *Introduction to the theory of queues*. Oxford University Press, New York, 1962.
- [74] TIJMS, H. *Stochastic Modelling and Analysis: A Computational Approach*. Wiley & Sons, New York, 1986.
- [75] TIJMS, H. *A first course in stochastic models*. Wiley & Son, Chichester, 2003.
- [76] TOMKÓ, J. Tartózkodási időproblémák Markov-láncokra. *Alkalmazott Matematikai Lapok* (1982), 91–106.
- [77] TRIVEDI, K. *Probability and Statistics with Reliability, Queuing, and Computer Science Applications, 2-nd edition*. Wiley & Son, New York, 2002.
- [78] USHAKOV, I. A., AND HARRISON, R. A. *Handbook of reliability engineering. Transl. from the Russian. Updated ed.* John Wiley & Sons, New York, NY, 1994.
- [79] VAN HOORN, M. *Algorithms and approximations for queueing systems*. Centrum voor Wiskunde en Informatica, Amsterdam, 1984.
- [80] VIRTAMO, J. *Queueing Theory*.
<http://www.netlab.tkk.fi/opetus/s383143/kalvot/english.shtml> .
- [81] WENTZEL, E., AND OVCHAROV, L. *Applied problems in probabbility theory*. Mir Publisher, Moscow, 1986.
- [82] YASHKOV, S. Processor-sharing queues: some progress in analysis. *Queueing Systems: Theory and Applications 2* (1987), 1–17.