Név, Neptunkód:……………………………………………

Diszkrét matematika 2.
2014. május 26.

1. Határozza meg az $\underline{x}(2,1,-3)$ és $\underline{y}(-2,0,1)$ vektorok esetén a következőket:
   - a vektorok normáját — 2 pont
   - az általuk bezárt szöget — 3 pont
   - a távolságukat! — 2 pont

2. Határozza meg az $\underline{x}(2,3)$ vektor y(−2,2) irányába eső merőleges vetületét! — 3 pont

3. Merőlegesek-e az $\underline{x}(2,1,-3)$ és $\underline{y}(-2,5,1)$ vektorok? — 2 pont

4. Adja meg az alábbi lineáris leképezés mátrixát! — 2 pont
   $\varphi_2 : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2,\ \varphi_1(x_1,\ x_2,\ x_3) = (x_1 - x_2,\ \ 4x_1 + 2x_2 - 5x_3)$
   Határozza meg az $\underline{x}$(2,3,-4) vektor képét! — 2 pont
   Határozza meg azokat az $\mathbf{R}^3$-beli vektorokat, amelyek képe az $\mathbf{R}^2$-beli zérusvektor! (Magtér meghatározása) — 6 pont

5. Oldja meg az alábbi lineáris egyenletrendszert! — 5 pont

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 8 \\ 2x_1 + 6x_2 + 11x_3 &= 23 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 5 \end{aligned}$$

6. Határozza meg az alábbi mátrixszal adott lineáris transzformáció sajátértékeit, és sajátvektorait! — 6 pont

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

7. Határozza meg a következő mátrix inverzét! — 7 pont

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 11 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1) $\|\underline{x}\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-3)^2} = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14}$

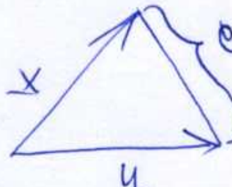
$\|\underline{y}\| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{4+0+1} = \sqrt{5}$

$(\underline{x},\underline{y}) = 2\cdot(-2) + 1\cdot 0 + (-3)\cdot 1 = (-4)+0+(-3) = -7.$ (A vektor-koordinátákból számolva)

$(\underline{x},\underline{y}) = \|\underline{x}\|\cdot\|\underline{y}\|\cdot\cos\alpha \quad \Rightarrow$

$$\cos\alpha = \frac{(\underline{x},\underline{y})}{\|\underline{x}\|\|\underline{y}\|} = \frac{-7}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{5}} =$$

vektorok távolsága:



ez a távolság (a vektorokat közös kezdőpontból indítva a végpontok táv.)

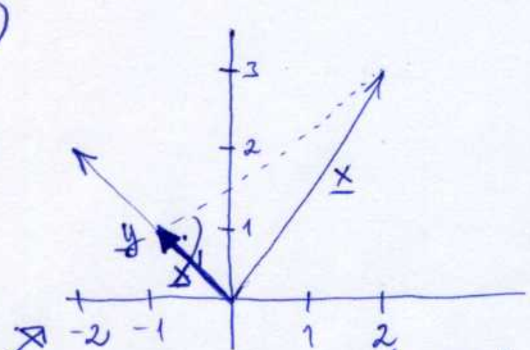
$d(\underline{x},\underline{y}) = \|\underline{x}-\underline{y}\|$

$\underline{x}-\underline{y} = (2-(-2);\ 1-0;\ -3-1) =$

$= (-4;\ 1;\ -4)$

$\|\underline{x}-\underline{y}\| = \sqrt{(-4)^2 + 1^2 + (-4)^2} = \sqrt{16+1+16} = \sqrt{33}$

2)



(A rajz csak vázlat, $\underline{x}'$ nem teljesen jó!)

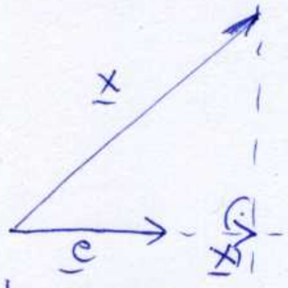
Az irányt célszerű egységvektorral megadni:

$\underline{y} \to \underline{e} \qquad \underline{e} = \frac{\underline{y}}{\|\underline{y}\|}$

$\|\underline{y}\| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$

$\underline{e} = \frac{1}{\sqrt{8}}(-2;\ 2) = \frac{1}{2\cdot\sqrt{2}}(-2;\ 2) =$

$= \left(\frac{-\cancel{2}^{\,1}}{\cancel{2}_{\,1}\cdot\sqrt{2}};\ \frac{\cancel{2}^{\,1}}{\cancel{2}_{\,1}\sqrt{2}}\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$



$\underline{x}' = (\underline{x},\underline{e})\cdot\underline{e}$

$(\underline{x},\underline{e}) = \left(2\cdot\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) + \left(3\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{-2+3}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\underline{x}' = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}};\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{-1}{2};\ \frac{1}{2}\right)$

3) $\underline{x}, \underline{y}$ merőlegesek $\Leftrightarrow (\underline{x}, \underline{y}) = 0$.

$(\underline{x}, \underline{y}) = 2\cdot(-2) + 1\cdot 5 + (-3)\cdot 1 = -4 + 5 - 3 = -7 + 5 = -2$

$(\underline{x}, \underline{y}) \neq 0 \Rightarrow$ nem merőlegesek.

4) A mátrix 2×3-as:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix}, \quad \varphi(\underline{x}) = \begin{pmatrix} & A & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

<u>vektor képe</u>

$$\varphi(\underline{x}) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}}_{\text{mátrixok szorzása}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 34 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow 1\cdot 2 + (-1)3 + 0\cdot(-4) = -1 \\ \leftarrow 4\cdot 2 + 2\cdot 3 + (-5)(-4) = 34 \end{matrix}$$

vagy $\varphi(\underline{x}) = (\underset{\substack{\uparrow \\ 2}}{x_1} - \underset{\substack{\uparrow \\ 3}}{x_2}\, ;\ 4\underset{\substack{\uparrow \\ 2}}{x_1} + 2\underset{\substack{\uparrow \\ 3}}{x_2} - 5\underset{\substack{\uparrow \\ (-4)}}{x_3})$ - ba helyettesítve

<u>Miből kapjuk az $\mathbb{R}^2$-beli zérusvektort?</u>

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Egy homogén lineáris egyenletrendszert kell megoldani.

A homogén lineáris egyenletrendszer alapmátrixa azonos a leképezés mátrixával.
Mivel az alapmátrix 2×3-as típusú csak az eliminációs módszert alkalmazhatjuk.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & -5 \end{pmatrix}$$

Az eredetivel ekvivalens egyenletrendszer:

$$\left.\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 0 \\ 6x_2 - 5x_3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

2 független egyenlet, 3 ismeretlen
$\Rightarrow$ 1 paraméter

$x_3 = t \quad (t \in \mathbb{R})$

$x_2 = \frac{5x_3}{6} = \frac{5t}{6}$

$x_1 = x_2 = \frac{5t}{6}$

$M = (\frac{5t}{6}; \frac{5t}{6}; t)$ amely egyenértékű azzal, hogy $M = (5t, 5t, 6t)$ $(t \in \mathbb{R})$

Magtér: ez a halmaz $\Rightarrow \ker\varphi = \{(5,5,6)\cdot t \,,\ t \in \mathbb{R}\}$

5) Alapmátrix:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 6 & 11\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\det(A)=6+22+6-18-4-11=1$$

Alkalmazható a Cramer-szabály!

A konstansok az 1. oszlopba kerülnek.

$$d_1=\det\begin{pmatrix}\boxed{8} & 2 & 3\\ \boxed{23} & 6 & 11\\ \boxed{5} & 1 & 1\end{pmatrix}=3$$

A 2. oszlopba kerülnek.

$$d_2=\det\begin{pmatrix}1 & \boxed{8} & 3\\ 2 & \boxed{23} & 11\\ 1 & \boxed{5} & 1\end{pmatrix}=1$$

A 3. oszlopba kerülnek.

$$d_3=\det\begin{pmatrix}1 & 2 & \boxed{8}\\ 2 & 6 & \boxed{23}\\ 1 & 1 & \boxed{5}\end{pmatrix}=1$$

$$x_1=\frac{d_1}{\det A}=\frac{3}{1}=3 \qquad x_2=\frac{d_2}{\det A}=\frac{1}{1}=1 \qquad x_3=\frac{d_3}{\det(A)}=\frac{1}{1}=1$$

$$M=(3;1;1)$$

Megoldás eliminációval: (kibővített mátrix eliminálása)

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 8\\ 2 & 6 & 11 & 23\\ 1 & 1 & 1 & 5\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 8\\ 0 & 2 & 5 & 7\\ 0 & -1 & -2 & -3\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 8\\ 0 & -1 & -2 & -3\\ 0 & 2 & 5 & 7\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 8\\ 0 & -1 & -2 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{array}\right)$$

2.s − 2·(1.s)
3.s − 1.s

3.s + 2·(2.s)

Az eredetivel ekvivalens egyenletrendszer:

$$\left.\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3&=8\\ -x_2-2x_3&=-3\\ \underline{x_3=1}&\end{aligned}\right\}\quad \begin{aligned}&\to \underline{x_1}=8-2x_2-3x_3=8-2-3=\underline{3}\\ &\to \underline{x_2}=3-2x_3=3-2=\underline{1}\end{aligned}$$

$$M=(3;1;1)$$

Természetesen mindkét módszer ugyanazt a megoldást adja!

6.) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

$$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 0-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(-\lambda) - 2\cdot 3 = \underbrace{\lambda^2-\lambda-6=0}_{\text{karakterisztikus egyenlet!}}.$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{1-4\cdot(-6)}}{2} = \frac{1\pm\sqrt{25}}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = \frac{1+5}{2} = 3 \\ \lambda_2 = \frac{1-5}{2} = -2 \end{cases}$$

$\boxed{\lambda_1 = 3}$

A mátrixot módosítjuk:

$$\begin{pmatrix} 1-3 & 2 \\ 3 & 0-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Homogén lin. egyenletrendszer:

$$\left.\begin{array}{l} -2x_1+2x_2=0 \\ \cancel{3x_1+3x_2=0} \end{array}\right\}$$ függő sorok!

Az 1. sor alapján olyan vektorok elégítik ki az egyenletrendszert, melyekre $x_1 = x_2$. pl: $(1,1)$

$$\boxed{S_1 = \{(t,t) \mid t\in\mathbb{R}\}}$$

$\{t(1,1) \mid t\in\mathbb{R}\}$

$\boxed{\lambda_2 = -2}$

$$\begin{pmatrix} 1-(-2) & 2 \\ 3 & 0-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} 3x_1+2x_2=0 \\ \cancel{3x_1+3x_2=0} \end{array}\right\}$$

$3x_1 = -2x_2$ pl: $(2,-3)$

$$\boxed{S_2 = \{t\cdot(2,-3) \mid t\in\mathbb{R}\}}$$

7.) A mátrix invertálható, ha $\det(A) \neq 0$.

$\det(A) = 6+22+6-18-4-11 = 1$, azaz invertálható!

1. Minden elem helyére beírjuk a hozzá tartozó aldetermináns értékét!

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 11 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 6 & 11 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 11 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 11 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -9 & -4 \\ -1 & -2 & -1 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

(2.) Transzponálás: (tükrözés a főátlóra)

$$\begin{pmatrix} -5 & -1 & 4 \\ -9 & -2 & 5 \\ -4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(3.) előjelezés ((+1)/(-1)-gyel való szorzás)

$$\begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} -5 & 1 & 4 \\ 9 & -2 & -5 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = A^{*}$$

(4.) A det(A) értékével való leosztás, de ez most 1, így nem történik semmi.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 4 \\ 9 & -2 & -5 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^{-1} = \frac{A^{*}}{\det(A)}}$$